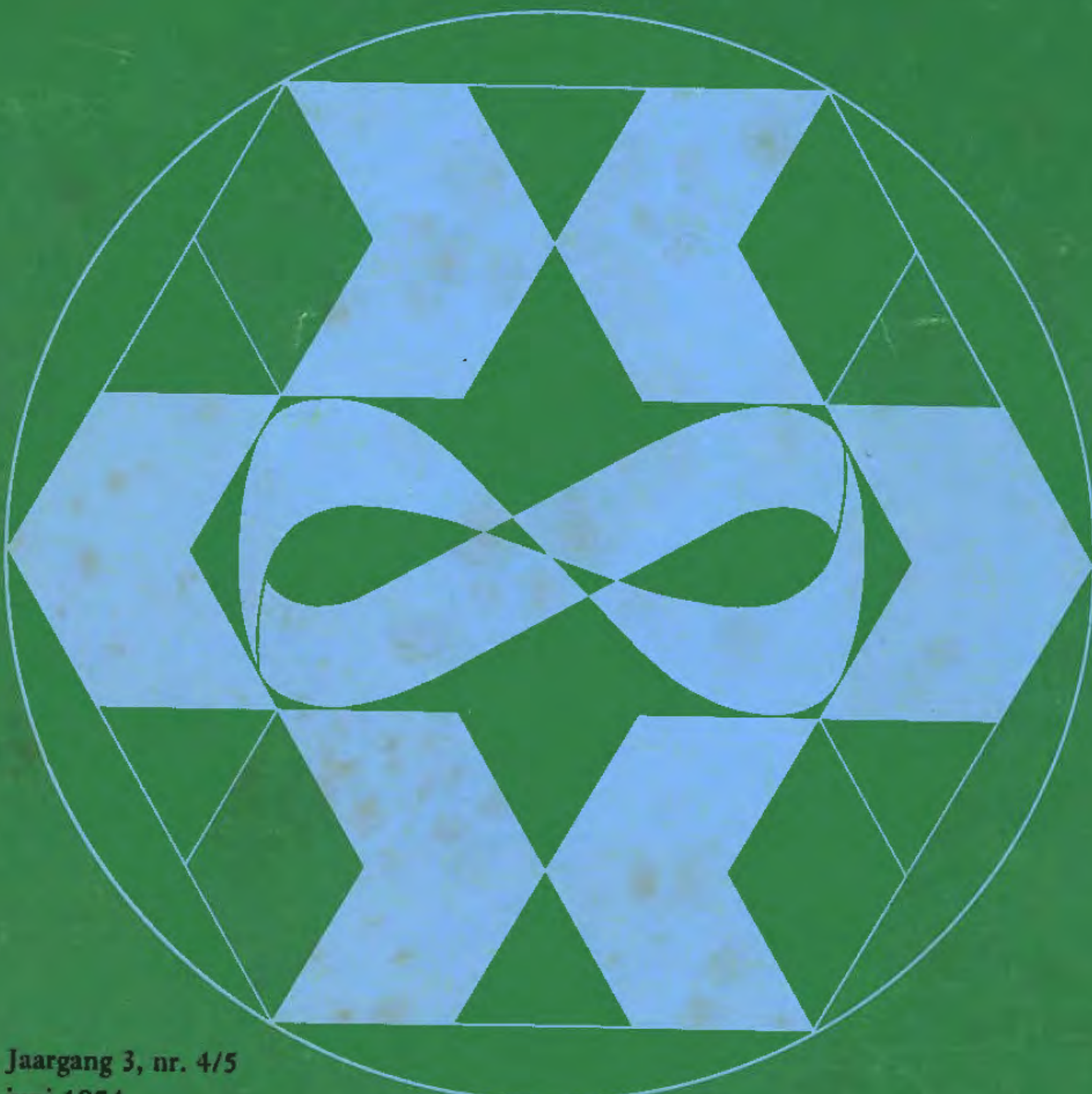
wiskobas bulletin



Jaargang 3, nr. 4/5
juni 1974

Wiskobas-Bulletin

– Bulletin ter begeleiding van het eksperiment 'Wiskunde op de Basisschool'
– Verschijnt gedurende de derde jaargang 6 keer

JAARGANG 3, Nr. 4/5 – JUNI 1974

REDAKTIEADRES:
INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS
Tiberdreef 4, Utrecht.
t.a.v. R.A. de Jong.

ABONNEMENTENADMINISTRATIE:
STICHTING IVIO,
Postbus 37, Lelystad.
Voor aanmeldingen, adreswijzigingen, betalingen, enz.

ABONNEMENTSPRIJS:
Per jaargang *f* 30,–.
Reduktietarief voor studenten P.A. en wiskobas-kursisten *f* 20,–.
Gelieve uitsluitend te betalen met aksept-girokaarten. Deze worden u toegezonden.

INHOUD

Omslag: Hans Gauw
Druk: De Gulden Pers B.V.

vast blok

INHOUD

redaktioneel

HOE STERK IS DE EENZAME FIETSER

ROB DE JONG

'Zekerheden doen verkopen, twijfels zijn goed voor de konkurrent.'

Een waarheid als een koe voor iedere zakenman, al dan niet met het bord van Boudewijn de Groot voor z'n kop.

Eenzaam fietst hij, ploeterend tegen de wind. Welke onderwijzer herkent zich hierin? Ondanks teamvorming, begeleiding, herscholing, ...
Hoe zinvol is het roeien? Tegen de stroom in, met de stroom mee? De een zegt dit, de ander dat. Alles is genuanseerd, heeft voor en tegens. Gisteren is niet vandaag is niet morgen is niet .... Wie heeft gelijk en wat is belangrijk? Iedereen is druk en het gras groeit toch wel en de seizoenen volgen elkaar op en over honderd jaar ....

Maak hem toch weerbaar die eenzame fietser, geef hem zekerheid.
Maar welke dan?
De zekerheid van de slogan, primitief en aantrekkelijk?

De schrik slaat je om 't hart als je kennisneemt van de sloganargumenten, die gebruikt worden om leerboekjes, metoden, vakken, aanpakken, enz. aan te bevelen. Op z'n best vloeien deze beweringen uit een entoesiaste pen, vrijwel nooit zijn ze kontroleerbaar of hardgemaakt via onderzoek. Hoe waar zijn de argumenten? Hoe eerlijk is de auteur? (gelooft hij er zelf in?)

Wilt u slogan-zekerheid met betrekking tot wiskunde-onderwijs?
Enkele voorbeelden uit boekjes, die de laatste jaren verschenen zijn:

> 'Modern wiskunde-onderwijs bevordert de ontwikkeling van het denken, leert akkuraat denken, staalt de geestelijke spieren, is non-diskriminerend, geeft vat op problemen uit de werkelijkheid, komt tegemoet aan het aktiviteitsbeginsel, is maatschappelijk relevant, bevordert groepswerk en inzicht en spontane differentiatie, gaat uit van de spontaneiteit en kreativiteit van het kind, ...'

Natuurlijk, als een leermiddel of boekje gemaakt is, moet het verkocht worden. En om te verkopen heb je argumenten nodig. In het algemeen is de prijs een doorslaggevende faktor ('nergens goedkoper dan bij ons'). Soms speelt ook de kwaliteit een rol. Meestal worden beide argumenten gekoppeld ('wel duurder, maar een stuk lekkerder', 'waar vindt u in deze prijsklasse een gelijkwaardige automobiel?'). Verder kunnen er onduidelijke gronden naar voren gebracht worden: de

G

OED

DWI

SKUN

DEOND

ERWIJSM

AAKTDEEE

NZAMEFIE

TSERHELDE

RZIENDE

'personality', 'jeugdigheid', 'aristokratie', 'speelsheid', 'intelligentie' van het produkt.
De keuze van het argument hangt sterk af van de koperskategorie tot wie men zich richt. Wassenaar koopt op andere gronden dan Crooswijk, tieners zijn ontvankelijk voor andere argumenten dan bejaarden.

Wanneer je onderwijsspullen moet verkopen zou je ook je argumenten moeten laten bepalen door de betreffende ontvangerskategorie. Deze slagzin 'doet' het goed in groep A, in groep B zal een andere slagzin beter aanslaan.

Voor de groep *opleiders* kiezen we: 'we garanderen u, dat uw kinderen met wiskobas straks snor zitten in het voortgezet onderwijs'.

Voor de *kritische onderwijzers:* 'de kracht van wiskobas is nu juist dat kinderen heel kritisch reklame-spots op hun juiste waarde leren beoordelen'.

Voor *organisatie-hobbyisten:* 'wanneer u nivogroepen, heterogene groepen, zelfsturende sistemen wenst, wiskobas fleksibiliseert van binnen uit'.

Voor *ludieken:* 'principieel gaat wiskobas uit van de kinderlijke kreativiteit'.

Voor ....: 'wanneer uw leerlingen taalachterstanden hebben, is wiskobas aangewezen'.

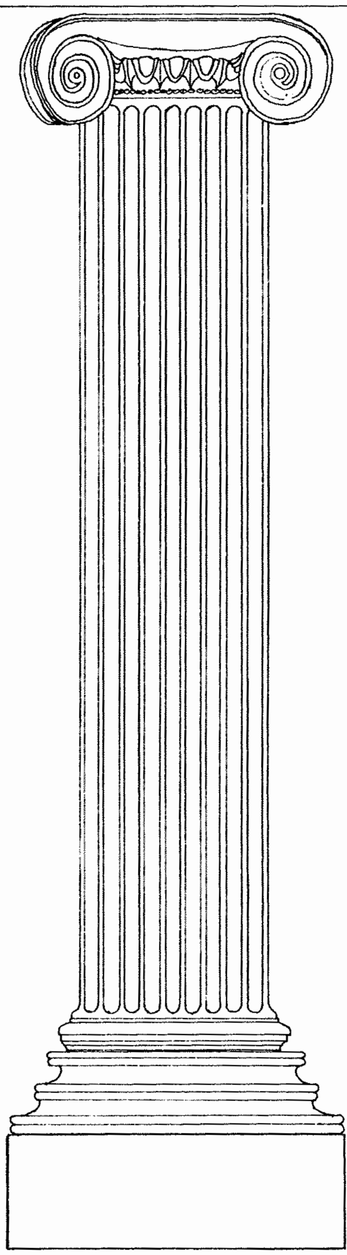
Voor ....: ' 't aardige is dat de leerlingen met wiskobas leren om boodschappen te doen zonder dat ze afgezet worden'.

Wanneer je dit goed uitwerkt op basis van een gedegen typologie van de onderwijzer, kun je in folders en voorlichtingsbijeenkomsten 'passend' voor de dag komen.
Toch stuit dit tegen de borst, hoe waar de argumenten op zich misschien ook zijn. Een dergelijke afstemming doet denken aan een kortzichtige koopmansmentaliteit uit voorbije tijden: met alle mogelijke middelen mensen overhalen tot kopen — of ze later hun koop betreuren is niet interessant.

De vraag doet zich voor of je bij onderwijsspullen überhaupt met slogans moet/mag werken. Moeten de produkten niet voor zich spreken?
De pseudo-zekerheden van de slogans appelleren niet op een zelfstandige oordeelsvorming van de onderwijzer en belemmeren vaak een helder zicht op de spullen.
Geen omhaal van aanprijzende woorden, maar de gebruiker zelf laten oordelen. Dit betekent wel dat de produkten zó doorzichtig moeten zijn dat ze te beoordelen zijn. En als die voorwaarde vervult is duikt direkt de vraag op: *hoe* kom je vervolgens tot een eerlijk oordeel?
De wiskobas-pakketten, die in het variabel blok staan kunnen pas echt beoordeeld worden nadat er mee gewerkt is. Tijdens de les merk je of de kinderen er entoesiast mee bezig zijn, of ze zich erin verdiepen, of ze ernstig met elkaar overleggen, of ze gedwongen worden om hun ontdekkingen scherp te formuleren, enz. Dat dit niet los staat van de leerkracht, van zijn werkplezier, zijn gevoeligheid voor wiskunde-onderwijs, zijn organisatietalent, is duidelijk.

Nauwgezette observatie van kinderen tijdens het werk geeft echte zekerheden, argumenten van hoger nivo. Eenzame fietsers kunnen hier een eerlijker kompas vinden. Verslaggevingen van deze observaties hebben een vaste plaats in dit bulletin.

kolommen



TAFELS VAN VERMENIGVULDIGING

H. FREUDENTHAL

Uiteraard bedoel ik niet die van uw lagere school – ook niet die tot 20 die ik nog moest leren. Het meervoud laat al zien, dat ik me niet tot één zal beperken. In feite zullen het er zelfs oneindig veel zijn.
Ik begin met één met twee 'ingangen': even en oneven. Even maal even is even, even maal oneven is even, oneven maal oneven is oneven. Of met 0 in plaats van even, 1 in plaats van oneven:

	0	1
0	0	0
1	0	1

Even of oneven betekent 'laat na deling door 2 de rest 0 respektievelijk 1', en om die reden heb ik even door 0 en oneven door 1 vervangen.
Ik kan hetzelfde met 3 doen: elk getal door zijn rest na deling door 3 vervangen. Die resten zijn 0,1,2 en als tafel van vermenigvuldiging krijg ik:

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Laat ik, om het interessanter te maken, een grotere stap nemen. Ik ga rekenen, zoals men zegt, *modulo* 7, dat wil zeggen: ik vervang elk getal door zijn rest na deling door 7. De tafel van vermenigvuldiging wordt:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Hier valt al meer te beleven (ik heb nu de rij en kolom van 0 als triviaal weggelaten). De tafel is spiegelsymmetrisch ten aanzien van de diagonaal van linksboven naar rechtsonderen. Dit zal u niet verbazen; immers we kunnen niet anders verwachten dan dat

$$a \cdot b = b \cdot a$$

is, de zogenaamde kommutatieve wet. Maar de tafel vertoont nog een symmetrie, die van spiegeling om zijn middelpunt: in het snijpunt van rij a en kolom b staat hetzelfde als in dat van rij $7-a$ en $7-b$.

In formules:

$$(7-a)\cdot(7-b) \quad \text{en} \quad a\cdot b$$

laten bij deling door 7 dezelfde rest. Dat dit klopt, is gemakkelijk na te gaan. Uitgewerkt is

$$(7-a)\cdot(7-b) = 49 - 7a - 7b + a\cdot b,$$

waarbij de drie eerste summanden bij deling door 7 de rest 0 laten, zodat inderdaad alleen $a\cdot b$ er toe doet.
Trouwens, ook ten aanzien van de andere diagonaal is de tafel symmetrisch.
In bovenstaande tafel is

$$1\cdot 1 = 2\cdot 4 = 3\cdot 5 = 6\cdot 6 = 1,$$

anders gezegd, de vergelijking

$$a\cdot x = 1$$

met gegeven a ($\neq 0$) en onbekende x heeft altijd één oplossing, net als onder de gewone getallen ($\neq 0$) elk een 'omgekeerde' heeft, alleen hoeven we hier niet tot breuken onze toevlucht te nemen. Of als u het wel wilt doen, dan is:

$$\tfrac{1}{2} = 4,\ \tfrac{1}{3} = 5,\ \tfrac{1}{4} = 2,\ \tfrac{1}{5} = 3,\ \tfrac{1}{6} = 6.$$

Alle delingen gaan hier op. Ga na:

$$\tfrac{3}{4} = 6,\ \tfrac{2}{5} = 6, \ldots$$

Wat we hier met 7 deden kunnen we met *elk ander geheel getal* doen.
Laten we hiervoor 6 kiezen:

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

De eerder gekonstateerde symmetrieën zijn hier ook aanwezig en wel om dezelfde redenen. Maar verder lijkt de tafel modulo 6 heel weinig op die modulo 7 en de oorzaak is snel achterhaald. 7 is een priemgetal (dat wil zeggen: met geen andere delers dan 1 en het getal zelf), terwijl $6 = 2\cdot 3$ een samengesteld getal is. Modulo 6 gerekend krijgen we dus $2\cdot 3 = 0$ – een produkt dat 0 wordt, hoewel geen der faktoren 0 is. Er komen dus onplezierige nullen in de tafel voor, en dit heeft verdere kwalijke gevolgen: 2,3,4 hebben geen omgekeerden.
De twee gevallen die we hier behandelen, zijn karakteristiek. Modulo een priemgetal krijgen we een nette tafel, waarbij elk getal $\neq 0$ een omgekeerde heeft, modulo een samengesteld getal levert een onnette tafel op, met heel wat getallen zonder omgekeerde.

Laten we dit nog even verduidelijken, nu met de *tafel modulo 60.* Hier zitten delers 2,3,5 en samengestelden van deze in. 2 kan geen omgekeerde hebben, want modulo 60 zou

$$2x = 1$$

bij vermenigvuldiging met 30 opleveren

$$30\cdot 2x = 30$$

oftewel

$$60x = 30,$$

dus $30 = 0$, hetgeen modulo 60 niet klopt.

Om dergelijke redenen bezitten 3,5,6,8,... geen omgekeerden, kortom alle getallen waar een 2,3,5 als faktor in zit.
Welke getallen bezitten modulo 60 wel een omgekeerde? We maken nu een nette tafel op, waar we alleen resten modulo 60 toelaten en waar geen 2,3,5 als deler in zit:

	1	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	49	53	59
1	1	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	49	53	59
7	7	49	17	31	59	13	41	23	37	19	47	1	29	43	11	53
11	11	17	1	23	7	29	13	19	41	47	31	53	37	59	43	49
13	13	31	23	49	41	7	59	17	43	1	53	19	11	37	29	47
17	17	59	7	41	49	23	31	13	47	29	37	11	19	53	1	43
19	19	13	29	7	23	1	17	11	49	43	59	37	53	31	47	41
23	23	41	13	59	31	17	49	7	53	11	43	29	1	47	19	37
29	29	23	19	17	13	11	7	1	59	53	49	47	43	41	37	31
31	31	37	41	43	47	49	53	59	1	7	11	13	17	19	23	29
37	37	19	47	1	29	43	11	53	7	49	17	31	59	13	41	23
41	41	47	31	53	37	59	43	49	11	17	1	23	7	29	13	19
43	43	1	53	19	11	37	29	47	13	31	23	49	41	7	59	17
47	47	29	37	11	19	53	1	43	17	59	7	41	49	23	31	13
49	49	43	59	37	53	31	47	41	19	13	29	7	23	1	17	11
53	53	11	43	29	1	47	19	37	23	41	13	59	31	17	49	7
59	59	53	49	47	43	41	37	31	29	23	19	17	13	11	7	1

De tafel is uiteraard weer symmetrisch ten aanzien van de diagonalen en het middelpunt. Maar er zitten nog veel meer regelmatigheden in die tafel. Bijvoorbeeld, omdat $11 \cdot 11 = 1$ is, heeft men met

$11a = b$

ook

$11b = a,$

hetgeen tot patronen zoals

1: 13 . . . 23

11: 23 . . . 13

leidt.

We kunnen in die tafel van elk getal machten vormen. Van 11, 19, 29, 31, 41, 49 is de tweede macht gelijk aan 1, van 7, 13, 17, 23, 37, 43, 47, 53 is het pas de vierde macht. Elk van die getallen kunnen we in de vorm

$7^a\ 19^b\ 59^c$

schrijven, waarbij

$a = 0,1,2,3$

$b = 0,1$

$c = 0,1$

mag zijn. Dit levert inderdaad $4 \cdot 2 \cdot 2$ getallen op.

Het opmerkelijkste is echter dat die tafel sluit. We zijn uitgegaan van de verzameling getallen

$V = \{1,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,49,53,59\}.$

Voor dit soort getallen hebben we het produkt (modulo 60) bekeken.

Het blijkt, dat het produkt in deze zin van twee getallen van V weer een getal van V is. Hoe valt dit te verklaren? Of is het een wonder?

Hoe was die verzameling V gedefinieerd? V bestond uit alle resten modulo 60, die modulo 60 een omgekeerde bezaten, dus uit al die a waarvoor er een a′ te vinden is, zodat

$aa' = 1$

is. Neem nog een dergelijk getal b, dus zodat

$bb' = 1.$

Beschouw nu

$c = ab.$

Welnu, als

$c' = a'b'$

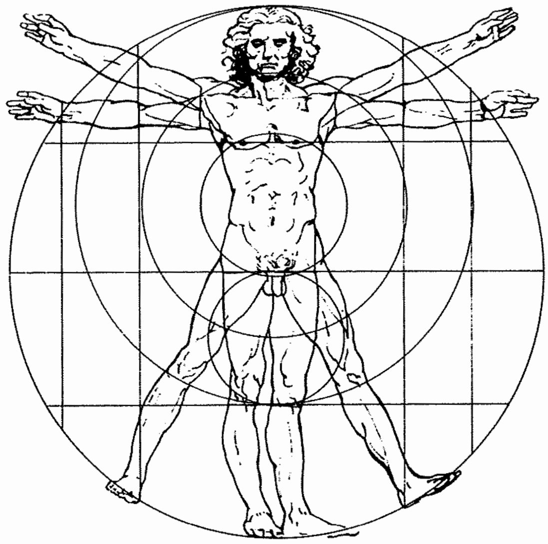
is gesteld, dan

$cc' = aba'b' = aa'bb' = 1 \cdot 1 = 1,$

dus als a een omgekeerde a′ bezit en b een omgekeerde b′ bezit, dan bezit ook c een omgekeerde – te weten $c' = a'b'$. Dus als a en b tot V behoren, dan ook ab zoals we eerder dankzij de tafel opmerkten.

Dit was een proeve uit een gebied van de wiskunde, dat onder de naam *getallenteorie* bekend staat en waaruit we in deze kolommen af en toe grepen zullen doen.

wiskunst



ED DE MOOR

afb. 1

Wat blijft in dit leven zonder nut?
Je kunt zeggen, dat je niet van de VPRO-uitzendingen of van TV in het algemeen houdt, maar effekt hebben deze verschijnselen wel. Thans onderzoekt men of televisie een nieuwe vorm van kunst is. Ik zal me hierover niet uitlaten.
Misschien is het wel interessant om eens te kijken hoe de kunst de wiskunde beïnvloed heeft en andersom.

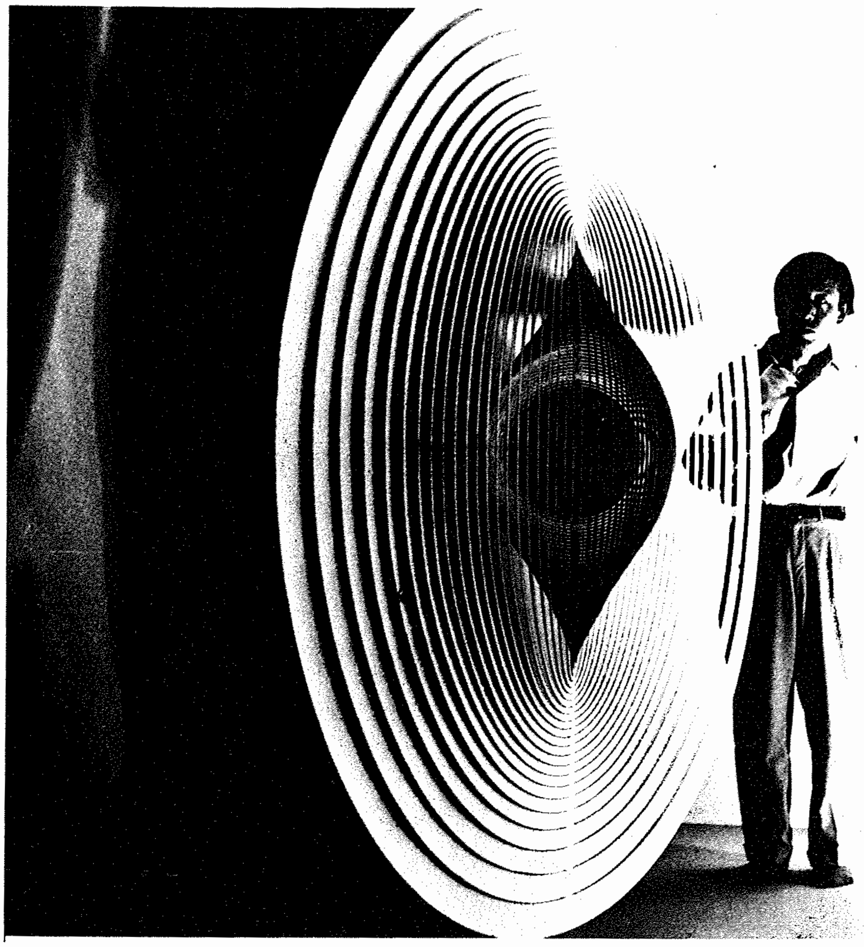
Bekijken we de eerste richting (kunst → wiskunde) dan kun je naar de architektuur verwijzen, hoewel natuurlijk veel bouwwerken – vooral aanvankelijk – vanuit een zekere utiliteitsdrang geschapen zullen zijn.
Eén duidelijke beïnvloeding dacht ik toch te kunnen aanwijzen. Toen de italiaanse renaissance-schilders het probleem van de afbeelding der werkelijkheid op het platte vlak ter hand namen, ontstond de leer van de perspektief. Paolo Ucello (1397-1475) zou als eerste de regels voor het perspektivisch afbeelden ontdekt hebben. Hoe een afbeelding van de werkelijkheid kan ontstaan zien we op een houtsnede (afb. 1) van *Albrecht Dürer* (1471-1528), die zich ook met de meetkunde bezighield.
De vraag welke meetkundige eigenschappen de werkelijke figuur en z'n afbeelding gemeenschappelijk hebben, gaf inspiratie aan beroepswiskundigen, die deze onderzoekingen overnamen. Uiteindelijk leidde dit tot de 'projektieve meetkunde', één van die wonderschone onderdelen van de wiskunde. Deze meetkunde heeft een veel algemener karakter dan de bekende euklidische meetkunde.

Bekijken we de omgekeerde beïnvloeding (wiskunde → kunst) dan zal het niet onbekend zijn, dat er momenteel stromingen in de kunst zijn, die duidelijk vanuit de wiskunde geïnspireerd worden, zoals bijvoorbeeld het konstruktivisme, komputer- en geometrische kunst. Wellicht is het u opgevallen dat Hans Koetsier, die vaak met wiskundigen samenwerkt, soms pagina-grote advertenties publiseert.
Spreekt over het algemeen de komputerkunst mij niet zo aan, geheel anders kan dat liggen ten opzichte van die kunstenaars, die duidelijk vanuit de meetkunde hun inspiratie opdoen. Schitterend, vooral door zijn eenvoud, vind ik de werken van Schoonhoven, die grote aantallen open kartonnen doosjes, voorzien van een diagonaalvlak, tot bijvoorbeeld een rechthoek vult; dit objekt met alleen gips en wittige verf bewerkt en daarna als het ware het licht, dat langs het werk strijkt, zijn werk laat doen. Door sommige doosjes zo te plaatsen, dat de diagonaalvlakken juist de andere kant opstaan, ontstaat een ekstra verrassing in het licht- en schaduwspel. Het afbeelden van dergelijke schilderijen door middel van een plaatje heeft weinig zin.

Zo ook werd ik onlangs getroffen door een mooie tentoonstelling van de japanner *Tamitaro Nachi*. Bekijkt u afbeelding 2 en overtuig uzelf.

> 'In het werk van Nachi wordt het probleem van onbegrip tussen kunstenaar en publiek tot een minimum teruggebracht,'

schrijft Apollonio. Zijn kunstwerken dragen enerzijds duidelijk de traditie van de japanse volkskunst van het papiervouwen (Origami), anderzijds is het duidelijk, dat hij ook geïnspireerd is door zijn vroegere studies, waaronder die van de vliegtuigbouw.



afb. 2

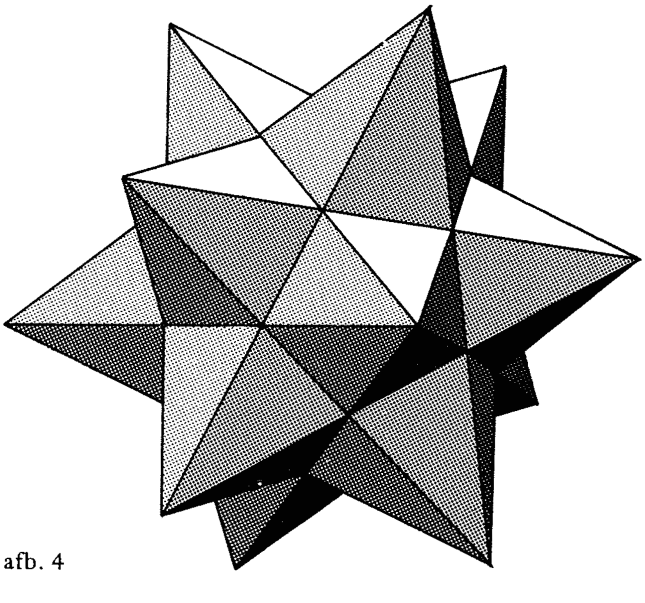
Een ander, misschien wat afgetrapt, maar niet te vermijden voorbeeld is het grafische werk van *Escher*. Ik neem als voorbeeld de litho 'Reptielen' uit 1943, die mij van jongs af aan geïntrigeerd heeft. (afb. 3)
De kunstenaar schrijft zelf het volgende over deze prent:

'De levensloop van een kaaimannetje. Temidden van allerlei voorwerpen ligt een opengeslagen tekenschrift, waarvan één tekening te zien is: een mozaïek van reptielvormige figuren in drie contrasterende tinten. Een van hen heeft er blijkbaar genoeg van om plat en verstard temidden van zijn soortgenoten te liggen. Dus steekt het een plastische poot over de rand van het schrift heen, rukt zich verder los en begeeft zich in het vrije leven. Het klimt op de rug van een dierkundeboek en werkt zich, langs de glibberige helling van een tekendriehoek, moeizaam op naar het hoogtepunt van zijn bestaan. Even uitblazen, vermoeid maar voldaan dan weer bergafwaarts, via een asbak terug naar de vlakte, het vlakke tekenpapier, waar het zich gehoorzaam weer tussen zijn vroegere makkers voegt en zijn funktie als vlakverdelingselement herneemt. N.B. Het boekje Job heeft niets met de bijbel te maken, maar bevat Belgische sigarettenvloeitjes.'

Over de regelmatige vlakvullingen uit het tekenschrift is door professor van der Blij al eens het een en ander uit de doeken gedaan. (jaargang 2, nr. 3, pag. 717)
Letten we echter eens op de zinsnede '...... moeizaam op naar het *hoogtepunt* van zijn bestaan'. Dat hoogtepunt bestaat letterlijk (of in dit geval beter figuurlijk) uit een regelmatig twaalfvlak.
Over de vijf regelmatige veelvlakken (vierhoek, kubus, achtvlak, twaalfvlak en twintigvlak) heeft professor Freudenthal in het vorige nummer al uitgebreid geschreven, toen uitmondend in het halfregelmatige lichaam, dat wij wekelijks op de televisie zien bewegen (de voetbal, bestaande uit 12 vijfhoeken en 20 zeshoeken). Uiteraard heeft Escher zich in zijn werk bij de ruimtelijke voorstellingen het meest bediend van de kubus, die zo veel

afb. 3

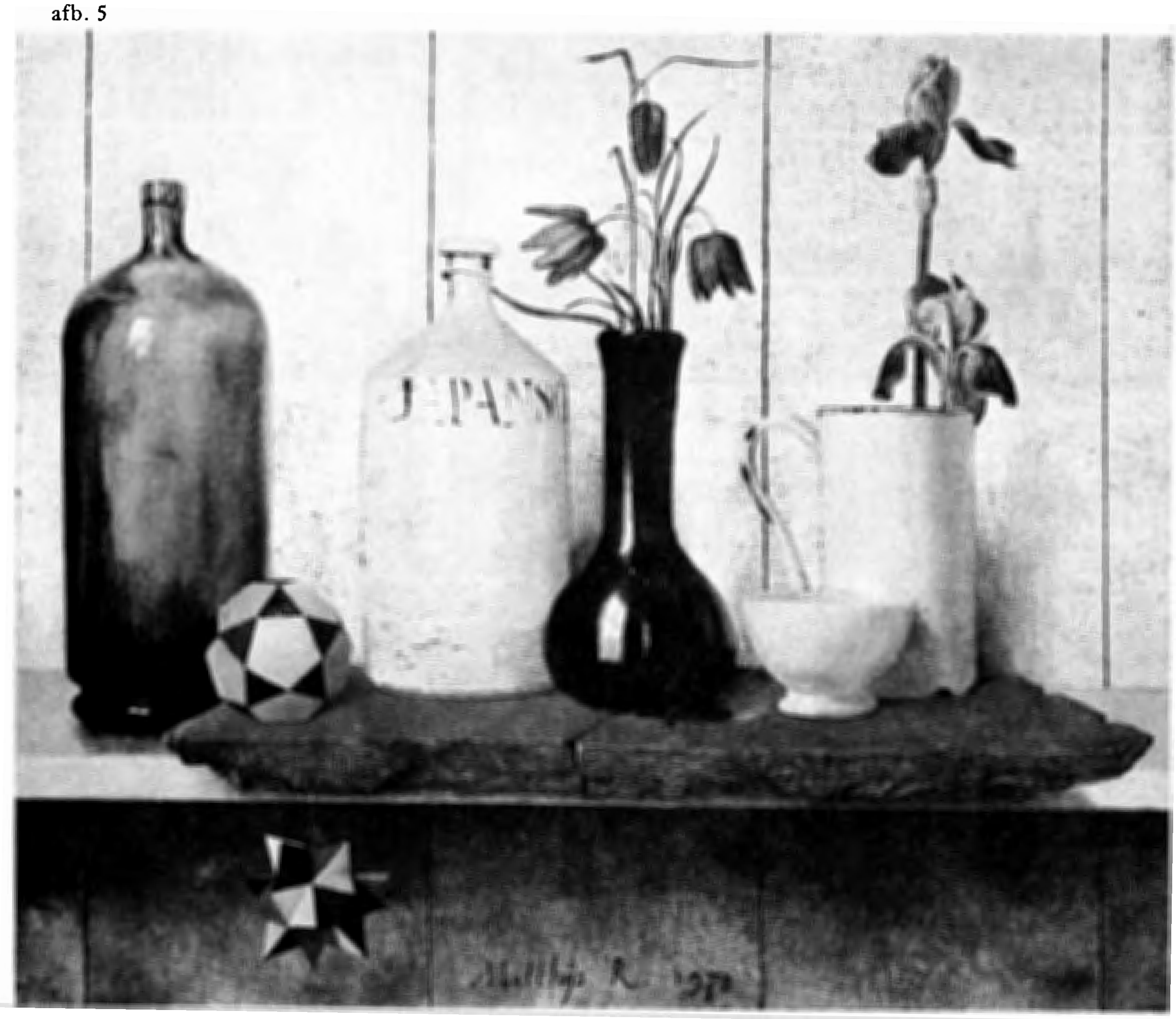
voorkomt in onze omgeving en zich goed leent voor ruimtevulling en optisch bedrog, maar daarnaast valt toch op dat hij van de overige vier regelmatige lichamen aan het twaalfvlak de voorkeur geeft.
Hij heeft nog enkele prenten gemaakt over het ster-twaalfvlak (afb. 4), dat uit het twaalfvlak ontstaat door op de vlakken regelmatige vijfzijdige piramides te plaatsen.
Afgezien van het simbolische element (scheppen en vergaan), de herkenningsschokken (bijvoorbeeld het zwaluw-lucifersdoosje, dat eindeloos vaak door kunstenaars is afgebeeld) en de humor (een klein kaaimannetje) die de prent voor mij in zich draagt, moet zich toch ook onbewust het harmonische karakter van het twaalfvlak aan mij opgedrongen hebben.



afb. 4

afb. 5

Sinds kort hangt boven mijn tafel een afbeelding met de vijf regelmatige lichamen en er steeds weer naar kijkend gaat mijn voorkeur uit naar het twaalfvlak. Dan ga je op zulke dingen letten en ik merk dat vele kunstenaars zich beziggehouden hebben met de regelmatige en halfregelmatige veelvlakken.
Onlangs zag ik schilderijen van de jonge virtuoze schilder *Matthijs Röling,* die op verschillende van zijn schilderijen ook veelvlakken afbeeldt. Op één ervan hangen de vijf regelmatige lichamen aan een touwtje, het twaalfvlak triomfantelijk bovenaan! (afb. 5)
Kijkt u nog eens naar het schilderij, waarop het ster-twintigvlak en een afgeschaafd twaalfvlak (icosi-dodecahedron) voorkomt. (afb. 6)
De vijfhoeken, nu bekijkend, denk ik terug aan mijn schooltijd en de 'gulden snede'.
Laat ik eerst uitleggen wat men daaronder verstaat.
Stel we hebben een lijnstuk van lengte a en laat dit verdeeld zijn in de stukken p en q

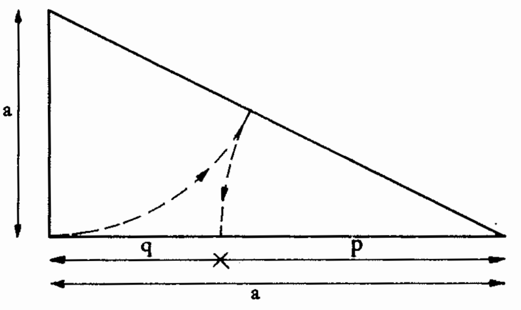


afb. 6

$(p > q)$ zodat geldt:

$a : p = p : q$,

dan zeggen we dat dit lijnstuk volgens de 'gulden snede' is verdeeld. De konstruktie beeld ik hieronder af (afb. 7) — zonder bewijs —.



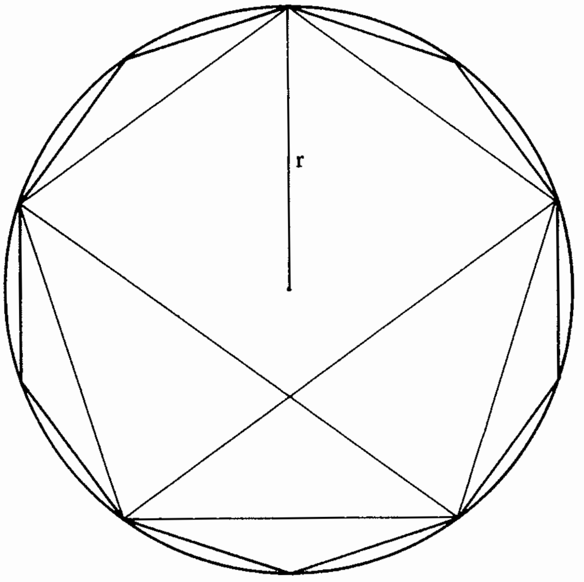
afb. 7

De verhouding van de lijnstukken p en q kan men berekenen en is

$p : q = (-1 + \sqrt{5}) : (3 - \sqrt{5})$,

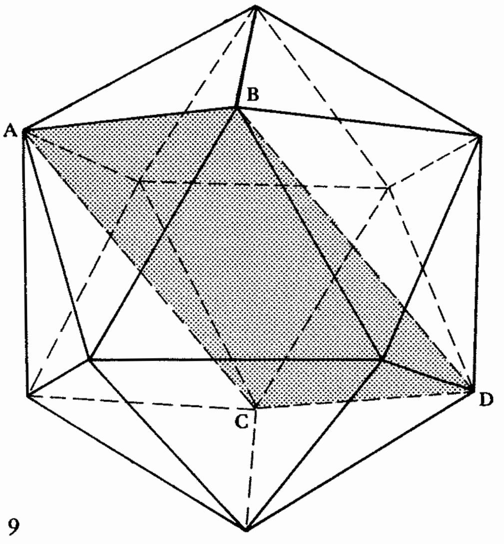
hetgeen bij benadering is 8 : 5.

Deze verhouding is eeuwenlang als de meest estetische beschouwd en ook veelvuldig als zodanig gebruikt. Bij de konstruktie van de regelmatige tien- en vijfhoek speelt zij een rol. Het grootste stuk van de volgens de gulden snede verdeelde straal van een cirkel is de zijde van de ingeschreven regelmatige tienhoek (afb. 8).



afb. 8

Daaruit volgt de konstruktie van de vijfhoek en binnen de vijfhoek verdeelt elk paar diagonalen elkaar weer in de gulden verhouding, waarbij het grootste stuk weer gelijk is aan de zijde van de vijfhoek. De vlakken, die in één hoekpunt van een regelmatig twintigvlak samenkomen (afb. 9), zijn de opstaande zijvlakken van een regelmatige vijfzijdige piramide, waarvan het grondvlak weer een regelmatige vijfhoek is.



afb. 9

Elk tweetal overstaande evenwijdige zijden van het twintigvlak behoort tot een rechthoek (ABCD), waarvan de langste zijde weer een diagonaal van zo'n vijfhoek is. Nu is de verhouding van een diagonaal en de zijde van een regelmatige vijfhoek weer die mooie 'gulden verhouding'. Zo kun je laten zien dat de twaalf hoekpunten van het twintigvlak de twaalf hoekpunten zijn van drie van zulke 'gulden rechthoeken', die twee aan twee loodrecht op elkaar staan.

Met alleen vijfhoeken is het platte vlak niet regelmatig op te vullen, wel sluiten twaalf vijfhoeken tot de 'dodekaëder' (12-vlak).

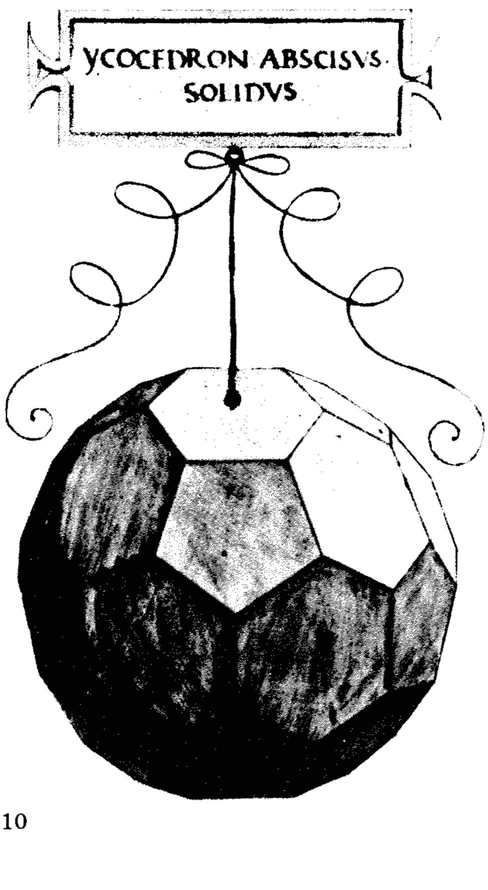
Op een studieblad over viooltjes van Da Vinci (1452-1519) zie ik de tekening van de vijfhoek met enige meetkundige notities. De 'alleskunner' *Da Vinci* maakte tekeningen voor de wiskundige Luca Pacioli (1445-1514). Een van die tekeningen beelden we hier af. (afb. 10)

De tekst betekent 'afgeknot twintigvlak' en misschien heeft u hem al herkend: het is weer die voetbal van Freudenthal.

Er bestaat overigens een mooi schilderij van Jacopo de Barbari met een beeltenis van Pacioli, waarop ook één van zijn leerlingen, meetkundige instrumenten én ..... een halfregelmatig veelvlak zijn afgebeeld.

Misschien dat die meetkundige bevlogenheid vooral bij de wat meer intellektualistische kunstenaars voorkomt, maar ook de omstreden *Dali* schijnt belangstelling voor het twaalf-

afb. 11



afb. 10

vlak te hebben. Zie afb. 11 en let op zijn hoed!
Het is geen toeval dat *Fred Goffree* het twaalfvlak voor de nieuwjaarswens van het IOWO gebruikte en er een kalender van vervaardigde. Het is nog niet zo'n simpele opgave hier een bouwplaat voor te vervaardigen, maar met dit probleem zijn we weer binnen de wiskunde.
Zo kom ik tot het einde van mijn lofzang op de meetkunde binnen de kunst en de kunst van de meetkunde, samengevat in een vers van de dichter *Cees Buddingh'* uit zijn bundel 'Tussen Neus en Lippen', waarin ik — met ekskuses aan de auteur — achtereenvolgens de woorden 'aardappel', 'knolraap' en 'bruin broodje' vervang door de woorden 'twaalfvlak', 'kubus' en 'voetbal':

HET TWAALFVLAK
Het twaalfvlak is een prachtige vogel
en de kubus is ook niet mis.
En wat zou u denken van de voetbal?
U zegt het: geen kattepis.

problematika

HUUB JANSEN

1

OVER ZWEMMERS EN ZWAMMERS

In dit nummer vullen we problematika uitsluitend met bijdragen van eigen bodem. Wij bieden u 'real dutch problems' en daaruit kunt u weer leren dat ook een klein land groot kan zijn.
Het eerste probleem kregen wij van de heer p.s. te den d. en gaat over een andere heer die van zwemmen én van zijn vrouw houdt. Bovendien praat hij in probleemtaal. Een uniek heer. Deze heer nu zwemt dagelijks minstens één uur, hoogstens drie uur, maar steeds brengt hij een geheel aantal uren krauwelend, vlinderend of schoolslagend in het water door.
Bovendien zwemt hij op een dag nooit korter dan op een vorige dag in dezelfde maand.

Op 30 juni, na afloop van het laatste journaal en teleac vraagt zijn vrouw: 'lieverd, hoeveel uren heb je deze maand in totaal gezwommen?'
Wat geirriteerd pakt onze heer zijn gleufabakus, begint te mompelen en te tellen en geeft tenslotte zijn vrouw het eksakte antwoord.
'Da's mooi', zegt zijn vrouw, 'maar nu weet ik nog niet hoeveel uur je vandáág gezwommen hebt!'
'In de tweede helft van de maand heb ik één-éénderde maal zoveel uren gezwommen als in de eerste helft', zegt de heer en uit zijn wat bitse breukentaal kunnen wij afleiden dat het gesprek hem gaat vervelen.
'Nu weet ik nóg steeds niet hoeveel uren je vandaag gezwommen hebt', zeurt zijn vrouw verder, maar onze zwemmer windt al geeuwend de wekker op.

Waar of niet-waar, toch kunt u berekenen hoeveel uur deze heer in de maand juni gezwommen heeft.
Vanuit uw lagere schooltijd heeft u wellicht het besef overgehouden, dat logisch redeneren en rekenkunst niet bij elkaar passen, maar bij het oplossen van dit probleem dienen zij hand in hand te gaan.

2

OM DES KEIZERS BAARD

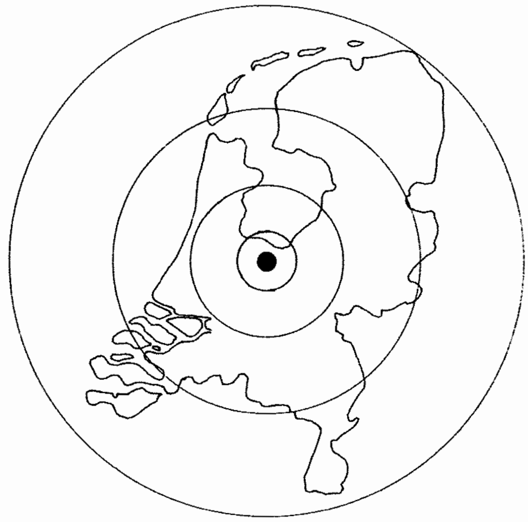
Ook dit probleem is van vaderlandse bodem, en wel uit *'Pythagoras'*, het voortreffelijke wiskunde-tijdschrift voor jongeren.
In oorspronkelijke vorm was het een voetbalkompetitieprobleem, maar wij laten het verhaal spelen in de wereld van de sybrandsen en andreikoos. Variatie dus.

Een aantal heren speelt een onderlinge damkompetitie met als inzet *de baard des keizers.* Iedere dammer speelt éénmaal tegen al zijn konkurrenten en het eind van elke partij is winst of verlies, dat wil zeggen: door invoering van nieuwe damregels is remise uitgesloten.
Na afloop van de kompetitie beweert deelnemer damstra dat hij weliswaar niet alle partijen gewonnen heeft, maar dat zijn verlies toch eigenlijk steeds onnodig was. Onnodig, immers iedere overwinnaar van mijnheer damstra heeft op zijn beurt verloren van iemand waar mijnheer damstra weer van gewonnen heeft. Mijnheer damstra kan op deze wijze al zijn verliespartijen wegredeneren en klopt bovendien zichzelf nog eens ekstra op de borst door te stellen dat geen van de andere deelnemers via eenzelfde redenering hun eigen nederlagen kunnen wegpraten.
Wanneer u, lezer van dit bulletin, de kompetitie-uitslagen kon zien, dat zou u zelf de juistheid van mijnheer damstra's praatje kunnen konstateren.

U moet dit maar op ons gezag aannemen en uw aandacht richten op de vragen, die nu komen:

* *hoeveel heren hebben minstens aan deze kompetitie meegedaan en*
* *op welke plaats staat mijnheer damstra in de eindrangschikking?*

berichten uit het **binnenland**

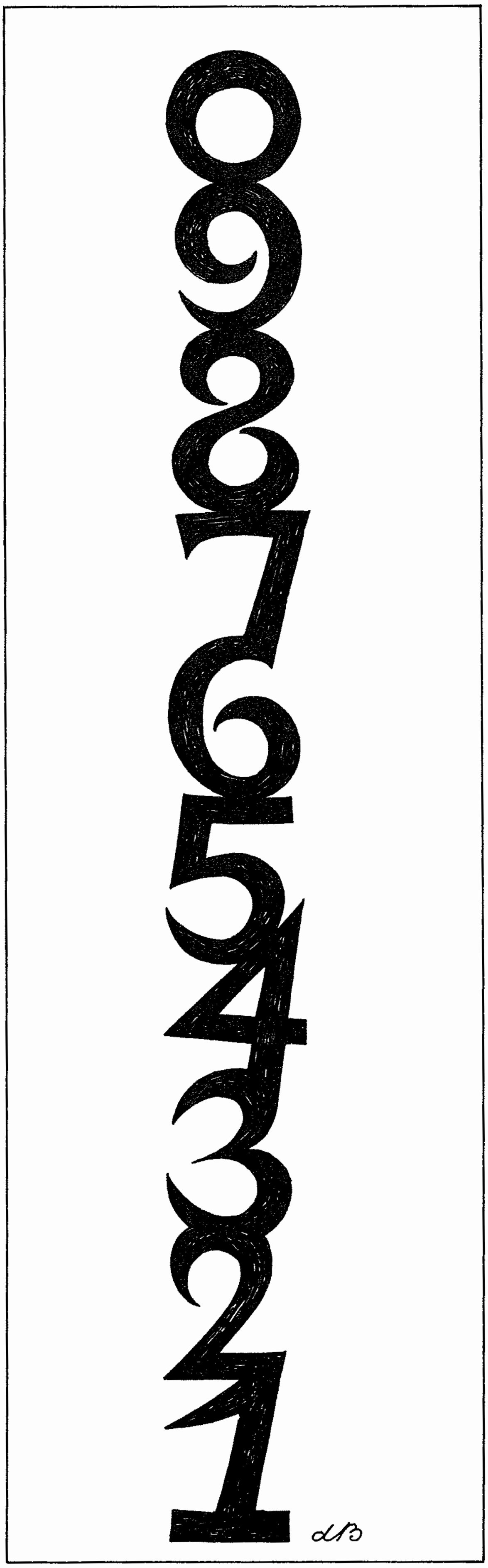


OVER EEN BELANGRIJKE DISKUSSIENOTA

LOUIS GILISSEN

Al geruime tijd zoekt men in nederland naar een duidelijke en werkbare struktuur voor de leerplanontwikkeling en in het verlengde daarvan een duidelijker plaatsbepaling van de vele instanties, die op het terrein van het onderwijs werkzaam zijn.
Het ziet er naar uit dat deze inspanningen op niet al te lange termijn tot konkrete maatregelen zullen leiden.
De minister van onderwijs en wetenschappen is voornemens een *'Stichting voor de Leerplanontwikkeling'* op te richten als onderdeel van een volledig plan voor ontwikkeling en vernieuwing van het onderwijs; en met onderwijs wordt dan bedoeld het primair (4-11) en sekundair (11-18) onderwijs.
Onder zeker voorbehoud (we zullen hier straks op ingaan) mogen we deze resultaten verheugend noemen.

Sinds enige decennia is een ruime toename te konstateren van het aantal, zich met onderwijs bezighoudende instanties. We doelen hier onder meer op het ontstaan van de landelijke pedagogische centra, regionale en plaatselijke schooladviescentra, kommissies modernisering leerplan (wiskunde, natuurkunde, scheikunde, russisch, klassieke talen, etc.). Allemaal instellingen, die zich vanaf hun ontstaan energiek en met entoesiasme op het onderwijs stortten. Getuige de oprichting van het IOWO bleek er bij de overheid belangstelling te bestaan voor een professionalisering van de leerplanontwikkeling. Een landelijke struktuur waarin de werkzaamheden van zo'n instituut zouden moeten passen was er echter op dat moment niet.
In 1969 installeerde de toenmalige staatssekretaris van onderwijs (Grosheide) de *Commissie Organisatie Leerplanontwikkeling* (COLO).
Een gedachtenontwikkeling op dit terrein kwam op gang. Hoe moeilijk de situatie lag, moge blijken uit de diskussienota, die in 1971 werd gepubliseerd. Hierin werden drie modellen met betrekking tot de struktuur van de leerplanontwikkeling naast elkaar gezet.
Eén van deze organisatie-modellen, het model waarin een duidelijke inbreng van het onderwijsveld in de leerplanontwikkeling was gegarandeerd, genoot in de meeste van de kommentaren de voorkeur. Het zag er echter niet naar uit dat op korte termijn een integrale realisering van één der modellen tot stand zou komen.
Om toch al enige duidelijkheid te scheppen, zonder een ontwikkeling in de toekomst in de weg te staan, bracht de COLO in mei 1972 op verzoek van de toenmalige minister van Veen



een advies uit over een in te stellen koördinatiepunt voor de leerplanontwikkeling. Hierin zou een voorlopig werkbare relatie tussen leerplanontwikkeling, innovatie, onderzoek en evaluatie tot stand kunnen komen.
Op grond van dit advies besloot de minister tot het in het leven roepen van een stuurkommissie voor de leerplanontwikkeling. Moeilijkheden bij de benoeming van een voorzitter van deze kommissie en de regeringswisseling in 1973 waren er de oorzaak van dat een en ander niet van de grond is gekomen.

De nieuwe minister — van Kemenade — zag zich voor de taak gesteld de draad weer op te vatten.
Uit de memorie van toelichting op de onderwijsbegroting bleek duidelijk dat het deze minister ernst was om op korte termijn een struktuur tot stand te brengen. Een struktuur voor de onderwijsontwikkeling en -vernieuwing, waarin de scholen zelf de vrijheid behouden hun schoolwerkplannen vast te stellen, daarbij gesteund door 'verzorgingsinstituten'.

In de diskussienota *'Naar een struktuur voor de ontwikkeling en vernieuwing van het primair en sekundair onderwijs'*, wordt een opzet geschetst. Deze nota is in februari jl. uitgebracht, kommentaren en adviezen hierover konden voor 1 april aan de minister worden toegestuurd. Een meer definitief model zal later in de staten-generaal ter sprake komen.
In deze nota stelt de minister dat de scholen zélf in het middelpunt van alle aktiviteiten betreffende vernieuwing en ontwikkeling staan.

> 'De betrokkenheid van het onderwijsveld bij de besluitvorming en de beslissingen over de veranderingen in het onderwijs is daarbij een wezenlijke voorwaarde voor het welslagen.'

De verantwoordelijkheid van de overheid bestaat in dit verband uit het:

> 'Creëren, onderhouden en verbeteren van voorzieningen ten aanzien van bijvoorbeeld de opleidingen van onderwijsgevenden, de her- en bijscholing, de begeleiding en de ondersteuning van de scholen en de ontwikkeling van leerplannen.'

Vanuit dat standpunt wordt een struktuur voorgesteld, die te splitsen is in drie substrukturen, namelijk:

* *De overlegstruktuur*
Deze struktuur dient te garanderen dat de bij het onderwijs betrokkenen via hun organisaties in de besluitvorming partisiperen. Het overleg over algemene zaken het onderwijs betreffende, zal gevoerd worden in de CCOO (Centrale Commissie van Onderwijs Overleg), waarin de diverse geledingen van het onderwijs zitting hebben, en in zogenaamde sektorraden (voor het primair en sekundair onderwijs, voor het onderwijs aan werkende jongeren en voor de opleidingen), waarin zaken behandeld worden, die alleen voor de desbetreffende sektor van belang zijn.
De bedoeling van de minister om het overleg te scheiden van het adviseren heeft konsekwenties voor het overleg, zoals dat tot nu toe in lochem is gevoerd. Dit overleg zal worden overgenomen door de genoemde sektorraden. Voor de advisering zullen afzonderlijke werkgroepen kunnen worden ingesteld, die in relatie zullen moeten worden gebracht met de totale adviesstruktuur.

* *De adviesstruktuur*
Hierin worden een aantal adviesinstanties geplaatst, die de minister op de diverse terreinen van de onderwijsvernieuwing en -ontwikkeling zullen adviseren. Te denken is hierbij aan de — reeds bestaande — onderwijsraad. Verder zullen de onlangs ingestelde innovatiekommissie integratie kleuter- en basisonderwijs en de innovatiekommissie middenschool de minister advies uitbrengen over de programmering van de eksperimenten.
Meer in het bizonder richt deze taak zich op de advisering betreffende:
— een gefaseerd landelijk eksperimentenplan
— een diffusieplan voor de verdere voortgang en uitbreiding van de vernieuwing
— een informatieplan betreffende de voortgang en de resultaten van de vernieuwing
— de wijze waarop de scholen ondersteund dienen te worden bij het opstellen van hun schoolwerkplannen
— de wijze waarop de scholen begeleid kunnen worden
— de wijze waarop de evaluatie dient te geschieden.

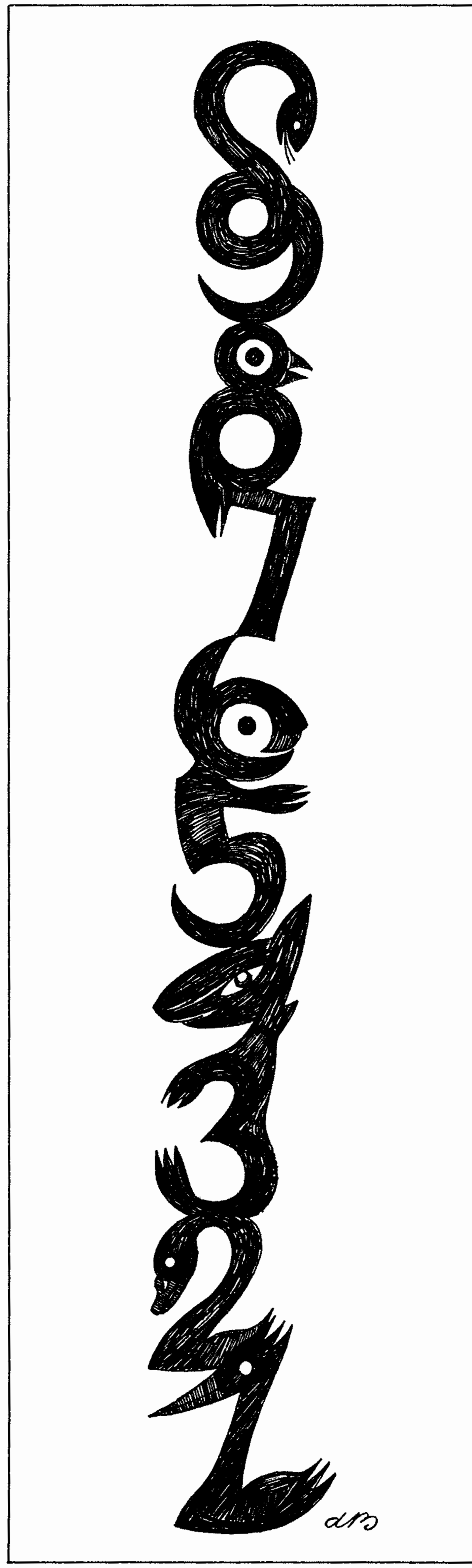
De leden van deze innovatiekommissies zijn deskundigen, die à titre personel zitting hebben. Op korte termijn zullen nog twee van deze innovatiekommissies worden ingesteld, te weten één voor het onderwijs aan werkende jongeren en één voor de open school (multimediaal onderwijs). Deze kommissies worden overkoepeld door de advieskommissie voor de programmering, die tot taak heeft om de minister advies uit te brengen over de programmering van de ontwikkelingen en vernieuwingen in het onderwijs en zal vooral koördinerend optreden ten aanzien van de aktiviteiten van de innovatiekommissies.

* *De verzorgingsstruktuur*
Hierin worden de relaties aangegeven tussen bestaande en nog op te richten instanties op

het terrein van de leerplanontwikkeling, begeleiding van scholen (bij de vernieuwing van het onderwijs), her- en bijscholing van onderwijsgevenden en de opleidingen van onderwijsgevenden.
Eén van de belangrijkste punten hierbij is de instelling van de Stichting voor de Leerplanontwikkeling (SLO). Deze stichting bestaat uit een bestuur dat de beschikking krijgt over een buro.
Het bestuur wordt samengesteld uit een bestuursraad en een kollege (dat als dagelijks bestuur zal optreden).
De opdracht aan de SLO zal volgens de nota zijn:
- het zorgdragen voor de koördinatie van de ontwikkeling van onderwijspakketten ten behoeve van het kleuteronderwijs, het lager onderwijs en het voortgezet onderwijs
- bovendien heeft de SLO een taak bij het ontwikkelen van leerplannen in het kader van de innovatie-projekten, waarover de reeds genoemde innovatiekommissies aan de minister advies uitbrengen; de minister zal op grond van deze adviezen gerichte opdrachten aan de SLO verstrekken.

Het buro wordt geleid door een direkteur. Een aantal stafmedewerkers wordt aangesteld, die onder leiding van de direkteur een kurrikulum-team gaan vormen. Dit zullen deskundigen zijn op het terrein van onderzoek, ontwikkeling van doelstellingen, ontwikkelingspsychologie, enz.
Deze stafmedewerkers zullen steun verlenen aan de verschillende afdelingen van het buro. Er komen afdelingen voor bijvoorbeeld: de talen, wiskunde, wereldoriëntatie. In eerste instantie zullen projekt-medewerkers van de verschillende kommissies modernisering leerplan in de betreffende afdelingen worden aangesteld.
Het ligt in de bedoeling dat het IOWO als afdeling wiskunde van het buro van de SLO zal gaan funktioneren.

De kommissies modernisering leerplan die tot nu toe funktioneerden als advies-kommissies van de minister, zullen in de nieuwe konstellatie tot taak hebben om op verzoek van het bestuur van de SLO of uit eigener beweging adviezen uit te brengen aan het bestuur van de SLO.
Kan het totstandkomen van een struktuur op zichzelf verheugend genoemd worden, nochtans zijn in de nota nog *een aantal vragen* open gebleven.
* Ondanks de herhaalde uitspraak dat het onderwijsveld ten nauwste dient te worden



betrokken bij de besluitvorming op het terrein van de leerplanontwikkeling, dat de school zelf gestalte dient te geven aan het te geven onderwijs, wordt niet konkreet aangegeven hoe het onderwijsveld zou moeten partisiperen in de eerste jaren van de leerplanontwikkeling. Onderwijs dient in en met de scholen ontwikkeld en vernieuwd te worden en niet vanachter een buro.

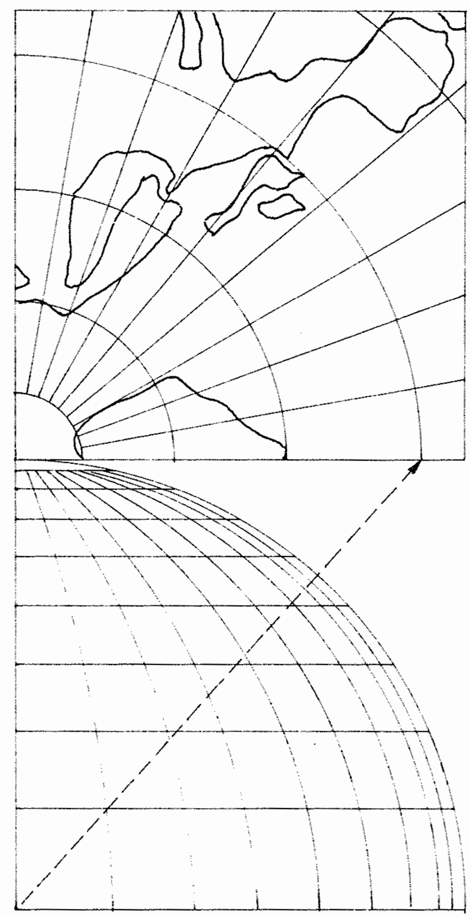
* De taak van de landelijke pedagogische centra en de regionale begeleidingsdiensten met betrekking tot de leerplanontwikkeling wordt nog niet genoemd (een nota hierover wordt wel in het vooruitzicht gesteld).
* Een struktuur voor de heroriëntering van onderwijzers wordt nog niet gegeven (een regeling wordt in het vooruitzicht gesteld).
* Voor de plaats van de opleiding van onderwijsgevenden geldt hetzelfde. De vraag is gerechtvaardigd of het niet aanbeveling verdient hierover op korte termijn duidelijkheid te krijgen.

Leerplanontwikkeling dient volgens ons van meet af aan in nauwe samenwerking met het onderwijsveld te geschieden. Heroriëntering van onderwijsgevenden, begeleidingsinstanties en opleidingen kunnen vanaf het begin de leerplanontwikkeling steunen.[1])
In de kern richten onze bezwaren zich niet tegen het feit dat op centraal nivo een struktuur tot stand komt, ook al rijzen er vragen hoe die in konkreto zal gaan werken, maar tegen het feit dat onvoldoende naar voren komt dat prioriteit moet worden toegekend aan vernieuwingsaktiviteiten *in de praktijk* van het onderwijs.
Weliswaar wordt in de nota een ontwikkeling in de regio open gehouden, maar juist de wijze waarop de in de praktijk van het onderwijs ten uitvoer te brengen vernieuwing samenloopt met uitgangspunten en ontwikkelingen op centraal nivo is van essentieel belang. Ook deze samenhang vraagt meer aandacht.

Bovenstaande pretendeert niet een volledig overzicht te geven van de op handen staande struktuur en alle vragen, die daarbij te stellen zijn. Het gaat er alleen om een summier overzicht te geven van de stand van zaken en de plaats van het IOWO in het geheel.

[1]) Voor een uitgebreide uiteenzetting hierover verwijzen wij naar de rubriek 'Leerplanologie' in de tweede en derde jaargang van dit Bulletin.

berichten uit het buitenland



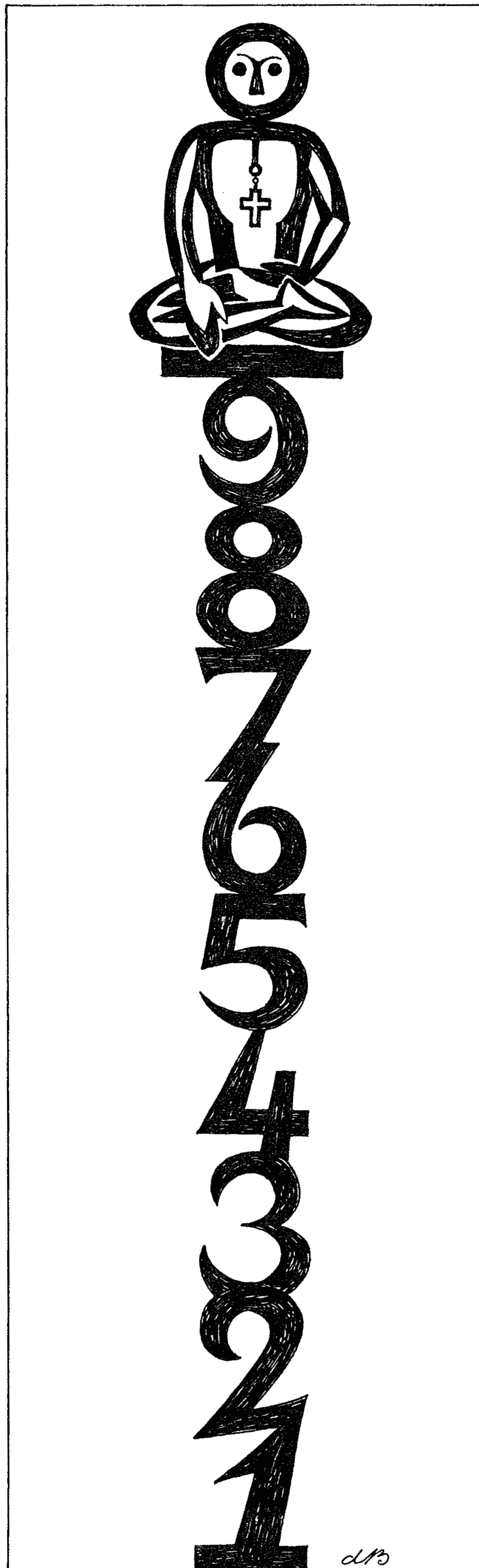
EEN GESPREK IN ANTWERPEN

KLAAS KOSTER
ROB DE JONG

INLEIDING

Het Centrum voor Didaktische Vernieuwing te antwerpen is een afdeling van het H. Pius X - Instituut, gehuisvest aan de VII^{e} olympiadelaan.
Klaas Koster en Rob de Jong hebben onlangs een bezoek aan dit centrum gebracht. In de eerste plaats omdat de situatie in vlaanderen met betrekking tot het wiskunde-onderwijs aan bod moest komen in het bulletin — de voorgaande 'berichten' waren gewijd aan projekten in het franstalige gebied van belgië. Vervolgens omdat De Standaard (november 1973) en De Gazet van Antwerpen (maart 1974) enkele intrigerende artikelen over het wiskunde-onderwijs in belgië bevatten. In deze artikelen wordt gereageerd op een aantal TV-uitzendingen van de BRT, waarin — aldus de auteur — men doet alsof een bepaalde richting op het gebied van het wiskunde-onderwijs de enige, echte en officieel-goedgekeurde (want gesubsidieerde) zou zijn.
De politieke achtergronden van de hele kwestie zijn te gekompliseerd om in een paar regels uit te leggen. Het heeft in ieder geval iets te maken met allerlei gevoeligheden tussen het rijksonderwijs en het katholiek onderwijs enerzijds en diskriminaties op het gebied van de ideologische vrijheid anderzijds.

Stuwende kracht achter het Centrum voor Didaktische Vernieuwing en schrijver van bovengenoemde artikelen is Valeer van Achter — voor vele nederlandse lezers geen onbekende —



Van Achter – een veertiger, scherp, snel en gedreven formulerend, liefhebber van reizen, voetbalkijken, filosofie (Merleau-Ponty) en fotografie – studeerde opvoedkunde in leuven (proefschrift over rekenrijpheid, 1958). Was aanvankelijk werkzaam bij de onderwijzersopleiding, maar is nu in het H. Pius X verbonden aan de opleiding van regenten – leraren onderbouw sekundair onderwijs.
Publiseert veel. In nederland zijn vooral bekend:

– De modernisering van het rekenonderwijs op de basisschool (den bosch, 1969),
– Stromingen in het moderne rekenonderwijs (tilburg, 1972).

Hij is voorts redaktielid van *Jeugd in School en Wereld, Denken en Rekenen* en *Getal in Beeld.*

Met een verontschuldigend glimlachje 'tja, het is wel veel maar komaan de terugreis naar utrecht duurt lang', worden we al meteen bij binnenkomst voorzien van cirka 3 kg. dokumentatiemateriaal: oranje, gele en groene pakketten uit het navormingsprojekt 'Modernisering rekenen lager onderwijs'.

HET GESPREK

VvA: Valeer van Achter
WB : Wiskobas-Bulletin

WB *Kun je ons iets vertellen over de verbanden waarin dit materiaal funktioneert?*

VvA Er zijn bepaalde scholingskursussen. Er zit een bepaalde draad in, die we eigenlijk nog niet veranderd hebben, omdat we er zoveel sukses mee hebben. Ik begin namelijk gewoonlijk met de beschrijving van de modernisering rekenen. Wij noemen dat niet moderne wiskunde. Dat geeft er een heel verkeerd beeld aan. Kleuterleidsters moeten klas 1 en 2 meemaken, zodat ze een goed beeld krijgen.
Als ze de beschrijving hebben doorgemaakt, dan moeten ze het praktikum in. Eerst oriëntatie en dan het praktikum, waarbij ze dan ook aantekeningen moeten maken. Dan komen de vragen los en kun je de wiskunde-achtergrond geven. Als dat gedaan is zien ze een reeks films. Meestal films uit frankrijk maar ook wel uit canada. Als ze deze films gezien hebben krijgen ze een drietal demonstratielessen van medekursisten. Aan het eind krijgen ze een getuigschrift.
Dat patroon herhaalt zich voor de derde en vierde klas en nu zijn we bezig met de vijfde en zesde klas
....
Er zijn 2800 onderwijzers uit antwerpen en turnhout, die zo'n 30 uur per jaar (3 uur per week) de kursus volgen c.q. hebben gevolgd. Dit scenario voldoet. Niemand blijft weg. Er komt nog steeds bij.

WB *Worden de mensen ook vanuit de inspektie gedwongen om deze kursus te volgen?*

VvA Neen, de inspektie staat het zo vanaf de kant te bekijken. Over een paar maanden gaan we onze ideeën officieel blootstellen aan al diegenen, die verantwoordelijkheid dragen. We hebben tot nu toe een beetje in stilte gewerkt.

WB *Misschien kunnen we nog even terugschakelen en eerst met elkaar praten over de opleiding van onderwijzers. We komen daarna vanzelf terecht bij de begeleiding, de aktiviteiten van het centrum en aktuele vragen rond 'televisie' en 'richtingen'.*
Als je hiermee akkoord gaat, dan wilde ik nu de opleiding voor onderwijzer en kleuterleidster aan de orde stellen.

VvA De opleiding tot onderwijzer duurt 2 jaar, waarbij elke aankomende student (leeftijd ca. 18 jaar) nivo humaniora (VWO) heeft. Men moet een ingangsproef afleggen, een kort proefje, waaruit je kunt zien of ze met kinderen kunnen omgaan, of ze kreatief zijn, enz. Ze mogen zelf een aktiviteit kiezen, bijvoorbeeld een sport leiden of – als ze guitaar spelen – een liedje leren.
....
Er is een hele vernieuwing aan de gang

in de opleiding voor kleuterleidsters. Nu is het nog zo dat ze vanaf de leeftijd van 15 jaar een eigen spesifieke opleiding hebben van 4 jaar. Ze kunnen dus klaar zijn op 19 jaar. Men heeft het diploma humaniora niet nodig. In 1974 zal de zaak gereorganiseerd zijn. Dan is het precies hetzelfde als bij de onderwijzers-opleiding: humaniora plus 2 jaar. Dus in 1976 de eerste nieuwe kleuterleidsters.

....

Natuurlijk is het gewenst dat deze twee opleidingen dichter bij elkaar komen. In *'Jeugd in School en Wereld'* gaan we binnenkort een spesiaalnummer wijden aan deze integratie. (april '74)

....

Een ander punt moet eveneens genoemd worden, namelijk de rationalisatie. Tegen 31 maart 1974 moet de regering klaar komen met een rationalisatieplan. En dat zou weleens een totale reorganisatie van aantal en aard der normaalscholen kunnen betekenen, in de zin van geïntegreerd.

Rationalisatie heeft ook vooral te maken met de financiële kant. Het aantal instituten zal worden beperkt.

Sommige normaalscholen zullen wegvallen, zoals ook in nederland pedagogische akademies samensmelten.

WB *Je hebt ook normaalscholen, die opleiden voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs.*

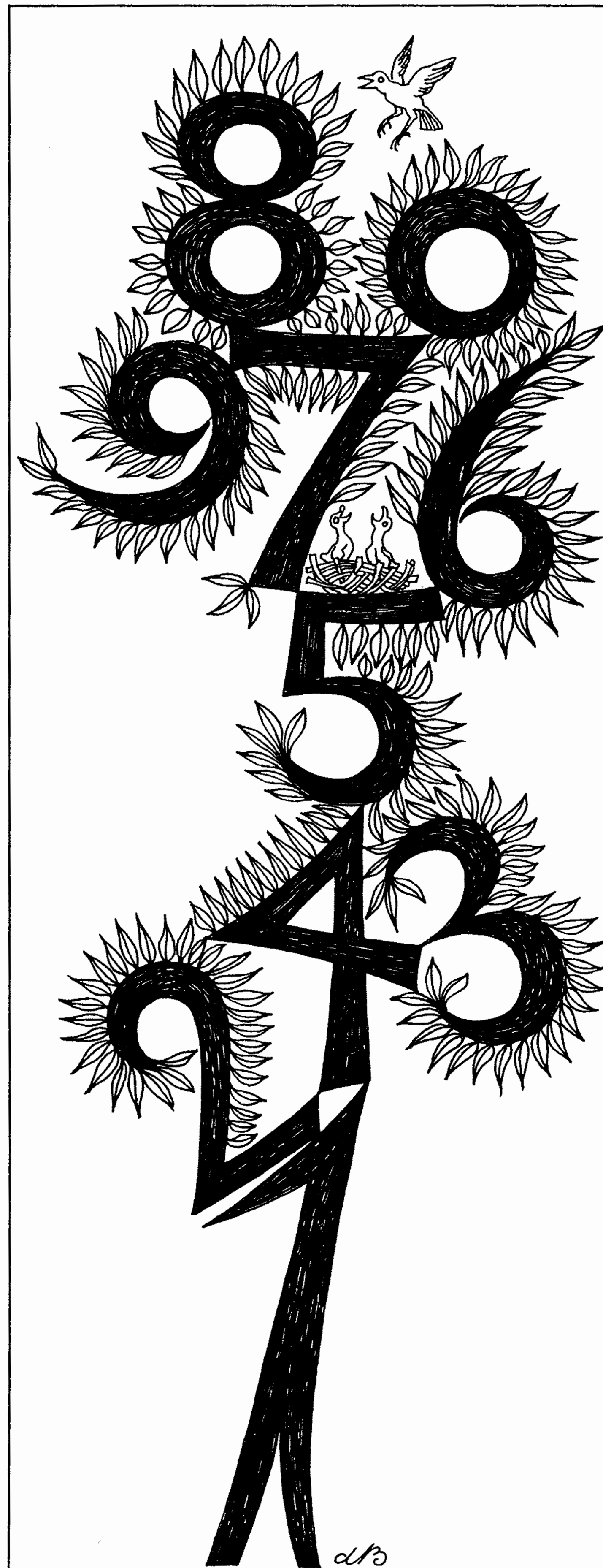
VvA Ja, daar sta ik in. Zoals bij ons in Pius X heb je een opleiding voor onderwijzer en voor regent. Een regent is dus eigenlijk een leraar, die een bevoegdheid heeft voor 3 vakken voor de leeftijdsgroep van 12-15 jaar, ongeacht het schooltype.

....

We hebben direkt niets met elkaar te maken, ook al zitten we in hetzelfde gebouw. Die opleiding duurt ook 2 jaar. Reeds jarenlang wordt echter de wenselijkheid naar voren gebracht om te komen tot een driejarige opleiding.

WB *Hoeveel uur wordt op de opleiding voor onderwijzers besteed aan wiskunde?*

VvA De wiskundeleraar geeft zo'n 2 uur per week wiskundige studie van het programma van de lagere school en hij werkt daarbij samen met de leraar algemene didaktiek om de vakdidaktiek in de lessen goed op elkaar af te stemmen. Het is een verplicht vak voor iedereen. Spesialisatie kennen wij niet. Wij leiden en-bloc één type all-round onderwijzer



op. Er is geen aparte opleiding voor schoolhoofden.

WB *Wanneer de onderwijzer van de opleiding afkomt, wordt hij dan nog op de één of andere manier begeleid?*

VvA In de eerste plaats wordt hij begeleid door het schoolhoofd. Maar als het een school is met minder dan 300 kinderen, dan heeft het schoolhoofd een klas. U begrijpt: de begeleiding is minimaal, want het schoolhoofd heeft ook allerlei administratief werk.

Op de tweede plaats begeleidt de eigen inspektie. In het katholiek onderwijs spreken we van diocesane inspektie, maar ook de staatsinspekteur geeft toch wel praktische hulp aan deze jonge mensen. De inspektie is verregaand bevoegd om de metodiek te beoordelen. De inspektie kontroleert het nivo. Maar hij geeft vaak een surplus. Zo'n inspekteur komt niet veel op school. Het is geen dagelijkse begeleiding.

In de derde plaats komt dan de normaalschool in zijn navorming. Men roept de afgestudeerden wel samen, maar dat verschilt van school tot school.

WB *Is jullie centrum voor didaktische vernieuwing dat zich bezighoudt met de recyclage, te vergelijken met de navormingsaktiviteiten van de normaalschool?*

VvA Het centrum is een initiatief, dat zoals in de statuten ook staat, voorziet in een navorming van leraars, onderwijzers en eventueel kleuterleidsters, telkens wanneer zich de noodzaak opdringt de hele didaktische aanpak te herzien.

Dat initiatief is 5 jaar geleden genomen om aan een breed publiek een goede informatie te geven, die ook een praktische informatie is en het sukses is enorm, gezien het aantal.

Het centrum zelf heeft geen geld. De onderwijzers moeten hun eigen kursussen betalen en dat is ongeveer 300 frank (21 gulden). Het kursusmateriaal hoeven ze dan niet apart te betalen.

Ze komen soms van heel ver en opmerkelijk is dat er veel vrouwen bij zijn. Ik heb daar geen verklaring voor.

Het gebeurt allemaal vrijwillig, buiten de schooluren.

....

De oprichting van ons centrum is tevens gemotiveerd om vooruit te lopen in de richting van didaktische centra. De didaktische centra zijn er nog niet officieel. Er is een dekreet — men noemt dat een wettekst — om te komen tot de oprichting en subsidiëring van didaktische centra, die tamelijk grote centra zullen zijn. Men denkt wel — vooral van CVP-zijde — dat een groep normaalscholen, samen met de universiteit moet komen tot zo'n didaktisch centrum. Naar mijn gevoel kunnen dat tussen 7 en 15 centra in vlaanderen zijn. Als men ze kleiner maakt dan kunnen ze een meer begeleidende taak voor de scholen hebben. Misschien zijn het er dan 15. In nederland zijn er veel meer.

WB *Denk je eraan om de televisie in te schakelen bij de heroriëntering?*

VvA Daar zijn we nog niet bij gevraagd. Dat is juist politiek. Er is nu een serie van 18 lessen en daarin is enerzijds voornamelijk de richting Papy. Men ziet bijvoorbeeld steeds de naam Holvoet en Vermandel op het programma. De presentator is een pedagoog van de gentse universiteit en die presenteert wiskunde aan onderwijzers. Maar dat is al gericht op de lagere school, want er zijn soms fragmenten van klassesituaties, waardoor men de wiskunde van het sekundair onderwijs bijna onvertaald in de lagere school-situaties brengt. En daar ben ik juist op tegen.

Maar aan de andere kant — u kent het centrum Papy, een wereldcentrum — die mensen hebben een bepaalde wiskundige visie en die wensen dit wereldkundig te maken.

Het standpunt van Papy is dat de lagere school wel degelijk dezelfde wiskunde aan kan. Zij zeggen dat ze wel mooie, speelse, imaginaire situaties laten zien, maar de kinderen krijgen wel degelijk beschouwende wiskunde.

Soms komt ook op de TV de groep met De Herdt en Barbry. De Herdt is een vrijgestelde van de Cuisenaire-vereniging. Deze Cuisenaire-vereniging heeft veel invloed, ook in vlaanderen. Ik noem u de naam van Geronnez. Men werkt erg hard.

Als vierde komt de Decroly-groep. Deze heeft, dacht ik, niet zoveel invloed. Hun uitstralingskracht is beperkt.

....

Wat ik dus op de TV-lessen tegen heb is dat een bepaalde ideologie — namelijk de richting Papy — officieel gesubsidieerd wordt, terwijl andere richtingen geen kansen krijgen. Eén bepaalde op-

vatting van wiskunde-onderwijs wordt gemaakt tot *de* opvatting, alsof er niets anders zou zijn.
Voor ons centrum zou ik zo graag één vrijgestelde – een wiskundige – hebben om de zich uitbreidende taken op te vangen.

....

Heel anders dan Papy gaat bijvoorbeeld Picard te werk, didaktisch goed overwogen. Een kenschets met enkele zinnen. Picard stelt een aanpak 'activités mathématiques' voor, dat wil zeggen: samenhangende konkrete aktiviteiten, die geleidelijk voeren naar rekentechniek en inzicht in de wiskundige struktuur.
Geen verbalistische onkinderlijke beschouwende wiskunde. Integendeel, een aktief onderwijs met een enorme eerbied voor de spontaneiteit van het kind. Dat speelse, dat 'learning by doing' staat echter in het perspektief van de wiskunde. In engeland verliest men dat perspektief wel eens wat uit het oog, is het soms meer 'doing' dan 'learning'. Toch kunnen we er veel van leren – Nuffield bijvoorbeeld.
In 'Getal in Beeld' vind je als het ware een kombinatie van Nuffield en Picard.

WB *Wat zijn je beweegredenen om je in te zetten voor de modernisering van het rekenonderwijs? Waarom moderne wiskunde?*

VvA De wiskunde is nodig omdat wiskunde middelen geeft – wiskunde is toch een middel, geen doel op zichzelf – om een bijkans chaotisch dreigende hoeveelheid gegevens fijn te ordenen. Men krijgt overzicht en inzicht in de situatie, zodat je niet direkt emotioneel gaat reageren. Wiskunde leert struktureren, leert netjes, overzichtelijk ordenen. Wanneer iemand de situatie meester is, kan hij gewoon reageren. Ik denk dat dat de vormende kracht is van de wiskunde.
Bij de zogenaamde oude wiskunde ging het toch voornamelijk om een stel van technieken, ook op hoger nivo.
En nu is het zo, dat men kinderen – gegeven een situatie die zij zelf aanduiden, die zij zelf koderen – met die gegevens wiskunde laat maken. Ik wil het wel noemen een kinder-wiskunde, zoals men het ook heeft over kinder-

katechismus. Op kinderlijk nivo een eigen wiskunde kreëren, waardoor zij wiskunde produseren. Wanneer zij later in het voortgezet onderwijs komen, dan herkennen zij het direkt: dat is precies hetzelfde als wat wij op de lagere school hebben gedaan.
Nicole Picard heeft ook hierop gewezen in haar mooie boek *'Mathématique et jeux d'enfants'*.[1]) Een prachtig werkje om zelfs volwassenen met wiskunde-produseren vertrouwd te maken. De mensen brengen in een situatie, waarin zij afspraken maken, wat ook in een spelsituatie gebeurt, en waarin zij steeds verder komen en op den duur de situatie gaan onderzoeken op z'n struktuur. Ze weten het niet, maar ze zitten midden in de kern van de wiskunde. Eigenlijk is dat de kunst!
In het middelbaar onderwijs geeft men wiskunde, maar de studenten kennen geen wiskunde, ze krijgen de produkten van de wiskunde, die de leraar netjes debiteert. Ze kunnen geen wiskunde produseren, niet op een zelfstandige manier wiskunde maken.
En daar gaat het toch eigenlijk om bij de moderne wiskunde. Dat het niet lukt komt omdat men de moderne wiskunde vermengt met traditionele metoden van lesgeven. En dat is faliekant. Dat zeg ik ook tegen de mensen: als je dit pakket meeneemt en je gaat er de kinderen eens lekker mee lastigvallen, dan loopt het fout uit, begin er dan alsjeblieft niet aan.

---

[1]) In de reeks 'Enfance-Education-Enseignement' (Casterman-Poche, 1970).

Dat voelen de mensen ook wel aan. Het vereist echter een training van de onderwijzers om de kinderen aktief te laten zijn, als jonge onderzoekers, die zelf wiskunde maken. De leerkracht krijgt daar een heel andere plaats. De recyclage is hard nodig, want men geeft toch vaak nog zeer sterk dogmatisch les.

....

Er is iets typisch eigen aan de wiskunde, dat aansluit bij aktief onderwijs.

ENKELE INDRUKKEN VAN HET MATERIAAL

Op de terugreis van antwerpen naar huis (in utrecht en drente) hebben we het materiaal dat Valeer van Achter ons had meegegeven in sneltreinvaart doorgenomen. Later hebben we ook thuis, achter het buro, in de stapel stencils zitten neuzen.

Onze konklusie was dat het kennelijk telkens weer moeilijk is om bepaalde ideeën over hoe het wiskunde-onderwijs gestalte zou moeten krijgen, ook in het geproduseerde materiaal tot uitdrukking te brengen. Bij de konstruktie van konkrete programma's voor de leerlingen en bij het samenstellen van een uitgebreid her- en bijscholingspakket voor de leerkrachten blijkt een deel van de aanvankelijk uitgesproken ideeën tussen de wal en het schip terecht te komen. Er treedt dan een zekere verschraling op van datgene wat een auteur of een groep auteurs oorspronkelijk voor ogen stond.

Hoewel Van Achter bijvoorbeeld de spontaneiteit van het kind als verbaal uitgangspunt neemt voor zijn programmakonstruktie en een onkinderlijke beschouwende wiskunde afwijst, komt men in het geproduseerde materiaal dan toch voorbeelden tegen, die nogal formeel aandoen en wél in de richting gaan van beschouwende wiskunde.

Eveneens lijkt het erop dat de wiskundige achtergrond-informatie in het pakket, verzorgd door Gaston van Reusel, niet geheel sinchroon loopt met de ideeën, die Van Achter in het gesprek noemde. We kregen de indruk dat het pakket nog in sterke mate overeenkomt met de tot dusver gevolgde werkwijze in de methode 'Denken en Rekenen'. De engelse Nuffield-benadering en de nieuwere inzichten van Picard kwamen we in het pakket nauwelijks tegen.

We verwachten echter dat bij een eventuele herziening van het pakket aan dit punt wel aandacht wordt besteed.

nieuw op de markt

ED DE MOOR

Ditmaal een potpourri van oud en nieuw, voor elk wat wils.

Kent u het tijdschrift *The Arithmetic Teacher'?* Het is eigenlijk te gek om in dit tijdschrift reklame te gaan maken voor een 'konkurrerend' blad. Maar ja, ook het Wiskobas-Bulletin bereikt nog lang niet elke basisschool. Er wordt op vele basisscholen aandacht besteed aan het inrichten van leerlingenbiblioteken en dokumentatiecentra, vaak in samenwerking met de ouders. Zeer goed!
Vaak ontbreekt echter een goede biblioteek en/of leestafel voor de onderwijzers. En op die leestafel zou dit tijdschrift moeten liggen en mogelijk 'The Arithmetic Teacher', een uitgave van de National Council of Teachers of Mathematics (usa).[1])
Het tijdschrift bevat algemeen onderwijskundige en vooral matematisch-didaktische artikelen met betrekking tot het basisonderwijs (meestal wel op de amerikaanse situatie betrokken). Daarnaast ook veel 'IDEAS', direkt op de onderwijspraktijk gerichte topics, waaruit een entoesiaste onderwijzer zelf lessen kan samenstellen. Als zodanig vooral ook een nuttige informatie- en inspiratiebron voor schooladviesdiensten en PA-docenten.

* * *

In groot-brittannie bestaat een grote verzameling van verschillende soorten werkkaarten voor het basisonderwijs. Het is een oude angelsaksische traditie dat er in het onderwijs veel aan meten gedaan wordt en de meeste sets werkkaarten staan daar dan ook bol van. Ik betwijfel sterk of hieraan wel zo veel aandacht besteed dient te worden als men daar doet. Zo beheersen ook de bekende opdrachten als het vergelijken van gewichten, lengtes, tijden, etc., de *'Maths Adventure Cards'* van Jan Stanfield.[2])
Er zijn 4 sets, die elk ingedeeld zijn in 'length', 'weight', 'capacity', 'time', 'shape' en 'looking around us'. Wel, over de eerste vier onderwerpen weinig nieuws, maar onder de 'shape'- en 'looking around us'-kaarten zijn beslist enkele interessante opgaven, die ontwerpers op een goed spoor kunnen zetten. De kaarten zijn in 1971 voor het eerst uitgegeven en herdrukt in 1973.

* * *

De 'shape'- en 'looking around us'-kaarten uit de hierboven genoemde serie brengen mij op de meetkunde, een onderdeel van de wiskunde dat langzamerhand een stiefkind lijkt te worden. Daarom wijs ik op alweer een uitgave van de National Council of Teachers of Mathematics: een leuk boekje van Marion Walter, *'Boxes, squares and other things'.* Het heeft als ondertitel 'A Teacher's Guide for a Unit in Informal Geometry' en bevat vooral in het begin voorbeelden van mogelijk meetkunde-onderwijs op de basisschool. Uitgaande van opengeknipte 'milkcartons' worden lessen beschreven, waarbij kinderen greep op de ruimte en het vlak kunnen krijgen. Helaas gaat men tegen het einde van deze gids sterk de algoritmische kant uit met het voortdurend invullen van groepstabellen.

* * *

De wiskundeleraar zal zeker het boek van Van Hiele *'Begrip en Inzicht'* aanschaffen.[3]) Degenen, die van Hiele's proefschrift en artikelen uit Euclides kennen, zullen veel herkenbaars aantreffen. Toch vond ik het prettig dit boek van één van de weinige wiskunde-didaktici die nederland telt te lezen, hoewel ik de ondertitel 'werkboek van de wiskunde-didaktiek' niet begrepen heb.

* * *

Beginnende (maar ook geroetineerde) PA- en VWO-leraren kunnen te rade gaan in het boek *'Lessen over lessen'.*[4]) Dit boek is ontstaan uit een serie stencils, die gemaakt zijn ten behoeve van de lerarenopleiding aan de rijksuniversiteit van groningen. Het is een gemakkelijk leesbaar boek over onderwijskunde met machtige referentielijsten, waaraan u de eerste jaren genoeg hebt als u zich in deze problematiek wilt storten.

* * *

Van het tweede ICME-kongres, gehouden in augustus 1972 te exeter, zijn de hoofdlezingen en een keuze uit de 'congress papers'

[1]) Het korrespondentie-adres is: National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston Virginia 22091, USA. Een abonnement kost $ 11.00.

[2]) Evans Brothers Ltd. Montague House, Russel Square, London W.C.I.

[3]) Muusses, Purmerend, 1973.

[4]) Hopman, van Laatum, Santema, Toren – een boek uit de serie onderwijskundige informatie voor docenten –, Stafleu & Zn, Leiden 1973; *f* 25,–.

bijeengebracht door A.G. Howson onder de titel *'Developments in Mathematical Education'.*[1]) Het voorblad is gesierd met de portretten van George Polya en Jean Piaget. Over de schitterende wiskunde-didaktiek-boeken van Polya zouden we nog eens moeten schrijven.

* * *

Zo, dat was dat! Wat mij de laatste tijd echter het meest bezighoudt is de meetkunde. Onze interne kadervorming heeft het momenteel als onderwerp van studie. Een heroriënteringsblok over meetkunde staat op het punt geboren te worden. Allerlei meetkundige zaken kunnen reeds op kinderlijk nivo aangevat worden. Toen wij enige maanden geleden de verjaardag van mijn oudste zoontje vierden, brachten wij de middag door met vliegtuigjes vouwen. Dit naar aanleiding van het schitterende *'Papieren Vliegtuigjesboek'.*[2]) De uitgevouwen patronen vertoonden uiteraard allerlei symmetrieën, die mij deden vermoeden dat naar aanleiding van zo'n patroon best een aardig stukje meetkunde-onderwijs is op te bouwen. Maar ja hoe, en bovendien .... papieren vliegtuigjes door de klas zijn het schrikbeeld van elke leraar.

[1]) Cambridge University Press 1973; £ 2.20.

[2]) Uitgave Bert Bakker; *f* 12,50. (inleiding van K. Schippers)

vier vieren

DE OPLOSSING VAN DE ZOON VAN DE VADER VAN BASJE OFWEL:

$$\left[\sqrt{(|[\_\sqrt{[\sqrt{[\sqrt{([\sqrt{(|[\_\sqrt{4!}]|)!}])!}]}]}]|)!}\right] -$$

$$\left((|[\_\sqrt{[\_\sqrt{4!}]|}]|)!\right)! +$$

$$\left(|[\_\sqrt{4!}]|\right)! + 4 = 4444$$

HUUB JANSEN

In het tweede nummer van deze jaargang hebben wij u een simpel ogend probleem aangeboden. Gevraagd werd toen om met vier cijfers 4 een rijtje sommetjes te maken met uitkomsten 1, 2, 3, 4, 5, ... waarbij een soepel gebruik gemaakt mocht worden van allerlei rekenkundige bewerkingen. Dat wil zeggen: zonder onderbreking zover mogelijk in de rij natuurlijke getallen doordringen. Roem en eer werd beloofd aan hem of haar die het beste resultaat zou weten te bereiken. Het zal wel nooit wetenschappelijk onderzocht worden of juist deze belofte voor vele lezers de stimulans betekende om aan het werk te gaan, maar wel kunnen we konstateren dat geen enkel probleem zoveel inzendingen opgeleverd heeft. We hebben zelfs vernomen dat tijdens een wiskobas-heroriënteringskursus de deelnemers niet aan serieuze zaken wilden beginnen vóór dat gezamenlijk was uitgedokterd hoe je met vier vieren het getal 35 kon produseren. Dat getal 35 is niet toevallig want uit de inzendingen bleek dat de getallen tussen 30 en 40 een hinderpaal betekenden; daar stokte meestal de produktie.

Opvallend is dat voor de meeste inzenders de vier bekende hoofdbewerkingen — optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen — al spoedig niet meer toereikend zijn.
Andere bewerkingen: worteltrekken, machtsverheffen, fakulteit, worden dan in de strijd geworpen.

Een paar voorbeelden:

$$\frac{4!}{\sqrt{4}} - \frac{4}{4} = 11, \text{ immers } \frac{4!}{\sqrt{4}} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{2} = 12.$$

Met $\frac{4!}{\sqrt{4}}$ kun je trouwens een rijtje vormen:

$$\frac{4!}{\sqrt{4}} \times \frac{4}{4} = 12$$

$$\frac{4!}{\sqrt{4}} + \frac{4}{4} = 13$$

$$\frac{4!}{\sqrt{4}} + \frac{4}{\sqrt{4}} = 14.$$

Dit 'vier-vieren' probleem blijkt een probleem met historie te zijn. In een engels tijdschrift van 1881 komt het al voor en toen waren er geen oplossers die 19 wisten te schrijven met vier vieren en de vier hoofdbewerkingen. Ook onze inzenders is dat niet gelukt.
Met het fakulteitsteken lukte het wel:

$$4! - 4 - \frac{4}{4} = 19.$$

Met 4! en nog drie vieren komt men weer een eind verder:

$$4! - 4 \times \frac{4}{4} = 20$$

$$4! - 4 + \frac{4}{4} = 21$$

$$4! - 4 + \frac{4}{\sqrt{4}} = 22$$

$$4! - \sqrt{4} + \frac{4}{\sqrt{4}} = 23$$

$$4! - 4 + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 24$$

$$4! + \sqrt{4} - \frac{4}{4} = 25$$

$$4! + \sqrt{4} \times \frac{4}{4} = 26$$

$$4! + \sqrt{4} + \frac{4}{4} = 27$$

$$4! + \sqrt{4} + \frac{4}{\sqrt{4}} = 28$$

$$4! + 4 + \frac{4}{4} = 29$$

$$4! + 4 + \frac{4}{\sqrt{4}} = 30$$

$$4! + \frac{4! + 4}{4} = 31$$

$$4! + 4 + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 32.$$

En voor 33 kregen we een heel mooie binnen:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(4)^{4!}}}} + \sqrt{4}}{\sqrt{4}} = 33.$$

Even narekenen:

$(4)^{4!} = 4^{24}$,
en $\sqrt{4^{24}} = 4^{12}$ (bij worteltrekken wordt de eksponent gehalveerd!),
daarna $\sqrt{4^{12}} = 4^6$,
en vervolgens: $\sqrt{4^6} = 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

Dit levert op:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(4)^{4!}}}} + \sqrt{4}}{\sqrt{4}} = \frac{64 + 2}{2} = 33.$$

We hebben al opgemerkt dat 35 een struikelblok is gebleken. Nog sterker: er is slechts één inzender geweest die deze hindernis heeft kunnen nemen. Op grond hiervan kunnen we deze inzender — Reindert Oort, 2e jaarsstudent aan de gemeentelijke pedagogische akademie te amsterdam — alvast benoemen tot wiskobas-vier-vieren-kampioen. Hulde!

Voor 35 maakte onze kersverse kampioen gebruik van de, voor sommige lezers onbekende, *entier-funktie* (entier: geheel).
Daarom eerst enige eksplikatie.
Stel, u wilt met flipperautomaten uw brood gaan verdienen. U richt een speelzaal met deze trekkasten in en om het flipperen te stimuleren werkt u met de volgende tariefregeling:

speeltijd	tarief
minder dan 1 uur	gratis
1 uur of meer, maar minder dan 2 uur	*f* 1,–
2 uur of meer, maar minder dan 3 uur	*f* 2,–
3 uur of meer, maar minder dan 4 uur	*f* 3,–
4 uur of meer, maar minder dan 5 uur	

Deze tariefregeling kunnen we wiskundig beschrijven met onze entier-funktie, waarvoor we rechte haken gebruiken.
Vijf en een half uur flipperen kost *f* 5,–. Met de rechte haken van de entier-funktie noteren we in wiskundetaal: $[5\frac{1}{2}] = 5$. Anders gezegd: *de 'entier' van een getal a is het grootste gehele getal dat kleiner of gelijk is aan a zelf.*
Andere voorbeelden:

$$[1{,}75] = 1,$$
$$[\tfrac{3}{4}] = 0,$$
$$[3] = 3,$$
$$[-2\tfrac{1}{2}] = -3.$$

Uit het laatste voorbeeld zien we dat we met onze definitie boven de flipperkastenregeling uitstijgen, want ook negatieve getallen gaan mee doen.
We pakken met deze kennis de draad van ons verhaal weer op.
35 is nu te schrijven als:

$$4! + \frac{4!}{\sqrt{4}} - [\sqrt{\sqrt{4}}], \text{ want}$$

$$4! = 24$$

$$\frac{4!}{\sqrt{4}} = \frac{24}{2} = 12$$

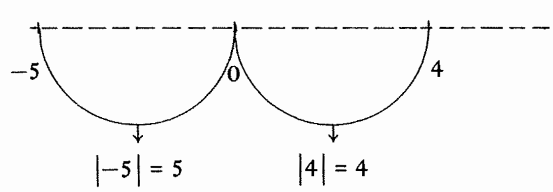
$$[\sqrt{\sqrt{4}}] = [\sqrt{2}] = [1{,}4\ldots] = 1$$

(u ziet hier de entier-funktie optreden!)

In 1912 heeft een zekere heer Rouse Ball de getallen van 1 tot 162 met vier vieren verkregen zonder deze entier-funktie te gebruiken. Alleen had hij twee open plekken namelijk 113 en 157, terwijl hij voor 103 en 109 het getal 44 (vierenveertig!) gebruikte. In het engelse tijdschrift 'Mathematics in School' stond in het nummer van juli 1973 een artikel van Keith Selkirk waarin 109 als volgt verkregen werd:

$$109 = \frac{4!\sqrt{4} + .\dot{4}}{.\dot{4}}$$

$.\dot{4}$ is hier een slimme schrijfwijze voor $0{,}444444\ldots = 0{,}\dot{4}$ (nul komma vier repetent). Wanneer u op dit moment even wilt aannemen dat $0{,}\dot{4} = \frac{4}{9}$, dan kunt u deze oplossing zelf kontroleren.
Onze kersverse, hollandse kampioen heeft echter geen repeterende breuken nodig om veel verder te komen dan zelfs de kampioen van de 'Sunday Times' die stopte bij 2338.
Reindert gebruikt zeven bewerkingen — optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, worteltrekken, fakulteit, entier — om nagenoeg elk getal klein te krijgen. Indien nodig hanteert hij ook nog het modulus-teken. Met dit modulus-teken verkrijgen we de absolute waarde van een getal, ofwel de afstand van dat getal tot 0 op de getallenlijn:



Een paar fraaie voorbeelden:

$$[\sqrt{(\sqrt{4}.4 - 1)! + 4}] = 71, \text{ immers}$$
$$[\sqrt{(\sqrt{4}.4 - 1)! + 4}] = [\sqrt{(8-1)! + 4}] = [\sqrt{7!+4}] =$$
$$[\sqrt{5040 + 4}] = [\sqrt{5044}] = [71,\ldots] = 71$$

en

$$(|[-\sqrt{4!}]|)! - 4 - 4 - |[-\sqrt{|[-\sqrt{4!}]|}]| = 109.$$

De kracht van zijn werkwijze schuilt in het feit, dat Reindert vele getallen met slechts één enkele 4 kan schrijven, bijvoorbeeld:

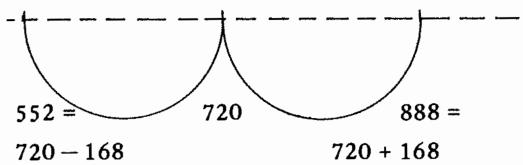
$$|[-\sqrt{4!}]|! = |[-\sqrt{24}]|! = |[-4{,}9\ldots]|! = |-5|! =$$
$$= 5! = 120.$$

Zo kan hij ook met één 4 het getal 720 krijgen:

$$(|[-\sqrt{|[-\sqrt{4!}]|}]|!)!$$

Rekent u maar na!

Met de drie vieren die hij dan nog over heeft, kan hij nu rond 720 een interval bestrijken van tweemaal 168 getallen:



Deze 'interval'-techniek weet hij nog verder uit te werken en dat heeft tot gevolg dat hij met grote stappen de rij natuurlijke getallen doorwandelt.
Het zou de helft van dit bulletin kosten om zijn hele uitwerking aan u te presenteren en hoewel deze prachtige wiskundige kreativiteit een dergelijke publikatie wel verdient, heeft onze hoofdredakteur zijn bezwaren. Uit de ondertitel van dit verhaal èn uit de naam van onze kampioen heeft de trouwe lezer van dit bulletin al begrepen dat de uitspraak 'zo vader, zo zoon' hier weer eens bewaarheid wordt. De ondertitel van dit verhaal:

$$\left[\sqrt{(|[\_\sqrt{[\sqrt{[\sqrt{([\sqrt{(|[\_\sqrt{4!}]|)!}])!}]}]}]|)!}\right] -$$
$$\Big((|[\_\sqrt{[\_\sqrt{4!}]|}]|)!\Big)! +$$
$$(|[\_\sqrt{4!}]|)! + 4 =$$

levert bij narekenen het getal 4444 en ofschoon Reindert Oort er zelf van overtuigd is dat nog verder gegaan kan worden, is hij 's nachts om 4 minuten over 4 met dit mooie getal gestopt, teneinde — zoals hij zelf schrijft — 'een zekere krankzinnigheid te ontlopen'!

3

DE VOETBALTABEL

Langs allerlei omwegen bereikte het volgende probleem ons vanuit de technische hogeschool te eindhoven, alwaar professor Seidel zijn studenten ermee lastig valt.
Het probleem in de nagenoeg oorspronkelijke versie:

Pas op de allerlaatste kompetitiedag werd de strijd om de kampioenstitel beslist. Hoewel fc houtenbeen tegen klikklak maar tot een 1-1 gelijkspel kwam, lukte 't hen toch nog om fc dinamiet — dat tegen moddertrappers in het veld moest treden — van de eerste plaats te verdringen.
De eindstand van de spannende voetbalkompetitie werd maandag in alle kranten gepubliseerd:

		wedstrijden gespeeld	gewonnen	gelijk	verloren	punten
1	fc houtenbeen 04	30	20	6	4	46
2	fc dinamiet	30	20	5	5	45
3	klikklak	30	19	7	4	45
4	door tweedracht sterk	30	20	2	8	42
5	trap maar raak	30	21	0	9	42
6	molensteen	30	19	3	8	41
7	knokenvegers	30	18	4	8	40
8	inter linea	30	18	3	9	39
9	blauw groen	30	16	5	9	37
10	techniko	30	12	7	11	31
11	vv slaapmuts	30	12	6	12	30
12	tektonia 09	30	7	3	20	17
13	sc houthakkers	30	4	1	25	9
14	moddertrappers	30	3	2	25	8
15	doordrammers	30	2	1	27	5
16	sp.ver. brandhout	30	1	1	28	3

Toch zal het de opmerkzame krantenlezer niet ontgaan, dat er iets mis is met de tabel. De eindrangschikking kan er nooit zo uitzien.
Maar waar zit de fout?

Wij hebben slechts een kleine wijziging aangebracht. Iemand die zich op dit probleem stort, gaat meestal eerst narekenen of het totaal aantal doelpunten vóór, gelijk is aan het totaal aantal doelpunten tegen. Omdat daar de fout niet in schuilt en ook omdat lezers van dit tijdschrift — in tegenstelling tot hogeschoolstudenten — een dergelijke rekenoefening niet meer nodig hebben, laten wij de doelcijfers weg.
Het probleem zelf blijft er even lastig mee. U bent dus gewaarschuwd!

ter komple- tering

Het meetlint, dat vanaf de achterkamer tot de voorkamer was uitgerold, had ik eindelijk weer keurig terug in de doos.
Voldaan vroeg ik ter kontrole aan het jongetje (je blijft toch onderwijzer, niet?):
'Denk je dat je het lint vanaf de achterkamer tot de voorkamer op de grond kunt leggen?'
'Nee', antwoordde hij tot mijn verbazing.
'Maar je hebt het toch zelf gezien', zei ik vertwijfeld.
'Nee, want dan is er nog een stukje over', en hij wees op de doos, die inderdaad niet helemaal leeg was toen we de afstand maten.
Het lint was niet 'precies pas', er was nog iets ter kompletering in de doos en dat zat de kleuter niet lekker — een schoen, die past is toch ook niet te groot of te klein?

JAN VAN DEN BRINK

In een vorig artikel[1]) beloofden we wat nader in te gaan op een denkhandeling, die we *kompleteren* noemden.
We gaven u toen geen definitie — we zullen dat ook nu niet doen. Wel merkten we op dat deze denkhandeling ons inziens *universeel* is. Ze is als het ware bij kinderen 'ingebakken': ze demonstreren de handeling haast vanzelf in allerlei situaties (zie het probleem met het meetlint). Tevens bedoelen we met universeel dat het kompleteren niet beperkt is tot problemen van meetkundige of metrische aard, maar dat het ook in andere vormen van matematiseren aan de orde komt. Hieronder zullen we een aantal van die voorbeelden bespreken.
Niet zo zeer om u te overtuigen, dat 'kompleteren' inderdaad universeel is — daartoe zou een metodologisch opgezet onderzoek vereist zijn — maar veel meer om u het kompleteren binnen verschillende wiskundige konteksten te laten 'proeven'.

p	
p	h
p	h
p	h
p	h
p	h

p = 1 poes
h = 1 hond

stapelgrafiek

Op het flanelbord stond deze grafiek.
'Heeft elke hond een vriendjespoes?', vroeg de juf aan de kinderen.
'Ja!'
'Maar heeft elke poes ook een vriendjeshond?'
Alle kinderen vonden dat dit zo was!

De juf ging van onderaf de grafiek langs: 'Heeft deze poes een vriendjeshond en die .... en deze laatste poes ook?'
'Ja', zeiden de leerlingen weer en één wees de plaats aan waar de hond moest worden bijgeplakt.
De kinderen beschouwen heel vaak 'ongelijke zaken' als vergissingen van de juf: ze bedoelt dat elke poes toch een vriendjeshond heeft; ze is een hond vergeten.

Het omgekeerde komt ook voor.

m	m	m	m	m	m	
j	j	j	j	j	j	j

m = plaatje van meisje
j = plaatje van jongen

Deze grafiek geeft de kinderen de indruk dat het aantal jongens gelijk is aan het aantal meisjes.

[1]) 'Laat ze voor je uit lopen' — Wiskobas Bulletin, jaargang 3, nummer 3, pag. 229 en verder — .

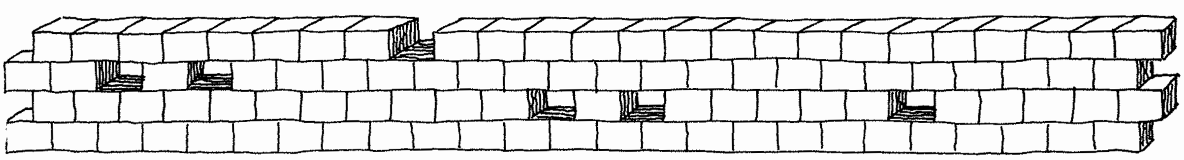
Nadat de kinderen de plaatjes hadden uitgeknipt, waren ze erg verbaasd dat niet aan elk jongetje een meisje was toe te voegen.

- Een leerling zocht overal op tafel en op de grond naar het meisje, dat hij tekort kwam.
- Een ander vond dat de juf kon toveren.

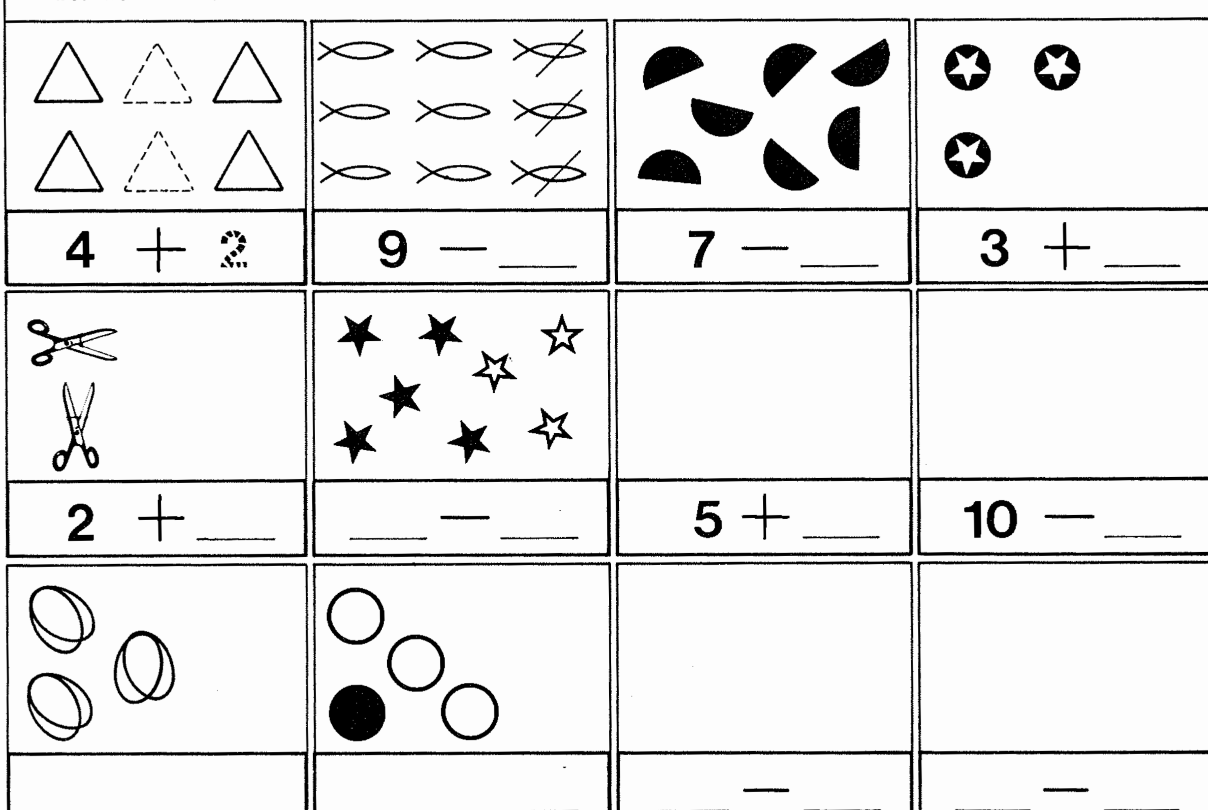
Uit deze twee voorbeelden blijkt dat de kinderen van de eerste klas bij problemen vaak *volledige* grootheden veronderstellen. En zelfs als dit duidelijk niét het geval is, slaan de kinderen direkt aan het kompleteren.
In het wiskunde-onderwijs houden we rekening met dit verschijnsel:

Er zijn 28 domino-stenen.
Er zijn 30 kinderen in de klas.
Elk heeft een dominosteen getrokken.
▶ *Zijn er nu 2 kinderen, die dezelfde steen hebben getrokken?*

In de onderste laag zijn 25 stenen.
▶ *Hoeveel stenen zijn er in elke andere laag?*



het moet 6 worden



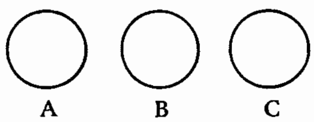
In een vroegere publikatie is er al eens op gewezen dat ook wij, volwassenen, bij allerlei problemen vaak 'kompleteren'. Veelal echter onbewust!

Voor onderwijzenden is het van belang om zich van die denkhandeling bewust te zijn. Wellicht kunnen de bovengenoemde voorbeelden hiertoe bijdragen.

4

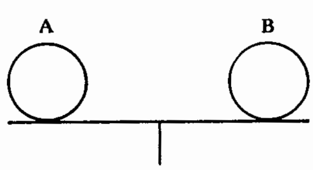
KANSEN MET VALSE MUNTEN

Stel u bezit drie munten:



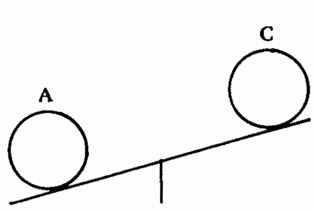
Uiterlijk zijn deze munten gelijk, maar u weet dat er één munt vals is. Dit betekent dat deze munt een afwijkend gewicht bezit: te zwaar of te licht.
U heeft echter de beschikking over een balans en daarmee is de valstrik te vinden.
Het aantal wegingen dat u moet verrichten is afhankelijk van een handige aanpak én van geluk!
Laten wij aannemen dat achteraf blijkt dat munt C vals is, dan kunt u daar op de volgende manieren achter zijn gekomen:

U pakt twee munten — toevalligerwijs zijn het de goede munten A en B — en legt ze op de balans:



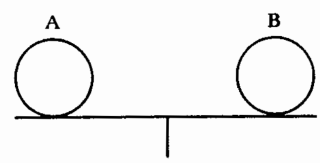
Uit deze stand van de balans kunt u direkt de konklusie trekken dat alleen C een afwijkend gewicht kan hebben en dus de valse munt moet zijn.

U had ook een minder gelukkige hand kunnen hebben en bijvoorbeeld munt A en munt C als eerste tweetal op de balans kunnen leggen:

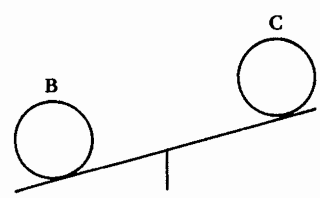


Uit deze stand kunt u nog geen konklusies trekken. U weet immers niet of de valse munt zwaarder of lichter is!

U moet nog één weging verrichten. Deze laatste weging kan bestaan uit een kombinatie A met B, of C met B.
Uit beide balansstanden:



of



kunt u konkluderen dat C vals moet zijn.

Het vinden van een valse munt uit een verzameling munten met zo weinig mogelijk wegingen is een oud probleem.
De bekende wiskunde *Schuh* heeft zich er uitgebreid mee bezig gehouden. Wij breiden het probleem uit door de kansrekening erbij te halen.
Wij zagen dat door één of door twee wegingen uit drie munten de valse gevonden werd, afhankelijk welk tweetal het eerst op de balans gelegd werd.
Onderstaand lijstje geeft aan welke paren bij de eerste weging op de balans kunnen komen en wat de gevolgen zijn:

A en B → 1 weging
A en C → 2 wegingen
B en C → 2 wegingen.

Hieruit blijkt dat de kans $\frac{1}{3}$ is, dat met het kleinste aantal wegingen uit drie munten de valse gevonden wordt.

Onze vraag is:
* *hoe groot is die kans bij vier munten, waaronder één valse?*
* *en bij vijf, zes, zeven, ... munten?*
* *en is er een wetmatigheid in die kansen te vinden?*

wim wiedes

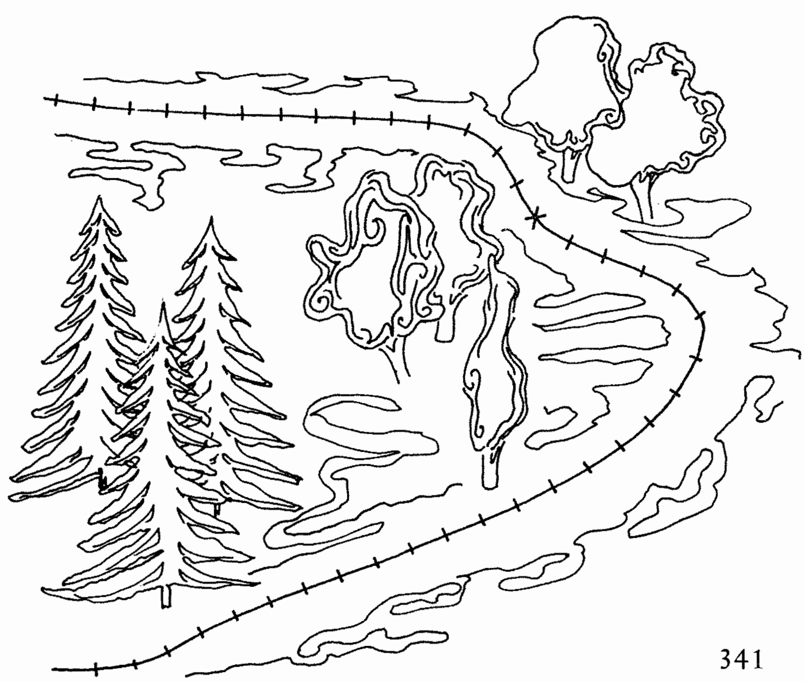
HANS TER HEEGE

Wie loopt daar over het bospad? Zo gebogen en zo haastig lopend? Zie ik het goed? Is dat niet Wim Wiedes?
Ja, dat is Wim Wiedes! Hij komt terug van een lange reis. Hij is bij Sneeuwwitje en de zeven dwergen geweest. Een jaar lang bijna. Hij heeft gewerkt in de grotten van de dwergen. Hij heeft net zo hard gewerkt als de dwergen. Die hebben hem een goede beloning gegeven: een zak met goudstukken!

Kijk, Wim zet de zak even neer en rust wat uit. Hij gaat op een steen langs het bospad zitten. Hij denkt aan zijn vrouw Wies, die hij al zo lang niet gezien heeft. Dan rollen de tranen over zijn wangen.
Na een poos is hij uitgerust en zijn Wim's tranen opgedroogd. Hij staat op en loopt het bospad verder af. Maar hij denkt nog steeds aan Wies. En daarom vergeet hij zijn zak met goud! Die laat hij zomaar staan!
Dat is me wat! Wie laat er nu een zak met goud staan? Als je ook zo graag naar huis wil als Wim, kan dat toch gebeuren.

Als Wim enkele kilometers gelopen heeft, merkt hij dat hij zijn zak met goudstukken is vergeten. Hij holt terug, het bospad af.
'Hier zal ik ongeveer gezeten hebben', zucht Wim.
Hij kijkt om zich heen, maar hij ziet geen zak met goud. Hij ziet wel een grote steen, waarop hij gezeten zou kunnen hebben. Hij ziet ook een grote eikenboom. Maar ja, er staan hier zoveel eikenbomen.

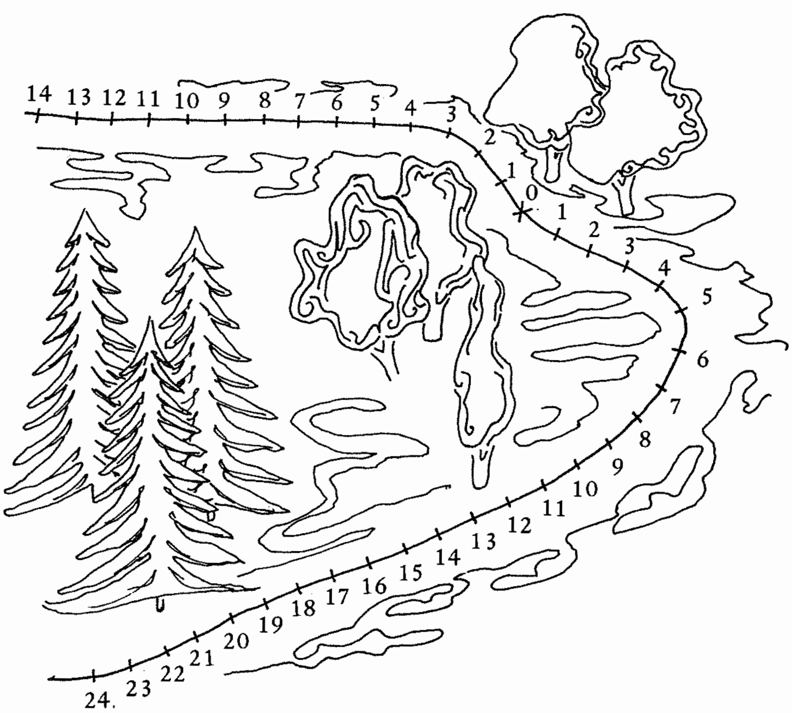
Hier zie je waar Wim stond (x):



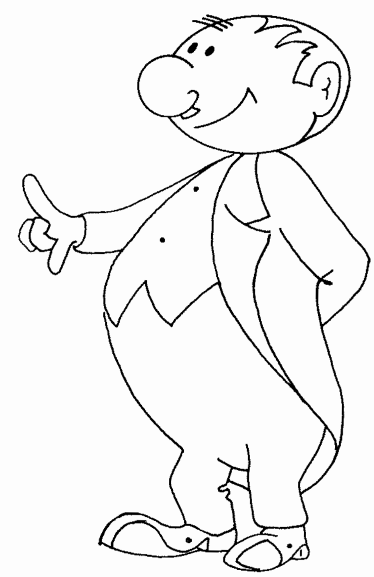
Hij loopt 10 meter verder. En kijkt ondertussen goed. Niets te zien.
'Misschien ben ik te ver', denkt Wim.
Daarom loopt hij 15 meter terug. Maar nee hoor, weer geen zak met goud. Wim gaat op een steen zitten en denkt diep na. Dan besluit hij nog 9 meter terug te gaan. Maar hoe Wim ook speurt, zijn zak met goudstukken blijft onvindbaar. Daarom keert hij om en gaat terug. Hij loopt 21 meter. En dan ziet hij de zak onder een omgevallen boom staan. 'Gelukkig', zegt Wim, 'ik heb 'm gevonden'.

Aan jullie de vraag:
* *Waar stond de zak met goud?*

Hier zien jullie het bospad nog eens. Er staat overal bij hoeveel meter het van het kruisje (x) af is.
* *Kun je nu vlugger zien waar de zak van Wim stond?*



wiskunde voor het lager beroeps onderwijs



REKLAME KRITISCH BEKEKEN

CRIT LEENDERS
WIM SWEERS

hoe betrouwbaar is reklame?

Nu de benzine duurder wordt, gaan steeds meer mensen als ze een auto willen kopen, letten op de zuinigheid in het benzineverbruik.
De autofabrikanten doen momenteel dan ook alle moeite om duidelijk te maken, dat hun auto's erg zuinig zijn.
Is datgene wat ze in hun advertenties vertellen altijd helemaal juist?
Laten we de volgende advertentie eens gaan onderzoeken en proberen *een maat voor de eerlijkheid* hiervan te vinden.

Volgens A.N.W.B. opgave	60 km.u.	80 km.u.	100 km.u.
RENAULT 4	22.9	18.5	15.2
RENAULT 5	21.2	17.8	14.1
RENAULT 6	20.4	16.9	13.7
RENAULT 12	18.9	16.1	13.5
RENAULT 15	18.2	15.4	13.0
RENAULT 16	16.1	14.5	11.8
RENAULT 17	15.9	14.2	12.2

UITWERKING ①

Nodig: advertentie Renault
afstandstabel ANWB

Werk in groepen van vier

- Spreek eerst samen af, wat je gaat doen als je de eerlijkheid van deze advertentie wilt meten.
- Ga nu de advertentie onderzoeken en noteer alle resultaten op een vel papier.
- Wanneer zou deze advertentie wel eerlijk zijn en wanneer niet?

- Vergelijk nu het bovenstaande antwoord met de resultaten van je onderzoek.
  Wat is dan je mening over de advertentie?

- Kun je de pijlen in de advertentie beschouwen als een staafdiagram?
  Motiveer je antwoord.

	AMSTERDAM	ALKMAAR	ALMELO	AMERSFOORT	APELDOORN	ARNHEM	ASSEN	BERGEN OP ZOOM	BREDA	COEVORDEN	DEVENTER	DORDRECHT	EINDHOVEN	ENSCHEDE	's-GRAVENHAGE	GRONINGEN	HAARLEM	HEERLEN	DEN HELDER	HENGELO
ZWOLLE	115	157	60	69	40	67	71	198	160	55	39	149	150	73	165	99	134	216	150	64
ZUTPHEN	108	151	56	83	20	30	110	179	141	84	15	129	113	54	160	138	128	179	195	45
WINTERSWIJK	152	189	56	106	63	67	147	214	178	102	55	166	150	41	185	180	171	216	233	42
VLISSINGEN	185	214	301	199	242	221	338	72	107	322	260	112	166	305	136	366	183	248	258	296
VENLO	183	225	161	131	108	81	217	152	114	192	120	149	60	165	202	245	200	68	269	156
UTRECHT	38	80	121	21	66	63	160	105	67	144	80	57	86	136	64	188	55	173	124	127
TILBURG	110	157	167	97	114	87	223	60	22	198	126	56	34	171	102	251	127	117	201	162
TIEL	83	125	122	33	66	42	175	107	69	160	81	59	66	126	100	203	98	153	169	117
SNEEK	121	96	125	132	108	135	62	259	222	116	114	212	218	148	168	77	125	284	75	139
ROTTERDAM	72	101	177	77	121	111	216	73	56	200	136	23	114	186	23	244	70	196	145	187
ROERMOND	174	216	186	161	132	106	241	143	105	216	144	140	51	189	193	269	191	44	260	180
NIJMEGEN	119	160	97	67	44	17	153	132	94	128	56	102	66	101	136	181	135	132	204	92
MIDDELBURG	178	207	294	192	235	214	331	65	100	316	253	105	159	298	129	359	176	241	264	289
MAASTRICHT	213	266	236	200	183	156	292	281	143	267	195	178	89	240	232	320	230	22	299	231
LOCHEM	126	167	37	79	36	46	117	185	157	83	22	145	129	38	166	145	144	195	211	29
LEIDEN	41	61	176	78	122	110	215	110	93	201	137	60	132	191	17	233	30	219	108	182
LEEUWARDEN	135	110	140	162	133	160	73	290	252	123	129	242	243	163	182	58	139	309	89	154
HOEK v. HOLLAND	76	93	207	107	151	141	246	107	90	230	166	57	148	226	20	255	62	230	137	217
HILVERSUM	33	75	119	19	63	69	158	123	85	142	78	75	104	134	62	186	52	191	119	125
's-HERTOGENBOSCH	88	130	145	75	92	65	201	84	46	176	104	64	33	149	107	229	105	120	174	140
HENGELO	161	193	14	105	62	76	105	224	186	60	47	174	158	9	191	138	170	224	214	
DEN HELDER	81	42	200	136	175	187	157	218	201	191	190	168	207	223	117	152	74	294		
HEERLEN	208	250	229	185	176	149	285	176	138	260	188	173	84	233	227	313	225			
HAARLEM	19	30	164	69	108	118	205	143	126	187	123	93	138	179	42	201				
GRONINGEN	198	173	124	166	137	164	28	294	258	78	123	246	247	147	245					
's-GRAVENHAGE	64	73	185	85	129	119	224	96	79	208	144	46	137	200						
ENSCHEDE	160	202	23	114	71	84	114	233	195	69	66	183	167							
EINDHOVEN	121	163	163	108	110	83	219	94	56	194	122	91								
DORDRECHT	95	124	179	79	123	99	218	50	33	202	138									
DEVENTER	104	146	41	58	16	39	95	188	160	69										
COEVORDEN	168	208	46	122	84	108	50	260	212											
BREDA	102	149	191	89	132	111	226	35												
BERGEN OP ZOOM	140	174	229	127	170	149	266													
ASSEN	185	178	91	138	109	136														
ARNHEM	101	143	80	50	27															
APELDOORN	89	131	56	43																
AMERSFOORT	50	92	99																	
ALMELO	145	187																		
ALKMAAR	37																			
AMSTERDAM																				

	's-HERTOGENBOSCH	HILVERSUM	HOEK v. HOLLAND	LEEUWARDEN	LEIDEN	LOCHEM	MAASTRICHT	MIDDELBURG	NIJMEGEN	ROERMOND	ROTTERDAM	SNEEK	TIEL	TILBURG	UTRECHT	VENLO	VLISSINGEN	WINTERSWIJK	ZUTPHEN
ZWOLLE	132	89	177	95	148	61	223	263	84	172	147	75	106	152	91	148	270	94	54
ZUTPHEN	95	83	172	144	141	16	186	244	47	136	142	129	72	117	94	111	251	43	
WINTERSWIJK	132	126	207	184	176	32	223	279	84	172	177	169	109	154	129	148	286		
VLISSINGEN	168	195	147	362	160	267	253	7	204	215	115	231	179	132	177	224			
VENLO	96	150	206	241	194	127	76	217	64	24	172	216	96	92	148				
UTRECHT	53	16	85	184	56	101	178	170	80	139	55	154	48	75					
TILBURG	22	93	113	247	116	133	122	126	70	63	78	222	55						
TIEL	33	66	111	199	94	88	158	172	32	119	75	174							
SNEEK	200	152	188	24	156	138	291	324	152	240	194								
ROTTERDAM	82	73	32	210	37	158	201	108	118	163									
ROERMOND	86	157	197	265	185	161	51	208	88										
NIJMEGEN	48	86	147	177	127	83	139	197											
MIDDELBURG	149	188	140	356	143	260	246												
MAASTRICHT	125	196	236	316	224	202													
LOCHEM	111	99	188	151	157														
LEIDEN	99	59	37	170															
LEEUWARDEN	225	166	202																
HOEK v. HOLLAND	116	103																	
HILVERSUM	71																		

AFSTANDSTABEL NEDERLAND

De afstanden van Middelburg en Vlissingen naar Dordrecht, Rotterdam, Hoek van Holland, Den Haag, Leiden, Haarlem, Amsterdam, Alkmaar en Den Helder zijn berekend via de Zeelandbrug.

Grensposten
Arnhem-Elten .... 21 km
Groningen-Nieuweschans .... 46 km
Heerlen-Vaals .... 18 km
Maastricht-Vaals .... 28 km
Vlissingen-Sluis .... 20 km

De afstanden zijn:
a) berekend met als grondslag de ANWB-autokaart
b) berekend over Nederlands gebied
c) theoretisch; in de praktijk zal men vrijwel steeds tot hogere getallen komen

UITWERKING ②

nodig: advertentie Renault
afstandstabel ANWB

Lees de advertentie eerst goed.
Zoals je ziet, worden hier afstanden gemeten in liters (benzineverbruik).

▸ Als je in een Renault 4 konstant 80 km/uur rijdt, kun je met één liter benzine ☐ kilometer afleggen.

▸ In de eerste regel van de advertentie staat, dat je op de afstand rotterdam-breda ☐ liter benzine verbruikt.

▸ Hoeveel kilometer kun je met deze hoeveelheid benzine afleggen? ☐ kilometer.

▸ Neem nu de afstandstabel en zoek hierin de afstand van rotterdam naar breda op.
Deze is ☐ kilometer.

▸ Hoe groot is het verschil tussen het aantal 'auto-kilometers' en 'tabel-kilometers'?
☐

PROBLEEMSTELLING
Probeer een maat voor eerlijkheid van deze advertentie te vinden en toets de advertentie aan deze maat.
Dit probleem hebben we enkele weken geleden voorgelegd aan een groep leerlingen van de technische school te nijverdal.

VOORBEREIDING
We hadden twee opdrachten gemaakt: een open benadering, waarin we de leerlingen optimaal de kans wilden geven zelf een oplossingsstrategie te ontwikkelen en een gestruktureerde versie (uitwerking ②) voor het geval dat sommige leerlingen met de open benadering geen raad zouden weten.
We meenden dat de les als volgt zou kunnen verlopen:

De leerlingen lezen de inleiding met uitwerking ①; bestuderen de advertentie en gaan dan in groepen van vier een strategie bepalen. Ze zullen dan gaan berekenen of de auto voor elke afstand ook werkelijk het aangegeven benzineverbruik heeft wellicht gaan ze bepalen of de benodigde hoeveelheid benzine toereikend is om de afstanden af te leggen.

Treden grote verschillen op dan zal wel de konklusie getrokken worden: de advertentie is niet eerlijk. Zijn de verschillen daarentegen klein, dan zal men de advertentie wel als eerlijk aksepteren.

Het bepalen van het kriterium voor de toelaatbaarheid van deze afwijkingen wilden we aanvankelijk in een leergesprek door docent en leerlingen gezamenlijk laten bepalen. Dan moest ook de tekst onderaan de advertentie hierin betrokken worden.

Afhankelijk van de resultaten van dit eksperiment konden we dan later deze toetsingsprosedure meer of minder gestruktureerd — analoog aan de voorbeelden van presentatie van dit probleem — aan de uitwerking toevoegen.

REAKTIES UIT DE KLAS
Toen de leerlingen met dit stukje leerstof gekonfronteerd werden, waren ze direkt entoesiast.
'Dat doet de konsumentenbond ook', zeiden er enkelen.
Op de vraag: 'waarom vind je dit leuk?' werd geantwoord: 'daar heb je tenminste wat aan'.
De les verliep evenwel niet zoals we gepland hadden. Nadat de leerlingen de advertentie en de open versie van uitwerking ① gelezen hadden, kwam er een gesprek op gang, waaruit we hier een fragment laten volgen.
Leerlingen:

- 18,5 km op 1 liter? Nou, hij loopt 1 op 17, dat is knap veel, die auto lust wel wat.
- Ja, als 'ie konstant 80 km per uur rijdt.
- Is 'ie een stuk ruimer? Wat hebben deuren daar nou mee te maken.
- Die advertentie klopt wel, die wagen is zuinig, we hebben er zelf zo een gehad.
- Die advertentie is wel eerlijk, behalve voor wat betreft die vijfde deur.
- Hij is wel zuinig, maar niet ruim, wel eerlijk wat benzineverbruik betreft.

– Met opoe achter in de kattebak!

Het bleek dus duidelijk dat de leerlingen allereerst de eerlijkheid gingen toetsen aan de tekst onderaan de advertentie en dat het bovenste deel gezien werd als onderdeel van een plaatje dat niet van belang was.
Ook subjektieve kreten werden in het gesprek betrokken:

– Advertenties liegen altijd.
– Ik wilde een bromfietshelm kopen. Er stond in een advertentie 'spotkoopje' maar hij was uitverkocht.
– Ze laten je toch nooit slechte dingen zien!

Slechts één leerling merkte op, dat je niet konstant 80 km/uur kunt rijden.

Toen bleek dat het meten van afstanden in liters geheel aan de aandacht van de leerlingen ontsnapte, werd het gesprek in die richting omgebogen.
In een groepje van vier leerlingen speelde zich daarna het volgende af:

Een leerling ging in de tabel de afstanden tussen rotterdam en breda opzoeken en rekende vervolgens uit: met 2,9 liter rijd je 53,56 km. Dus: 2,35 km vóór breda moet ik stoppen, want de tabelafstand is 58 km. De andere drie leerlingen keken belangstellend toe, maar begrepen niet waarom hij dit allemaal uitrekende. Nadat hij het zijn groepsgenoten had uitgelegd, gingen ze allemaal aan het rekenen, echter zonder taakverdeling. Ieder begon met de afstand rotterdam-breda. Pas nadat de leraar hun erop attent maakte, dat ze beter samen een afspraak konden maken over wat ieder zou doen, werd het rekenwerk verdeeld.
Al heel snel werd er weer besloten dat de advertentie niet eerlijk was, want:
afstand utrecht-apeldoorn is 65 km. Met 3,5 liter kom je maar tot 64,75 km. Je blijft weer voor apeldoorn stilstaan.

– Je moet er wel een halve liter bijgooien om er te komen!
– En bij utrecht-leeuwarden kom ik 10 km tekort. Die advertentie is niks waard.

Een ander deel van de klas werkte in groepen van twee aan de gestruktureerde versie. Deze leverde minder problemen op, doch ook de uiteindelijke beslissing 'wel of niet eerlijk' bleek genomen te worden op motieven die betrekking hadden op de advertentietekst.

KONKLUSIES

We hebben ervaren dat het rekenen met kommagetallen in deze kontekst erg motiverend werkte.
Het werken in groepen gaf vaak problemen. In een tamelijk goed funktionerende groep werd een slechte leerling vaak als 'ballast' ervaren en was assistentie van de leraar nodig om ook die in de taak te betrekken.
Een apart punt vormden de bewerkingen met kommagetallen waarin door veel leerlingen fouten werden gemaakt, vooral bij het vermenigvuldigen. Het is de bedoeling dat we dit rekenaspekt in een later stadium apart aan de orde stellen.
We hebben met dit eksperiment ervaren dat een stukje onderwijs naar aanleiding van aktuele relevante gegevens (de advertentie) motiverend werkt.
In de *open benadering* wordt veel geëist van het initiatief van de leerling en het funktioneren van de groep. Zijn de leerlingen niet gewend aan deze wijze van werken, dan lijken de resultaten aanvankelijk wellicht wat teleurstellend, maar als de leerlingen wat beter ingespeeld raken op elkaar, dan gaat het ook steeds beter. De leraar kan zich dan bezighouden met het observeren van de groepen, het geven van hints als een groep is vastgelopen en met de organisatie van de klasse-situatie (bijvoorbeeld: het begeleiden van een klassegesprek indien alle groepen hun strategie bepaald hebben).
In de *gestruktureerde uitwerking* wordt de leerling meer aan de hand genomen en op de manier die de docent wil, door de aktiviteiten geleid met zulke kleine stapjes, dat elke dwaling tot een minimum wordt beperkt.
De groep leerlingen die deze uitwerking hanteerde, voelde zich zekerder, omdat ze houvast hadden aan het vaste schema, maar of ze door de wijze van aanbieding meer zelfvertrouwen hebben gekregen en of ze hebben geleerd zelfstandig een beslissing te nemen, is volgens ons twijfelachtig.

Misschien wilt u dit eksperiment ook eens uitvoeren in mavo, lbo of zesde klas basisonderwijs.
Aan welke uitwerking geeft u de voorkeur voor uw leerlingen en waarom?
Welke kriteria leggen uw leerlingen aan om de eerlijkheid van de advertentie te toetsen?
Wij zullen het zeer op prijs stellen om reakties van u te mogen vernemen. Misschien doet u dit soort dingen al lang in uw lessen. Ook dan zullen wij uw reaktie, waarin u dit kenbaar maakt graag ontvangen. Eventueel zullen wij een aantal suggesties in dit blad publiseren.

U kunt uw reakties richten aan:

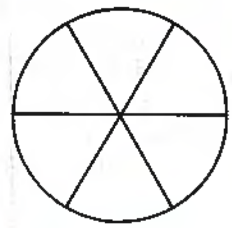
IOWO
afdeling lbo
t.a.v. W. Sweers
tiberdreef 4
utrecht.

kleuters en wiskunde

JES MELIS
HENNEKE DE LORME-BAKKER

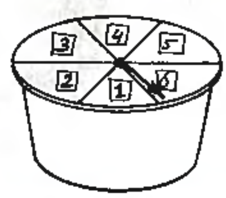
'Juf gaan we weer eens een spelletje met een dobbelsteen doen?'

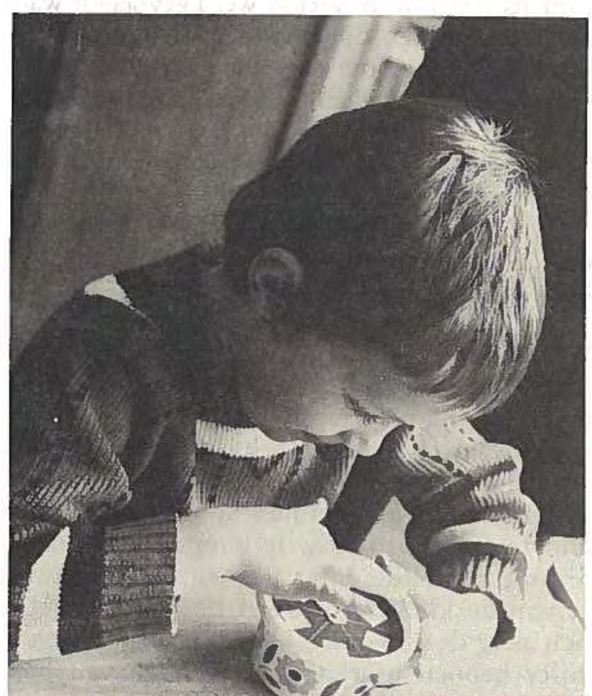
De kleuters hebben eerst een rondje geknipt of geprikt dat precies past op een boterkuipje. Op dit rondje wordt vervolgens een verdeling in zes vakken gemaakt:



Om de beurt mogen de kinderen nu met de dobbelstenen gooien. Het gegooide aantal wordt op een papiertje geschreven en daarna in één van de vakjes geplakt. De eerste paar worpen gaat dit zonder problemen: 1, 5, 2, ...
Maar al gauw gaat het er om geen 'dubbel' te gooien. Er ontstaat echt spanning tijdens het spel, vooral omdat het een wedstrijdkarakter krijgt. Wie zal het eerste alle zes nummers geplakt hebben?

Als alle zes nummers opgeplakt zijn, wordt een wijzertje gemaakt en met een splitpen op de deksel van het kuipje vastgezet.





De kleuters kunnen hiermee heel vlot leren tellen en snel – in één oogopslag – het bij het dobbelsteenaantal passende cijfer vinden.

Een volgende keer spelen we verder met de kuipjes. Een kind gooit de dobbelsteen en de anderen draaien de wijzer naar het juiste cijfertje. Onnodig te zeggen dat hier veel variatiemogelijkheden zijn, bijvoorbeeld:

– de kinderen draaien eerst willekeurig een cijfer; daarna wordt met de dobbelsteen gegooid; wie heeft hetzelfde cijfer? wie meer? wie minder? hoe groot is het verschil?

Tijdens één van de spelen werd gevraagd: wat zou makkelijker zijn om te gooien, een 1 of een 6? De meesten aarzelden en gaven geen antwoord. Een enkeling keek de juf vragend aan: wat zou ze voor antwoord willen hebben? Slechts twee kleuters zeiden heel beslist: 'dat maakt niets uit'.
De vraag 'voor wie zou het makkelijker zijn om een 6 te gooien, voor mij of voor jullie'?, lokte ongeveer gelijke reakties uit.

Wanneer de kleuters snel met de kuipjes kunnen werken, is het ook leuk om hiermee – met een niet al te grote groep – in het speellokaal te spelen. Zo kun je bijvoorbeeld van te voren afspreken dat de kinderen, die het gegooide cijfer op hun kuipje hebben, de anderen mogen tikken. Je kunt ook de kinderen die hetzelfde cijfer hebben, laten zitten, terwijl de kinderen die een hoger cijfer hebben naar de ene en de kinderen die een lager cijfer hebben naar de andere hoek van het lokaal mogen rennen.

Voordat dit gedaan kan worden moeten de kleuters natuurlijk wel enige ervaring hebben in het spelen van reaktiespelletjes.

* * *

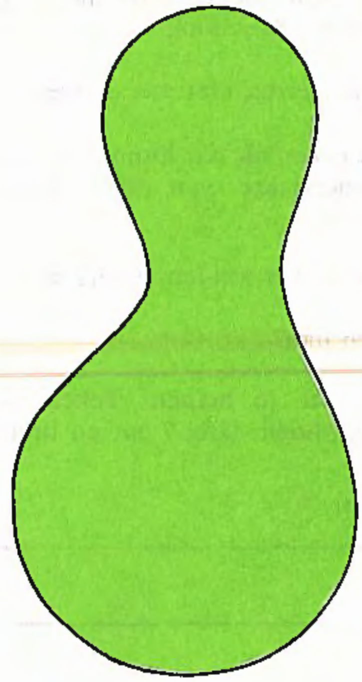
Tenslotte nog een tip voor sorteerspelen
Op dit gebied zijn erg mooie, maar ook vreselijk dure materialen te koop. De kleuters spelen echter net zo graag met waardeloos materiaal, zoals bijvoorbeeld kroondoppen. Met een emmertje vol van deze doppen gaan ze al heel gauw spontaan sorteren, figuren leggen, tellen, enz.
Een bijkomend voordeel is dat de kinderen er heus zelf wel voor zorgen dat er steeds voldoende materiaal aanwezig is.

BASJE
een jonge onder-zoeker

MET PA NAAR PI

DIK OORT

Als vader binnenkomt zit Basje over de volgende tekening gebogen:



Vader : Zo Basje, wat heeft dat te betekenen?

Basje : Mijnheer heeft ons op school deze tekening laten maken en vroeg ons of we van deze figuur de oppervlakte zouden kunnen bepalen.

Vader : Nou, en heb je al een manier gevonden?

Basje : Ik kan dat van zo'n vreemde figuur niet uitrekenen; als het nou een rechthoek was....

Vader : Ja, maar de oppervlakte 'bepalen' is nog wat anders dan 'uitrekenen'. Heb je geen idee?

Basje : Ja ik wil een touwtje met de uiteinden aan elkaar knopen, zó dat het touwtje precies over de omtrek past.

Vader : En dan?

Basje : Dan haal ik het touwtje er af en maak van het touw een rechthoek.
Daar kan ik de oppervlakte wèl van uitrekenen: lengte maal breedte.

Vader : Ik begrijp 't; maar is dat maniertje niet gevaarlijk?

Basje : Ja, want ik weet niet of die rechthoek dezelfde oppervlakte heeft als mijn figuur van school.

Vader : Kun je dat niet aan de weet komen?

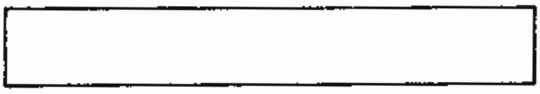
Basje : Hoe zou ik dat kunnen – ik weet de oppervlakte van mijn figuur toch niet?

Vader : Toch is er wel iets te onderzoeken.

Basje : Wat dan?

Vader : Ik zal je helpen. Teken eens een rechthoek, lang 7 cm en breed 1 cm.

Basje tekent:



Vader : Mooi! Hoe groot is de oppervlakte?

Basje : $7 \times 1 = 7$, dus 7 cm^2.

Vader : Juist, en in gedachten leggen we een touwtje precies over de omtrek heen met de einden aan elkaar geknoopt. Hoe lang is dat touwtje dan?

Basje : Net zo lang als de omtrek van de rechthoek, dus 16 cm.

Vader : En maak van dit touwtje nu eens een rechthoek, die wat korter en breder is dan de vorige.
Probeer een *geheel* aantal centimeters te krijgen voor de lengte en breedte.

Basje : Ik kan er ook van maken een rechthoek van 2 cm bij 6 cm. Dan is de omtrek ook 16 cm.

Basje tekent:

Vader : En hoeveel is de oppervlakte?

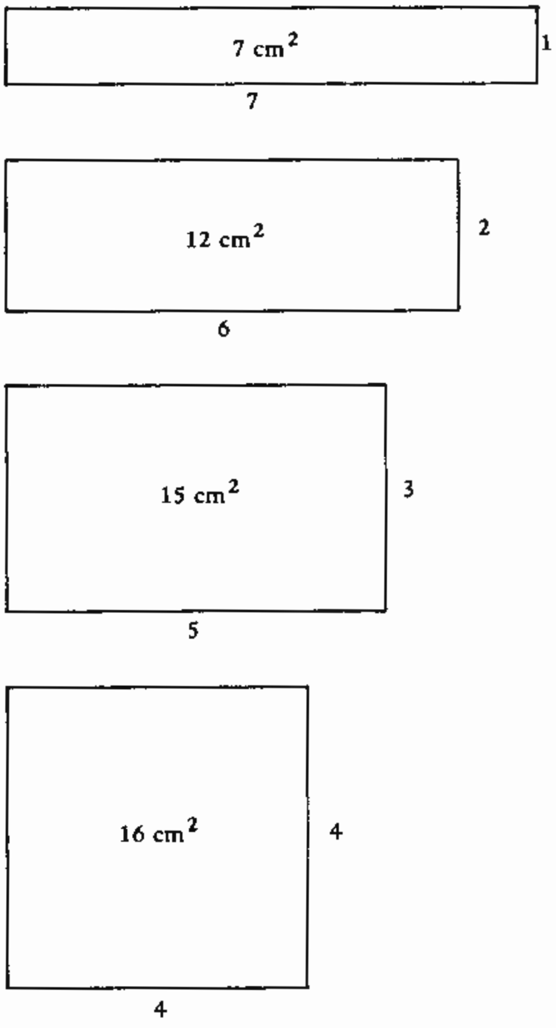
Basje : Die is nu 12 cm^2. O jé, ik zie 't, die is groter geworden. Dus als de omtrek hetzelfde blijft kan de oppervlakte veranderen.

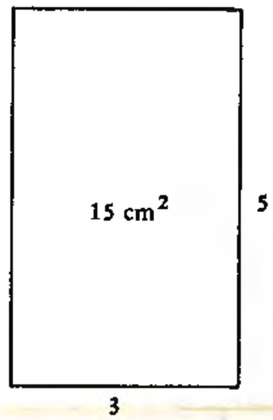
Vader : En misschien is het wel zó dat de oppervlakte dan meestal verandert.

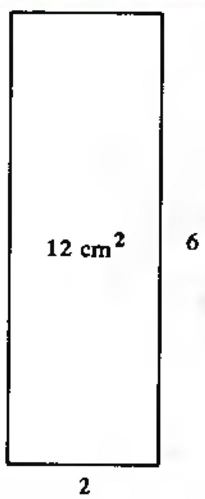
Basje : Ik kan van ons touwtje van 16 cm nog meer rechthoeken maken en dan eens kijken wat er met de oppervlakte gebeurt.
Mijn manier om van die figuur van school een rechthoek te maken met dezelfde omtrek is in elk geval fout.

Vader : Ja, dat moet je dus niet doen. Maar maak eerst nog eens wat meer rechthoeken met elk een omtrek van 16 cm en kijk wat de oppervlakte van elke rechthoek is.

Basje krijgt zo de volgende tekeningen:







Basje : Ik ben maar gestopt, want ik kreeg dezelfde rechthoek als die ik al getekend had.

Vader : Je ziet het: de eerste vier rechthoeken hebben onderling verschillende oppervlakten.

Basje : Ja en ik zie nog iets leuks. De oppervlakten worden steeds groter tot het een vierkant is. Daarna worden ze weer kleiner.
Betekent dit nu dat van alle rechthoeken met onderling gelijke omtrekken het vierkant de grootste oppervlakte heeft?

Vader : 't Ziet er wel naar uit. Weet je wat je doet? Straks teken je nog maar een paar van zulke series, bijvoorbeeld met omtrek 20 of met omtrek 24.

Basje : Goed dat ga ik doen. Maar nu ben ik met m'n probleem nog niet verder gekomen.

Vader : Dat ben je wél. Je weet nu dat het geen zin heeft om met het touwtje een rechthoek te maken.

Basje : Ik zou liever weten wat ik wél moet doen.

Vader : Waarom weet je dat een rechthoek van 2 cm bij 6 cm een oppervlakte van 12 cm^2 heeft?

Basje : Nou, je kunt er precies 2 rijen van elk 6 vierkantjes van 1 cm bij 1 cm in tekenen.

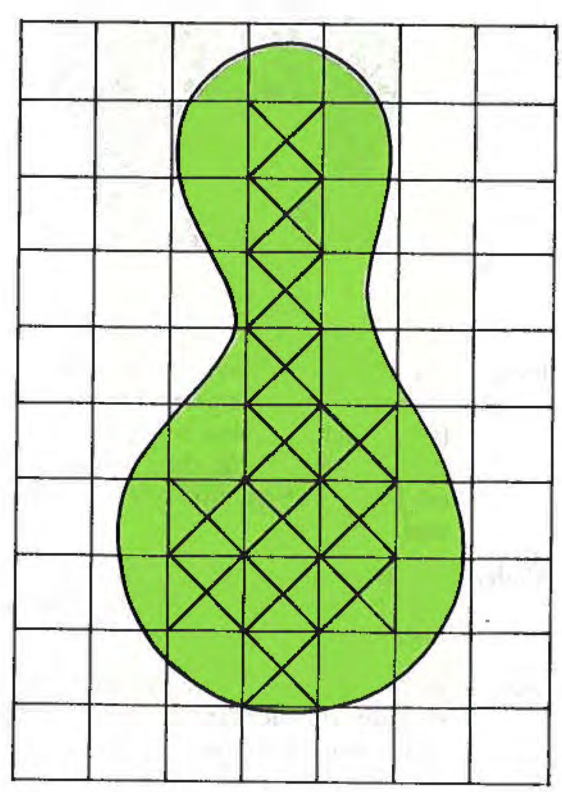
Vader : Goed zo! Dan gaan we in jouw figuur ook vierkantjes tekenen.

Basje : Dat past niet precies.

Vader : Dat is niet erg. Hier en daar steekt een stuk van een vierkantje uit. Om het wat gemakkelijker te maken trek je met karbonpapier jouw figuur over op ruitjespapier. Dan moet je wel papier nemen waarop de ruitjes, dat zijn dus de vierkantjes, een zijde van 1 cm hebben.

Basje : Dat papier heb ik.

Basje haalt papier en maakt de volgende tekening:



Basje : Ik heb in alle vierkantjes die binnen de figuur liggen een kruisje gezet. 't Zijn er dertien.

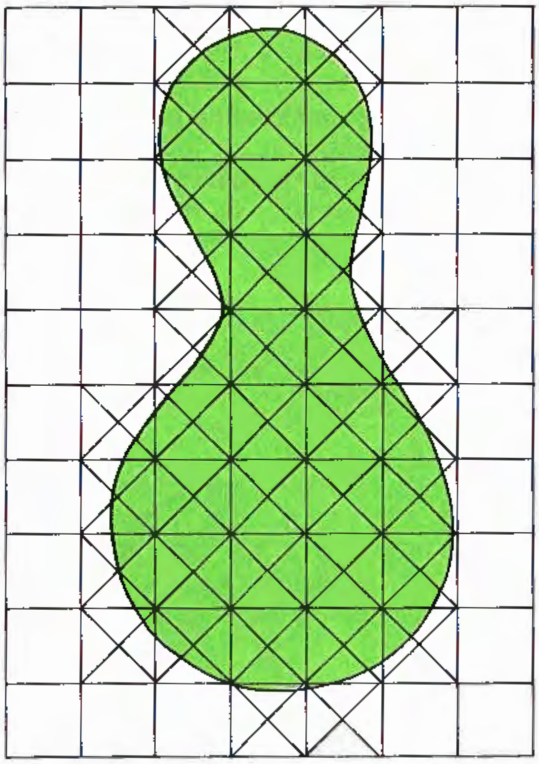
Vader : Wat weet je dus?

Basje : De oppervlakte is groter dan 13 cm^2.

Vader : Ja maar 1000 cm^2 is ook groter dan 13 cm^2.

Basje : Dan ga ik zo weinig mogelijk vierkantjes aankruisen die samen een figuur vormen waar mijn gebogen figuur net binnen ligt.

Basje krijgt de volgende figuur:



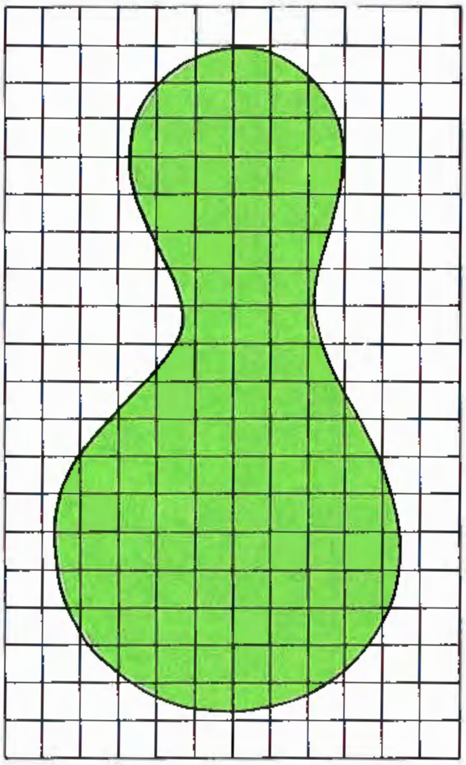
Basje : Nu heb ik 38 hokjes aangekruis; ik weet dat de oppervlakte van mijn figuur kleiner is dan 38 cm^2.
De oppervlakte ligt dus tussen 13 cm^2 en 38 cm^2. Eigenlijk weet ik nog niet veel.

Vader : Dit is al een aardig begin. Heb je een idee hoe je 't wat fijner kunt benaderen?

Basje : Ik heb ook nog ruitjespapier gevonden waarbij de vierkantjes een zijde van een halve centimeter hebben. Als ik dat nu eens gebruik?

Vader : Dat is een reuze idee. Meteen doen!

Basje tekent de figuur op fijner ruitjespapier:



Daarna gaat Basje vierkantjes kruisen. Eerst alle vierkantjes die er geheel binnen liggen en daarna ook nog die vierkantjes die er gedeeltelijk in liggen.

Basje : Nu weet ik dat de oppervlakte van de figuur ligt tussen 79 en 129 vierkantjes.

Vader : Hoe groot is elk vierkantje?

Basje : Elk vierkantje is een kwart vierkante centimeter. De oppervlakte ligt dus tussen $19\frac{3}{4}$ cm^2 en $32\frac{1}{4}$ cm^2.

Vader : Je ziet: dat is al heel wat nauwkeuriger dan je eerste uitkomst. Toen wist je dat de oppervlakte tussen de 13 cm^2 en 38 cm^2 lag.

Basje : Ik kan 't ook op millimeterpapier rekenen. Maar dat wordt tellen geblazen.

Vader : Dat is waar. Laten wij nu eens verder gaan werken met vierkantjes van $\frac{1}{2}$ cm bij $\frac{1}{2}$ cm. Je hebt 79 vierkantjes geteld, die er geheel binnen liggen. Hoeveel vierkantjes liggen er gedeeltelijk binnen?

Basje : Dat zijn er 50. Maar je weet niet voor welk deel ze er binnen liggen. Dat zijn de lastige. Sommige liggen er bijna geheel in en andere maar voor een heel klein deel.

Vader : Welke kans is nu groter, denk je: de kans dat een vierkantje dat er gedeeltelijk in ligt, er met het grootste deel in ligt of de kans dat een vierkantje er met het kleinste deel in ligt?

Basje : Ik denk dat die kansen gelijk zijn.

Vader : Precies! Dat betekent dus, dat als je veel randvierkantjes hebt, er ....

Basje : Ongeveer net zo veel met meer dan de helft als met minder dan de helft in liggen.

Vader : Dus wat kunnen we nu doen?

Basje : Ik denk dat ik 't weet. Je telt de randhokjes elk voor een half hokje.

Vader : Goed zo! 't Leuke is hoe meer randhokjes je hebt des te beter klopt het dat 't gemiddelde van de randhokjes een half hokje is.

Basje : Dus de oppervlakte van mijn figuur is ongeveer $79 + \frac{1}{2} \times 50 = 79 + 25 = 104$, dus 104 vierkantjes. Dat is 26 cm^2.

Vader : Mooi zo!

Basje : 't Is dus niet zo erg als je veel randhokjes hebt.

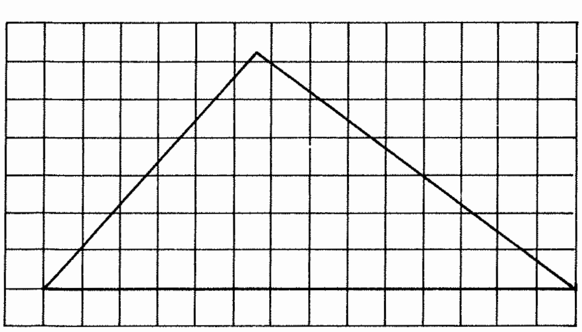
Vader : Integendeel.

Basje : Kan ik nu ook op deze manier de oppervlakte van een driehoek berekenen?

Vader : Jazeker! Je moet eigenlijk niet praten over 'berekenen', maar over 'benaderen'.

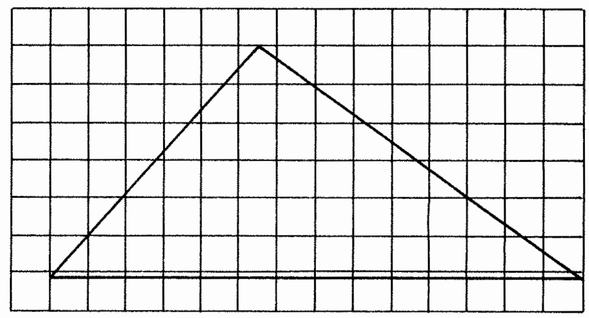
Basje : Dan moet ik de driehoek zeker niet zó tekenen.

Basje tekent:



Vader : Precies! Bij de onderste zijde heb je in 't geheel geen randhokjes. Maar je moet 't ook niet zó doen.

Vader tekent:



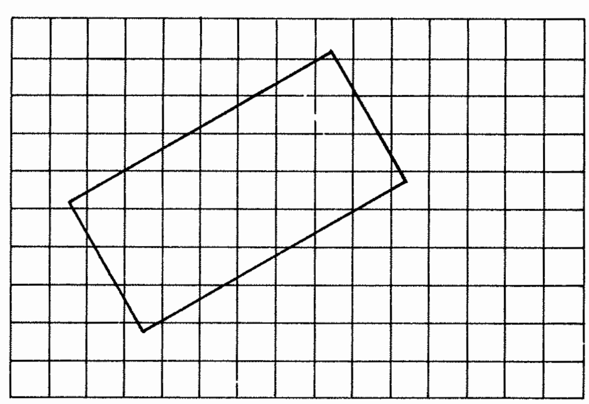
Basje : Dat is nog erger want nu liggen alle randhokjes aan de onderkant er voor ongeveer $\frac{1}{5}$ deel binnen. Dus 't gemiddelde zal nu wel niet een half hokje zijn.

Vader : Waar zorg je dus voor?

Basje : Als de figuur begrensd wordt door rechte lijnen moet je zorgen dat geen van die lijnen evenwijdig loopt met de ruitjeslijnen.

Vader : Precies! En benader jij nu eens de oppervlakte van een rechthoek van 2 cm bij 4 cm op ruitjespapier.

Basje tekent:

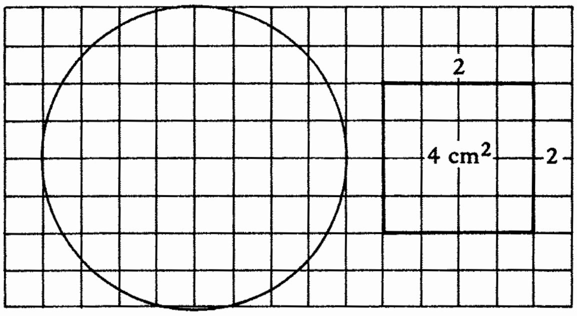


Basje : Ik tel 18 hokjes er binnen en 27 randhokjes. De oppervlakte is dus 18 + $13\frac{1}{2}$, dat zijn $31\frac{1}{2}$ vierkantjes. De oppervlakte is dus $7\frac{3}{4}$ cm^2. Dat is niet gek, want ik weet dat de oppervlakte 8 cm^2 is.

Vader : Je ziet dat deze manier lang geen slechte benadering is.

Teken nu eens een cirkel met straal 2 cm en daarnaast een vierkant met zijde 2 cm.

Basje tekent:



Basje : De oppervlakte van deze cirkel is 40 gehele vierkantjes en 20 randvierkantjes, dus $12\frac{1}{2}$ vierkantje. Dat is $12\frac{1}{2}$ cm².

Vader : Nu moet je eens uitrekenen hoeveel keer zo groot de cirkel is in vergelijking tot het vierkant.

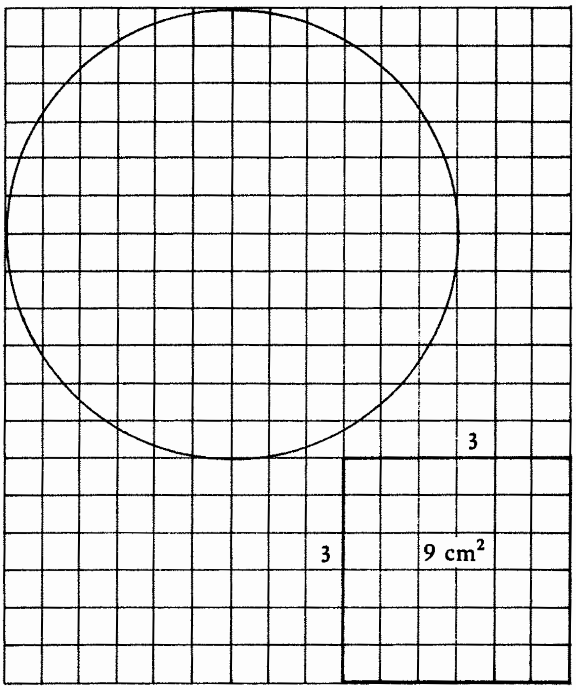
Basje gaat vlijtig delen: 12,5 : 4.

Vader : Hou na één cijfer achter de komma maar op!

Basje : De cirkel is ruim 3,1 keer zo groot.

Vader : Onthouden! Doe het nu eens met een cirkel met straal 3 cm.

Basje tekent:



Basje : *(na druk tellen en cijferen)* De oppervlakte van de cirkel is 94 hele hokjes en 37 randhokjes; dat is samen $112\frac{1}{2}$ vierkantjes. Dus $28\frac{1}{8}$ cm².
Dat heb ik gedeeld door de oppervlakte van het vierkant en ook daar komt ruim 3,1 uit.
Is een cirkel altijd ongeveer 3,1 keer zo groot als 't vierkant van zijn straal?

Vader : Inderdaad! En de oppervlakte van het vierkant is de lengte van de straal maal de lengte van de straal. Als we de straal r (van 't woord *radius*) noemen......

Basje : Dan is de oppervlakte $r \times r$; daarvoor kan ik schrijven r^2.
Dus de oppervlakte van een cirkel met straal r cm is dus ongeveer $3{,}1\ r^2$.

Vader : Ja, maar niet precies!

Basje : O, nu begrijp ik 't. We hebben op school wel eens $3{,}14\ r^2$ moeten nemen.

Vader : Dat is iets beter benaderd, maar nog niet precies. $3{,}141\ r^2$ is nog weer iets beter.

Basje : Wat is dan het precieze getal?

Vader : Dat is niet te schrijven. Je kunt steeds meer cijfers achter de komma zetten, maar het houdt nooit op.
Om deze moeilijkheid te omzeilen, noemt men het getal waarmee je r^2 moet vermenigvuldigen *pi* en we schrijven dat als π.

Basje : Dus niemand weet precies hoe groot *pi* is.

Vader : Nee, maar het ligt dus heel dicht bij 3,14 of wat men ook wel gebruikt: $3\frac{1}{7}$.
Maar gebruik jij voortaan 3,1, dan ben je aardig in de buurt.

variabel

blok

INHOUD

4.1 inleiding en leeswijzer

REKENEN IS WISKUNDE

In de tijd dat alle nieuws over de moderne wiskunde nog uit het buitenland kwam, in de prille begintijd van wiskobas dus, heeft Edu Wijdeveld diverse malen nadrukkelijk naar voren gebracht dat het rekenonderwijs als onderdeel van het wiskundeonderwijs zou moeten worden beschouwd.
Toen de ontwikkeling binnen onze grenzen enige tekening begon te krijgen, introduseerde Adri Treffers het begrip 'verlevendiging van het rekenonderwijs'. Met alle interpretaties die dit begrip nadien gekregen heeft, is de bedoeling meestal goed overgekomen. De onderwijsverandering die leidt tot modern wiskundeonderwijs op de basisschool, begint in het bestaande rekenonderwijs. Terwijl deze aanpak voor het onderwijsveld — voor de praktici in de scholen dus — als geruststellend werd ervaren, is de achtergrond ervan slechts te vinden in een fundamentele doordenking van het vakgebied van de wiskunde.

> *Iemand, die opschrijft: $\frac{2}{3} \approx 0{,}66$, doet nog geen wiskunde.*
> *Een ander geval was dat met de nederlandse toerist in londen, die bij elke etalage voor zijn echtgenote de prijzen moest omrekenen. Zijn engelse pond was op dat moment f 6,60 waard. Hij zag dat dit bedrag ongeveer $\frac{2}{3}$ van een hollands tientje betekende. En met deze verhoudingsfaktor ging hij aan de slag: die kleuren-t.v. van £ 300.–, dat is ($\frac{2}{3}$ x 300 x 10 =) 2000 gulden en die 43 pond is vergelijkbaar met f 286,60.*
> *Dit is wel wiskunde.*

FRED GOFFREE

Het beeld van modern wiskundeonderwijs wordt door velen in nederland gelukkig niet meer uitsluitend gevormd door leerstofpunten. Wel klinkt in de diskussies hieromtrent vaak een bezorgdheid door, die te maken heeft met de verworvenheden van het alom bekende rekenonderwijs. Inzichten en technieken uit de wereld van het getal, een wiskundige wereld die de realiteit dicht benadert, mogen toch niet verwaarloosd worden ten gunste van meer geavanseerde aktiviteiten?

Welnu, in dit variabel blok laat wiskobas een deel van de aktiviteiten met betrekking tot het rekenaspekt van het wiskundeonderwijs zien.
Het is een dik blok geworden. Het zou niet redelijk zijn om een relatie te leggen tussen het (papieren)gewicht van de komende pagina's en het aksent dat in het integratieplan op dit rekenaspekt gelegd wordt. Het blok is daarom zo dik, omdat de ontwerpers getracht hebben om duidelijk te laten zien hoe binnen dit leerstofvlak gewerkt wordt vanuit de uitgangspunten voor modern wiskundeonderwijs.

In het volgende zal dan ook de aandacht van de lezers in het bizonder gevraagd worden voor een *aktief* en *gedifferentieerd* wiskundeonderwijs.
Het herkennen van deze uitgangspunten in de beschreven onderwijssituaties kan wellicht vereenvoudigd worden na doordenking van de volgende aspekten.

We proberen probleemgeoriënteerd *te werken. Reeds bij het betreden van het wiskundig gebied (deelgebied) tracht men de leerlingen aktief te maken door middel van een* instapprobleem, *dat hen in de gelegenheid stelt zelf aan 't werk te gaan. Hiertoe moet het* nivo van instap *voor de diverse kinderen passend zijn. Bovendien moet het kind gemotiveerd zijn om de stap te willen wagen. Een* rijke kontekst, *waarin de problematiek wordt aangeboden, kan deze motivatie opwekken. Tevens is het dan waarschijnlijker dat het kind de gestelde problemen vaker (binnen en buiten de school) zal ontmoeten, zodat het* toepassingsbereik *groter wordt.*
Toepassen en oefenen *worden essentieel onderscheiden door de mate van aktiviteit (en nu vooral in mentale zin bedoeld), die het kind erin moet leggen. In modern wiskundeonderwijs streven we ernaar om de noodzakelijke oefening te geven door het laten funktioneren in een toepassingsgebied.*

Het lijkt ons een stap op de goede weg naar wiskundeonderwijs voor 4- tot 18-jarigen als we in staat zijn dergelijke fundamentele herkenningspunten in de straks te beschrijven ontwerpen en in het eigen onderwijs te leren signaleren.

* * *

Iedereen die in kleuter- en basisschool onderwijs geeft, weet hoe het tellen zich aanvankelijk op haast natuurlijke wijze ontwikkelt en hoe men op school de vaardigheid verder aanbrengt.
Dat dit tellen niet op het laagste nivo van het 'weetje-leren' behoeft te worden aangeboden, laat Jan van den Brink zien. **(4.2)**
Neem bijvoorbeeld werkblad 2. Je ziet er een foto op van een muur, waarin wat stenen ontbreken. Het blijkt een deelvergroting van een tweede foto, waarop een groter deel van de muur is afgebeeld.
'Zou het dezelfde muur zijn?'
Met deze vraag stappen de kinderen in een serie telproblemen die op optel-, aftrek- en zelfs vermenigvuldignivo kunnen worden aangevat. Het rekenen in deze kontekst heeft naast het technische vaardigheidsaspekt ook veel, meer wiskundige, momenten. De strategie van het vergelijken en het herkennen van een wetmatigheid, behoren hiertoe. Het feit, dat de problematiek aanschouwelijk — in de beide foto's — gevat is, ondersteunt zowel de technische als de meer inzichtelijke aktiviteiten van de kinderen. Bij het nader toelichten van de gevonden oplossing voor andere kinderen is het mogelijk dat er een nivoverhoging moet optreden als de overtuigingskracht onvoldoende blijkt te zijn.
We zijn geneigd om aan te nemen dat het 'tellen' van de kinderen in deze kontekst zowel in praktische als in wiskundige zin een ruimer toepassingsbereik heeft. Een toepassingsbereik dat voor elke leerling individueel bepaald is door onder andere zijn aktieve betrokkenheid en het nivo waarop een en ander verwerkt is.

* * *

In de derde klas van de ontwerpschool besteedt Johan van Bruggen veel aandacht aan die rekenvaardigheden en inzichten, die de kinderen 'zich meester moeten maken'. **(4.3)**
Het is duidelijk dat bepaalde zaken gekend moeten worden om tenminste het volgende wiskundeonderwijs te kunnen verwerken.
De vraag hoe bepaalde oefeningen tot dit beheersen kunnen leiden, wordt — veelzijdig doordacht — met drie stukken onderwijs beantwoord.
De leerpsychologie heeft tot op heden slechts kunnen bijdragen vanuit onderzoeken, waarin van veel moest worden afgezien. Het essentiële van wiskunde leren, buiten de technische vaardigheid en het algoritmisch gedrag, is nauwelijks of niet onderwerp van onderzoek geweest.
In het rekenonderwijs staat momenteel het oefenen — door het maken van vele, ongeveer gelijke, sommen — centraal. Je hebt als schoolmeester het idee dat door het maken van een paragraaf sommen van dezelfde soort 'iets ervan' naar binnen slaat. Iets van de handelingen aan die sommen wordt geinternaliseerd, zegt de psycholoog. En we hopen dan dat het geleerde op mentaal nivo kan blijven funktioneren.
Nu is dat 'iets' meer dan de aparte sommen: het is 'iets' dat ze gemeenschappelijk hebben, dat hun oplossing karakteriseert, dat kan helpen bij het oplossen van de nog niet opgeschreven sommen.
Het *niet aktief* (mentaal!) maken van rijtjes sommen, we weten het allemaal, geeft kennis (vaardigheid) aan de oppervlakte. Je moet dat blijven doen, anders vervliegt het en dan kun je weer opnieuw beginnen.
Hoe krijg je 't van die oppervlakte 'naar binnen' toe?
Niet door 't erin te rammen, maar door het doordacht in je wiskundeonderwijs te verpakken.
Johan van Bruggen deed het onder andere aldus:

* *De telefoon* (rekenen wordt *toegepast*)
  Een aktiverend instapprobleem: telefoonboek, telefoonnummers, lange en korte, grote en kleine plaatsen, hoeveel inwoners heeft........?
  Het onderwijs voert langs bekende en onbekende begrippen als steekproef, telefoondichtheid en schatting via echte telproblemen en strategieën, optellen en vermenigvuldigen van grote getallen, via 'grove' berekeningen en mooie getallen naar een duidelijk gevoelde noodzaak van het effisiënt kunnen *be*rekenen.
  In de rijke kontekst van dit telefoontema zijn de elementen van wiskundeonderwijs nog duidelijk herkenbaar.

* *De rondetijd* (de klas *be*-oefent)
  Nu wordt het rekenprobleem naar voren gebracht via een ijsstadion: iemand schaatst rondjes van 37, 36 en 38 sekonden.
  De aktiviteiten richten zich al sp-edig op

de pure getallen. Men moet uitrekenen hoeveel 12 x 37, 8 x 36 en 5 x 38 is. Door de noodzakelijke uitvoerigheid van de (be)-handeling duurt het rekenen bijna drie keer zo lang als de beschreven rit op de 10 km. Maar deze werd dan ook op topnivo afgelegd.
Het essentiële van deze les zit hem niet in de kontekst van het ijsstadion. Het algoritmisch gedrag dat in deze klas op basis van een toenemende schematisering wordt aangeleerd, werd voor het eerst toegepast op getallen, die iets in de werkelijkheid beschrijven.

* *De oefenhoek* (Marieke oefent)
Het gevaar van de hierboven gesignaleerde 'vluchtige' kennis, met een grote kans om te vervliegen, is hier optimaal aanwezig. De ontwerper is zich hiervan terdege bewust. Het gaat nu om pure (onbenoemde) getallen. Wie in dit gebied werkt, kan maar een van de twee bedoelingen hebben: het bestuderen van de getallenteorie of het leren van rekenvaardigheid. Het laatste aspekt staat op de rol en oefenstof dient te worden ingepakt in een didaktische poging tot aktief en gedifferentieerd wiskundeonderwijs.
De oefenhoek is het (voorlopige) resultaat. Na een beschrijving van de organisatorische en globale leerstofinhoudelijke aspekten worden een paar individuele trajekten als voorbeeld getoond.
Zo loopt Marieke snel langs de opdrachten, die betrekking hebben op eenvoudige vaardigheden. De sommen zijn ingepakt in de onderwerpen 'machientjes' en 'pijlentaal'. De rekenkennis wordt dus geoefend in een gebied, waarin het begrip funktie speelt. De alom bekende verdubbelingsmachine (onder het hoofdkussen) leidt haar jammer genoeg niet naar de kaarten 7 en 41 uit de serie *Klaar? Ga maar spelen!*, waarin de machten van 2 een fundamentele rol spelen. Toch vindt ze in haar verrijkingsopgaven interessante schattingen en metingen van gewichten en een strategiespel.
Marieke heeft in elk geval niet zinloos en ten onrechte geoefend; de onderwijzer stuurde haar op een goede wijze door dit deel van de oefenhoek.

Interessant voor de lezer zijn nu de eisen, die de ontwerpers (Johan van Bruggen en Hans ter Heege) aan een dergelijke oefenhoek stellen: er moet veel en goed materiaal zijn, de leerkracht moet het materiaal goed kennen, hij moet in staat zijn om zijn leerlingen te observeren onder het werk, terwijl zijn kennis van de leerlingen hierop gebaseerd dient te zijn.
Zo gezien kan een onderwijzer het beste zijn eigen oefenhoekverzameling aanleggen, zorgdragen voor een kontinue aanvulling vanuit beschikbare materialen op de markt en door observatie greep krijgen op geschikte trajekten.

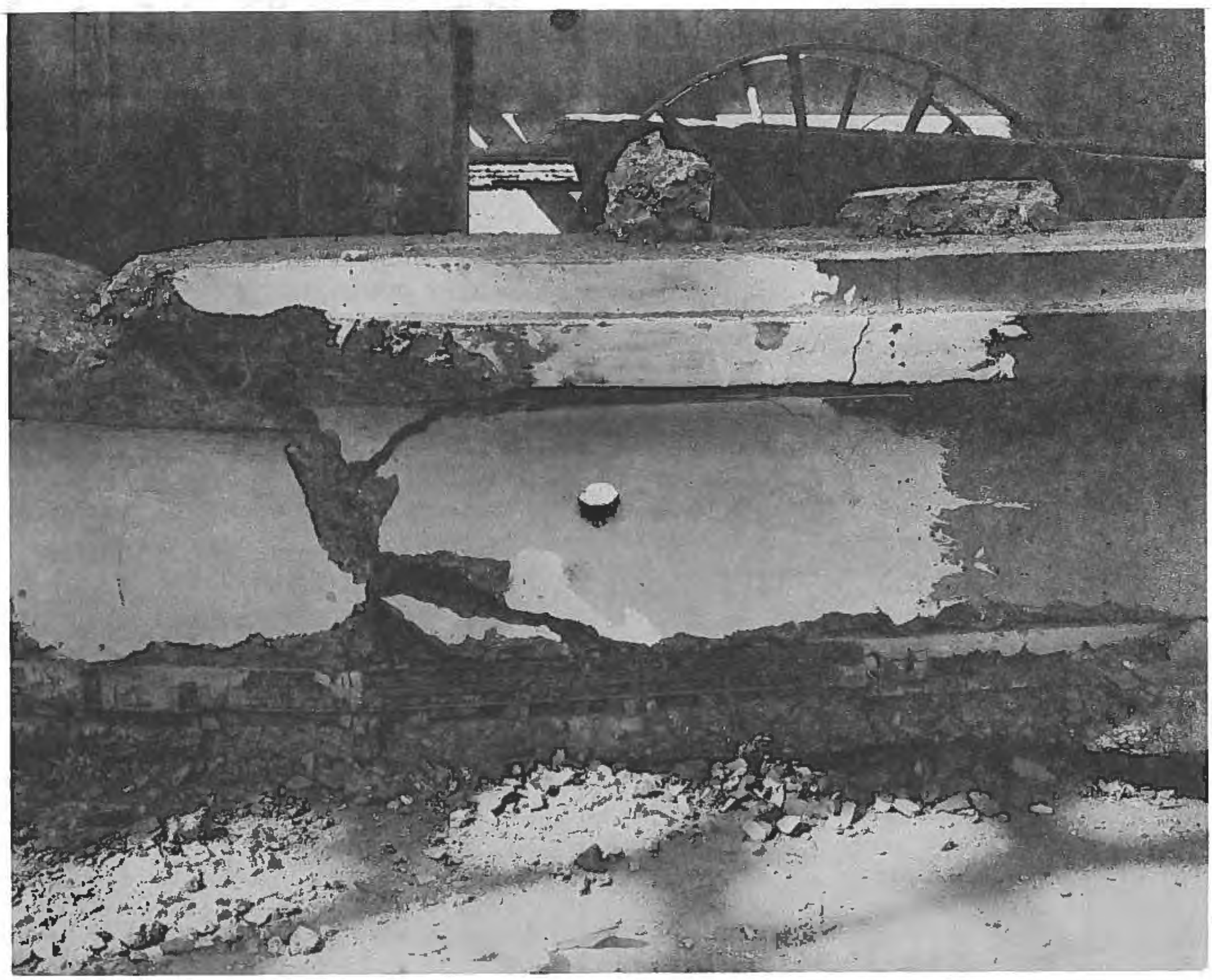
* * *

Het overbekende gebied van de 'vervliegende' kennis, waarin de basisschoolleerling tijdens de rekenlessen drie jaar achtereen vertoeft, wordt in het kader van dit variabel blok door Leen Streefland betreden. (**4.4**)
De opvattingen over het onderwijs rond de breuken zijn de laatste jaren nogal veranderd. Dit is af te lezen uit de leerplans, die lokaal en regionaal in de diverse inspekties van het basisonderwijs om de 5 jaar naar voren worden gebracht. Het blijkt een proces van uitdunning te zijn. Eerst verdween het delen door een breuk, toen werden de ingewikkelde breuken geëlimineerd. Tenslotte bleven ons nog de breuken met een hoge gebruikswaarde en het optellen, aftrekken en vermenigvuldigen daarmee. Het valt op dat deze ontwikkeling —, schijnbaar aangezet vanuit een pragmatisch standpunt — nooit invloed heeft gehad op *het onderwijzen* van de breuken. Een rijke kontekst, waarin problemen uit dit gebied naar voren moeten komen, is in geen van de gevallen aanwezig.

Wat is dat toch met die breuken?
Leen Streefland stelt zich deze vraag — vanzelfsprekend voorafgaand aan zijn ontwerpwerkzaamheden.
Een analise van het breukenwerk in de huidige school tracht hij als konstruktief uitgangspunt te kiezen. Hij ontmoet daarbij de bestaande didaktische hulpmiddelen, die in de introduktiefase het begrip breuk een konkrete aanschouwelijke basis dienen te geven.
Voorts ervaart hij de psychologische aspekten van het breukbegrip op basisschoolnivo. De operator-funktie van de breuken wordt daarbij gesignaleerd. Tevens blijkt, dat dit aspekt van het breukbegrip spoedig verlaten wordt en bij het rekenen met breuken nauwelijks nog een kans krijgt.
Ook een wiskundige analise brengt hem weinig verder.
Dan plaatst hij zich op een didaktisch-fenomenologisch standpunt. De vraag hoe mensen met breuken plegen te werken (en worstelen)

biedt hem het aangrijpingspunt voor een eerste ontwerp.
Gewone breuken worden geïntroduseerd als operatoren op diskrete en kontinue 'gehelen'. Het visuele breukbegrip, dat daarbij ontwikkeld wordt, krijgt een ondergrond in twee denkmodellen: het wegenmodel en het rechthoekmodel. Een onderscheid in dinamisch en statisch ligt voor de hand. Dan komt het kommagetal nogmaals eksplisiet in beeld. Deze breuk is een getal met een meetaspekt. In het verband tussen de gewone breuken en de kommagetallen ontwikkelt zich het meetgetal tot een 'denkgetal', waarmee een opening naar de wereld van het kontinue is gemaakt.
De beide modellen gaan funktioneren in het *rekenen* met breuken. Dit betekent dat ook hierbij de problemen op min of meer aanschouwelijk nivo kunnen worden aangevat en afgewikkeld. Steeds blijft datgene een rol spelen, dat met de breuken (en de operaties ermee) beschreven wordt. Het algoritmiseren dient daarna te geschieden in de sfeer van het toepassen en *be*oefenen.

De genoemde overwegingen zijn gekonkretiseerd in een vrij omvangrijk pakket *'breukelerdam'*. Leen Streefland voert ons langs de aangeboden problemen, zonder zich te verliezen in zijpaden die naar andere leerstofvlakken leiden.
Aan het eind mogen we even de oogkleppen afdoen om het bestaan van een rijker aktiviteitengebied in en om breukelerdam te ervaren.



'breuken in een rijke kontekst'

4.2 gegeven dit, gevraagd dat

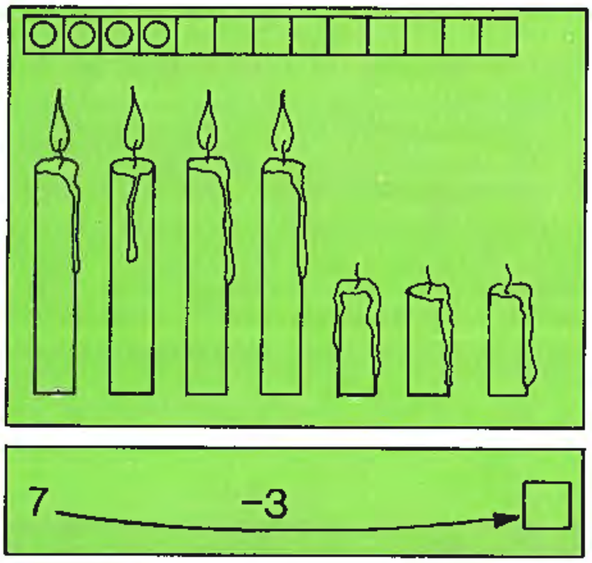
TELPROBLEMEN VOOR KLAS 1

JAN VAN DEN BRINK

INLEIDING

De autobusproblemen[1]) hebben aanleiding gegeven tot allerlei voortzettingen, waarvan we er enkele noemen.

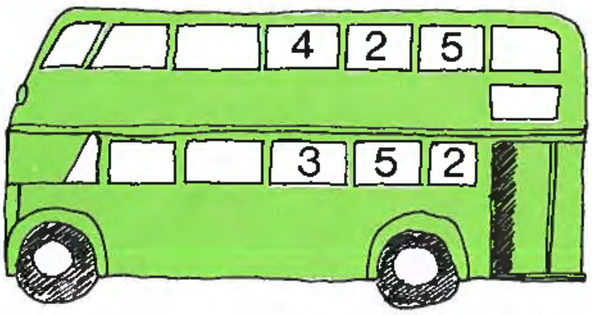
* *Opgavenserie 'Wat zegt het plaatje?'*



Een 'plaatje, praatje en een rekentaaltje' beschrijven hier een gebeurtenis of een situatie.

* *De getallenlijn*
  Aanvankelijk geïntroduseerd als een hulpmiddel om het aantal passagiers in de bus bij te houden, later gevolgd door raadselspelletjes, als 'Raad mijn getal'. (Is het 12? Neen, groter, ...)
  Hier komen wiskundige begrippen als variabele en interval aan de orde.

* *Splitsen* van hoeveelheden als voortzetting van de 'dubbeldekker'.



* Vooral ook het *abstraheren* van de wiskundige operaties + en − uit allerlei situationele operaties, zoals het in- en uitstappen

[1]) Wiskobas-Bulletin, jaargang 3 nr. 3, pag. 250 e.v.

van passagiers, het rechtopzetten en omvallen van kegels, het aansteken en uitblazen van kaarsen, enzovoort.

Naast deze voortzettingen van autobusproblemen is er met een geheel nieuwe serie vraagstukken gestart. Deze serie sluit aan op het *'kompleteren'* zoals dit in het leerlingengedrag werd gesignaleerd (zie bijvoorbeeld bladzijde 338 van dit bulletin).
Het principe achter deze nieuwe opgaven is even eenvoudig als wiskundig, namelijk *gegeven dit, gevraagd dat.*
Bijvoorbeeld:

gegeven: 25 bekers, 3 bekers zònder tandenborstel
gevraagd: hoeveel bekers mèt een tandenborstel?

Bij deze problemen komt vooral de *noodzaak van het terugtellen* aan bod. De kinderen zullen ontdekken dat het van groot belang is om te kunnen *terug*-tellen. Een aktiviteit die, zoals u weet, niet door alle kinderen uit klas 1 perfekt wordt beheerst. Overigens zult u er versteld van staan op welke wijzen de kinderen dit gemis kunnen opvangen.
De werkbladen hebben nog een ander doel: laat de kinderen bij één plaatje *zoveel mogelijk* opgaven bedenken!

WERKBLADEN
In dit artikel zijn een aantal werkbladen opgenomen. Hierbij maken we enkele aantekeningen.

Werkblad 1

* Er zijn 20 eierdoppen. (gegeven)
  Zijn er evenveel eieren?
  Hoeveel doppen zijn leeg?
  Hoeveel eieren zijn er? (getallenlijn gebruiken)
* Vertel: 20 doppen, 4 eieren zijn opgegeten.
  Noteer: 20 − 4 op het bord.
  Wat betekent dit?

  Vertel: 16 volle doppen en 4 lege.
  Noteer: 16 + 4 op het bord.
  Wat betekent dit?
* Achter de muur staan nog 6 eierdoppen in de rij.
  In elke dop een ei. (gegeven)
  Hoeveel doppen? Hoeveel eieren?
* Onder de streep: tellen met twee tegelijk. Vul sommige doppen en bedenk twee 'sommetjes'.

Werkblad 2

* Zijn het twee foto's van *dezelfde* muur?
  'Je kunt de bovenste rij niet helemaal zien.'
  Schuif je schrift zodanig op de onderste foto, dat je op beide foto's hetzelfde ziet.
  Hoe heb je de plaats voor het schrift gevonden?
  Moet je de stenen vanaf het begin tellen of kan het sneller?
* Gegeven: in de onderste laag zijn 25 stenen. Hoeveel zijn er in de 2^e, de 3^e en de 4^e laag?
  Eerst *laten zeggen*, dan laten *noteren:* 25 − 3 (in de 2^e laag) en de uitkomst vinden door te tellen: terugtellen, op de getallenlijn zoeken, e.d.
* Hoeveel stenen per rij kun je *niet* zien op de bovenste foto?

Werkblad 3

* Heeft ans steeds in de sneeuw gehuppeld? (neen, ook gelopen.)
  Hoeveel passen denk je?
  Hoeveel 'hupjes'?
  Schrijf die aantallen op.
  Hoe heb je geteld?
* Als ze gewoon was blijven lopen, hoeveel passen had ze dan gemaakt? (tekenen)

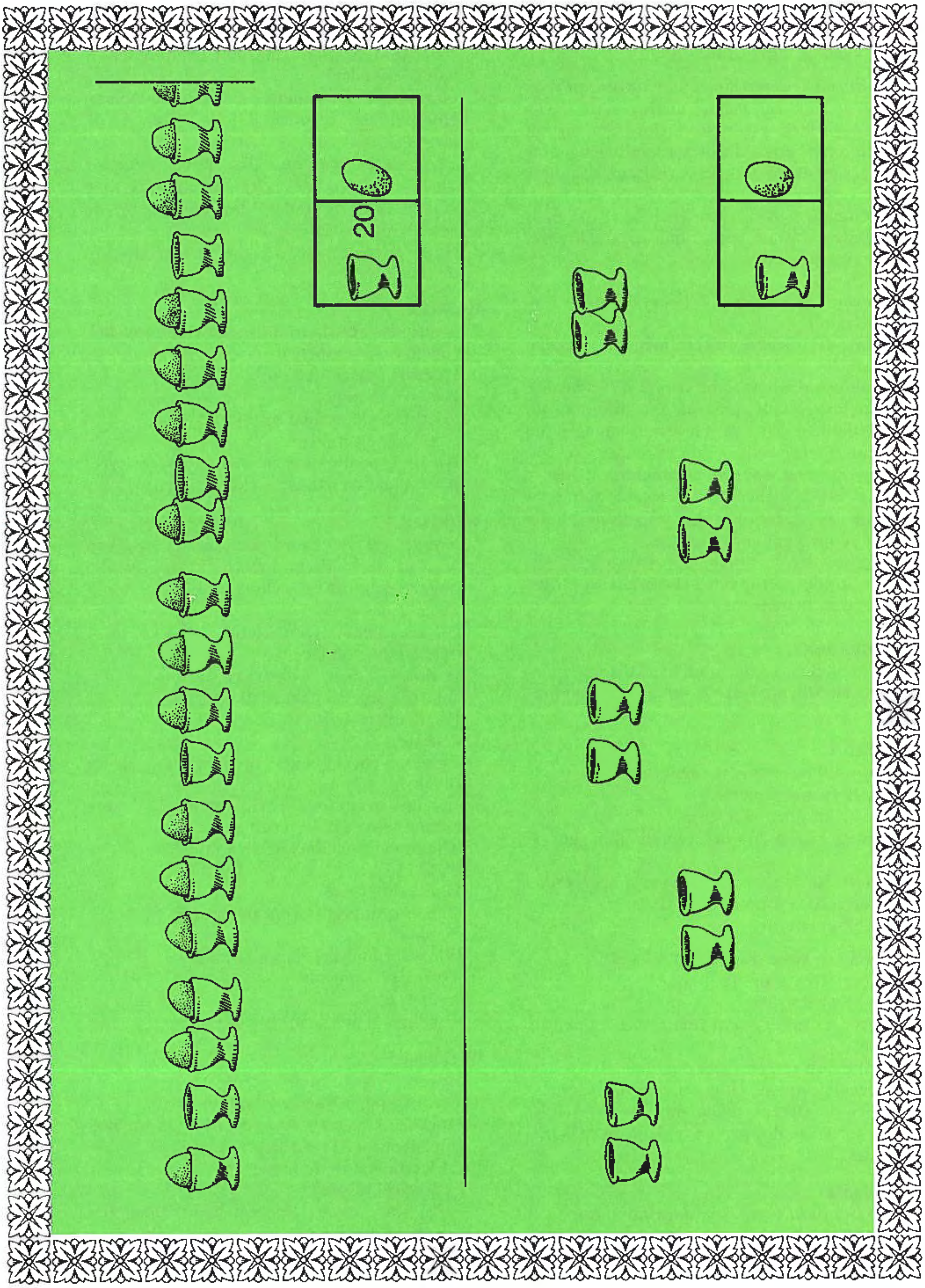
Werkblad 4

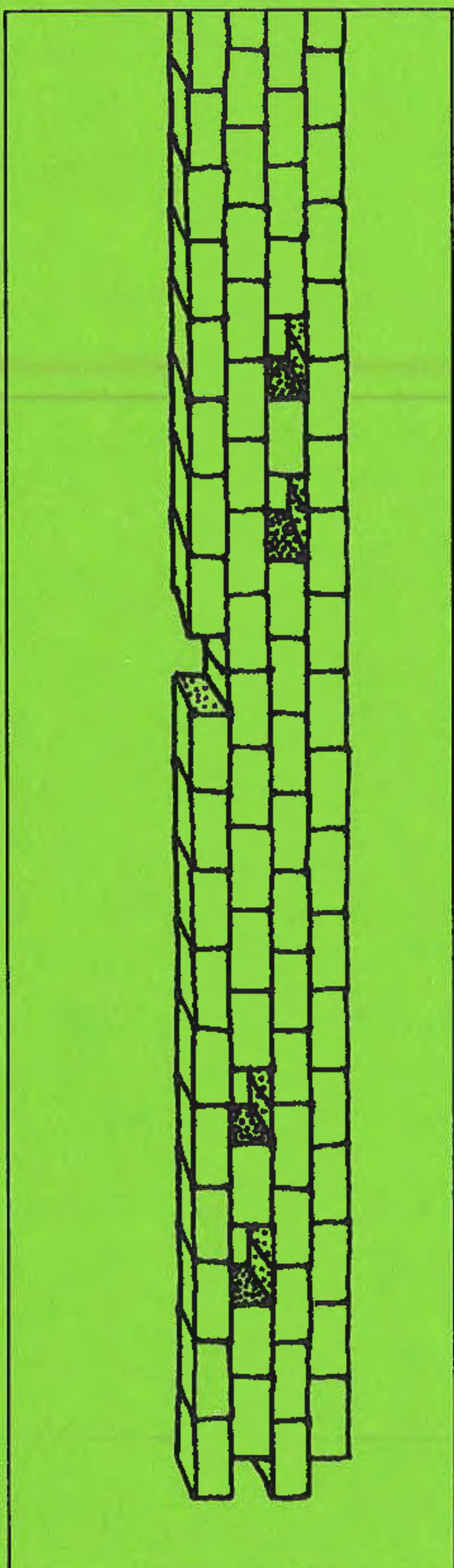
* Noteer op het bord een aantal opgaven waaruit de kinderen moeten kiezen: welke opgave behoort bij welke plank?
* *Plank 1* (bovenste)
  In alle bekers een rietje, behalve in 4 bekers; die zijn leeg.
  In de 24^e beker: 4 ekstra rietjes.
  Zijn er evenveel bekers als rietjes?
  Hoe weet je dat?
* *Plank 2*
  Zijn er evenveel bekers op deze plank als op plank 1?
  In elke beker een rietje, in de 12^e twee ekstra, in de 18^e één rietje ekstra.
  Zijn er evenveel bekers als rietjes?
* *Plank 3*
  Hoeveel bekers?
  Zijn er evenveel bekers als rietjes?
* *Plank 4*
  Wie weet hoeveel rietjes er zijn?
  Twee oplossingen:
  · 2, 4, 6, 8, ...
  · bekers tellen (10), dan 20 rietjes.

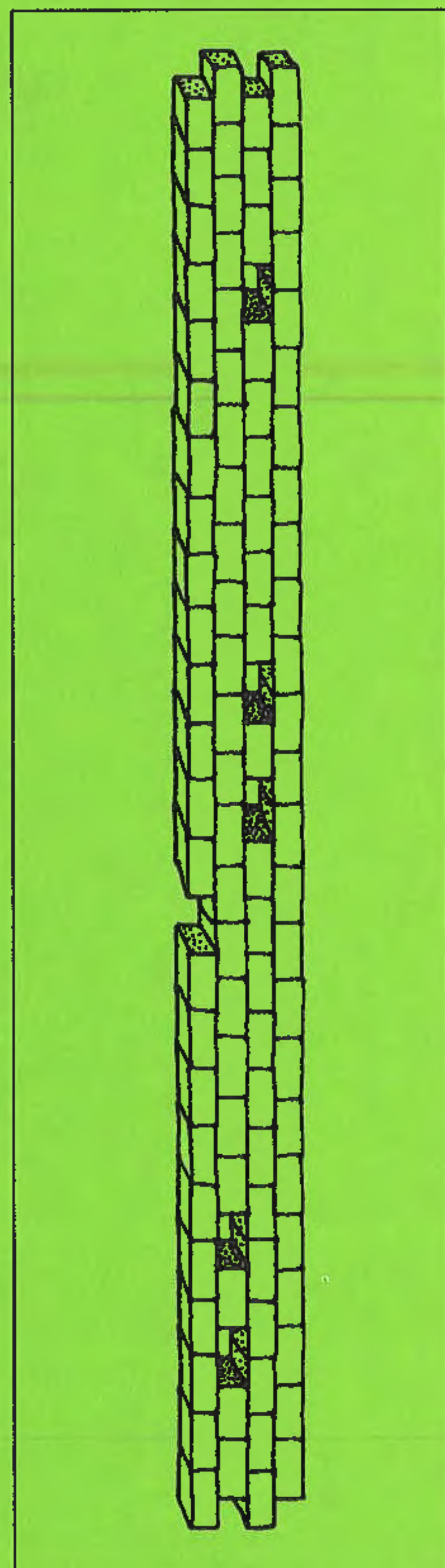
Werkblad 5

* Hoeveel kapstokken? (25)
  Eén leerling is nog in school.
  Hoeveel kinderen kunnen hun jas nu nog ophangen? (23; één kapstok is stuk)
* 24 leerlingen in de klas.
  – hoeveel tassen?
  – bij koud weer: hoeveel handschoenen? (48, tekenen: )

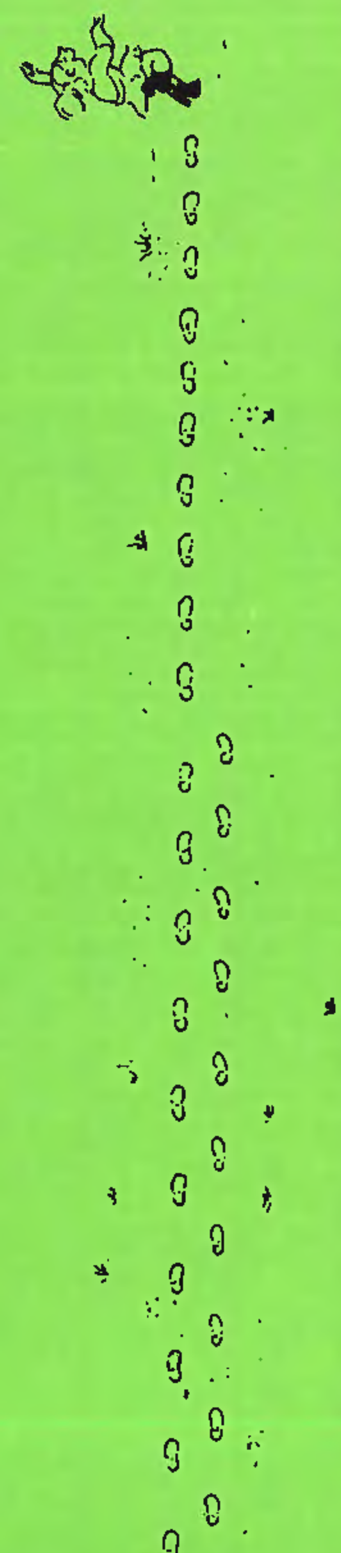
WERKBLAD 1



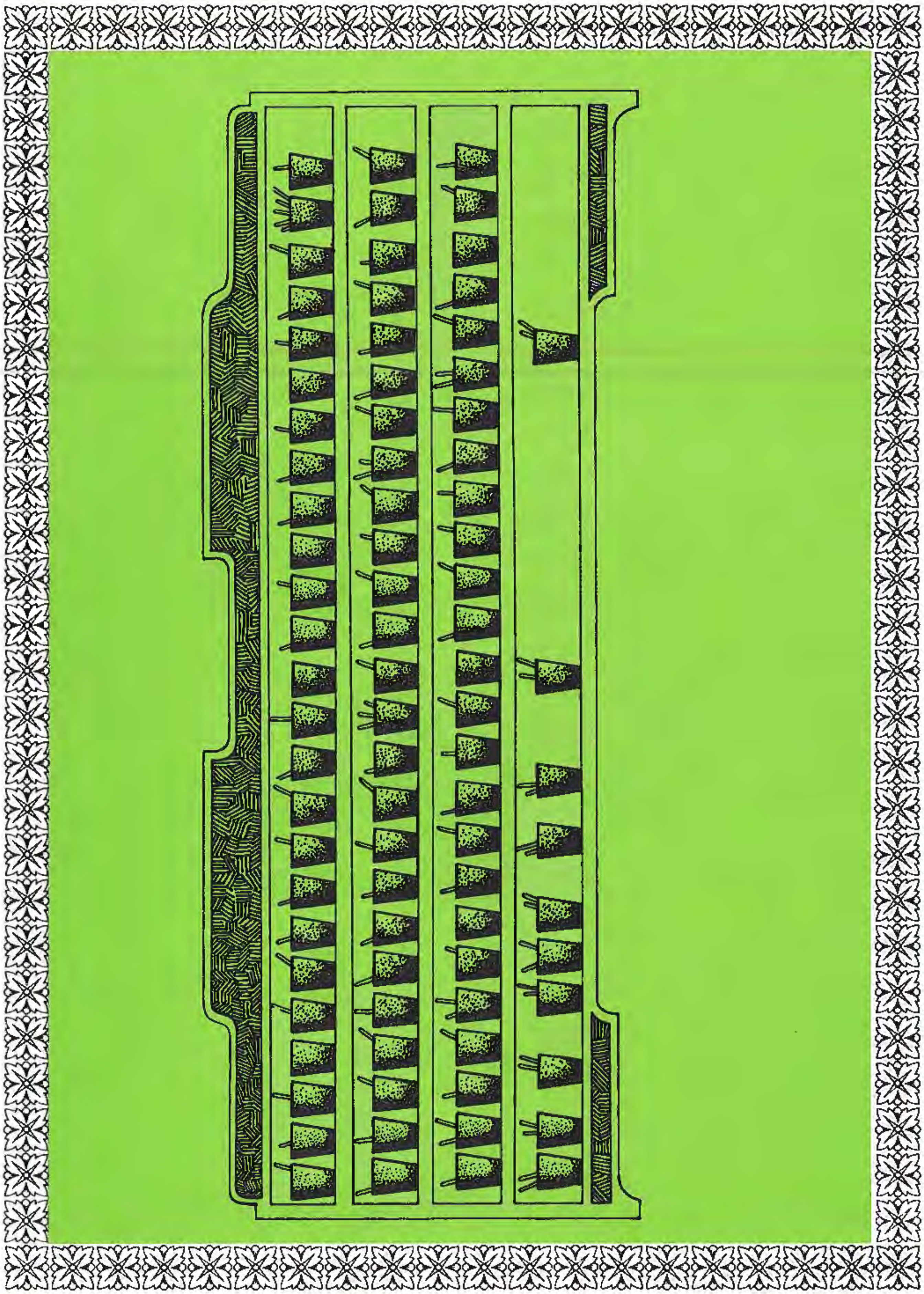




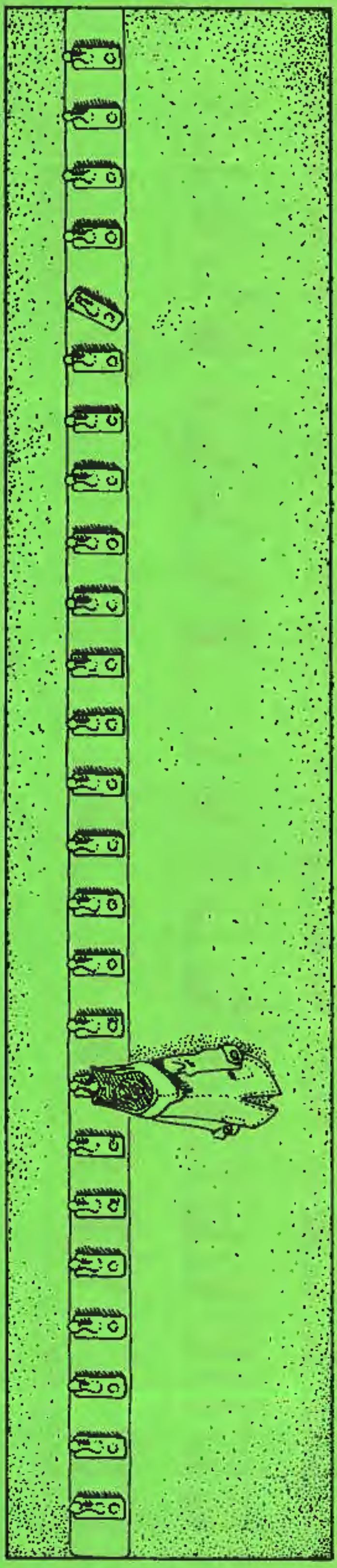
WERKBLAD 3



sporen in de sneeuw



WERKBLAD 5



4.3 oefenen in toepassen

OEFENEN IN KLAS 3

JOHAN VAN BRUGGEN

INLEIDING

Het is iedere praktikus uit of rond de basisschool bekend dat kinderen in klas 2, 3 en 4 nogal wat oefening nodig hebben om thuis te raken in de wereld van de getallen en de operaties daarmee.
De tafels van vermenigvuldiging, optellingen en aftrekkingen uit het hoofd, gebruikmaken van eigenschappen van getallen en bewerkingen, het leren beheersen van de cijfermetoden, zijn onderwerpen die in bijna elk leerplan (c.q. metode) een grote plaats innemen.
Ook binnen het schoolwerkplan, zoals dat op de ontwerpschool wordt ontwikkeld, hebben deze onderwerpen een belangrijke plaats. Immers, het praktisch nut van de wiskunde is er overduidelijk in. Toch zijn er *verschillen* met de gebruikelijke leerplans, die voortkomen uit onze visie op wat wiskunde-onderwijs moet zijn:

* De operaties worden geïntroduseerd op velerlei wijzen, gekoppeld aan de vele verschillende situaties waarin ze in de werkelijkheid voorkomen.
  Dit betekent dat in klas 1 en 2 vele *modellen* gehanteerd worden[1]) en dat de 'abstrakte' operatie en de notatie ervan ontstaan als *resultaat van schematiseringsprocessen.*[2])
* Rechtdoen aan het uitgangspunt, dat gestreefd wordt naar een '...., gedifferentieerd, ... wiskunde-onderwijs' betekent óók, dat in de organisatie van de onderwijsleerprocessen gestreefd moet worden naar een introduktie en een oefening, die zoveel mogelijk recht doet aan individuele verschillen.
  Dat gebeurt door
  - gebruikmaken van het principe van kern- en keuzewerk bij meer klassikale lessen;
  - het principe van de progressieve schematisering in de leergangen voor het cijferen, waardoor kinderen in eigen tempo en op eigen nivo cijfermetoden van steeds schematischer nivo ontwikkelen, terwijl toch klassikale aanbieding van problemen mogelijk blijft;[3])

---

[1]) Zie: Wiskobas-Bulletin jaargang 2, nrs. 2 en 3 en vele artikelen in jaargang 3.

[2]) Zie het artikel van Jan van den Brink in deze aflevering en het artikel van Johan van Bruggen in jaargang 2, nr. 3 (over het automatiseren van operaties).

[3]) Zie het artikel over het automatiseren van operaties in jaargang 2, nr. 3 en het voorbeeld in dit artikel.

- het gebruikmaken van de wiskunde-werkhoek met z'n opdrachtkaarten en materiaal, onder andere gebruikt ter tempodifferentiatie, brengt tegelijk een nivodifferentiatie teweeg;[1])
- de oefenhoek (zie verderop in dit artikel).

* Oefening-zonder-meer in rijtjes sommen is soms noodzakelijk uit leerpsychologische overwegingen, maar moet zoveel mogelijk plaatsvinden in toepassingssituaties, waarin het maken van sommen *zin* heeft binnen de oplossing van problemen. Problemen die door de kinderen reeds zelf binnen de wiskunde getrokken zijn doordat ze vertaald zijn naar de getallen- en operatiewereld.
* Oefening kan ook zin krijgen omdat er in de oefening verkenningen worden uitgevoerd in andere belangrijke wiskundige aktiviteiten en/of gebieden (bijvoorbeeld het funktiebegrip, het zoeken naar getalverzamelingen die aan bepaalde eisen moeten voldoen, e.d.).

In onderstaande bijdrage geven we u een impressie van een aantal momenten uit het schoolwerkplan voor klas 3, waarin het oefenen naar voren komt.
Het eerste voorbeeld heeft betrekking op het oefenen van onder andere cijfervaardigheden en schatten binnen een tema.
Het tweede heeft betrekking op het matematiseren van een probleem waarop dan, binnen een probleemgeoriënteerde les, cijfervaardigheden worden 'losgelaten'.
Het derde voorbeeld is eigenlijk geen voorbeeld maar een impressie van een bepaalde werkwijze (organisatorisch-didaktisch) waarin zowel de differentiatie als het oefenen belangrijk zijn.

1 HET TELEFOON-TEMA

Eind januari werden ongeveer 8 lessen aan het telefoontema besteed.
Aan de orde komt onder andere het telefoneren als aktiviteit, het hanteren van de telefoongids — waarin het ordenen erg belangrijk is —, het maken van een telefoongids voor de klas, het samenstellen van telefoonnummers met twee of drie cijfers. (Hoeveel abonnees kunt u bedienen met 6-cijferige nummers?)

* Vanuit de waarneming dat er in de gids plaatsen staan met nummers van 3, 4, 5 of 6 cijfers, komen de leergesprekken op het verband dat er zal bestaan met het aantal inwoners van een plaats. Kun je uit de telefoongids het aantal inwoners schatten?
Strategieën worden bedacht die neerkomen op het vaststellen van een gemiddelde telefoondichtheid, waarna je via schatten van het aantal abonnees tot het aantal inwoners kunt komen. Daarbij moeten heel wat problemen opgelost worden. Je kunt de telefoondichtheid op empirische wijze vaststellen door de klas of de school als steekproef te gebruiken.[2]) Maar gemakkelijker gaat het door je eigen woonplaats — in dit geval arnhem — te bekijken.

Hoeveel abonnees telt arnhem ongeveer? Als strategie bedenken de kinderen al snel: tel hoeveel er op één bladzijde staan; tel het aantal bladzijden en vermenigvuldig.
Bladzijden: nr. 14 tot en met 166, dus ongeveer 150. (afronden is heel natuurlijk!)
Abonnees: ongeveer driemaal 68 op één bladzijde, dus ongeveer 200.
Er zijn dus ongeveer 150 x 200 abonnees. Dat is gemakkelijk! 100 x 200 is 10 x (10 x 200) = 10 x 2000 = 20.000. Nu nog 50 x 200 erbij; dus nog de helft van 20.000, dat is 10.000 erbij. Dat is samen 30.000 ongeveer.

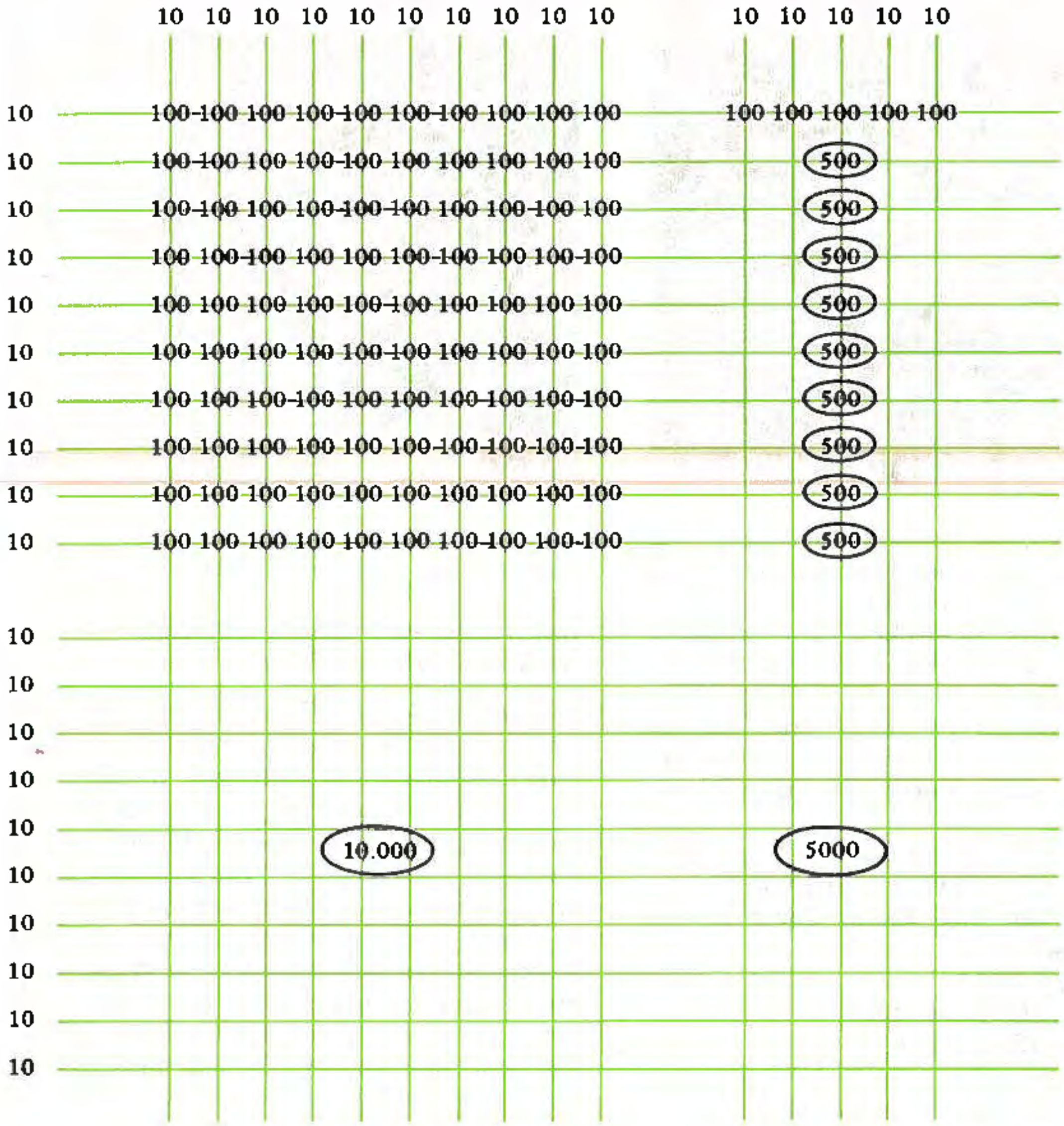
Maar het kan ook met het kruispuntenmodel.[3])

[1]) Zie de diverse artikelen over de wiskunde-werkhoek in de 2e jaargang van dit bulletin.

[2]) Zoals beschreven in jaargang 3, nr. 2 ('En dan gaan we naar de speeltuin').

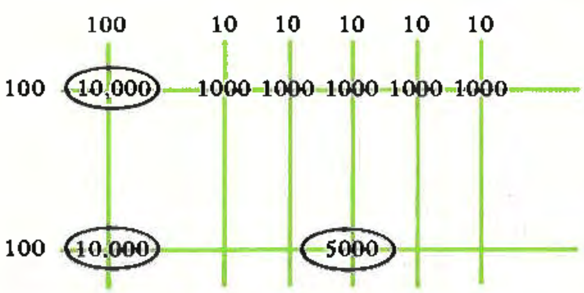
[3]) Zie de beschrijving van verschillende nivo's van vermenigvuldiging in jaargang 2, nr. 3.

Bijvoorbeeld:



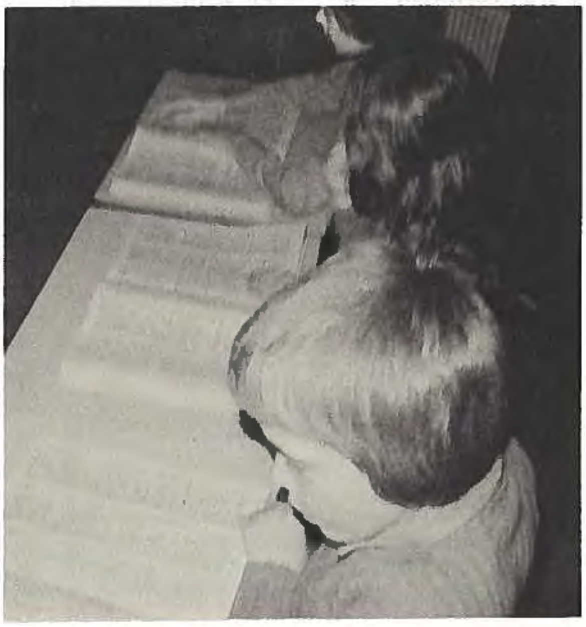
10.000
10.000
5.000
5.000 +
30.000

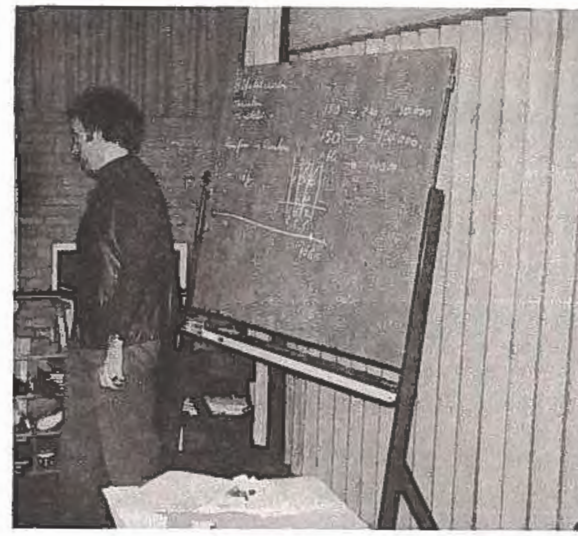
Maar het kan ook zó:



20.000
5.000
5.000 +
30.000

Hoeveel inwoners heeft arnhem? We weten het niet goed en schatten is in dit geval gevaarlijk. Hoe kom je erachter?
'Vragen aan de burgemeester!'
Ervaringen met paspoorten halen e.d. worden

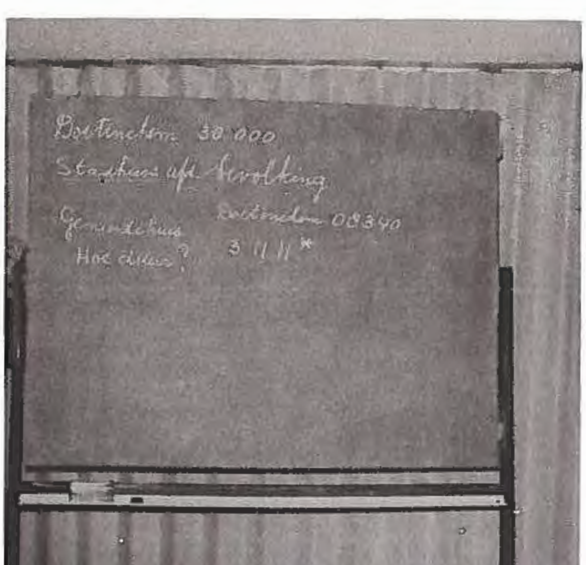




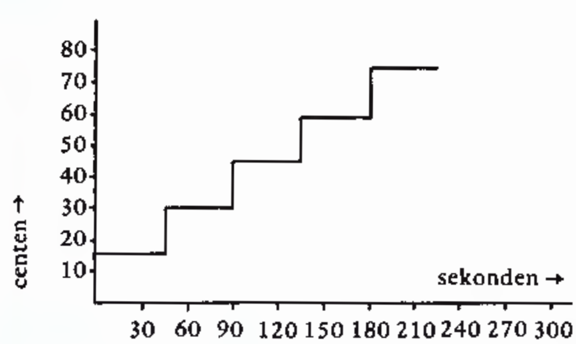
gerapporteerd en de 'Afdeling Bevolking' van het 'Gemeentehuis' valt. Het nummer wordt opgezocht en de prosedure van het doorverbinden wordt besproken (het gevonden nummer is immers 45 71 11*); wat moet je zeggen en vragen?
Een kind belt op en komt terug met de mededeling dat er 129.845 mensen in arnhem wonen. Natuurlijk wordt dit afgerond op 130.000.
Welnu, je ziet het zo, in arnhem heeft ongeveer 1 op de 4 inwoners telefoon.
Nu kun je ook het aantal inwoners van doetinchem schatten:

– bladzijden tellen
– vermenigvuldigen met 200
– vermenigvuldigen met 4.

Kontrôle vindt plaats door weer het gemeentehuis te bellen. Er blijken nogal wat meer inwoners te zijn dan geschat was! Hoe komt dat? (arnhem heeft veel kantoren e.d., die wel veel telefoonaansluitingen hebben, maar waarvan het personeel geen inwoner van arnhem is.)
We maken een nieuwe schatting voor de telefoondichtheid, etcetera.



* Een ander toepassingsgebied is het berekenen van de gesprekskosten met behulp van de tariefbepalingen voorin de gids. Bij het lezen daarvan is veel hulp nodig. Na enkele berekeningen van werkelijk gevoerde en gefingeerde gesprekken (vermenigvuldigen!) blijkt dat het gemakkelijker zou zijn een grafiek te hebben. Nu werd in de derde klas vrij veel aandacht besteed aan de groeikurven en de afstand-tijd-grafiek (op een andere wijze dan in klas 4);[1]) het maken van deze telefoonkostengrafiek was dan ook bedoeld als een toets. Als de grafiek gemaakt is (en dat ging vrij gemakkelijk), kun je de kosten van een bepaald gesprek zo aflezen:



(NB: Het gaat over interlokale gesprekken buiten de eigen sektor en de aangrenzende sektoren.)

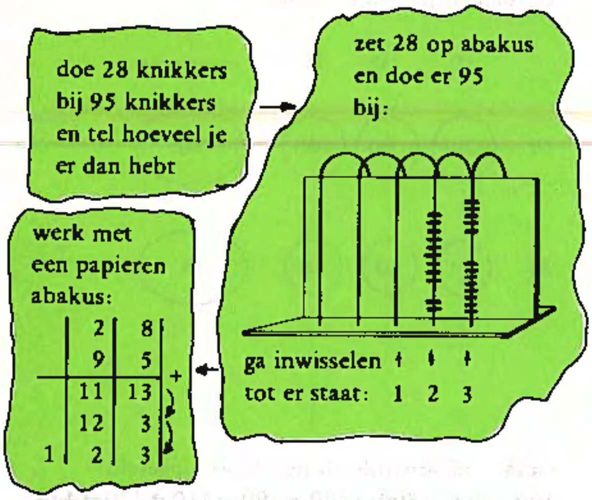
Nu hoef je niet meer te rekenen! Je kunt het zo aflezen!

---

[1]) Zie het artikel van Hans ter Heege in jaargang 3, nr. 3.

2 DE RONDETIJDEN-LES

Reeds eerder is in het Wiskobas-Bulletin geschreven over de leergangen voor het cijferen, die in klas 3 gevolgd worden.[1])
Kenmerkend daarvoor is de *progressieve schematisering:* de leerling schematiseert de konkrete situatie steeds verder (in vele op elkaar volgende nivo's van ontdekking) tot het nivo van het algoritmisch werken.
Bijvoorbeeld:



Er zijn nog vele tussennivo's van verkorting. Karakteristiek is:

- in principe voltrekt de leerling zèlf de matematisering naar een hoger nivo;
- daarin zit de differentiatie dus 'ingebouwd': men moet aksepteren en stimuleren dat kinderen dezelfde problemen op zeer verschillende wijze oplossen.

We kunnen nu niet diep op deze leergangen ingaan. In plaats daarvan geven we u een vrijwel letterlijk protokol van een les, gegeven in klas 3b op 17 januari 1974.

O – onderwijzer
Lln – leerlingen

(1) O tekent op het bord:

en vraagt wat het zou kunnen zijn.
Lln: Een baantje, een baan voor race-auto's, een ei, een ijsbaan.
O bevestigt dat het een ijsbaan voorstelt. Hoe lang is één zo'n rondje? (400 m). Er wordt een startstreep in gezet.

O: Wie heeft weleens naar schaaten op de tv gekeken?
Er wordt wat gepraat:
- binnen/buitenbaan
- wisselen
- cijfertjes 'gaan heen en weer'
- degene met de minste tijd heeft gewonnen
- als ze over die startstreep gaan, staan de cijfertjes even stil.

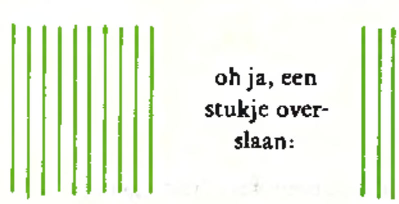
Op het laatste wordt doorgegaan:
wat betekent bijvoorbeeld *1^e^ ronde: 37?*
Lln : 37 rondjes gereden.
O : Uitleg begrip rondetijd; de lln. denken dat het 37 minuten is.
O : Dat is meer dan een half uur!
Wat nu precies 37 sekonden is, wordt niet zo erg duidelijk.

(2) O : Doen ze er altijd 37 sekonden over?
Lln : Ze gaan weleens harder of zachter.
O : Ik ken een jongen die altijd precies bijhoudt, wat de rondetijden zijn; alleen had hij een keer vergeten de totaaltijd te noteren.
Op zijn briefje had hij allemaal getallen staan: soms 37 sekonden, soms 36, enzovoorts.
In totaal had hij staan:
36, 36, 37, 37, 37, 36, 37, 38, 38, 37, 37, 37, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 37, 38, 37, 36, 36, 36, 36.

Er wordt geteld en uiteindelijk staat er op het bord:
12.37
8.36
5.38.
NB: Deze klas is gewend om in plaats van een x een punt te schrijven.

O : Kun je hem nu helpen en uitrekenen hoe lang de rijder er in totaal over gedaan heeft?
Lln : De sommetjes uitrekenen en dan de antwoorden optellen.

(3) O : Goed, laten we eerst uitrekenen 12.37.
Hij schrijft op het bord 12.37 en vertelt dat het jongetje op school geleerd heeft hoe je dat met strepen kon uitrekenen.
O begint dan vertikale strepen te trekken:

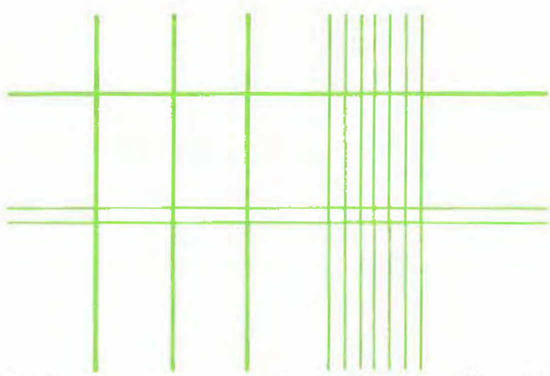


Op dat moment stopt hij, want er zijn veel vingers. Eén van de leerlingen: Als u zo doorgaat, wordt het een knoeiboel; je kunt beter met de platte kant van het krijtje een dikke streep zetten voor 10 van die strepen.

[1]) Zie jaargang 2, nr. 3.

Dit gebeurt nu door de onderwijzer. Hij tekent

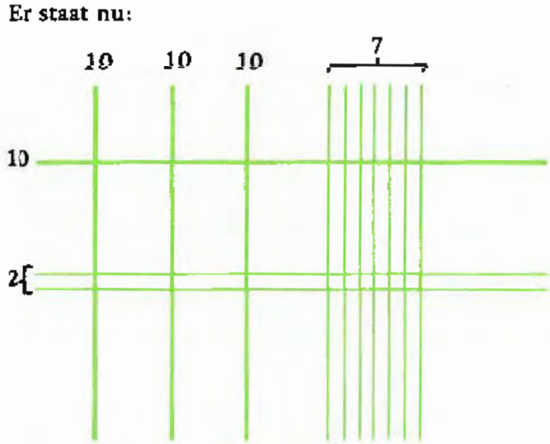
en vraagt: Hoeveel strepen heb ik nu?
Lln : 20.
O zet er nog een dikke bij en vraagt weer:
Hoeveel heb ik er?
Lln : 30.
Moet ik nog een dikke zetten?
Lln : Nee, want dan hebben we er 40, je moet nog 7 dunne zetten.
Hoeveel keer moest je 37 doen?
Lln : 12.
Hoe doe ik dat dan nu?
Lln : 1 dikke en 2 dunne over zó (gebaar: horizontaal).
O doet dat en er komt dus:



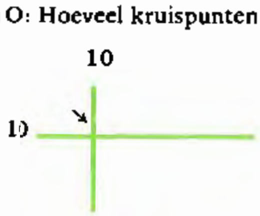
(4) Opnieuw wordt gevraagd wat elke lijn of bundel lijnen voorstelt. De antwoorden worden er boven gezet.

NB: Gebleken is dat dit erbij zetten veel steun aan de leerlingen geeft.

Er staat nu:

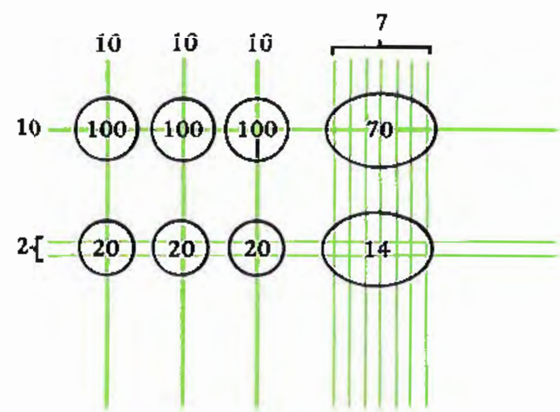


(5) O: Hoeveel kruispunten staan hier eigenlijk?



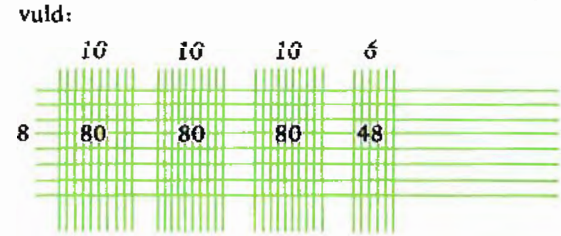
Lln : 100.
O : Welk sommetje is dat dan?
Lln : 10 x 10.
O : Wijs dat sommetje aan in de figuur.
Het getal 100 wordt nu in een kringetje in de figuur gezet.
Deze werkwijze wordt steeds herhaald:
- hoeveel kruispunten?
- welk sommetje?
- wijs sommetje aan
- zet getal in kringetje.

Op deze wijze komt er dus:

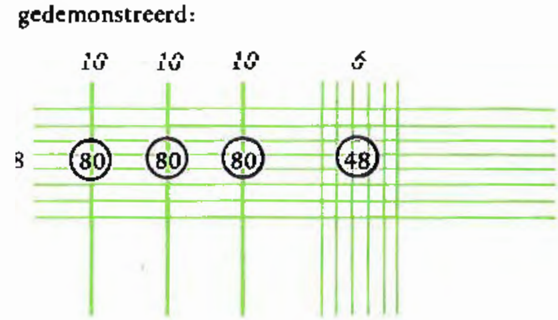


Gezamenlijk wordt uit het hoofd opgeteld:
100 → 200 → 300 → 370 → 390 → 410 → 430 → 444.

(6) De kinderen moeten nu zelf op een kladblaadje uitrekenen: 8.36.
Daarbij blijken er verschillende nivo's van schematisering te bestaan. Er zijn er die de 'oude' metode blijven volgen; zij tekenen braaf 36 vertikale strepen, waarna de deelprodukten worden ingevuld:

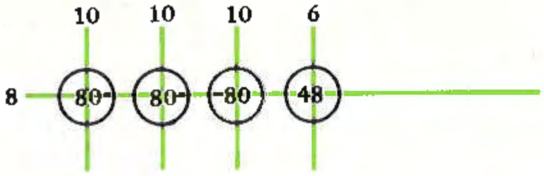


Er zijn er veel, die op het nivo werken wat enige weken daarvoor door enkele kinderen is ontdekt en daarna geleidelijk door meerderen is overgenomen en dat ook in het eerste deel van de les is gedemonstreerd:



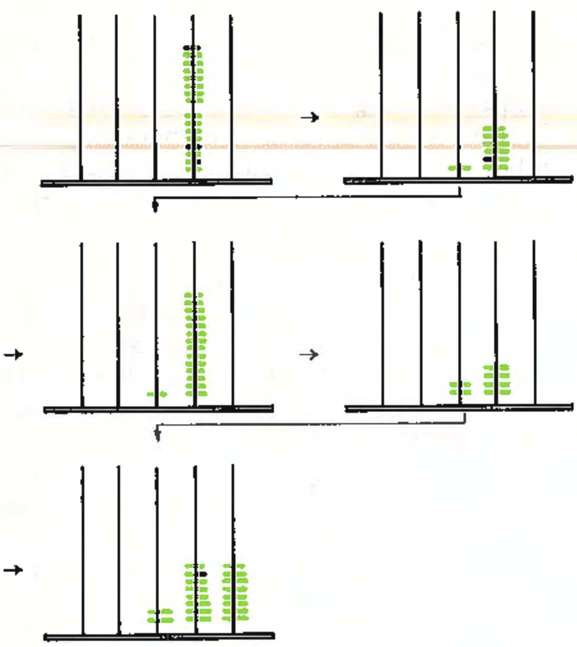
(de bundeling dus tot 'volle' tienen.)

Er is één leerling die nog verder schematiseert:



Ook bij de optelling van de vier deelprodukten zijn diverse nivo's aanwezig:

– er zijn er die het met de abakus doen:



2 8 8

– de meesten doen het met de papieren abakus, ofwel door positiestrepen; op zichzelf kan dat weer op verschillende nivo's:

	T	L
	8	0
	8	0
	8	0
	4	8 +
	28	8
2	8	8

of:

	T	L
	8	0
	8	0
	8	0
	4	8 +
2	8	8

T: tienen
L: lossen

– er zijn verscheidene leerlingen, die bij deze vrij eenvoudige opgave de positiestrepen 'meedenken' in de optelling en dus mentaal cijferen:

```
  80
  80
  80
  48 +
 288
```

NB: In deze les vond de onderwijzer een goede gelegenheid voor een 'bint' naar een voor vele kinderen volgend nivo van optellen: klassikaal wordt de opgave 8.36 gedaan (met gebundelde tienen) en de onderwijzer wijst dan op de metode van optelling die een aantal leerlingen gebruikt hebben:

T	L
8	0
8	0
8	0
4	8 +
28	8

Een leerling die deze positiekaartmetode niet gebruikt heeft, moet nu verder gaan en doet:

	T	L
H	28	8
1	18	8

H: honderden

O : Mag het zo blijven?
Lln : Nee, nog een keer inwisselen.

	T	L
H	28	8
1	18	8
2	8	8

O : Is er iemand die hier iets ziet?
Lln : Eigenlijk staat bij 28|8 ook al het antwoord. Dus eigenlijk hoef je die hele reuteméteut niet op te schrijven.
O : Wijst even op het in één keer inwisselen.

⑦ Nu weer individueel op papier uitrekenen: 5.38. Dit gaat vrij gemakkelijk, evenals de klassikale bespreking op het bord.

⑧ O : Zijn we nu klaar?
Lln : Nee, want je moet die drie getallen nog optellen (enkelen hebben dat ook al gedaan):

H	T	L
4	4	4
2	8	8
1	9	0 +
7	21	12
7	22	2
9	2	2

Dit gaat goed.

⑨ O : Hoe lang heeft deze schaatsenrijder dus over die 25 ronden gedaan van bij elkaar 10 km?
Lln : 922 sekonden.
O : Maar eigenlijk moet je dat in minuten zeggen!
(Het plan was om hier de deling 922:60 te gaan uitvoeren; gezien de tijd is dat niet meer gebeurd.)

⑩ Totale lesduur: 40 minuten.

3 DE OEFENHOEK

▶In de beide eerste voorbeelden ligt het aksent sterk op het cijferen en een nieuw-ontwikkelde leergang daartoe. (met gebruikmaking van allerlei bekende ideeën!) Maar naast het cijferen zijn nog vele andere oefenaktiviteiten van belang. Om even de gedachten te bepalen:

- hoofdrekenen (eigenschapsrekenen daarbij inbegrepen)
- vlot rekenen met geld
- oefenen van tweedeklas-stof (optellingen beneden 100, vermenigvuldigingen beneden 100)
- splitsen van getallen op handige wijze
- bepalen van delers
- ontbinden in faktoren
- werken op de getallenlijn
- eenvoudige breuken.

In de derde klas van de ontwerpschool is een groot deel van dit oefengebied gekoppeld aan een didaktisch-organisatorische poging om het differentiatieprobleem aan te pakken. Differentiëren naar behoeften en mogelijkheden van bepaalde leerlingen wordt ook op vele ándere wijzen nagestreefd:

- aanbieden van problemen die op verschillende nivo van abstraktie kunnen worden opgelost;
- aanbieden van situaties waarin een beroep wordt gedaan op kreatieve mogelijkheden;
- aanbieden van vele modellen en hulpmiddelen, waarmee kinderen problemen kunnen aanpakken en waarbij de keuze van het te gebruiken model of hulpmiddel in principe bij het kind ligt;
- gebruikmaken van de wiskunde-werkhoek om diverse redenen: eksploratie (problem-solving), oefening, maar ook de opvang van tempo-differentiatie;
- het principe van de progressieve schematisering bij het leren cijferen (algoritmisch werken) in klas 3 en later;
- een fleksibel oefensisteem in klas 3 (en 4).

▶Over het laatste (de *'oefenhoek'*, zoals dit sisteem intern heet) gaat het hier.
De oefenhoek is niets anders dan een *grote verzameling opdrachten in de sfeer van het oefenen met reeds klassikaal aangeboden begrippen of technieken.*
Het gaat dus vooral om het zich meester maken van ....; slechts in geringe mate om nieuwe eksploratie of ontdekking.
De klassikale instruktie is belangrijk. Eigenlijk geldt het oude schema:

instruktie ⟶ oefening verwerking

Maar:
- de instruktie is zo beperkt mogelijk; richt zich op de hoofdzaken en de afspraken; waar het even kan wordt geprobeerd de instruktie in het materiaal zelf te geven;
- dit gebeurt om de mogelijkheden tot differentiatie zo groot mogelijk te maken.

Immers, àls men er voor kan zorgen dat men
- over zeer gevarieerd oefenmateriaal kan beschikken
- dat door kinderen zelfstandig kan worden doorgewerkt
- binnen een organisatiesisteem dat hanteerbaar is voor onderwijzer en kinderen,

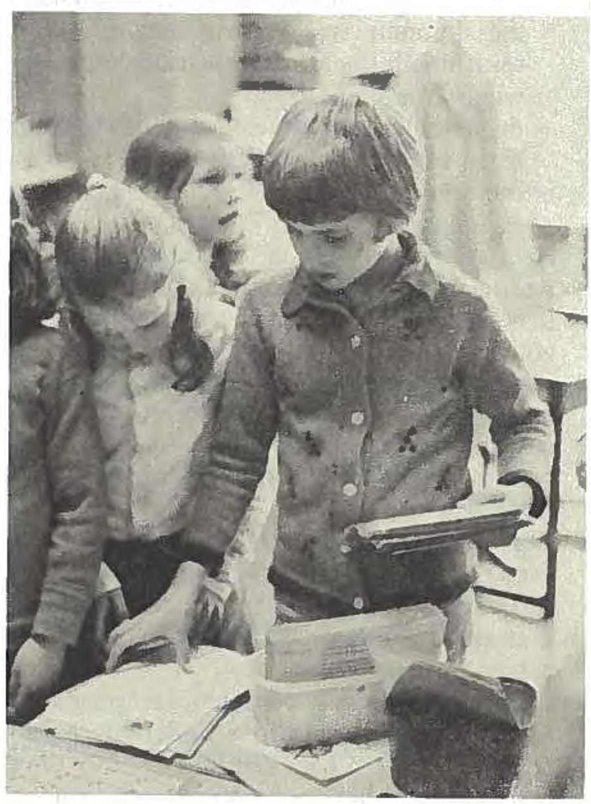
dàn bestaat in teorie de mogelijkheid om aan de behoeften van bijna elk kind optimaal tegemoet te komen.

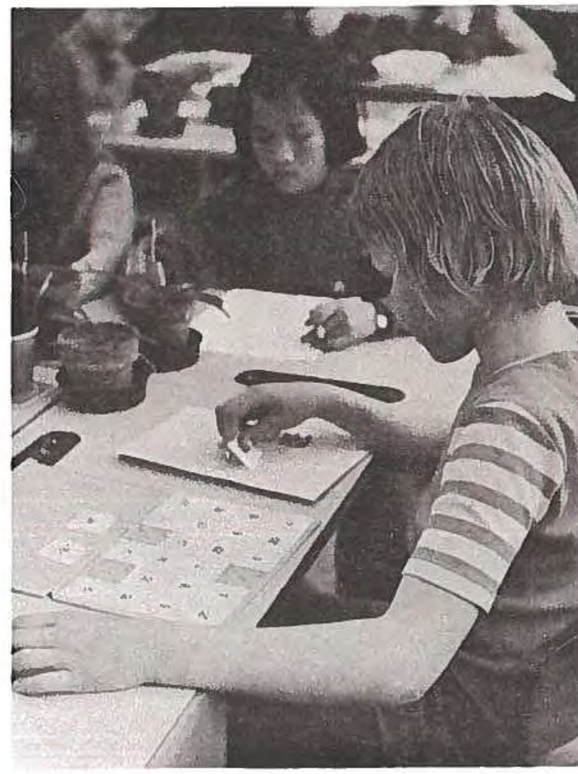
Het belangrijkste is het *materiaal.* Dat bestaat uit series werkbladen (*ver*bruiksmateriaal) met bijbehorende antwoordbladen ter zelfkorrektie (*ge*bruiksmateriaal) en oefenspelletjes met schriftelijke en/of mondelinge opdrachten (*ge*bruiksmateriaal).
De verzameling is niet statisch: naar behoefte worden nieuwe werkbladen of spelletjes of puzzles bijgemaakt, waarbij een dankbaar gebruik kan worden gemaakt van datgene wat de 'markt' aanbiedt.
Het blijkt in de praktijk veel oefening en ervaring te vragen om werkbladen te schrijven

die voldoende duidelijk zijn voor de kinderen (zodat er inderdaad sprake is van zelfinstruktie).
Materiaal en organisatie hangen zeer nauw samen.

▸ *HOE HET WERKT*

* In het lokaal ligt een *stuurboek*. Een kind ziet daarin achter zijn naam het nummer staan van een serietje werkbladen of van een spelletje. Hij pakt deze serie (of het spelletje) uit een wagen met hangmappen – voorzien van nummers – of uit een wandrek en gaat op zijn plaats zitten werken.
  In de serie kan hij de opdracht tegenkomen om (een gedeelte van) zijn werk bij de onderwijzer te laten nakijken. Hij doet dat dan, krijgt daarbij eventuele individuele uitleg en gaat dan de serie verder afmaken. Vaak ook is er opdracht tot zelfkorrektie; hij loopt dan naar de andere wagen met hangmappen waarin de antwoordbladen zitten, pakt er één, korrigeert zijn werk, brengt het antwoordblad terug en brengt het werkblad (serie, spel) bij de onderwijzer (met andere woorden: hij legt het op een afgesproken plaats).
  Hij loopt naar het stuurboek, zet een kruis door het afgewerkte nummer en leest welke kaart hij nu moet pakken.
  Etc.
* De onderwijzer heeft als belangrijkste taak het leerproces van elke leerling afzonderlijk te sturen door voor de leerling een roete door het materiaal uit te stippelen. Hij stuurt de leerling via het stuurboek en zorgt dat er steeds drie of vier nummers open staan, zodat de leerling niet stokt. Beslissingen worden door hem genomen op grond van observatie, individuele hulp, korrektie of nalopen van het door de leerling zelf gekorrigeerde werk.





en daarom is het hele systeem niet haalbaar (Joh. v. Gruppen)

nog een voorwaarde: - de onderwijzer moet vreselijk veel persoonsfuncties / leerlingfuncties uit voeren

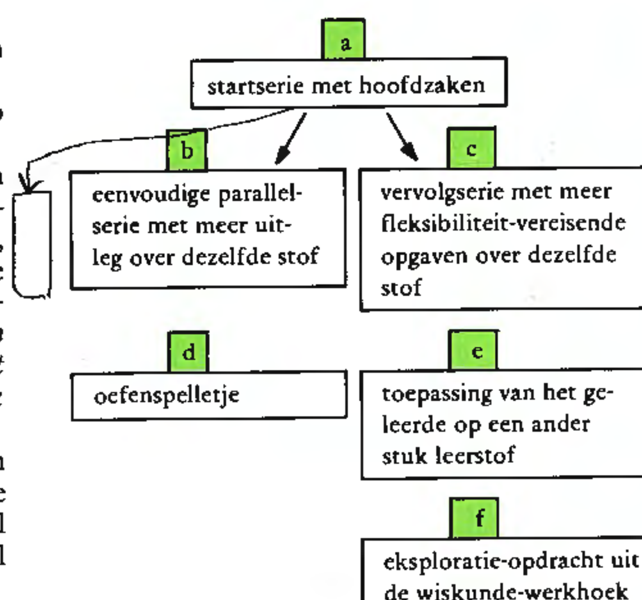
Eventueel is het natuurlijk mogelijk om direkt na een bepaald werkje een aansluitende opdracht te geven, buiten de reeds geplaatste nummers om.

* Het sisteem funktioneert alleen naar behoren als enkele voorwaarden vervuld zijn:
  – de onderwijzer moet het materiaal grondig kennen
  – de leerlingen moeten behoorlijk zelfstandig kunnen werken en niet bij elke tekstmoeilijkheid meteen naar de onderwijzer hoeven te lopen
  – de leerlingen moeten enigermate hun eigen werk kunnen korrigeren
  – men moet er tegen kunnen dat er geloop en enig geroezemoes in de klas is.
* Het stuurboek en de zelfkorrektie zijn middelen die dienen om organiserende taken van de onderwijzer weg te nemen, zodat deze meer tijd heeft voor individuele observatie en hulp. *In de praktijk is gebleken dat elke onderwijzer hier zijn eigen evenwicht tussen organisatie en hulp moet vinden en dat na verloop van enige tijd ook wel vindt.*
* Een ekstra beslissingsmiddel kan worden verschaft door het inbouwen van kleine testjes met eventueel aansluitend remedieel materiaal. Hieraan is nog niet erg veel aandacht besteed.
* Administratie vindt voor een deel plaats via het stuurboek, waarin de onderwijzer kan nagaan hoever een leerling is. Bij het nalopen van het gemaakte werk kunnen ook aantekeningen gemaakt worden (bijvoorbeeld in een map met voor elke leerling een blaadje).

▶*WAARIN ZIT NU DE DIFFERENTIATIE?*
Kort gezegd: in het materiaal en in het stuurboek.

1 Het materiaal

Een bepaalde serie is zo veel mogelijk opgebouwd volgens het volgende patroon:

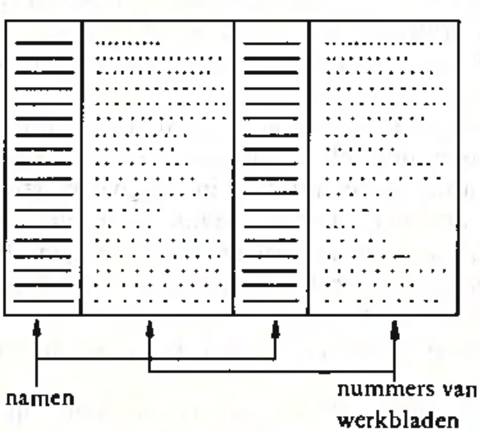


Leerlingen kunnen nu bijvoorbeeld de volgende roetes doorlopen:

$\boxed{a}$ –(goed) → $\boxed{c}$ → $\boxed{e}$ → $\boxed{f}$	(goed en snel)
$\boxed{a}$ –(goed) → $\boxed{e}$ → $\boxed{f}$	(goed, langzaam)
$\boxed{a}$ –(goed) → $\boxed{c}$ → $\boxed{d}$	(goed, langzaam, slordiger)
$\boxed{a}$ (goed) → $\boxed{c}$ → $\boxed{b}$ → $\boxed{d}$	(valt tegen bij $\boxed{c}$)
$\boxed{a}$ –(matig) → $\boxed{b}$ → $\boxed{e}$ → $\boxed{f}$	(matig, snel)
$\boxed{a}$ –(matig) → $\boxed{b}$ → $\boxed{c}$ → $\boxed{f}$	(valt mee bij $\boxed{b}$)
$\boxed{a}$ –(slecht) → $\boxed{\text{uitleg}}$ → $\boxed{b}$ → $\boxed{d}$	(zwakke leerling).

Belangrijk is dat niet alleen de goede, snelle leerlingen aan verrijkingsmateriaal (d, f) toekomen, maar ook andere leerlingen. Met andere woorden: leerlingen worden niet apriori op een bepaald nivo gezet, maar kunnen allerlei kanten op.
Voorwaarde: beschikken over zeer veel materiaal dat erg verschillend is opgebouwd. Over één onderwerpje moeten diverse series geschreven worden, die op elkaar aansluiten of parallel lopen en die verschillen op punten als:
– de mate van schriftelijke uitleg,
– het aantal afwijkende opgaventypen en de strooiing daarvan,
– het nivo van aanbieding, met name de mate van schematisering en het taalgebruik.
Het vervaardigen van dit materiaal is een zeer tijdrovende en eksperiment-intensieve bezigheid; elke serie moet diverse malen worden herschreven, voordat hij redelijk funktioneert.

2 Het stuurboek
Men moet zich hierbij niet te veel voorstellen: in principe is het zogenaamde stuurboek niet anders dan een naamlijst met achter elke naam voldoende ruimte om nummers te schrijven. Als een regel vol is, leggen we gewoon een nieuwe (gestencilde) naamlijst naast de vorige op een tafeltje:



Om het principe van de oefenhoek duidelijker te maken, geven we een voorbeeld van een stukje stuurboek met het materiaal dat erbij hoort.

marieke	2101	2103	6501	6502	6506	6511	6516	M304	P318	
jan	2101	2102	2103	6501	6506	6516	K11	K41		
jolanda	2101	8001	8002	2102	6506	K8	P312	P313		
arjen	2101	2001	8301	8302	2102	K11	K22			
frank										

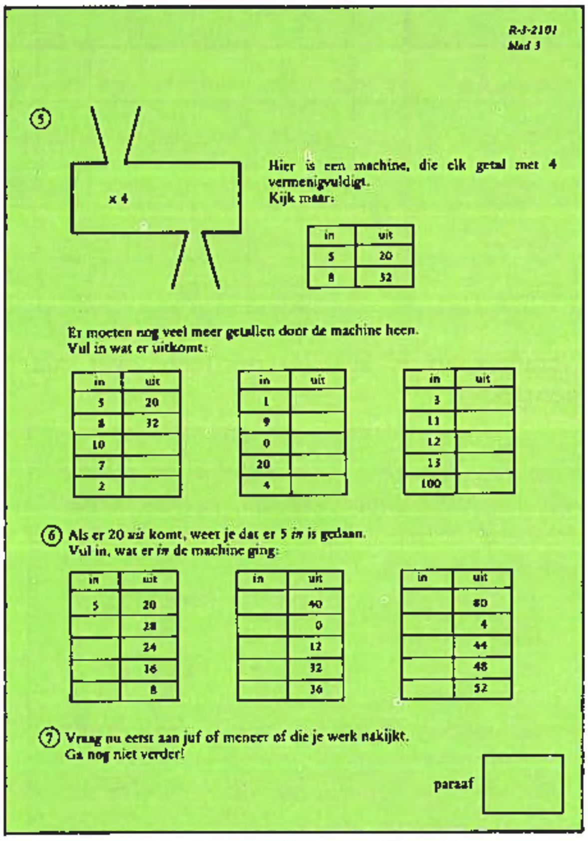
Voorafgegaan is een instruktieles over machientjes.[1])

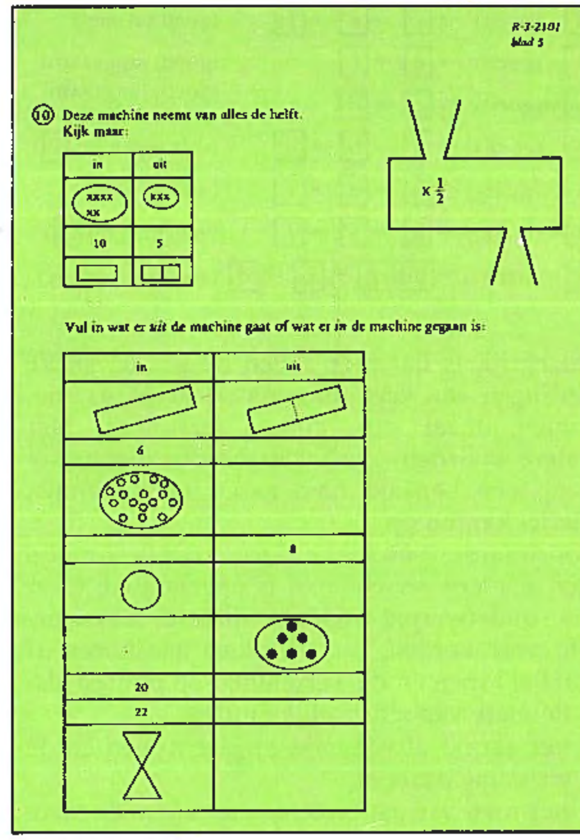
Om een indruk te geven van de trajekten die deze leerlingen moeten volgen, drukken we – verkleind – een reeks bladen af, namelijk uit:
– de 2000 groep (tafels van vermenigvuldiging)
– de 2100 groep en de 6500 groep (machientjes)
– de 8000 groep en de 8300 groep (pijlentaal)
alsmede, op gewone grootte, bladen uit de wiskundewerkboek. (K7, K41, M304, P312, P313 en P318)
De kodering van de kaarten behoeft nog enige toelichting.
In bijvoorbeeld kaart R-3-2101 heeft de hoofdletter betrekking op het leerstofvlak (in dit geval het rekensisteem), het eerste cijfer op het leerjaar (3) en de 2101 op het nummer van de serie uit de betreffende kaartengroep.

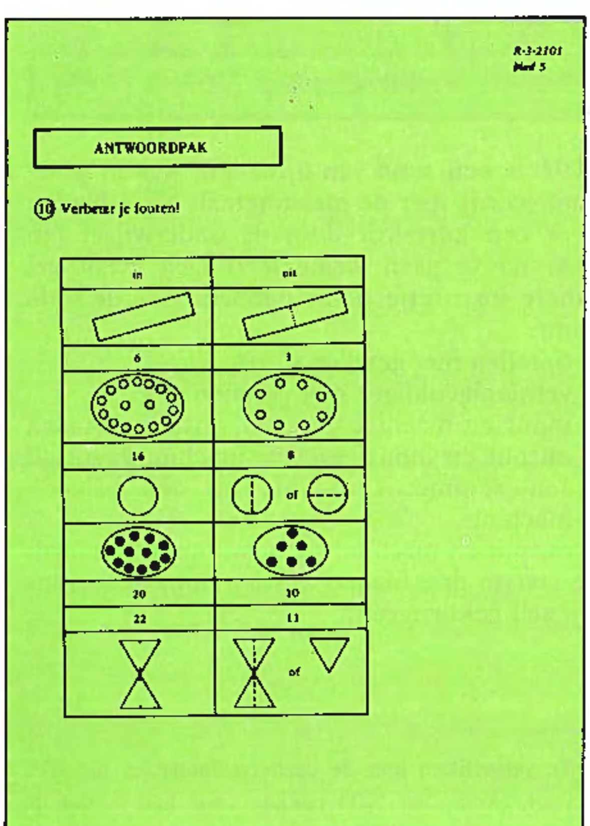
2101 is een serie van 6 bladen, waarin geoefend wordt met de machinetaal. Na 3 bladen is er een korrektie door de onderwijzer om even na te gaan welke leerlingen eventueel nadere instruktie nodig hebben. Aan de orde komt:
* optellen met getallen < 10
* vermenigvuldigen met getallen < 7
* input en machine gegeven, output gevraagd
* output en input gegeven, machine gevraagd
* een symmetrie-machine en een halveermachine
* output en machine gegeven, input gevraagd.

De laatste drie bladen worden door de leerlingen zelf gekorrigeerd.

[1]) Te vergelijken met de desbetreffende les uit 'Tel voor twee', het NOT-pakket voor klas 2, dat in februari/maart 1974 is uitgezonden.





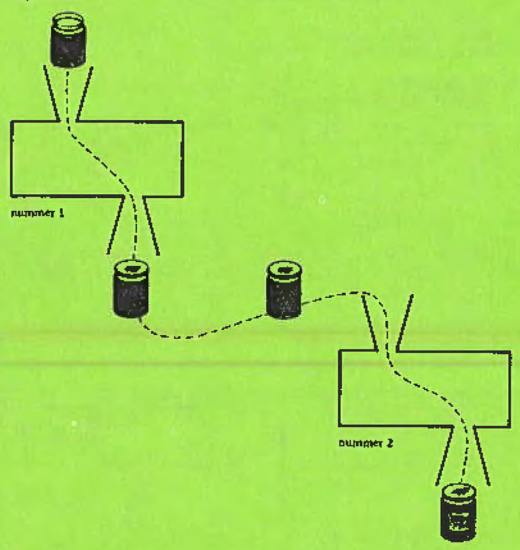


2102 is een serie van 5 bladen, waarin hetzelfde aan de orde komt als in 2101, maar met andere getallen.
De serie wordt geheel zelf gekorrigeerd.

2103 is een serie van 7 bladen.
Op het eerste blad wordt instruktie gegeven betreffende het schakelen van 2 machientjes; op het tweede blad komt oefening met getallen. Na het tweede blad moet de onderwijzer eerst weer korrigeren.
De volgende bladen geven instruktie en oefening met het schakelen van 2 of 3 machientjes, waarbij de notaties in tabelvorm steeds schematischer worden. Ook worden twee machines door één machine vervangen. Het oefengebied: optellen met getallen < 10 vanaf getallen < 100.
De laatste 5 bladen worden weer zelf gekorrigeerd.
In deze serie valt de nadruk iets meer op de machinetaal dan op het oefenen.

R-3-2103
blad 1

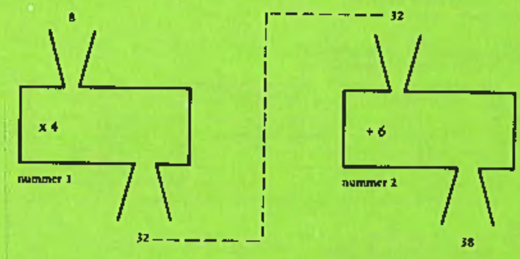
① In deze fabriek staan twee machines *achter elkaar*.
De eerste machine doet een deksel op de volle potten pindakaas. De tweede machine doet een plaatje op de pot.
Kijk maar:



Dus:
machine nummer 1: deksel erop
machine nummer 2: plaatje erop.
Als een potje door alle twee de machines gaat, zit er een deksel op *en* een plaatje.
We zeggen: het potje gaat door twee *geschakelde* machines.

R-3-2103
blad 4

⑤ Er zijn twee geschakelde machines:

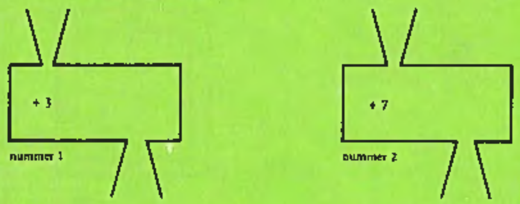


Nummer 1 vermenigvuldigt elk getal met 4.
Nummer 2 telt bij elk getal 6 op.
Vul in:

in nummer 1	*uit* nummer 1	*uit* nummer 2
8	32	38
4	16	22
7	28	
1		
10		
5		
6		
11		
0		
9		
100		

R-3-2103
blad 7

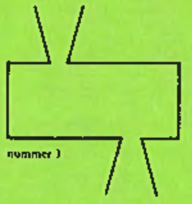
⑨ Er zijn twee machines geschakeld.
Nummer 1 telt bij elk getal 3 op.
Nummer 2 telt bij elk getal 7 op.



Vul in:

in nummer 1	*uit* nummer 1	*uit* nummer 2
8	11	18
5		
23		
70		
1		
34		

Welke machine doet hetzelfde werk als nummer 1 en nummer 2 samen?
Schrijf op nummer 3 wat hij doet!

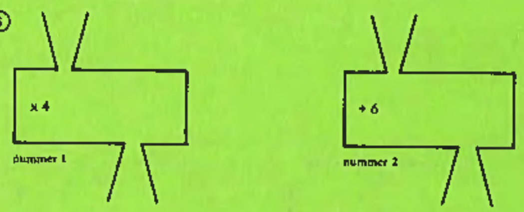


⑩ Neem nu antwoordpak R-3-2103 en kijk je werk op blad 3, blad 4, blad 5, blad 6 en blad 7 na.
Let goed op of je alles begrijpt!

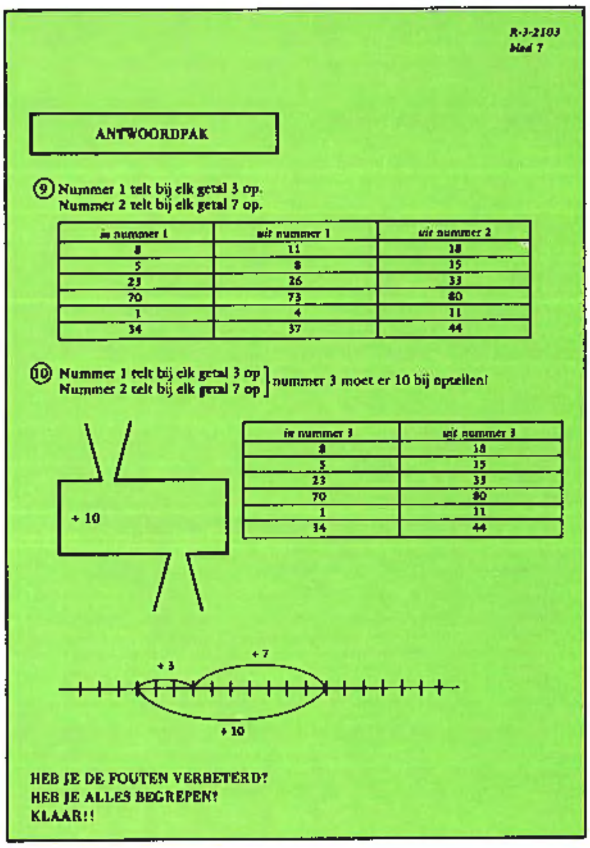
R-3-2103
blad 4

ANTWOORDPAK

⑤



in nummer 1	*uit* nummer 1	*uit* nummer 2
8	32	38
4	16	22
7	28	34
1	4	10
10	40	46
5	20	26
6	24	30
11	44	50
0	0	6
9	36	42
100	400	406


R-3-2103
blad 7

ANTWOORDPAK

(9) Nummer 1 telt bij elk getal 3 op.
Nummer 2 telt bij elk getal 7 op.

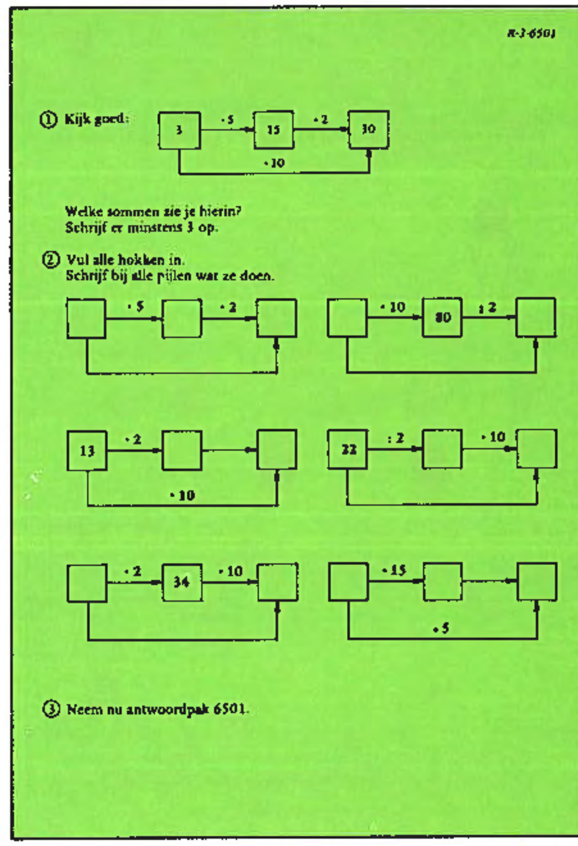
in nummer 1	uit nummer 1	uit nummer 2
8	11	18
5	8	15
23	26	33
70	73	80
1	4	11
34	37	44

(10) Nummer 1 telt bij elk getal 3 op
Nummer 2 telt bij elk getal 7 op } nummer 3 moet er 10 bij optellen!

in nummer 3	uit nummer 3
8	18
5	15
23	33
70	80
1	11
34	44

HEB JE DE FOUTEN VERBETERD?
HEB JE ALLES BEGREPEN?
KLAAR!!

6501 is een werkblad over 'vermenigvuldigmachientjes', die geschakeld worden. De machientjes zijn op een andere wijze gerepresenteerd.
Zelfkorrektie.


R-3-6501

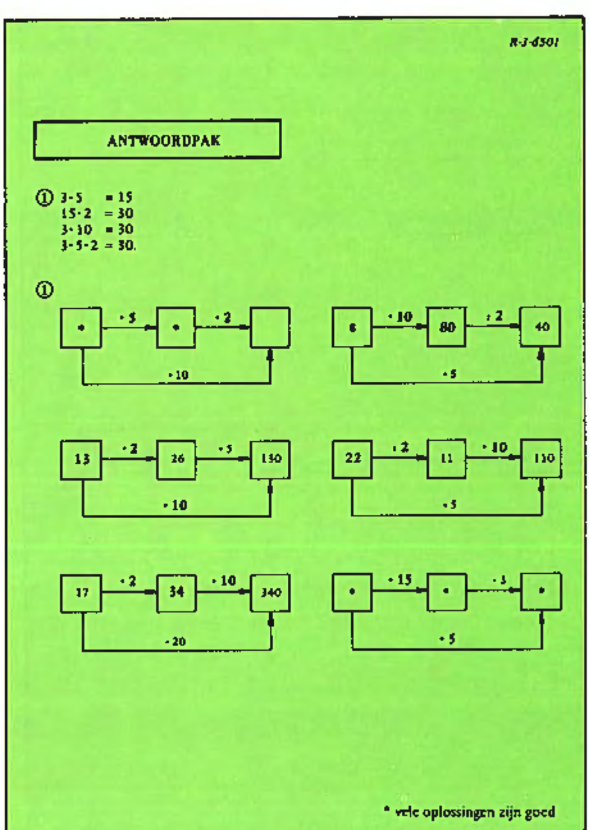
(1) Kijk goed:

Welke sommen zie je hierin?
Schrijf er minstens 3 op.

(2) Vul alle hokken in.
Schrijf bij alle pijlen wat ze doen.

(3) Neem nu antwoordpak 6501.

6502 is een werkblad over een machine die alle getallen aanvult tot 200.
Zelfkorrektie.

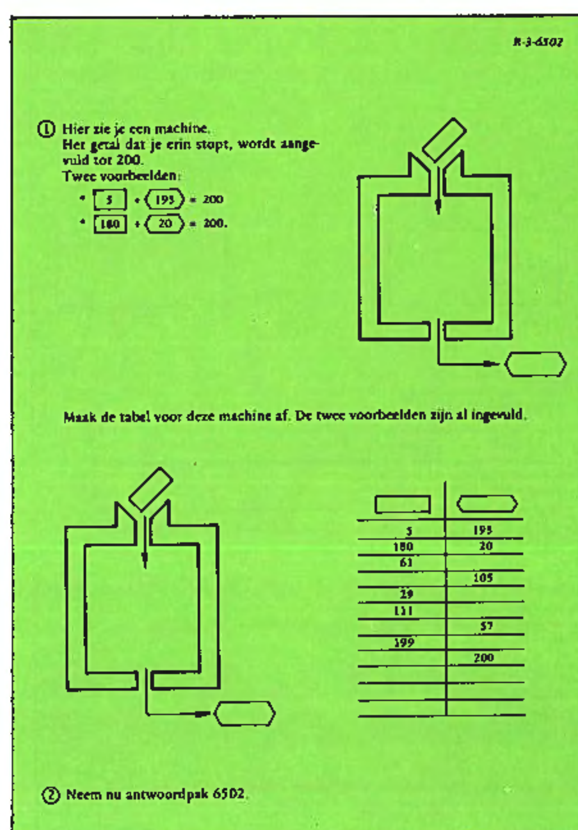

R-3-6501

ANTWOORDPAK

(1) 3 · 5 = 15
15 · 2 = 30
3 · 10 = 30
3 · 5 · 2 = 30.

(2)

* vele oplossingen zijn goed

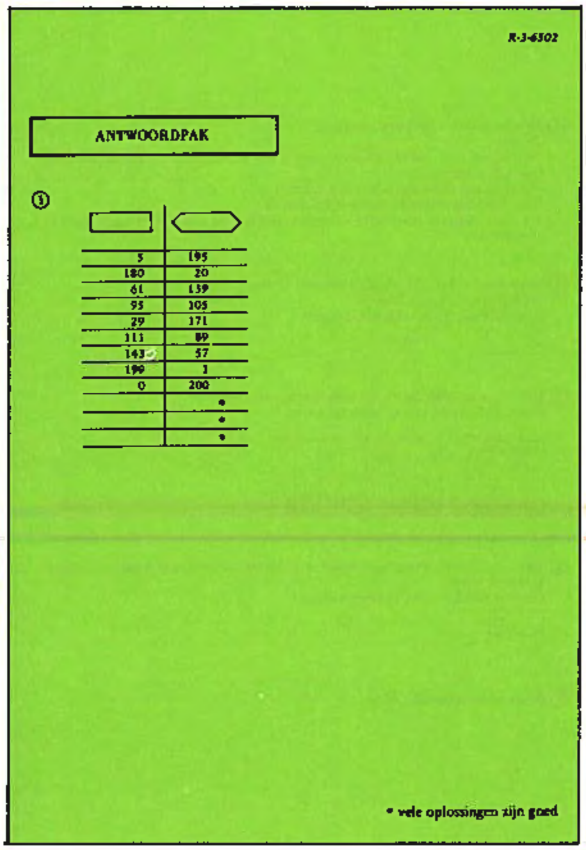

R-3-6502

(1) Hier zie je een machine.
Het getal dat je erin stopt, wordt aangevuld tot 200.
Twee voorbeelden:
• 5 + 195 = 200
• 180 + 20 = 200.

Maak de tabel voor deze machine af. De twee voorbeelden zijn al ingevuld.

5	195
180	20
61	
	105
29	
131	
	57
199	
	200

(2) Neem nu antwoordpak 6502.



R-3-6502

ANTWOORDPAK

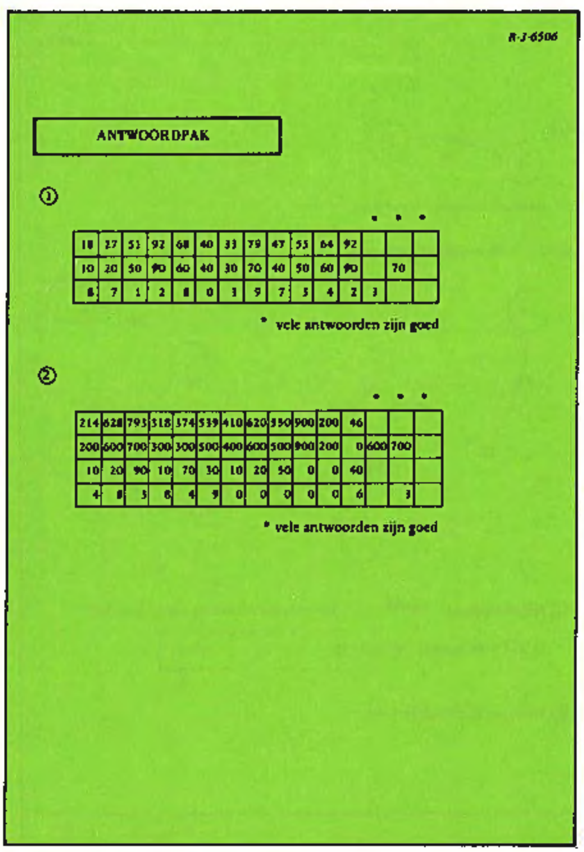
③

5	195
180	20
61	139
95	105
29	171
111	89
143	57
199	1
0	200
	•
	•
	•

• vele oplossingen zijn goed

6505 is een eenvoudig werkblad met aftrekmachientjes, waarin ook een tafelprodukt zit. Zelfkorrektie.

6506 is een werkblad over het opsplitsen van getallen in honderdtallen, tientallen en een-



R-3-6506

ANTWOORDPAK

①

• • •

18	27	51	92	68	40	33	79	47	55	64	92			
10	20	50	90	60	40	30	70	40	50	60	90		70	
8	7	1	2	8	0	3	9	7	5	4	2	3		

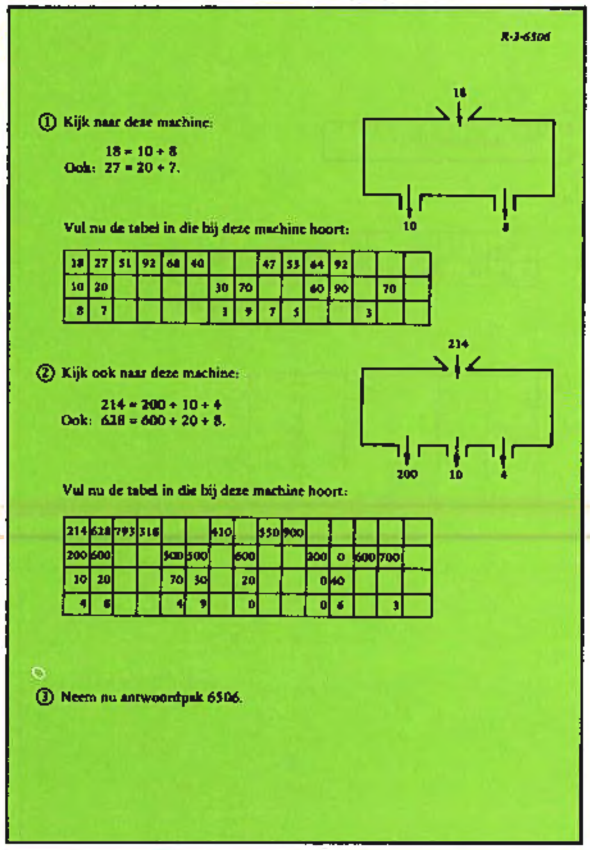
* vele antwoorden zijn goed

②

• • •

214	628	793	318	374	539	410	620	550	900	200	46			
200	600	700	300	300	500	400	600	500	900	200	0	600	700	
10	20	90	10	70	30	10	20	50	0	0	40			
4	8	3	8	4	9	0	0	0	0	0	6		3	

* vele antwoorden zijn goed



R-3-6506

① Kijk naar deze machine:

18 = 10 + 8
Ook: 27 = 20 + 7.

Vul nu de tabel in die bij deze machine hoort:

18	27	51	92	68	40			47	53	64	92			
10	20					30	70			60	90		70	
8	7					1	9	7	5			3		

② Kijk ook naar deze machine:

214 = 200 + 10 + 4
Ook: 628 = 600 + 20 + 8.

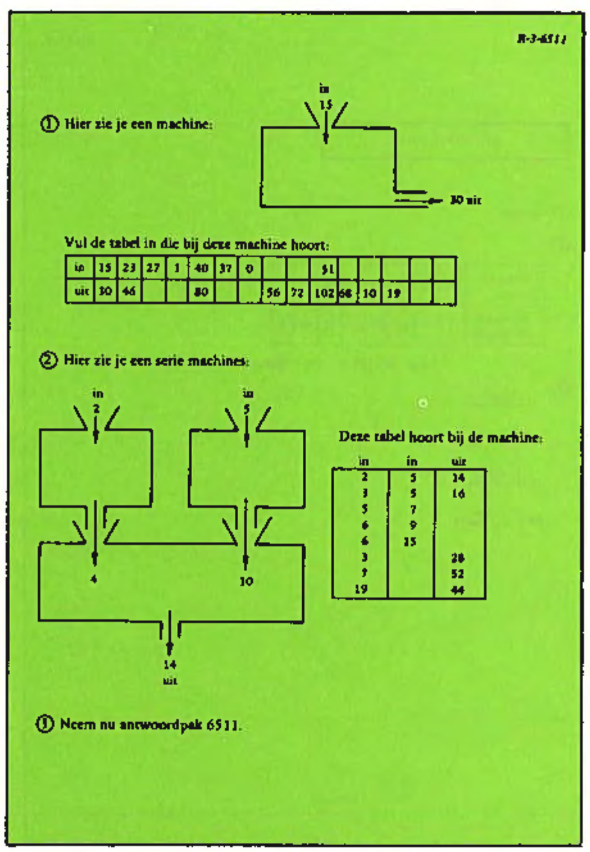
Vul nu de tabel in die bij deze machine hoort:

214	628	793	318			410		550	900					
200	600			500	500		600			200	0	600	700	
10	20			70	30		20			0	40			
4	8			4	9		0			0	6		3	

③ Neem nu antwoordpak 6506.

heden. Dit gebeurt met behulp van een splitsmachine. Zelfkorrektie.

6511 is een werkblad over een verdubbelingsmachine in een gekompliseerde vorm. Zelfkorrektie.



R-3-6511

① Hier zie je een machine:

Vul de tabel in die bij deze machine hoort:

in	15	23	27	1	40	37	0			51					
uit	30	46			80			56	72	102	68	10	19		

② Hier zie je een serie machines:

Deze tabel hoort bij de machine:

in	in	uit
2	5	14
3	5	16
5	7	
6	9	
6	15	
3		28
9		52
19		44

③ Neem nu antwoordpak 6511.

ANTWOORDPAK

①

													*	*
15	23	27	1	40	37	0	28	36	51	34	5	?		
30	46	54	2	80	74	0	56	72	102	68	10	19		

? kan niet (of het antwoord is $9\frac{1}{2}$)
* vele antwoorden zijn goed

②

2	5	14
3	5	16
5	7	24
6	9	30
6	15	42
3	11	28
7	19	52
19	3	44

① Moeder maakt tegen Joost een grapje.
Ze zegt:
'Als je een cent onder je kussen legt, is het de volgende morgen verdubbeld. Dan heb je twee cent.'
'En als ik een dubbeltje onder m'n kussen leg?'
'Dan heb je de volgende dag twee dubbeltjes.'
Hij stopt een cent onder zijn kussen en, ja hoor, de volgende morgen liggen er twee centen.

② Joost haalt al het geld uit zijn spaarpot: 37 cent.
Hij legt die onder zijn kussen.
Hoeveel vindt hij de volgende morgen?

③ Hier zie je de tabel die bij het kussen van Joost hoort.
Neem de tabel over en vul hem verder in.

onder het kussen	1	37	52	28				
de volgende morgen	2	74			60	58	44	7

④ Joost legt 3 cent onder zijn kussen. Dan vergeet hij een paar dagen onder zijn kussen te kijken.
Hoeveel geld ligt er na 4 nachten slapen?

⑤ Neem nu antwoordpak 6516.

ANTWOORDPAK

② 74 cent

③

onder het kussen	1	37	52	28	30	29	22	?
de volgende morgen	2	74	104	56	60	58	44	7

? kan niet (of $3\frac{1}{2}$ cent – maar halve centen bestaan niet meer.)

④

$3 \xrightarrow{1^e \text{ nacht}} 6$

$6 \xrightarrow{2^e \text{ nacht}} 12$

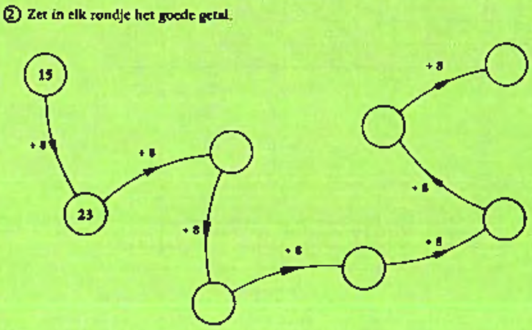
$12 \xrightarrow{3^e \text{ nacht}} 24$

$24 \xrightarrow{4^e \text{ nacht}} 48$.

①

Deze pijl betekent: *doe er 8 bij.*

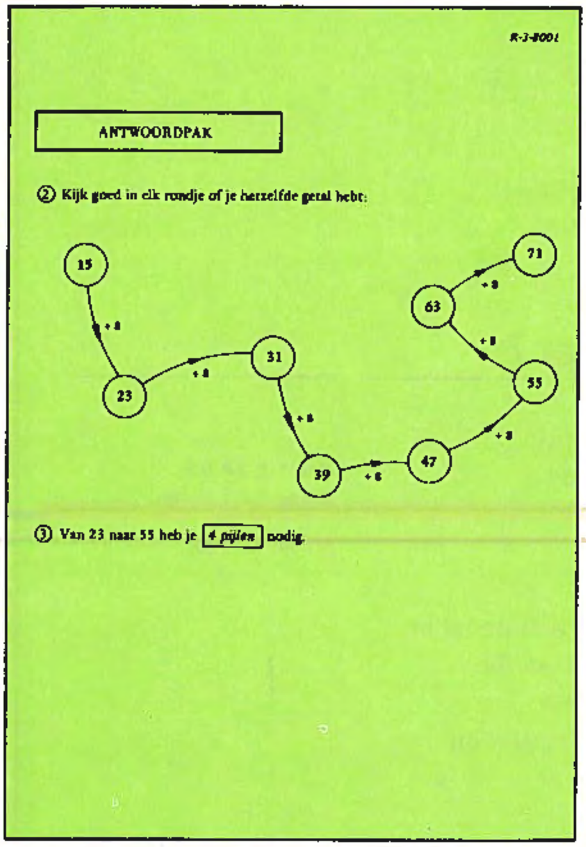
② Zet in elk rondje het goede getal.

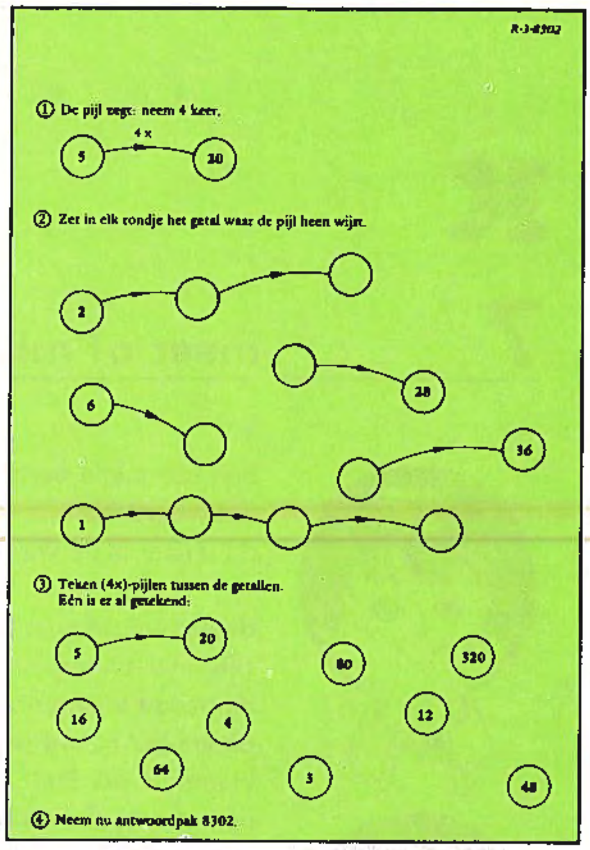


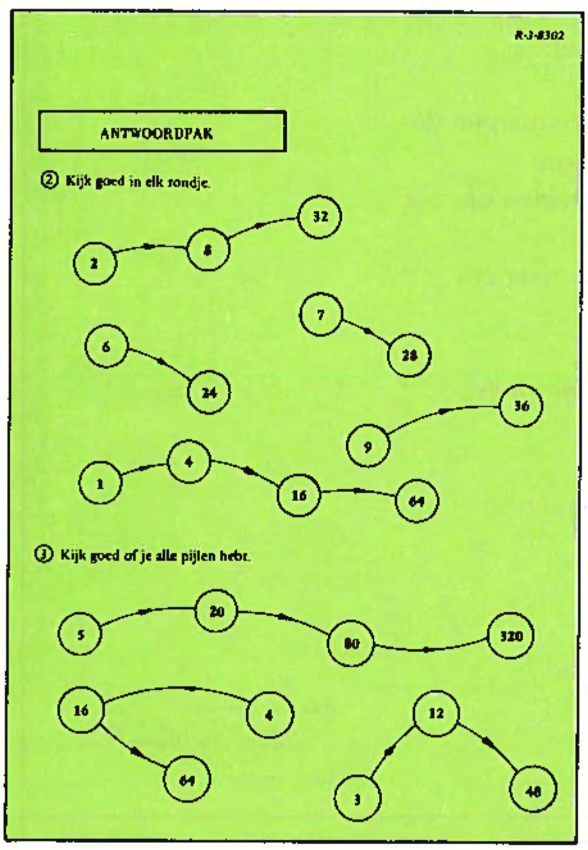
③ Hoeveel pijlen $\xrightarrow{+8}$ heb je nodig om van 23 tot 55 te komen?

Schrijf je antwoord in het hok! ______ pijlen

④ Neem nu antwoordpak 8001.







6516 is een werkblad over een verdubbelingsmachine, verstopt in een verhaaltje. Zelfkorrektie.

8001 en *8002* zijn series over pijlentaal, waarin geoefend wordt met de basisoptellingen. Zelfkorrektie.

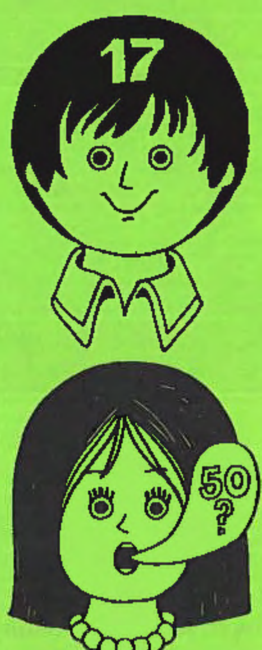
8301 en *8302* zijn series over pijlentaal, waarin geoefend wordt met de tafels van vermenigvuldiging. Zelfkorrektie.

2001 is een serie, waarin de tafels van vermenigvuldiging aan de orde komen vanuit tekeningetjes. Hierin vindt het memoriseren van de tafels plaats.

K5, K7, K21, K22, K41 zijn kaarten uit de serie *'Klaar? Ga maar spelen.'* (J. Nieland e.a., uitg. Malmberg), die enigermate aansluiten op de machine-series.

K

7 meer of min-der?



een van jul-lie bei-den is de ant-woord-man.
de an-der is de vra-ger.

de ant-woord-man neemt een ge-tal in zijn ge-dach-ten, tus-sen 1 en 64.
hij neemt bij-voor-beeld: 17.
de vra-ger neemt pa-pier en pen en vraagt: is het 50?
de ant-woord-man zegt:
nee, min-der.
als het meer is, zegt hij:
nee, meer.
als het pre-cies ge-ra-den is, zegt hij:
ja.
de vra-ger gaat door met vra-gen tot-dat hij het ge-tal ge-ra-den heeft.
dan gaan jul-lie rui-len.
de vra-ger wordt ant-woord-man en de ant-woord-man wordt vra-ger.
denk er-om, schrijf de ge-tal-len op, die je vraagt.
een knap-pe vra-ger hoeft maar zes keer te ra-den.
hoe knap zijn jul-lie?
kom het maar ver-tel-len als jul-lie klaar zijn.

en nu de kaart net-jes op-rui-men.

klas: **1 2 3 4 5 6**
groep: **1 2 3 al-len**

je hebt no-dig:

Klaar? Ga maar spelen
J. Nieland, m.m.v. O. W. van Engelen,
J. Gerringa, G. van de Molengraaf.

K

41 Tweemaal

klas: 1 2 3 4 5 6
groep: 1 2 3 allen

je hebt nodig:

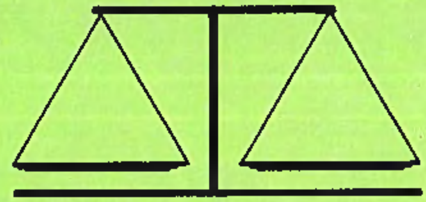
Pak even 2 uit je geheugen.
Schrijf dat getal op.
Vermenigvuldig dat maar met 2.
Schrijf de uitkomst op.
Vermenigvuldig deze uitkomst ook met 2 en schrijf op.
Neem die uitkomst ook 2 keer en schrijf op.
Ga zo maar door:
telkens de uitkomst die je krijgt 2 keer nemen.
Je mag pas ophouden als je het laatste getal net niet meer kunt uitspreken.

Zijn er nog grotere getallen?
Schrijf er dan eens een op, dat precies 100 groter is.
Zou je ook een andere manier kunnen bedenken om reuzengetallen te maken?
Schrijf die dan eens op.

Laat maar zien.
Ik kan aan jullie blaadjes zien of een van jullie beiden een fout gemaakt heeft onderweg.
Draag het reuzengetal maar naar je map, als het er tenminste in kan.

Klaar? Ga maar spelen
J. Nieland, m.m.v. O. W. van Engelen, J. Gerrings, G. van de Molengraaf.

M304 is een opdrachtkaart uit de wiskundewerkhoek, waarin gewogen wordt.



M 304
klas: 2/3

WEGEN

Je hebt zoveel mogelijk spullen nodig.
Bijvoorbeeld: schroeven, spijkers, klosjes, knikkers, kroondoppen, een eenvoudige weegschaal met bakjes of schoteltjes.

① Weeg alles op de hand.
Raad maar eens en schrijf op:
ik raad dat 10 schroeven evenveel wegen als ... spijkers
ik raad dat 10 schroeven evenveel wegen als ... knikkers
ik raad dat 10 schroeven evenveel wegen als ... klosjes
ik raad dat 10 schroeven evenveel wegen als ....
(vul zelf maar in).

② Gebruik nu de weegschaal.
Weeg wat je eerst geraden hebt.
Schrijf dat op.

③ Je mag bij deze opdracht niet wegen. Probeer het antwoord zó te vinden.
... spijkers wegen evenveel als ... knikkers.
... knikkers wegen evenveel als ... klosjes.
Schrijf dat op.

④ Van zwaar naar licht. Kies uit:
1 schroef
1 spijker
1 klosje
1 knikker
Vul in:

zwaarder	zwaar	licht	lichter

⑤ Ruim alles op!

P312, *P313*, *P318* zijn strategiespelletjes, eveneens uit de wiskundewerkhoek.

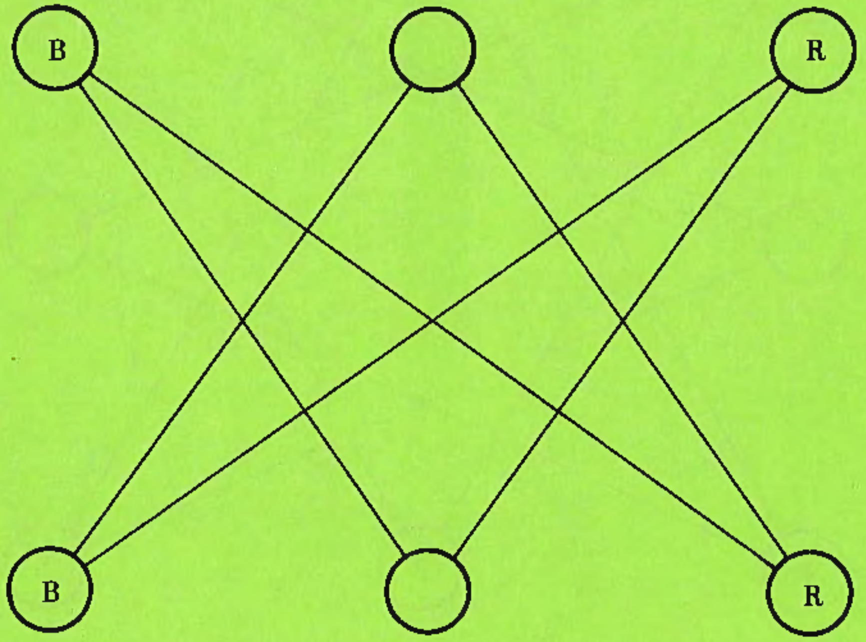
*

P 312
klas 3
voor 1 kind

WISSEL-SPEL

nodig: 2 rode en
2 blauwe
legrondjes

① Hier is het speelveld:



② Spelregels:
- leg de blauwe legrondjes op B en de rode op R
- schuif met de legrondjes één voor één langs de lijnen
- probeer de legrondjes te verwisselen, rood op de plaats van blauw en omgekeerd.

③ *Speel dit spel!*

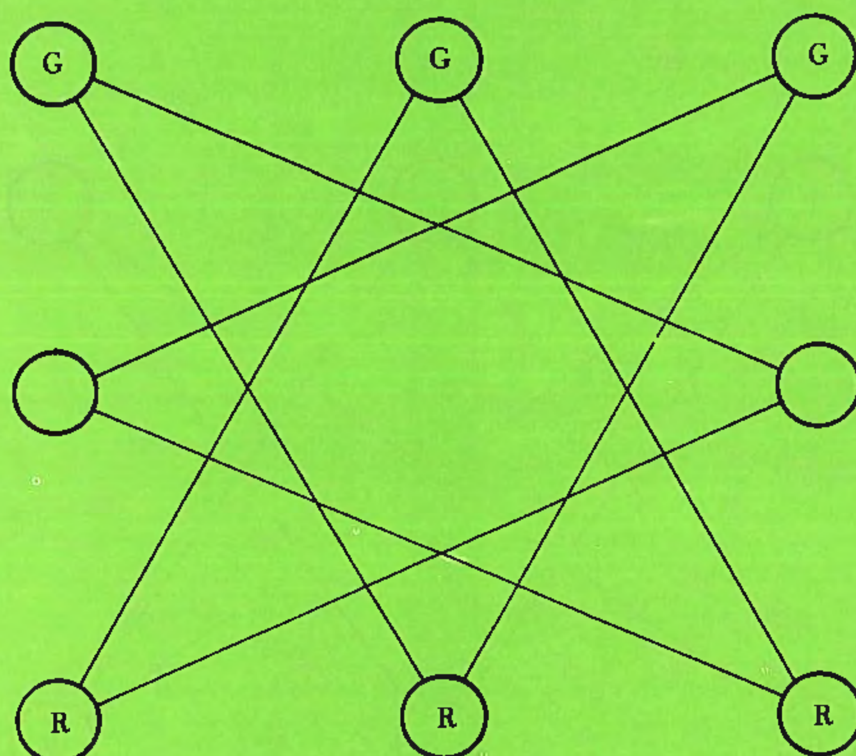
*

P 313
klas 3
voor 1 kind

WISSEL-SPEL 2

nodig: 3 groene en
3 rode
legrondjes

① Dit is het speelveld:



② Spelregels:
- leg de groene legrondjes op G en de rode op R
- schuif met de legrondjes één voor één langs de lijnen
- probeer de legrondjes te verwisselen, rood op de plaats van groen en omgekeerd.

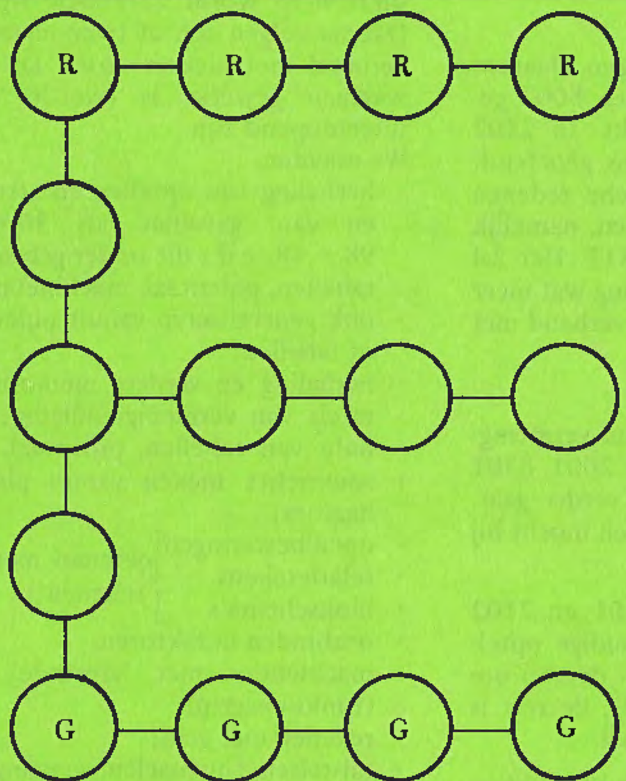
③ *Speel dit spel!*

P 318
klas 3
voor 1 kind

EEN E-PUZZEL

nodig: 4 rode en
4 groene
legrondjes

① Dit is het speelveld:



② Leg de legrondjes op de vakjes. De rode op R en de groene op G.
Probeer de rode en de groene legrondjes te verwisselen.

③ Spelregels:
– je mag de legrondjes alleen schuiven
– je mag niet over een legrondje heen springen.

④ *Speel het spel!*

We kunnen nu de 4 leerlingen typeren:

marieke
is een leerling, die 2101 goed en snel heeft gemaakt. Ook met 2103 waren er kennelijk weinig problemen want ze mocht het geplande trajekt naar 6501 etc. verder afleggen. Ze heeft de machinetaal nu in allerlei konteksten gebruikt. Tenslotte heeft ze een lastig strategiespelletje gedaan.

jan
had moeite met 2101 en heeft daarna eerst nog verder geoefend met 2102, voordat hij 2103 deed. Toen ging het wel goed. Hij heeft ook de andere machinekaarten enigszins geëksploreerd voordat hij de getallenspelletjes K7 en K41 deed.

jolanda
heeft moeite met de basisoptellingen. Daarom waren na 2101 de series 8001 en 8002 gepland, die ze ook heeft gemaakt. In 2102 heeft ze in machinetaal nog eens geoefend, evenals in 6505. Om pedagogische redenen mocht ze daarna iets 'leukers' doen, namelijk de strategiespelletjes P312 en P313. Het zal nuttig zijn haar in de toekomst nog wat meer machinekaarten te laten doen in verband met het funktiebegrip.

arjen
heeft problemen met de tafels van vermenigvuldiging. Vandaar eerst de series 2001, 8301 en 8302, voordat hij met 2102 verder gaat. Hij heeft ook een laag tempo. Toch mocht hij enkele getalspelletjes doen.[1])

De *basisstof* zit in de series 2101 en 2102 (machinetaal toepassen op eenvoudige optellingen en vermenigvuldigingen en daarbij ophalen van kennis uit klas 1 en 2); de rest is verrijkend of remediërend materiaal.

▶*De belangrijkste voorwaarde* is het beschikken over zeer veel materiaal. Je moet leerlingen immers allerlei kanten op kunnen sturen. Over één onderwerpje moeten dus diverse series geschreven worden die op elkaar aansluiten of parallel lopen en die op allerlei punten verschillen (zie boven).

In de ontwerpschool wordt de werkvorm, zoals bovenomschreven, een à twee lessen per week gehanteerd. Gestreefd wordt naar series waarmee de kinderen iets langer dan een lestijd van $\frac{3}{4}$ uur bezig zijn. Met een bepaald onderwerp wordt zo enkele weken gewerkt. Daarna volgen een of twee instruktielessen in verband met nieuwe series. De onderwerpen waaraan gewerkt is (wordt) kunnen zeer uiteenlopend zijn.

We noemen:
- herhaling van optellen en aftrekken tot 20 en van 'gevallen' als 30 + 8, 23 + 20, 98 − 48, e.d.; dit onder gebruikmaking van tabellen, pijlentaal, machinetaal;
- ook generaliseren vanuit pijlen of machines of tabellen;
- herhaling en verdere memorisering van de tafels van vermenigvuldiging; ook met behulp van tabellen, pijlentaal, machinetaal;
- sommetjes maken vanuit plaatjes en verhaaltjes;
- open beweringen
- relatietekens
- blokschema's

  oefenen met eigenschapsrekenen;
- ontbinden in faktoren;
- machientjes met 'vreemde' bewerkingen (funktiebegrip);
- rekenen met geld;
- talstelsels (inwisselen, vervangen, noteren);
- breuken vanuit plaatjes en andersom;
- getallenlijn.

Men ziet: voornamelijk inhouden uit het leerstofgebied van het rekensisteem, zoals dat vanouds bekend is, maar in een nieuw jasje gestoken. Eenzelfde jasje dat in andere lessen ook bij andere leerstofgebieden gebruikt wordt.

▶We zien het bovenomschreven *differentiatiesisteem* als een kombinatie van nivo- en tempodifferentiatie, waarin bovendien de individuele voorkeur voor bepaalde aktiviteiten nog kansen krijgt. Uitbouw met allerlei ander materiaal (van uitgevers of zelf gemaakt) is zonder meer mogelijk, mits een konsekwent koderingssisteem gebruikt wordt, dat voor de kinderen doorzichtig is.

---
1) Het voorbeeld is gefingeerd; de praktijk van het stuurboek is gekompliseerder en verwarrender voor een buitenstaander. Het materiaal − de werkbladen − is uiteraard niet gefingeerd.

4.4 breuken beoefenen

LEEN STREEFLAND

1 OVERWEGINGEN VAN EEN ONTWERPER
(uitgangspunten voor een ontwerp)

Het breukbegrip in de basisschool

Breuken nemen nog steeds een belangrijke plaats in op de basisschool. Bij het bekijken van resent uitgegeven (traditionele) basisschoolmetoden valt echter een tendens waar te nemen, waarbij op de breuken besnoeid wordt. Dit betreft vooral de breuken zèlf. Breuken met grote getallen in teller en/of noemer komen praktisch niet meer voor. Daardoor ontstaat de neiging bepaalde zaken van de middenklassen naar de hogere te verschuiven.

Als ontwerper stel je jezelf de vragen:

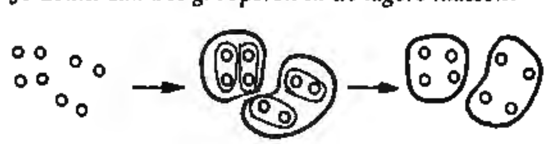
* hoe zitten die breuken nu in het basisonderwijs?
* welke aanwijzingen krijg ik vanuit de raamplannen, zoals die ontwikkeld zijn om als uitgangspunt voor de realisering van het integratieplan te dienen?

Komplekse vragen, die zich maar niet zonder slag of stoot laten beantwoorden.

Je begint daarom maar eens wat te 'borrelen' en schrijft enkele gedachten op papier.

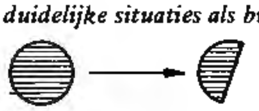
* *Verdelen*
  Op de kleuterschool komt het verdelen van aantallen al voor (al was het alleen bij de verdeling van spelmateriaal).
  Bijvoorbeeld 7 knikkers. 'Dat kan niet met ons tweetjes'.
  Ook het verdelen van hoeveelheden met een meer kontinu karakter: 'de helft van een boterham'.
  Je hebt voor jezelf het gevoel dat hier nog geen sprake is van het begrip 'breuk'.

* *Groeperen*
  Je denkt aan het groeperen in de lagere klassen:



  Ook hier is geen sprake van breukbegrip. Het gaat immers om een voorbereiding op de operaties vermenigvuldigen en delen.

* *Ervaringen*
  Het breukbegrip wordt wel voorbereid in zeer duidelijke situaties als bijvoorbeeld:



hele en halve rondjes

  We meten het lokaal met stappen. Jantje vindt: '8 stappen en nog een halve'.

* *Delen (verdelen, opdelen, uitdelen) van aantallen:* $20 : 5$ *of* $\frac{20}{4} = 5$.
  Ook hier is weinig van het begrip 'breuk' te bespeuren.

* *Delen met rest*
  $\frac{21}{4} = \frac{20+1}{4} = 5 + \frac{1}{4}$ *('1 die nog door 4 gedeeld moet worden' of '1 die we ook nog met z'n vieren moeten verdelen').*
  Ook dit heeft nog heel weinig met het begrip 'breuk' te maken. Je konstateert als leerling eenvoudig dat de aangezette verdelingsprosedure via het herhaald aftrekken 'stokt' en je konkludeert als tussen haakjes vermeld.

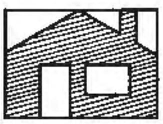
* *Omkering van vermenigvuldigingen*

  Bij dit type opgaven is slechts sprake van toepassing van de operatie delen als omgekeerde bewerking van het vermenigvuldigen.

* *Vergelijken*
  Je herinnert je het 'speeltuinonderzoek' van klas 3.[1])

  De vraag naar een vergelijking van beide onderzoekjes heeft WEL te maken met een breukbegrip; de oplossing leidt tot het begrip fraktie.

* *Staafgrafiek*
  Hetzelfde speeltuinonderzoek herinnert je aan grafieken, bijvoorbeeld:



betekent 50 huizen

  Je moet een 'staaf' maken voor 125 huizen.
  Ook hier is sprake van het begrip 'breuk' in relatie met verhoudingen.
  Als '1 huisje staat voor 50' dan '.................... '.

* *Meten*
  Het meten voert tot delen van gekozen eenheden (die stok is $1\frac{1}{4}$ m lang). De mens heeft echter een ontsnapping (van de breuken) klaargemaakt (de stok is 125 cm lang). Verfijningen van de eenheid weerspiegelen 's mensen angst voor breuken.....
  Dat men in het – ook zo lastige – sisteem van het metriek stelsel terecht zou komen, wist men vast niet van te voren.

* *? ?*

Je overziet het voorgaande nog eens en krijgt sterk het gevoel dat je er op deze manier niet geheel uitkomt. De onderliggende ervaringen met het begrip 'breuk' zijn nogal ongeordend. Je hebt voor jezelf het gevoel dat je hiermee nog geen vat hebt gekregen op het begrip 'breuk'; net zo min bijvoorbeeld als in het geval van het verfijnen van de maat bij het meten.

Met nadenken over het huidige programma kom je er dus nog niet. Evenmin kan een matematische analise (zoiets als: wat is de definitie van een breuk? wat zijn de eigenschappen? in welke strukturen past hij? e.d.) de ontwerper in eerste instantie kreatief inspireren.

Wat dan wel?
Je krijgt de indruk dat je bij het opzetten van een 'lijn' voor breuken in de basisschool (èn het voortgezet onderwijs) moet zoeken naar een uitgangspunt, dat hetgeen je met die breuken wilt, eksplisiet maakt.

Enkele overwegingen met betrekking tot dat uitgangspunt

De konkrete fase ten aanzien van de ontwikkeling van het breukbegrip in het huidige basisschoolprogramma is te kort. De mogelijkheden om problemen te visualiseren om van daaruit tot ontwikkeling van bepaalde denkschema's te komen blijven onbenut.
Te snel wordt tot abstrakties overgegaan, waarbij de breuken 'verworden' tot objekten, tot elementen van de verzameling rationale getallen, waarop allerlei onbegrepen truuks worden toegepast. Het kind is dan 'ingevoerd' in een algebraïsche wereld, die op de basisschool niet thuishoort.
De breuk als 'breker', als operator op konkrete zaken zal veel langer in het gezichtsveld van de kinderen moeten blijven, al was het alleen al om die situaties te leren beschrijven en de kans te krijgen een adekwate taal voor die beschrijvingen te ontwikkelen.
Wat is namelijk een operationeel begrip van breuken?
Een antwoord op deze vraag vereist meer een psychologisch-didaktische dan een matematische doordenking.

't Is kras gezegd, dat wel. Afbrekende kritiek zonder aanvaardbare alternatieven is als een vlucht, een nederlaag.

Toch springen je enkele zaken in het oog.
Dat 'beschrijven' en die 'spesifieke taal', zit daar niet iets in?
Eens kijken .... en dan meteen de relatie met verwante zaken als verhoudingen, procenten, schaal, kommagetallen in de gaten houden. Je zou anders in dezelfde fout(en) vervallen, die aan het huidige basisonderwijsprogramma verweten worden. Op dat *'visualiseren'* dien je ook alert te zijn. Je kunt het immers niet los zien van de taal die je wilt ontwikkelen.

[1]) Wiskobas-Bulletin, jaargang 3 nr. 2, pag. 157 e.v.

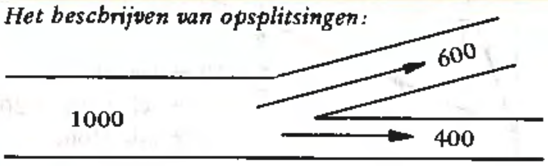
Beschrijven met taal van de breuken

Je krijgt het gevoel dat aan de uitgangspunten 'visualiseren', 'beschrijven' en 'de breuk als operator' nog het element van 'nivo's' moet worden toegevoegd. Dit ligt natuurlijk voor de hand. Je wilt immers een stuk onderwijs opzetten 'door de basisschool heen' (en straks nog verder). Laten we proberen konkreet te blijven:

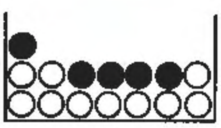
* *Het gebruik van een 'breuk' als woord, dat aangeeft dat 't niet precies past (8 stappen en nog 'een halve').*

* *Het beschrijven van aanschouwelijk gegeven delen:*

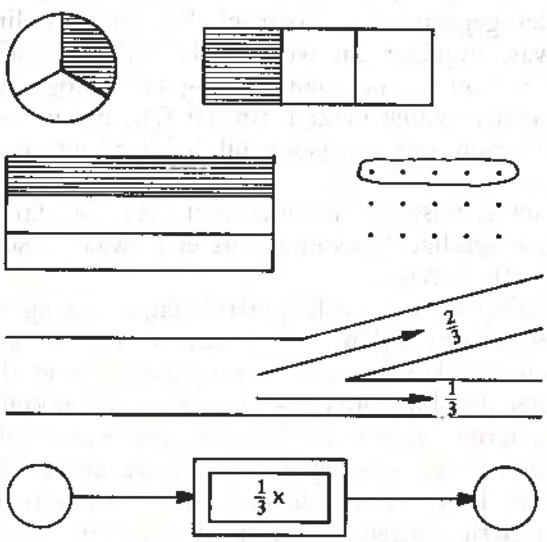
* *Het beschrijven van opsplitsingen:*



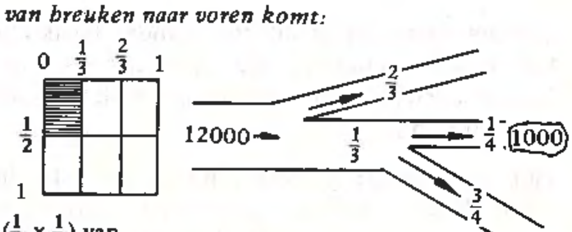
* *Het beschrijven van frakties:*



* *Het gebruik van breuken om* delen *aan te geven. Teken $\frac{1}{3}$ deel van:*



* *Het beschrijven van situaties, waarin het produkt van breuken naar voren komt:*

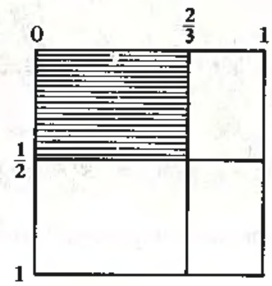


$(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3})$ van

breuken werken op visueel gegeven grootheden

breuken werken op aantallen

* *Zoeken naar de eenvoudigste operator (vereenvoudigen):*



* *Een visuele basis leggen onder het procentbegrip:*

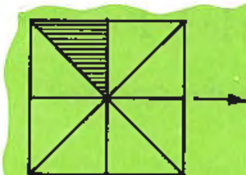
'$\frac{1}{2}$ van' *wordt* '$\frac{1}{2}$ van 100%' →

* *Het kommagetal als beschrijvingsmiddel van meetaktiviteiten: 1,57 m (5 tienden en 7 honderdsten).*

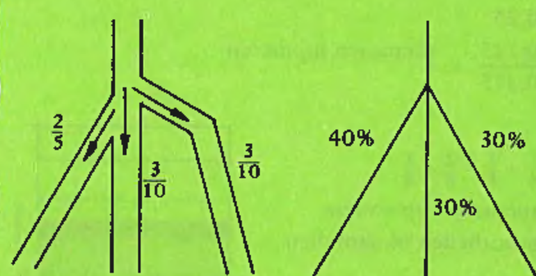
* *Het 'decimale breuk-aflezen' op schalen: liniaal, unster, brievenweger, maatglas, chronometer, meetrooster voor oppervlakte, watermeter.*

* *Beschrijvingen van delen (van lengte-eenheden) met behulp van gewone breuken en kommagetallen:*
  $\frac{1}{4}$ = 0,25 als $\frac{1}{4}$ van 1 dm = 0,25 dm
  en vervolgens
  $\frac{1}{8}$ ≈ 0,124 ... naast 8 / 1,... \ 0,125.

* *Breuken, procenten en kommagetallen:*
  - *het verband*
  - wanneer *kies je* welke?



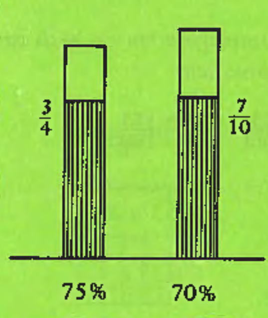
'$\frac{1}{8}$ deel van' → *0,125 (cm²)* →
12,5% van 1 cm².

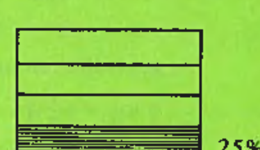


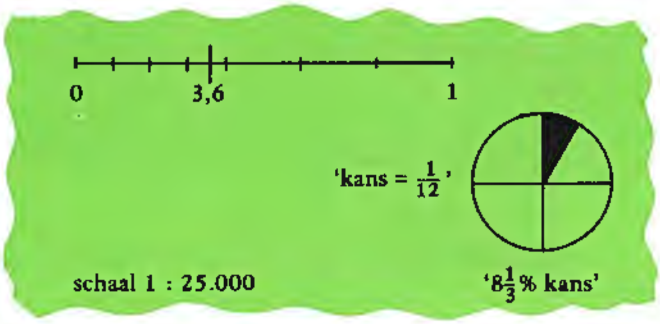
$\frac{1}{5} \times \frac{3}{10}$ van ....

20% van 30% van ....

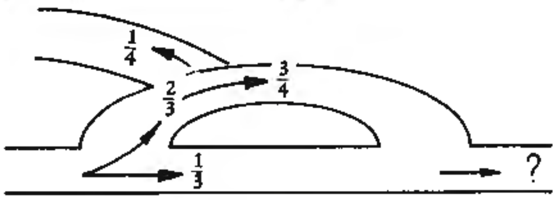
$\frac{1}{5}$ van 30% van ....



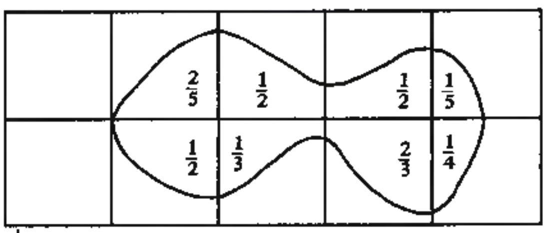




* *De noodzaak van het optellen van gewone breuken (aftrekken):*



de omleiding

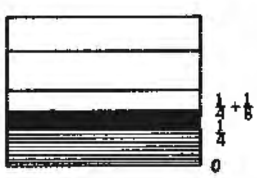


ongeveer $(\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4})$ van 1 cm^2.

* *De algoritmisering van het optellen (aftrekken)*
  * *via kommagetallen*
  * *rechtstreeks*

$$\begin{array}{r} 0{,}25 \\ 0{,}125 \\ \hline 0{,}375 \end{array} +$$ toepassen bij meten

$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}+\frac{1}{8}$
toepassen op visuele grootheden of aantallen

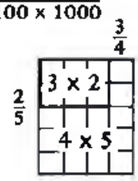


* *Vermenigvuldigen van kommagetallen op basis van het produkt van gewone breuken:*

$0{,}25 \times 0{,}125 \leftrightarrow \frac{25}{100} \times \frac{125}{1000} = \frac{25 \times 125}{100 \times 1000}$

↓

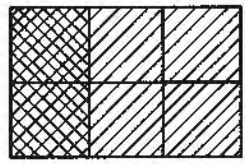
generaliseren uit
$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4}$
vanuit het plaatje:



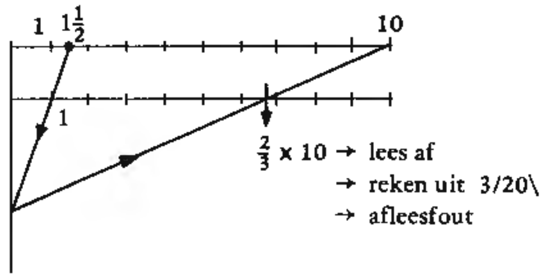
* *Delen van kommagetallen:*

$\frac{0{,}25}{0{,}125} = \frac{25}{125}$ op basis van $\frac{25}{100} = \frac{250}{1000}$.

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$



* *De gewone breuk als vermenigvuldigingsfaktor — meetkundige konstrukties en toepassingsgebied van het voorgaande:*



* *Breuk en verhouding.*
* *Breuk op het stadsplan → op weg naar het getalbegrip van* ⌈ *Q*, +, . ⌉.

De kalkulus (het rekenen) met breuken

In het voorgaande zijn we onwillekeurig verder gegáan dan oorspronkelijk de bedoeling was. Vandaar dat we onszelf — al terugblikkend op de voorgaande paragraaf — nog even bewust willen maken van het feit, dat we het rekenen met breuken gelijk hebben 'meegenomen'.
Het is juist dit 'rekenen met breuken' dat in het huidige basisonderwijs een zwaar aksent heeft gekregen.
De operaties optellen, aftrekken, vermenigvuldigen (en delen) met breuken vereisen een zekere algoritmische vaardigheid. Als je dat niet dagelijks doet, dan kun je 't gemakkelijk verleren. Het is als bij een gekompliseerde, motorische vaardigheid — pijltjes gooien op een bord, een kastieknuppel hanteren of touwtje springen. Hoe meer je oefent, des te beter (met zo weinig mogelijk fouten) kun je 't .....
Dit betekent dat in de nederlandse basisscholen wordt geoefend tot aan de eindtoets basisonderwijs (ongeveer in april afgenomen) toe. En dan .....

Het kan natuurlijk ook anders. Zoals bij het leren lopen, fietsen, zwemmen, autorijden, e.d. Kun je dat eenmaal, dan verleer je 't niet meer.
Het *be*oefenen geschiedt dan niet om 't beter

te leren, maar gewoon voor het plezier of omdat het funktioneel is.
We denken dat het leren van breuken vergelijkbaar is met 't laatste geval.
Wie de zaak *echt* (aktief, op eigen nivo) dóór heeft, hoeft niet te oefenen. Hij kan zijn inzicht laten funktioneren, hij kan 't *be*oefenen.
We moeten zoeken naar dát aktieve, gedifferentieerde wiskunde-onderwijs, dat tot inzichtelijk beoefenen kan leiden.
Dit betekent onder andere dat het voortdurend maken van oefensommen zonder meer, niet veel zal voorkomen.

Toepassingsgebied en uitgangspunten
Je overziet het geheel nog eens. Je hebt het idee, dat je nu over een 'lijn' voor de breuken op de basisschool beschikt, doch tegelijkertijd realiseer je je dat het geheel niet meer is dan dat. Alles is nog erg 'kaal'. Het is nog lang geen wiskunde-onderwijs zoals we dat graag zouden willen.
Je besluit om met die overwegingen in je achterhoofd aan het werk te gaan en te pogen bij een konkretisering in ècht wiskunde-onderwijs op basisschoolnivo met betrekking tot deze getallenwereld alert te zijn op:
- gebieden, waarin sprake is van toepassing van datgene wat in die kale lijn is uitgestippeld;[1])
- de andere leerstofvlakken.

Vooral uitstapjes op het gebied van de meetkunde en het redeneren en bewijsvoeren daarbij, blijken goed te passen.[2])
Tenslotte zij nog vermeld, voordat we overgaan tot een eksemplarische verslaggeving van aktiviteiten in de ontwerpschool, dat we ons bij die verslaggeving alleen om breuken hebben bekommerd en kwesties als verhoudingen, procenten, decimale breuken achterwege hebben gelaten.

Met betrekking tot die breuken zouden we kunnen overgaan tot een (voorzichtige) formulering van de volgende *doelstellingen:*
- inzicht in breuken als beschrijvingsmiddel in diverse situaties,
- inzicht in de operaties, die bij diverse situaties behoren,
- beschikking hebben over duidelijke denkmodellen om het voorgaande te praktiseren (en te induseren),
- ....

* * *

[1]) Zie bijvoorbeeld 'Luchtfoto van breukelerdam' (paragraaf 2.5)

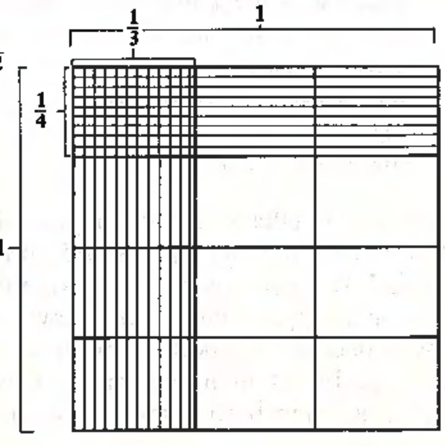
[2]) Zie bijvoorbeeld 'Meer dan breuken alleen in breukelerdam' (paragraaf 2.4)

2 EEN REIS DOOR BREUKELERDAM

2.0 Inleiding
Karakteristiek — zo komt het althans tot uitdrukking in de grapjes die er over gemaakt worden — voor een trans-atlantische toerist in europa, is de gejaagdheid waarmee hij enkele hoofdsteden 'doet'. Gewapend met kamera snelt hij langs de meest saillante bezienswaardigheden, 'schiet' plaat na plaat om dan straks thuis te kunnen vertellen 'How wonderful' het allemaal was.
U zult zich afvragen: 'wat heeft dit nu met breuken te maken?'
Wel, geachte lezer(es), het is met tegenzin dat we u in het volgende gedeelte van dit artikel de rol van die toerist opdringen, of beter nog, we zijn in zijn huid gekropen, hebben de platen — overigens in een wat rustiger tempo — van breukelerdam 'geschoten' en vragen nu van u zich een beeld van dit merkwaardige dorpje te vormen. (Wel menen we, dat de zorg waarmee de beelden gekozen zijn, een juiste indruk vermogen achter te laten, mits u de moeite neemt ze zorgvuldig te beschouwen.)
Tevens dient nog opgemerkt te worden dat we ons alleen tot breuken beperkt hebben.

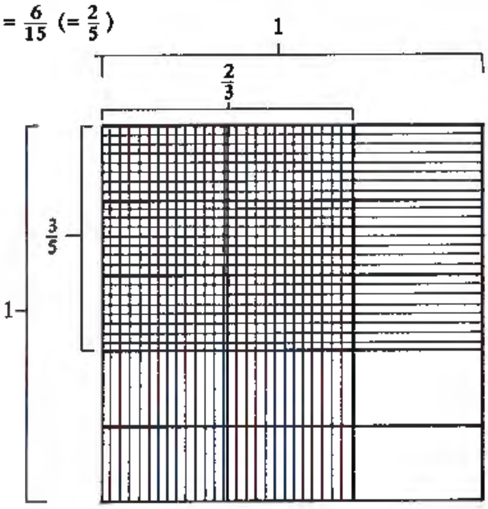
2.1 Regels
Zoals dit in ieder zichzelf respekterend dorp het geval is, gelden ook in breukelerdam voor autochtonen en 'buitenstaanders' nu eenmaal regels, waaraan een ieder zich te houden heeft, zoals:
- 'breuk' geeft een deel van een geheel aan, zowel in meetkundige zin als toegepast op geld, op hoeveelheden, op meten;
- de problemen betreffen vooral de *notatie* van breuken (als operator op een visueel geheel);
- het samenvoegen en afhalen van *konkrete* delen wordt eveneens met breuken beschreven;
- het produkt van breuken komt voor in verband met stambreuken:

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$



en ook in gevallen als:

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$ $(= \frac{2}{5})$



2.2 Een trajekt via problemen
Breukelerdam 'werd' belangrijk regionaal nieuws toen op een fraaie dag het nieuwe zwembad in een wat luidruchtige bijeenkomst door de burgemeester zou worden opengesteld. Vooral de jeugd had met nauwelijks bedwongen ongeduld naar deze langverbeide dag uitgezien.
Door het beluisteren van een hoorspelletje op de band maken de kinderen van klas 5 deze plechtigheid mee en ook de nasleep, die aanleiding was tot de start van allerlei aktiviteiten.
Wat wilde namelijk het geval?
De pasverworven 'plaatselijke trots' wakkerde de superioriteitsgevoelens van sommige dorpelingen ten opzichte van omliggende dorpen nogal aan; zó erg zelfs dat ze tegen elkaar gingen opscheppen over de reusachtigheid van het nieuwe zwembad. Kennelijk wilden ze daarmee nagaan hoever ze in hun overdrijvingen tegenover buitenstaanders zouden kunnen gaan. Ach, oordeelt u zelf maar aan de hand van enkele passages uit het 'hoorspel':

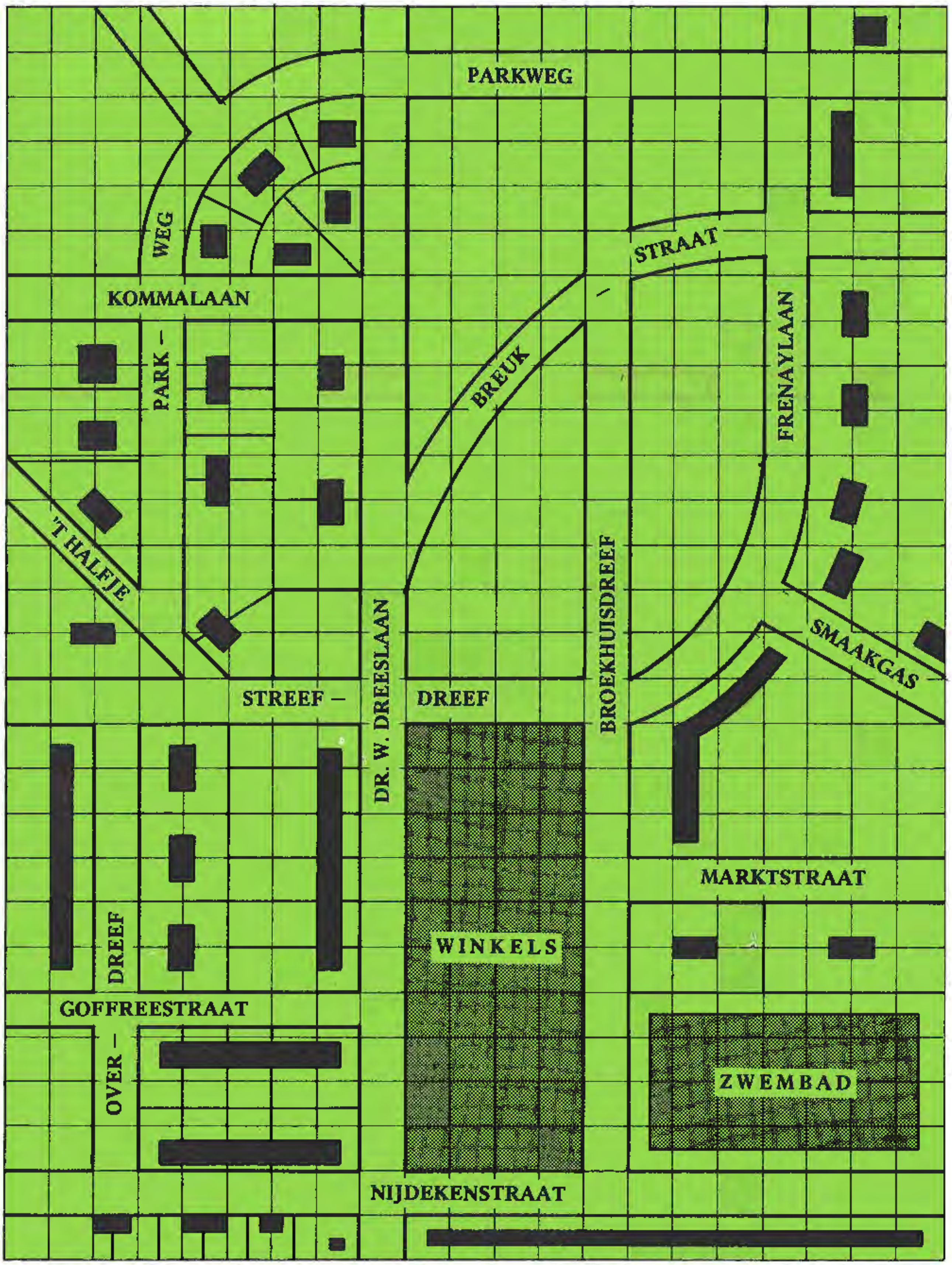
'Ons zwembad', zei op zekere dag de smid,
'beslaat wel *één-twaalfde* van breukelerdam.'
'Welnee', bitste de bakker, 'ik beweer dit: 'minstens *één-achtste*'. Toen de post erbij kwam,
'Wat, één-achtste', zei de post, die wist waar 't over ging,
'volgens mij is 't *één-zesde*', ...

Het tegen elkaar opbieden gaat door. Ieder houdt vast aan zijn eigen standpunt. Een ruzie dreigt. Wanneer tenslotte de kampioen onder de opscheppers met klem beweert, dat het zwembad en breukelerdam in feite identiek zijn, realiseert men zich ineens waarmee men bezig is. Men besluit met breuken als toepassingsmiddel aan het werk te gaan ...

'En zo geschiedde, elk was tevree.
De rust in breukelerdam keerde weer.
En de breuken? Iedereen rekende ermee.
En opscheppen over 't zwembad deed niemand meer.'

In het volgende trajekt van problemen gaan we na, hoe de breukelerdamse regels in die problemen gekonkretiseerd zijn en welke aktiviteiten van de kinderen verwacht worden om ze tot een oplossing te brengen.

HET ZWEMBAD
De 'zwembad-story' voert tot het verstrekken van een plattegrond van breukelerdam en de bijbehorende opdrachten.
De kinderen beschikken over een vel roosterpapier om de vier eerste opdrachten te kunnen uitvoeren.
Letten we alleen op de 'breuken' dan zien we in de opdrachten, dat telkens de notatie gegeven is in breuken, welke de kinderen als operatoren op de oppervlakte van breukelerdam 'laten werken'.
Alleen bij opdracht 3 wordt de notatie van de grootte van het zwembad in een breuk gevraagd; de operator heeft 'gewerkt' en het resultaat daarvan dient nog beschreven te worden. Ook tellen en redeneren spelen een rol. (Zie bijvoorbeeld de situering van het zwembad op de plattegrond.)



NB: de plattegrond kon niet 'op ware grootte' worden afgedrukt – de ruitjes zijn derhalve niet precies 1 cm².

Neem de plattegrond van breukelerdam voor je.

1. Welke oppervlakte heeft de plattegrond in vierkante centimeters?

   cm^2.

2. Verschillende mensen in het verhaal scheppen op over de grootte van het zwembad.

   ▶ De smid spreekt van '$\frac{1}{12}$ deel'.
   Kleur dit deel op het roosterpapier (dat is even groot als de plattegrond).
   Hoeveel cm^2 is dat?

   cm^2.

   ▶ De bakker zei '$\frac{1}{8}$ deel'.
   Is dat groter of kleiner dan wat de smid zei?
   Hoeveel cm^2 is het $\frac{1}{8}$ deel (ongeveer)?

   cm^2.

   ▶ De kruidenier en de SRV-man spraken van '$\frac{1}{4}$ deel' en 'de helft'.
   Hoeveel cm^2 is dat in beide gevallen?

   $\frac{1}{4}$ deel: cm^2

   de helft: cm^2.

   Wat kun je van $\frac{1}{4}$ deel en de helft zeggen als je ze vergelijkt?

3. Kleur het zwembad op de plattegrond.
   Hoeveel cm^2 is dat?

   cm^2.

   Welk deel is dat ongeveer van de hele plattegrond?

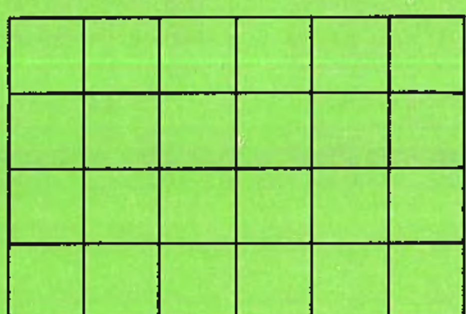
   Het deel.

4. Vergelijk je eerste antwoord van opdracht 2 met het eerste antwoord van opdracht 3.
   Je ziet: zelfs de smid overdreef al erg.

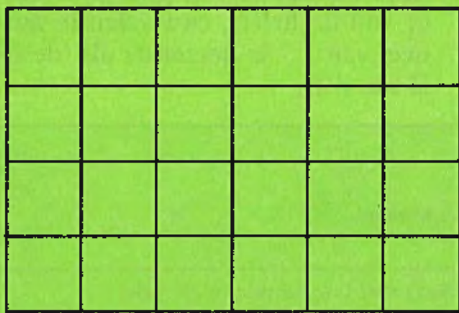
   ▶ Hoeveel maal zo groot jokte de smid het zwembad ongeveer?

   maal zo groot.

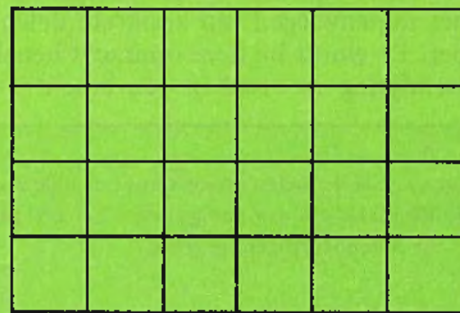
5. Stel dat dit de oppervlakte van breukelerdam zou zijn:



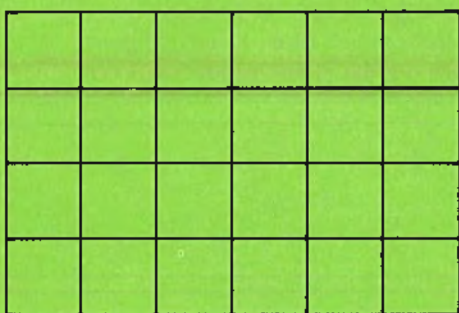
▶ Teken hieronder dan de delen (breuken) die de bakker, smid,... bij het zwembad zetten.



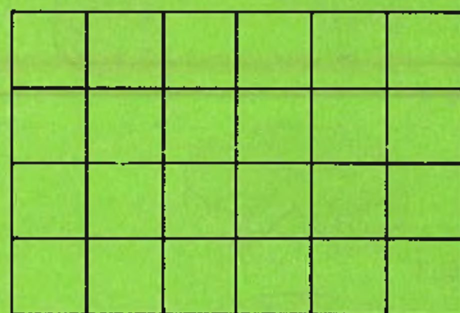
smid $\frac{1}{12}$ deel



bakker $\frac{1}{8}$ deel



post $\frac{1}{6}$ deel



kruidenier $\frac{1}{4}$ deel

SRV-man $\frac{1}{2}$ deel

kapper $\frac{1}{1}$ deel

DE SUPERMARKT (1)
Bij een rondgang door breukelerdam komen we ook in de supermarkt. Joris snijdt de kaas niet altijd even traditioneel. De kinderen beschrijven in breuken, wat Joris met de kazen deed, waarbij de gevallen (c) en (d) aanleiding geven tot (meetkundige) redeneringen.

In de supermarkt is ook een zuivelafdeling. Heerlijke kaas wordt daar verkocht. Bij het snijden van de kaas doet Joris Driepinter wel eens vreemde dingen.
Kijk maar:

▶ Welke van deze kazen is in gelijke delen verdeeld?
Hoe groot zijn die delen dan?

in gelijke delen	grootte van de delen
figuur	
figuur	

DE SUPERMARKT (2)

Terugblikkend op wat Joris vroeger deed komt het samenvoegen van konkrete delen in het vizier. Er wordt bij deze opdracht behalve een beschrijving in breuken een beschrijving gegeven van wat er 'gebeurde'.

Implisiet spelen het produkt van stambreuken ($\frac{1}{3}$ van de helft), ekwivalentie van breuken ('$\frac{3}{6}$ deel van ....' is hetzelfde als 'de helft van ....') al een rol.

Joris sneed de kazen vroeger anders, kijk maar!

▶ Vertel bij elk van de figuurtjes het verhaal in breukentaal.
Er is een voorbeeld gegeven.

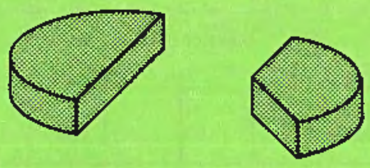


fig. 1

Een kaas werd doormidden gedeeld.
Elk stuk kaas was de helft.
Van de ene helft werd $\frac{1}{3}$ deel afgesneden.
Dat was $\frac{1}{6}$ deel van de hele kaas.
Er bleef een halve kaas en nog $\frac{2}{6}$ liggen.
Samen was dat $\frac{5}{6}$ deel van de hele kaas.

fig. 2

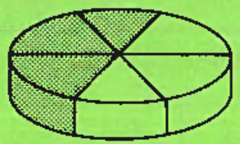


fig. 3

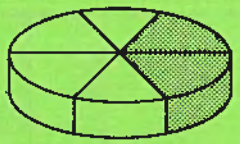


fig. 4

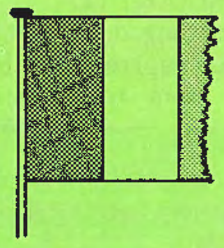
VLAG EN MUUR

Nu we toch al 'aan het samenvoegen' geweest zijn, kijken we naar het afhalen.
Het tweetal problemen spreekt voor zich. Slechts een notatie in breuken wordt gevraagd. Wel zijn de problemen zo gesteld, dat er nog wat te raden (redeueren) overblijft.

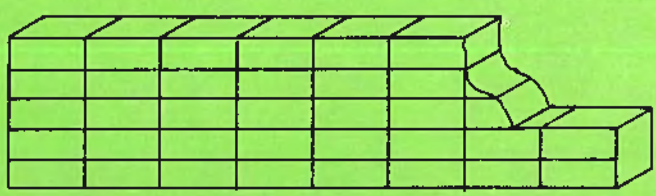
We stappen de supermarkt uit. Het eerste wat opvalt is:

▶ De vlag bij meneer Den Brok.
Hij liet de vlag te lang in de storm hangen. Welk deel is er afgerafeld?

Het ☐ deel.



▶ Even verder is een nieuw winkelpand in aanbouw.
Er wordt hard gewerkt. Laten we eens kijken:



De metselaar is boos. Kwajongens vernielden een muur.
Welk deel is verdwenen?

Het ☐ deel.

OP SCHOOL

Het rooster ligt voor de hand als visualiseringsmiddel voor problemen, welke gerelateerd zijn aan het oppervlaktebegrip.

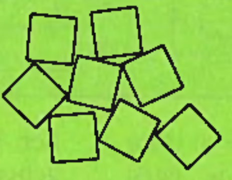
Toepassing van het rechthoekmodel als *denkmodel* in andere dan aan oppervlakte gerelateerde problemen in verband met breuken, vereist voorbereiding.

Hoewel het volgende probleem in de eerste plaats past in de sfeer van de notatie van breuken in konkrete situaties is er de dimensie van het voorbereiden op het gebruik van het rechthoekmodel aan toegevoegd.

Willen de kinderen bij het probleem handig tot een oplossing komen dan zullen zij in de tekening van de hele stapel, struktuur moeten aanbrengen om ook de andere gevraagde delen van die stapel handig en overzichtelijk te kunnen tekenen.

Aan de Dr. W. Dreeslaan staat de breukelerdamse school.
We zullen er eens een kijkje nemen. Ook toevallig zeg, in klas 5 zijn ze net met breuken bezig. Wat een problemen!
Zou jij ze ook kunnen?

Dit is het $\frac{1}{3}$ deel van een stapel:



Teken jij eens:

- ▶ de hele stapel (probeer het handig!):
- ▶ de helft van de stapel:
- ▶ $\frac{2}{3}$ deel ervan:
- ▶ $\frac{1}{4}$ deel ervan:
- ▶ $\frac{4}{5}$ deel ervan:
- ▶ $\frac{3}{4}$ deel ervan:

Schrijf er ook bij hoeveel blokjes in elke stapel.

DE GLAZENWASSER
Ook het volgende probleem onderscheidt zich naar de aard van de 'breukenaktiviteiten' niet van de voorgaande.
Toch leverde dit probleem veel stof tot diskussie, vandaar dat we het opnemen.

Meester kijkt uit het raam. En .... wat ziet hij?
Eerst....

de glazenwasser.

De meester zegt: 'Jongens, kom eens even bij me staan.'
Dan wijst hij.

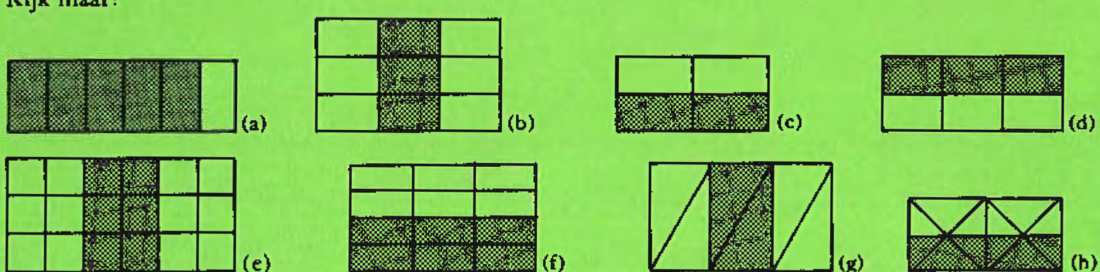
Welk deel van de ramen heeft die glazenwasser al gedaan?
Weet jij het ook?

Het ☐ deel.

Op de vraag welk deel van de ramen al door de glazenwasser gezeemd is, zul je eerst moeten vaststellen in welke hoek je hem 'laat beginnen'. Die beslissing te kunnen en te durven nemen vereist een attitude ten aanzien van problemen, die niet uit de lucht komt vallen.
De kinderen op de ontwerpschool zijn hieraan echter snel gewend geraakt. Ze weten dat ze op grond van de genomen beslissing, hoe een probleem te interpreteren, ook verschillende antwoorden kunnen krijgen.
Dat hindert echter niet, als je maar duidelijk maakt, vanuit welk standpunt je redeneert. Als je dan zegt: 'er zijn 18 ramen; de glazenwasser heeft al $\frac{1}{6}$ deel gedaan, want ik liet hem links onderaan beginnen', kan het gebeuren dat een klasgenootje opmerkt: 'da's ook onhandig; als hij van beneden naar boven werkt kan hij de ramen, die hij al schoon heeft, weer natspetteren.'

FIGUREN
De ekwivalentie van breuken kwam al even ter sprake.
In de beschrijving van deel-geheel-relaties met behulp van breuken ontdekken de kinderen, dat bij sommige plaatjes verschillende beschrijvingen passen. Ze leren op die manier, dat '$\frac{6}{12}$ deel van ....' hetzelfde beschrijft als de helft van ....', etcetera.

Het begint wel gemakkelijk in dat breukelerdamse wiskundeboek.
Kijk maar:



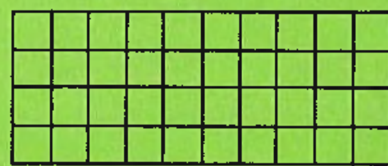
Welk deel van iedere figuur is gearceerd?
Let op: bij sommige figuren passen *twee* breuken (of zelfs nog meer).
Vind jij die ook?
Probeer maar:

fig. a: ☐ fig. b: ☐ fig. c: ☐ fig. d: ☐
fig. e: ☐ fig. f: ☐ fig. g: ☐ fig. h: ☐

En in een later stadium dat $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
Dit impliseert een abstraktie. De kinderen moeten nu immers afzien van de konkrete zaken waarop de breuken 'werkten'; $\frac{6}{12}$ en $\frac{1}{2}$ zijn dan objekten geworden, die binnen de wereld van de rationale getallen ekwivalent zijn.

EEN REEP DELEN
In de sfeer van de beschrijving van konkrete zaken met breuken, geven we tenslotte, zonder verder kommentaar, nog het volgende probleem:

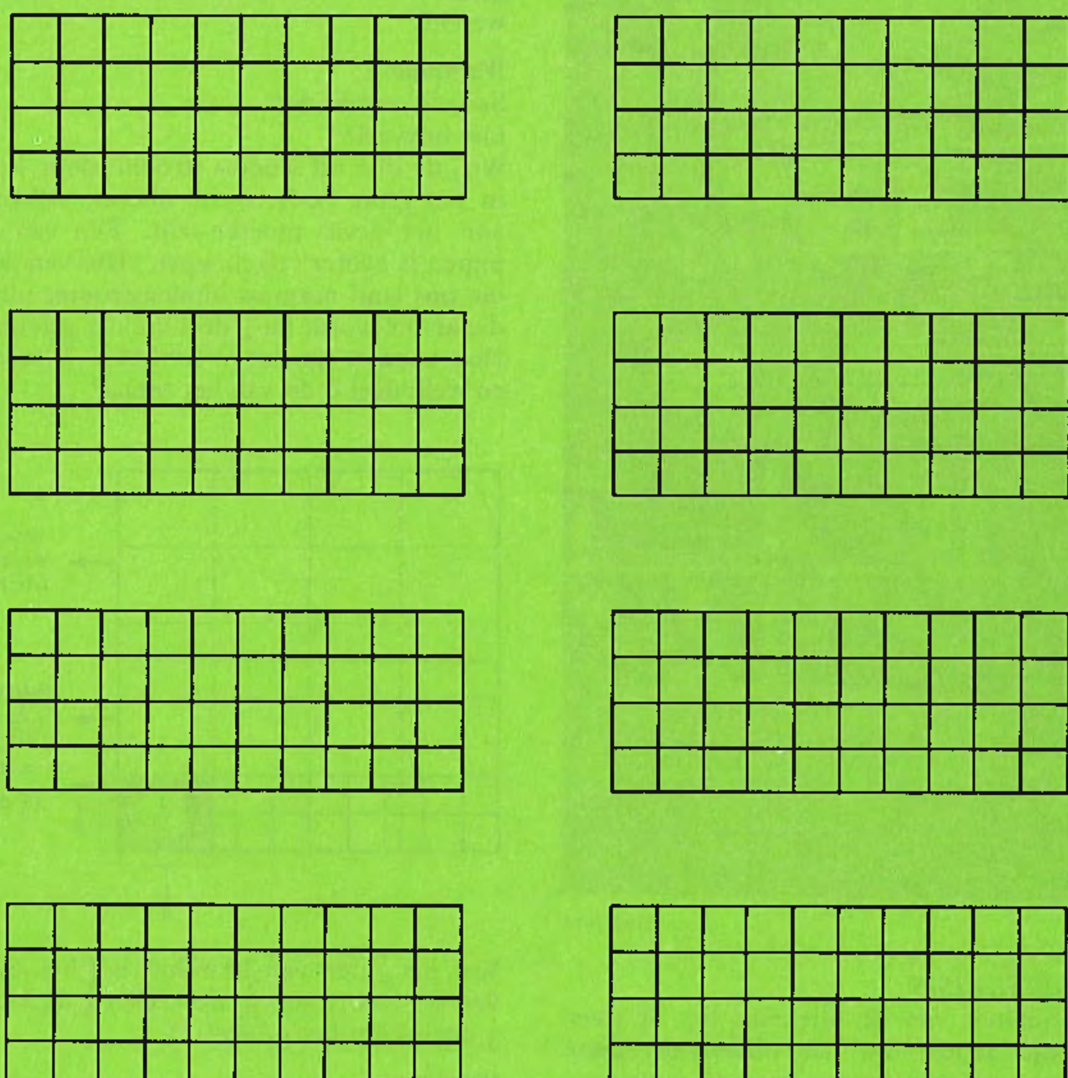
Els kreeg een grote reep:

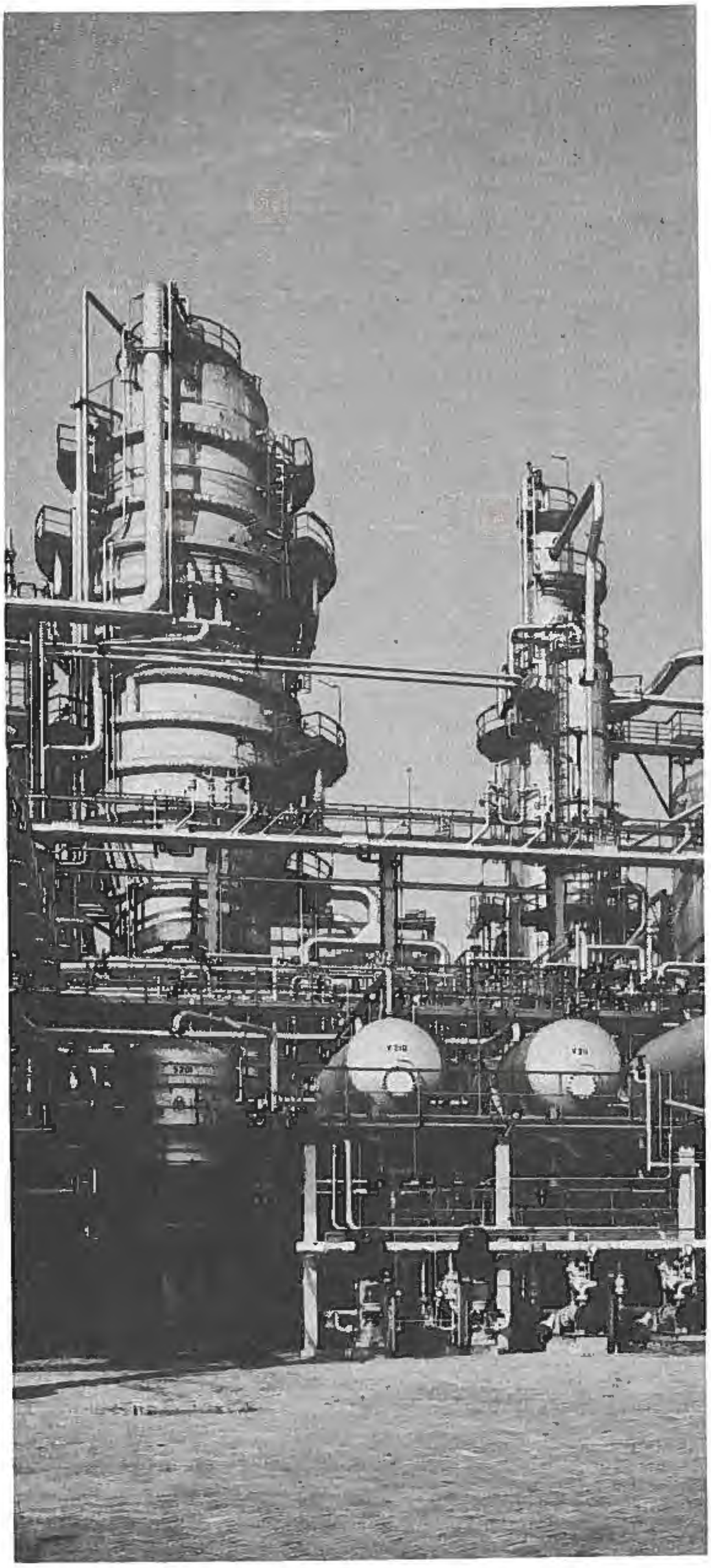


Zij at □ deel op;
er bleef △ deel over.
Vul de tabel verder in:

□	$\frac{1}{5}$				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$		$\frac{7}{20}$
△		$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$			$\frac{4}{10}$	

Kleur telkens de delen die op waren in een aparte figuur:





shell-foto

EEN OLIEKRISIS

De aktualiteit van de oliekrisis ligt al weer enige tijd achter ons. De olieboykot door sommige arabische landen vormde aanleiding tot de 'formulering' van het volgende probleem.

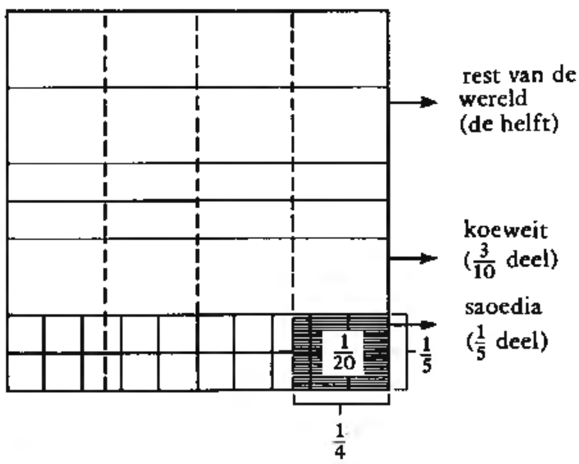
NB: U ziet, dat we bij onze reis door breukelerdam de grenzen even gepasseerd zijn. Het ontwikkelde rechthoekmodel als denkmodel vroeg om een toepassingsgebied. De onderhavige olieproblematiek gaf daartoe aanleiding.

In een viertal werkbladen werd het probleem vastgelegd.

Werkblad 1
Aan de hand van de tekening stellen de kinderen vast, hoe de leveringssituatie van olie vóór de krisis was:
er gaan 10 (gelijkwaardige) pijpen naar het grote nederlandse olievat; 2 daarvan komen uit saoedia; saoedie-arabië levert dus $\frac{2}{10}$ deel of $\frac{1}{5}$ deel van onze olie.
Zo levert koeweit $\frac{3}{10}$ en de rest van de wereld de helft.

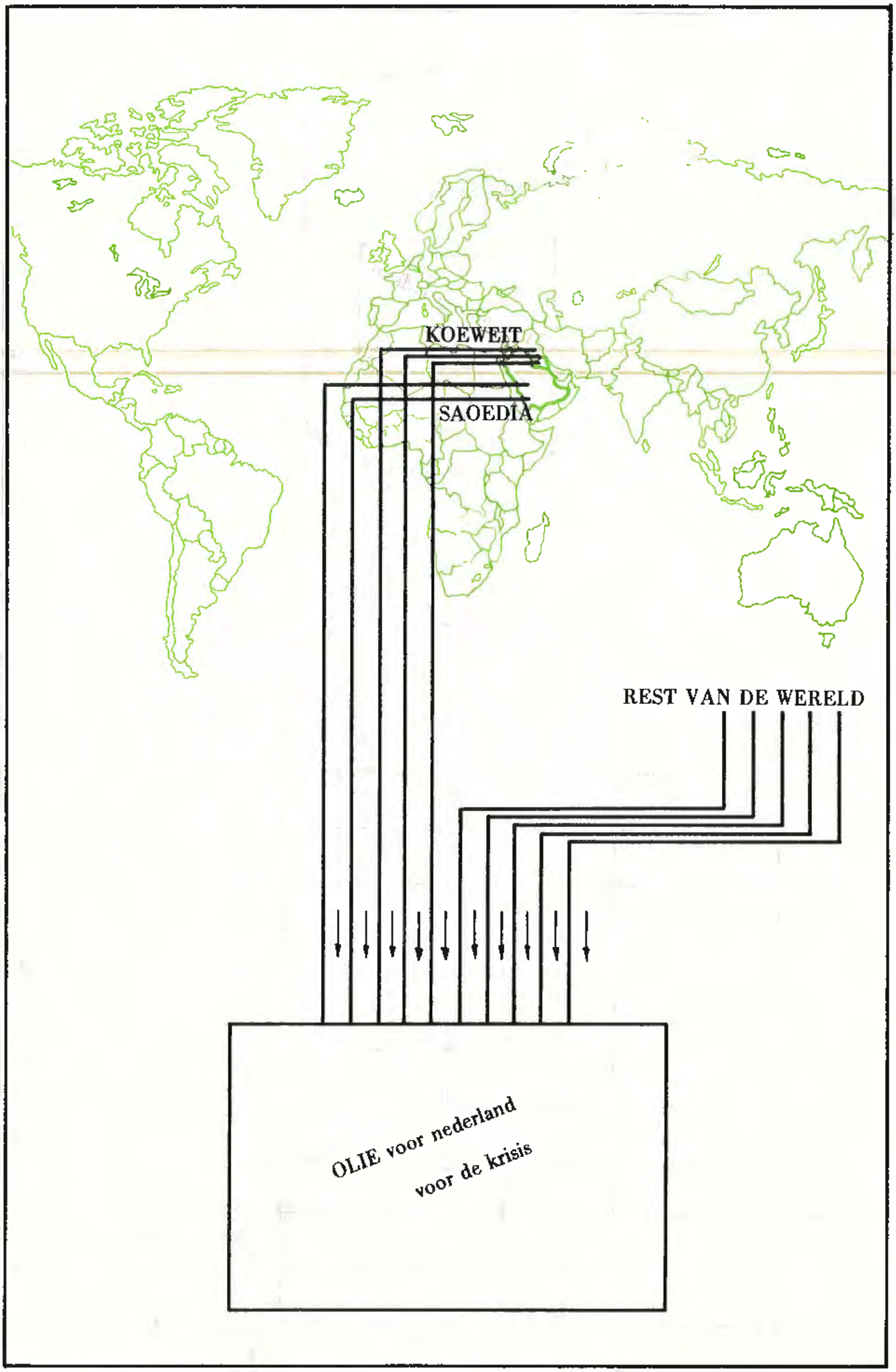
Werkblad 2
We laten eerst de olie uit saoedia in het vat stromen. Laat dit op het rooster zien. Vervolgens ook de olie uit koeweit en de rest van de wereld.

Werkblad 3
Saoedia vermindert.
Met hoeveel?
Wel, de olie uit saoedia stroomt door 4 pijpen in het grote nederlandse olievat, althans dat zou het geval moeten zijn. Eén van die 4 pijpen is echter 'afgeknepen'. Dus van de olie, die ons land normaal binnenstroomt uit saoedie-arabië wordt nu $\frac{1}{4}$ deel minder geleverd.
Hoe kunnen we dat in werkblad 2 laten zien en welk deel is dit van het totaal?



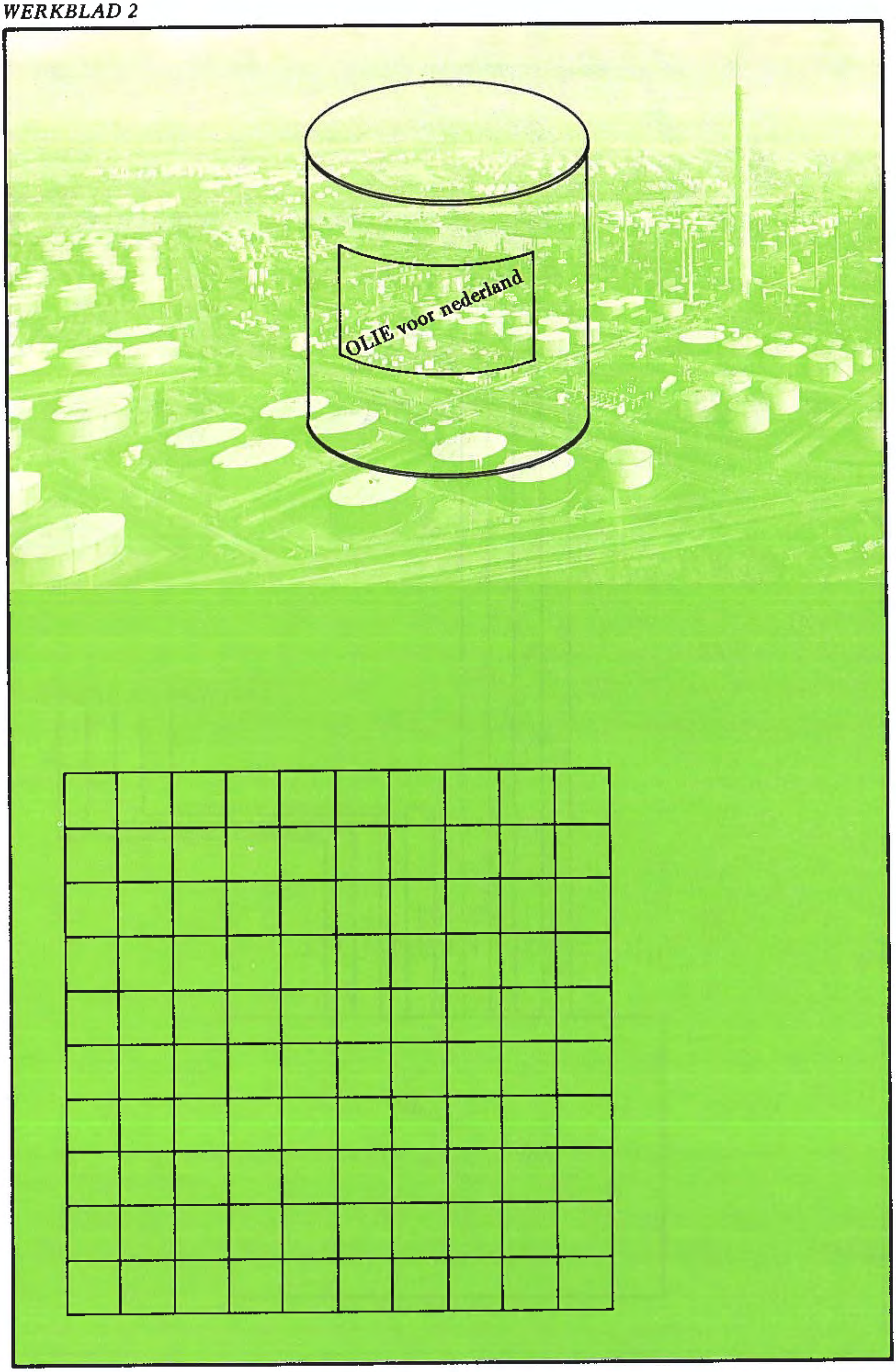
Wel, het $\frac{1}{4}$ deel van 20 hokjes is 5 hokjes. En 5 van de 100 is het $\frac{1}{20}$ deel. (het $\frac{1}{4}$ deel van het $\frac{1}{5}$ deel is dus het $\frac{1}{20}$ deel) [1])

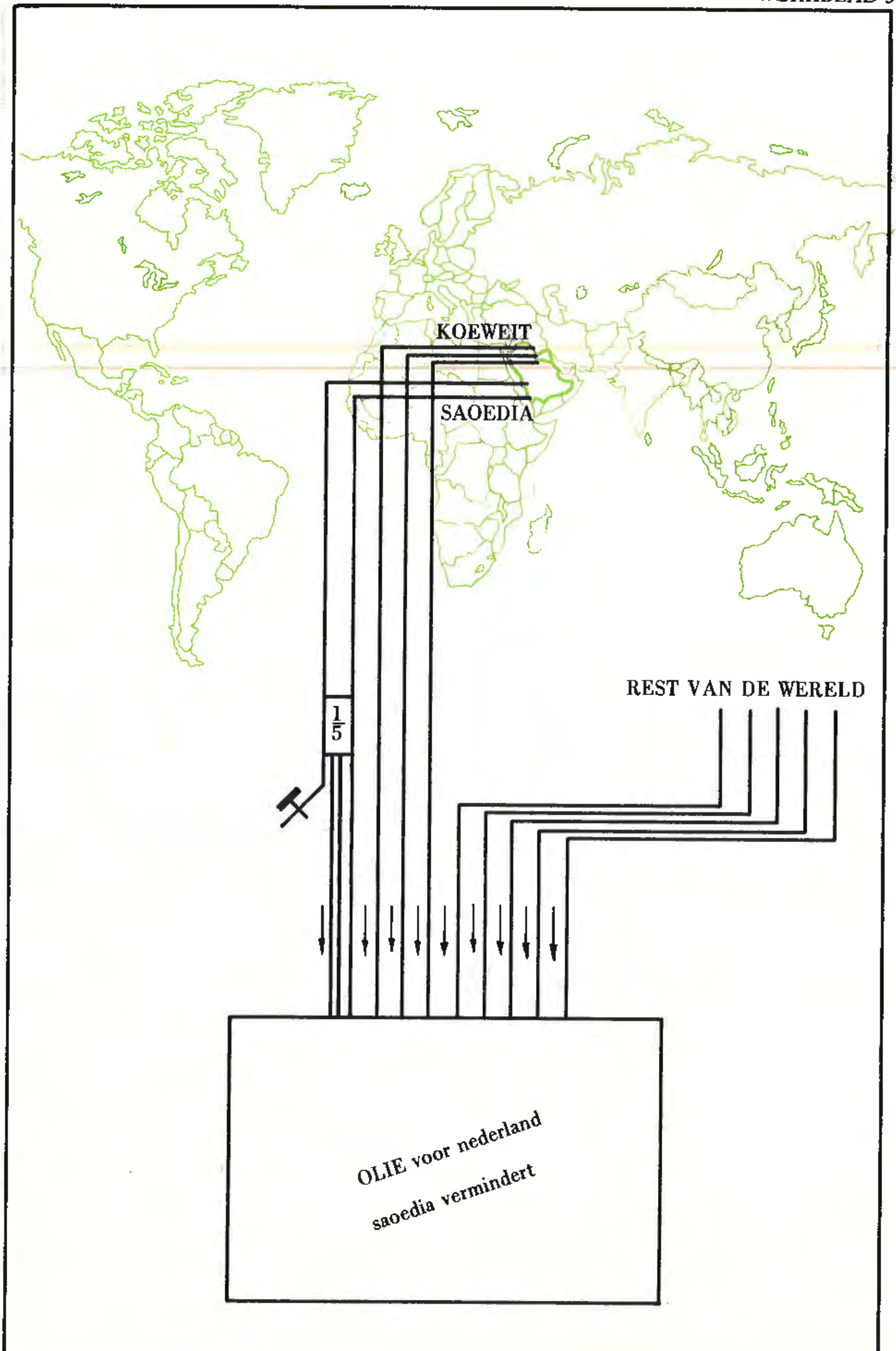
Werkblad 4
Als werkblad 3, maar nu voor koeweit en saoedie-arabië samen.



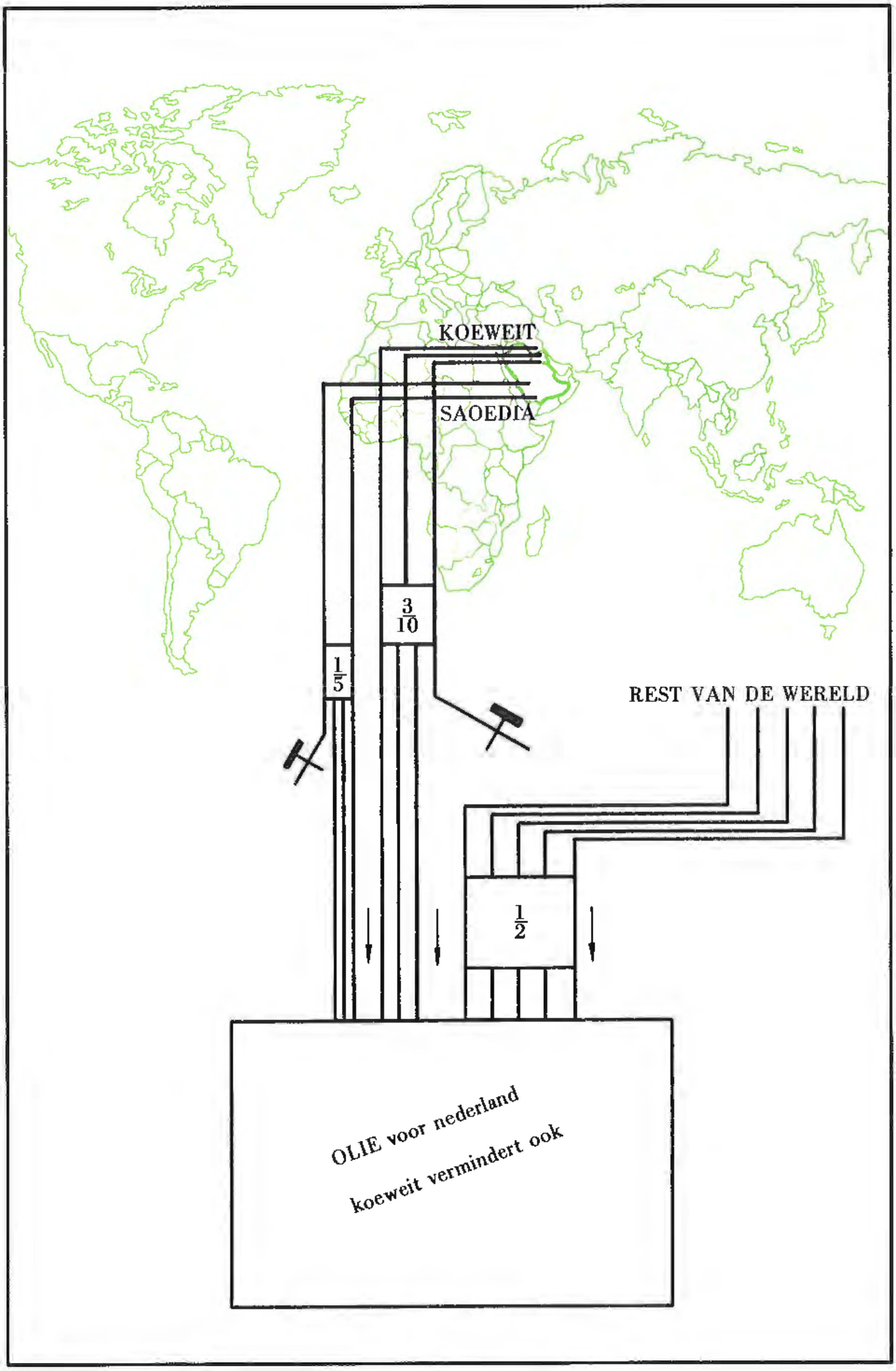
[1]) De in de tekening gesuggereerde oplossing werd door de klas ontwikkeld.

WERKBLAD 2




KOEWEIT
SAOEDIA
REST VAN DE WERELD
1/5
OLIE voor nederland
saoedia vermindert

WERKBLAD 4


KOEWEIT
SAOEDIA
$\frac{3}{10}$
$\frac{1}{5}$
REST VAN DE WERELD
$\frac{1}{2}$
OLIE voor nederland
koeweit vermindert ook

HOUTHAKKERS

Ook binnen de kontekst van breukelerdam werd het rechthoekmodel toegepast.

Ter illustratie hiervan nog het volgende voorbeeld:

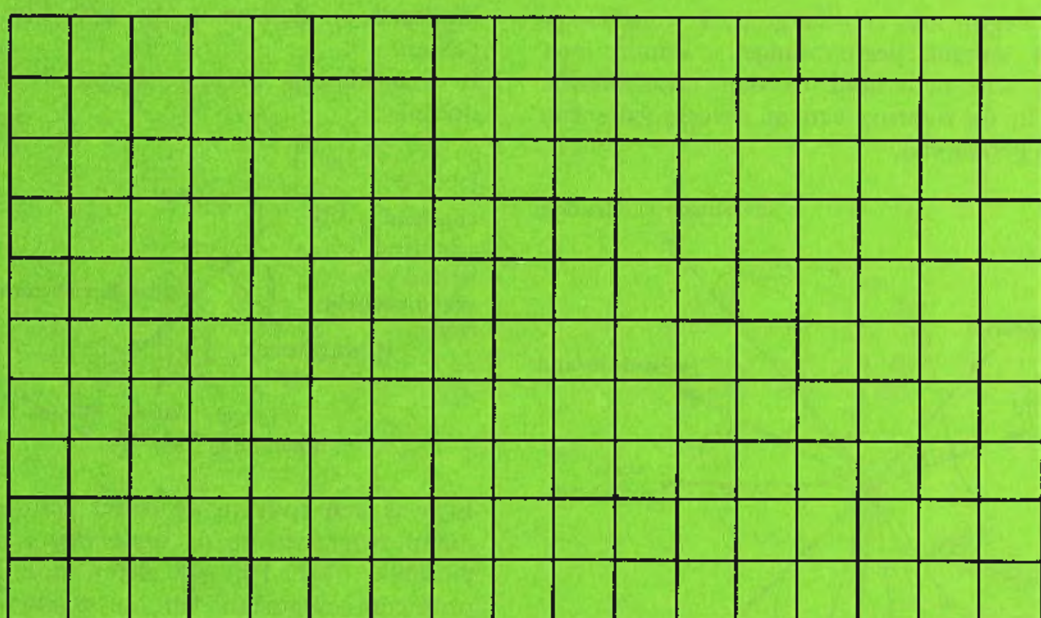
Breukelerdam is een echt landelijk dorp met prachtige bossen in de omgeving.
Er wonen in breukelerdam houthakkers, die wel eens problemen geven.

Twee groepen houthakkers staan voor een groot karwei. Ze moeten elk een flink bos omkappen.
Beide bossen zijn even groot.
Ze hebben de volgende werkschema's:

groep 1:
- de eerste dag : de helft van alle bomen gekapt
- de tweede dag: de helft van de rest
- de derde dag : weer de helft van wat nu nog rest

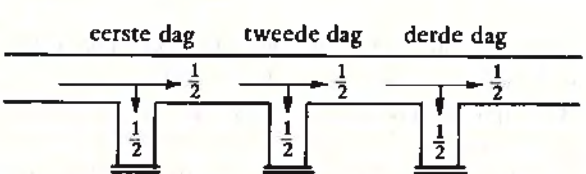
groep 2:
- de eerste dag : $\frac{1}{8}$ deel van alle bomen
- de tweede dag: $\frac{1}{4}$ deel van alle bomen
- de derde dag : de helft van alle bomen.

▶ Wat kan een breukelerdammer uitrekenen?
Hoe doet ie dat?



2.3 Op weg buiten breukelerdam

Behalve de ontwikkeling van het rechthoekmodel als denkmodel pogen we ook een *wegenmodel* (boommodel) als denkmodel te ontwikkelen.
We lichten dit toe met behulp van het voorbeeld van de breukelerdamse houthakkers.
Het werkschema van de in het probleem genoemde groep 1 geeft aanleiding tot de volgende beschrijving:



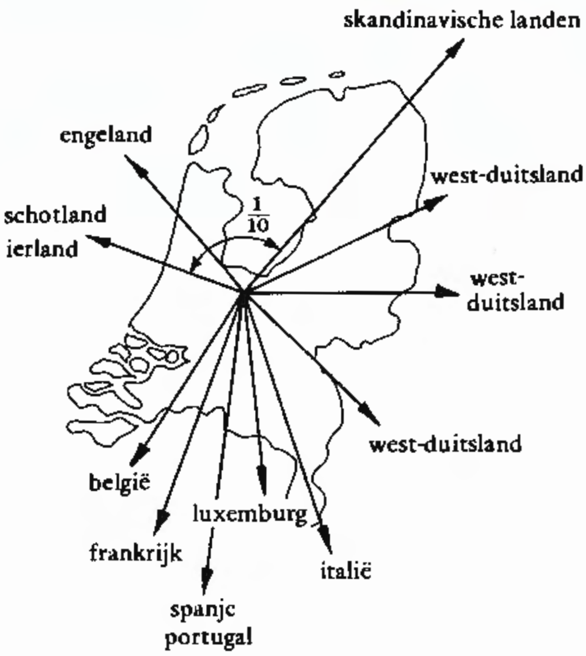
Konklusie: $\frac{1}{2}$ van ($\frac{1}{2}$ van $\frac{1}{2}$) van de bomen is niet gekapt na de derde dag. De breuken bij de verschillende splitsingen hebben nog precies dezelfde 'operator-funktie' als beschreven onder de regels voor breukelerdam.
Bij de toepassing van dit schema merken de kinderen dat het voor het werkrooster van groep 2 uit het houthakkersprobleem niet werkt en ze formuleren ook waarom: voor groep 2 wordt steeds van het hele bos uitgegaan en voor groep 1 niet.
De kinderen voelen aan dat in meer dinamische situaties het wegen(boom)model toegepast kan worden, dat wil zeggen: daar waar een breuk als operator ergens 'op werkt', vervolgens 'werkt' op wat nog rest, etcetera.

Wordt steeds uitgegaan van een geheel, waarop verschillende operatoren werken, dan leent het rechthoekmodel zich meer voor toepassing.
Dit wegenmodel blijkt een machtig middel om die meer dinamische problemen te lijf te gaan. Bekijkt u de korte schets van een les in klas 5 maar eens, waarbij her volgende probleem het uitgangspunt vormde:

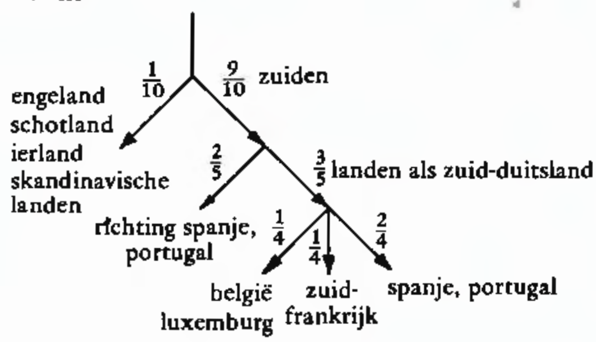
Voorbeeld les voor klas 5
In de zomer van 1971 gingen veel nederlanders naar het buitenland met vakantie.
De skandinavische landen, engeland, schotland en ierland *samen* trokken $\frac{1}{10}$ deel van die vakantiegangers.
De rest ging in de richting van het zonnige zuiden. Van die zonzoekers trok $\frac{2}{5}$ deel in de richting van spanje en portugal. De *rest* ging naar landen als zwitserland, zuid-duitsland, oostenrijk, italië, joego-slavië en griekenland. Van de mensen die in de richting van spanje en portugal trokken, bleef $\frac{1}{4}$ deel in belgië en luxemburg, $\frac{1}{4}$ deel in zuid-frankrijk, terwijl de rest naar spanje en portugal ging.

- Hoeveel vakantiegangers gemiddeld (van elke 20.000) bezochten spanje en portugal?
- Welk deel van het totaal bezocht belgië en luxemburg?

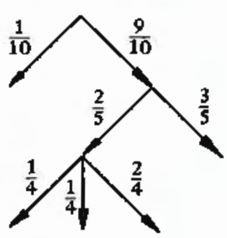
De les begon met een leergesprek over vakantie en vakantiebestemmingen. Vanuit een kaartje van nederland werden verschillende pijlen in de richting van de diverse vakantielanden getrokken.



Vervolgens werd informatie vanuit het probleem verstrekt: 'De skandinavische landen, engeland, schotland en ierland *samen* trokken $\frac{1}{10}$ deel van die vakantiegangers.'
Dit leidde tot toevoeging van 'het boogje met $\frac{1}{10}$ op het kaartje'.
De klas voelde toen de noodzaak van een andere aanpak.
Ze voorzagen dat het op deze manier een janboel zou worden.
Het boommodel was al eerder gebruikt. De kinderen stelden voor dit ook hier toe te passen.
In een klassegesprek ontstond de volgende boom:



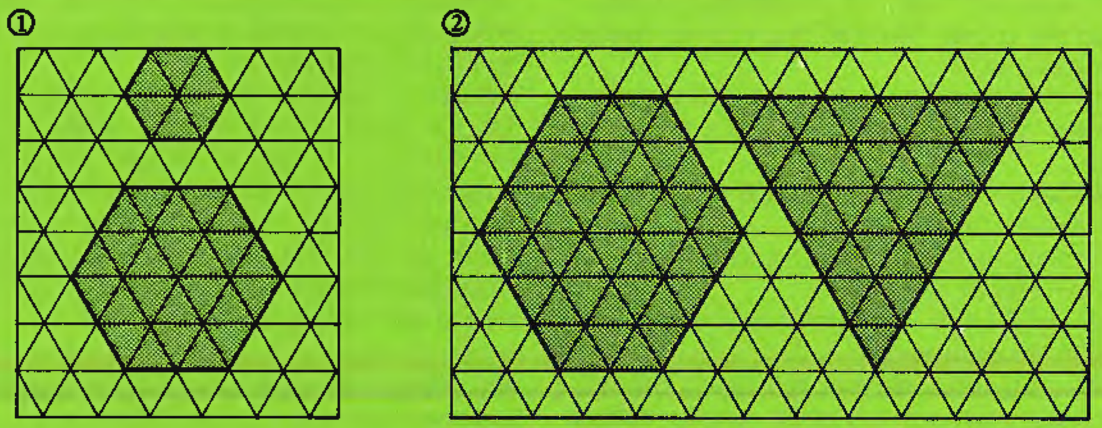
Er was een fout in de opzet geslopen. Niemand reageerde en de onderwijzer zweeg er wijselijk over. Hij gaf alleen opdracht het probleem nogmaals aan te pakken en de gestelde vragen te beantwoorden. Bij de bespreking achteraf viel de gezamenlijke, op het bord geproduseerde, aanzet tot de oplossing duidelijk door de mand. Bijna alle kinderen kwamen nu tot:



2.4 Meer dan breuken alleen in breukelerdam
In het voorgaande trajekt van problemen is uit terloops gemaakte opmerkingen al duidelijk geworden dat binnen de breukelerdamse problemen ook andere 'zaken' meespelen. We

willen daarop nu, enkele voorbeelden volgend, wat dieper op ingaan.

De vijfde klassers werden geplaatst voor het volgende probleem:



De tegelzetter is ook al slecht te spreken. In de mozaïekwandjes die hij maakte, moeten stukken over.

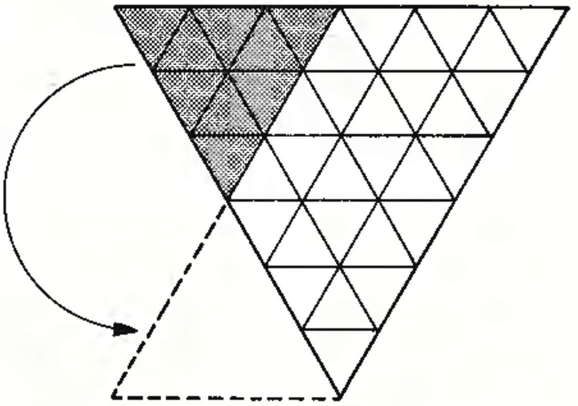
Welk deel van elk wandje moet over?

- Wand ①: het ☐ deel.
- Wand ②: het ☐ deel.

Eens kijken wat er gebeurt. (figuur 1) De tegelzetter moet de twee gearceerde zeshoeken overdoen. Welk deel van de hele wand is dat? Dan zul je toch eerst moeten weten hoeveel tegels er in de hele wand zitten. Op de eerste rij tel je: elf hele tegels, maar .... iedere rij begint en eindigt met een halve, dus twaalf tegels. Er zijn acht rijen, dus 8 x 12 = 96 tegels.
Nu eerst de kleine zeshoek. Da's makkelijk! Je ziet het zó: zes tegels.
Hé, wacht even. Twee rijtjes van drie in de kleine zeshoek. Het onderste rijtje is net als het bovenste, maar dan op z'n kop.
Nu de grote zeshoek. De eerste rij vijf tegels. De tweede rij zeven tegels.
Hé, da's leuk, twee meer. Ik kan wel stoppen, want in de andere helft van de zeshoek zitten er natuurlijk ook 12. Dus 24 tegels in de grote zeshoek.
Da's samen 30 met de kleine en in de hele wand waren 96 tegels. 30 van de 96, tja, 30 gaat ruim driemaal in 96, maar 't is niet precies $\frac{1}{3}$ en in de som staat welk deel. Nou, ik schrijf gewoon $\frac{1}{3}$ en zet er 'ongeveer' bij.

Nu de andere figuur nog. (figuur 2)
Nou, het totaal aantal tegels, da's nu makkelijk: 23 hele in een rij en twee halve aan het eind, dus 24 in een rij. Er zijn 8 rijen, dus 8 x 24 = 192 tegeltjes.
De zeshoek. In de eerste rij 5, dan 7, dan zal de derde rij wel weer twee meer zijn. Even kijken. Ja, 't klopt: 9 tegels, dus 5 + 7 + 9 = 21 tegels. De andere helft is net zo. Dus 42 tegels in de zeshoek.
Nu de driehoek nog. Wacht, ik begin bij de punt onderaan. Dat wordt dan 1, 3, 5, ... ik kan net zo goed de bovenste rij van de driehoek tellen .... Elf. Dus 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11. Eén en drie is vier en vijf is negen en .... 36 tegels.
Dat hebben we toch eerder gehad, hoe zat 't ook weer?
Hé, ja: 1 + 11 = 12, 3 + 9 = 12, 5 + 7 = 12. Dus 3 x 12 = 36. Klopt, had ik al ....

't Laatste probleem had ook nog anders gekund:



Hé, ik kan dit driehoekje ook zó draaien. Dan krijg ik zes rijtjes van zes, dus 36 tegels.

't Voorgaande is geïnspireerd op observaties van vijfde klassers tijdens de verwerking van dit probleem en op de registratie van belangrijke momenten uit de bespreking daarna. Kijken we er 'van bovenaf' nog eens op terug, dan signaleren we:

- telaktiviteiten (waarmee het gehele probleem overigens opgelost had kunnen worden),
- rekenaktiviteiten (schatten) ('8 x 12' en '30 gaat ruim drie keer in 96'),
- redeneren op grond van symmetrie-overwegingen (bij de zeshoeken),
- het ontdekken van patronen tijdens het tellen (in de driehoek: 1, 3, 5, ...),
- het omstruktureren van een figuur tot een andere, waardoor het tellen vereenvoudigd wordt (bij de driehoek),
- het redeneren op grond van analogie (het vaststellen van het aantal tegels in beide wanden verloopt identiek),
- het handig optellen van een rij getallen (bij 1, 3, 5, ...).

Het voorgaande illustreert de rijkdom van het gestelde probleem. De diversiteit van aanpakken laat 'instappen op eigen nivo' door de leerlingen toe, waardoor de klas, hoewel werkend aan hetzelfde probleem, zich toch spontaan *differentieert.*

Omdat ze allemaal tot een oplossing konden komen, werd de bespreking daarna des te interessanter. Je kon nu de oplossing van een ander vergelijken met die van jezelf en verrast worden door wat anderen wel gezien hadden, maar jij zelf niet. Hoewel je de oplossing vond, leerde je toch nog ontzettend veel bij en kon je ook iets aan anderen leren.

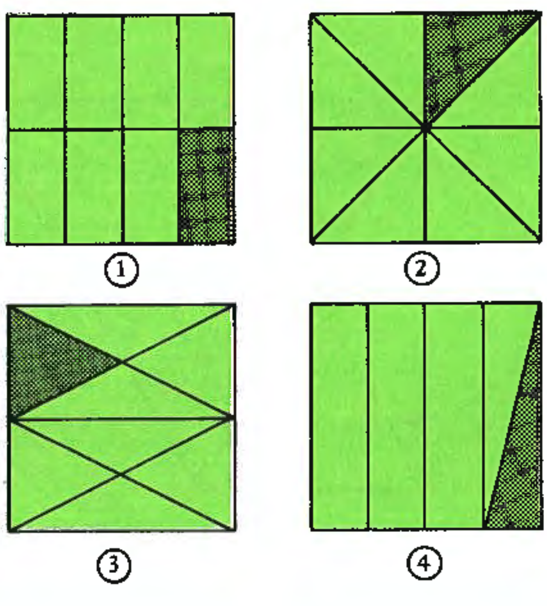
We willen in deze paragraaf nog een voorbeeld geven van *'dat meer'* in breukelerdam.

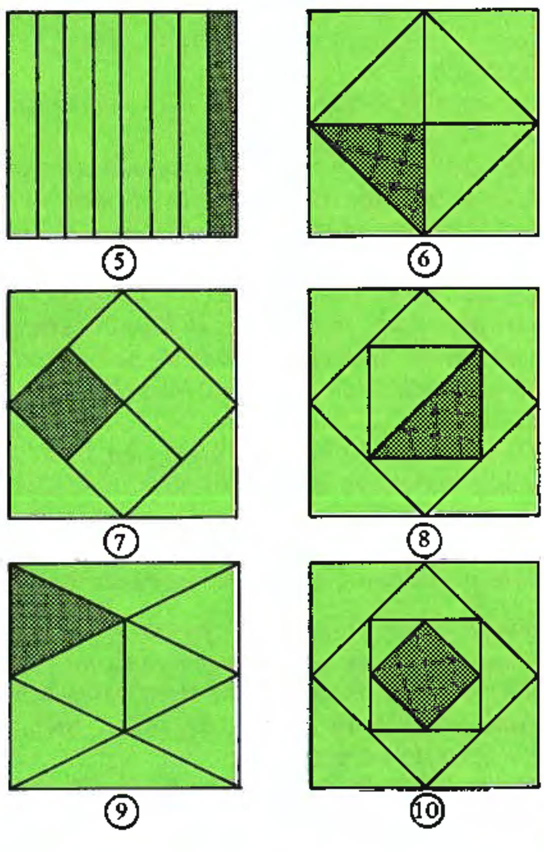
Binnen een serie lessen over breuken en kommagetallen in relatie met elkaar, waarin meten een belangrijke rol speelde, kwam de volgende opdracht voor:

Drie vierkanten waren gegeven om dat $\frac{1}{8}$ deel aan te geven.

De opmerking tussen haakjes werkte dermate inspirerend, dat al spoedig de drie vierkanten onvoldoende waren.

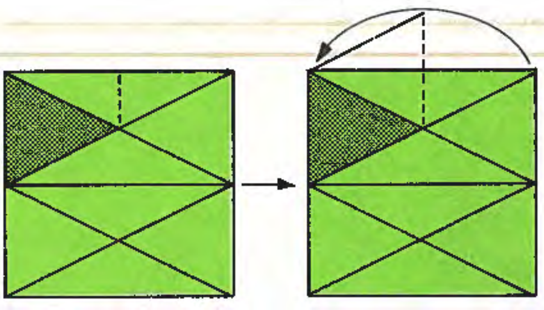
De kinderen kwamen met de volgende oplossingen:





Zonder er al te uitvoerig op in te gaan waren bij de produktie van zoveel oplossingen van het gestelde probleempje de volgende aktiviteiten op te merken:

- het signaleren van oplossingen die al 'geweest zijn';
- het redeneren en bewijsvoeren, bijvoorbeeld bij figuur 3;
  is het gearceerde gedeelte wel $\frac{1}{8}$ deel?
  daarop kwamen redeneringen als: 'verdeel de bovenste driehoek in twee gelijke driehoeken, draai één driehoekje (als in de tekening), dan ontstaat een driehoek die gelijk is aan de gearceerde, dus ...', etc.;



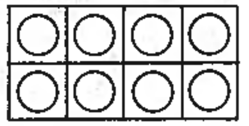
- het indelen van de oplossingen in verschillende kategorieën, namelijk:
  - verdelingen van het vierkant in 8 kongruente delen (1, 2, 4, 5, 6)
  - verdelingen van het vierkant in 8 niet kongruente delen, maar wel gelijk in oppervlakte (3, 7, 9)
  - verdelingsprosedures van het vierkant, die leiden tot het $\frac{1}{8}$ deel daarvan (8, 10).

Samenvattend kunnen we stellen dat een veelheid aan meetkundige aktiviteiten uit het geschetste breukenprobleem voortvloeide, waarbij het redenenerен een aanzienlijke rol speelde.

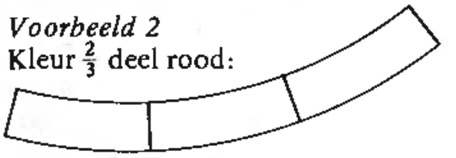
2.5 Luchtfoto van breukelerdam

Wanneer we ons via een luchtfoto wat losmaken van breukelerdam, dat wil zeggen als we ons verheffen boven breukelerdam, dan krijgen we een beeld van de omgeving. We zien duidelijker de struktuur van het geheel, waarin breukelerdam past. Opeens worden allerlei zaken een stuk duidelijker.
Een eerste aanzet tot ontwikkeling van het breukbegrip in klas 3 doemt op. De derde klassers krijgen het operator-idee van een breuk in de vingers in allerlei situaties, die vanuit het verdelen van hoeveelheden, oppervlakken (figuren), lengtes, etcetera, worden aangezet.
Bovendien leren ze de beschrijvingstaal van de konkrete situatie, nadat de operator gewerkt heeft, te hanteren. (voorbeeld 4)

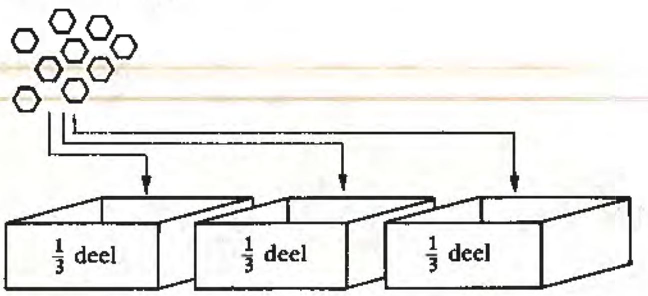
* *Voorbeeld 1*
Kleur $\frac{1}{8}$ deel van de koeken blauw:



* *Voorbeeld 2*
Kleur $\frac{2}{3}$ deel rood:



* *Voorbeeld 3*

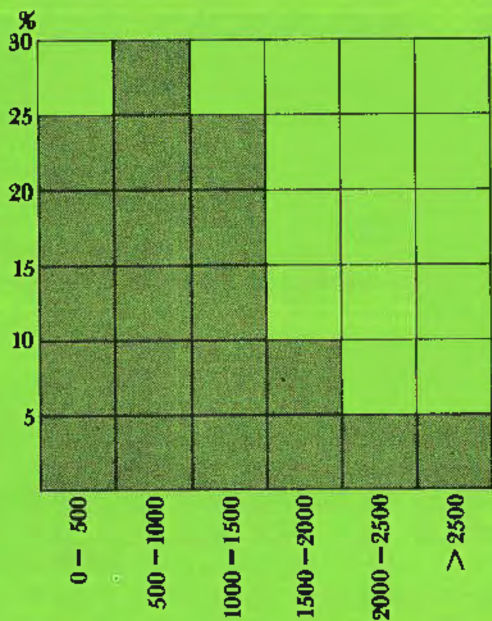


* *Voorbeeld 4*

Ook nemen we op deze luchtfoto een braakliggend terrein waar, waarvoor de blauwdrukken ter ontginning overigens al klaar liggen. (raamplan voor klas 4)
Voor de uiteindelijke realisering van wat in deze blauwdrukken is aangezet, verwijzen we naar de komende jaargang van dit bulletin.
Ook toepassingsgebieden *'Na breukelerdam'* springen bij de verkrijging van dit overview in het oog.
Allereerst verwijzen we naar de televisieserie 'Kijk op Kans'.
De relatieve frekwentie van een elementaire gebeurtenis binnen een statistisch eksperiment of onderzoekje wordt beschreven met behulp van breuken — in relatie met verhoudingen, procenten, kommagetallen. Al deze beschrijvingsmiddelen dragen uiteindelijk bij tot vulling en het in de vingers krijgen van het empirisch kansbegrip.
De verkregen ervaringen binnen de ontwikkeling van deze 'zweetkans' worden tegen de achtergrond van het toeval en de wet van de grote aantallen vergeleken met de 'weetkans'.
De absolute frekwenties die deze apriori-kans vastleggen binnen een zekere kanssituatie, kunnen weer beschreven worden met breuken (uiteraard in relatie met procenten, verhoudingen en kommagetallen).
We nemen enkele opdrachten uit het leerlingenboek van 'Kijk op Kans' op.

Er rijden wat treinen vandaag de dag...

Deze slagzin van de N.S. begint al aardig bekend te worden. Mensen die in een andere stad dan hun woonplaats werken - forensen dus - kunnen vaak kiezen tussen trein en auto. Soms hangt de beslissing af van de afstand, die men moet afleggen tot het station. De N.S. heeft een onderzoek verricht en het resultaat ervan wordt hieronder in beeld gebracht.

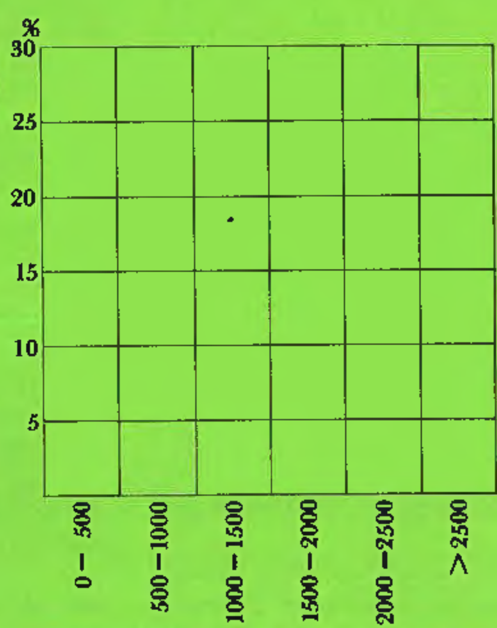


Afstand in meters tot station

(> 2500 betekent: meer dan 2500 meter)

1

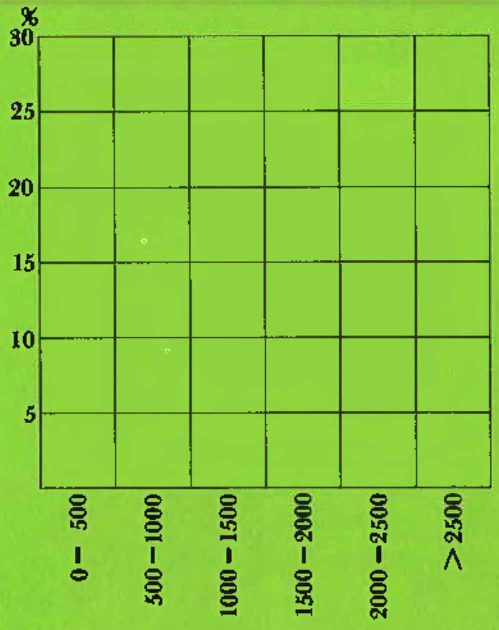
Teken hiernaast het staafdiagram over en maak het gedeelte van de reizigers, die minder dan 2 km van het station wonen, rood.



Hoeveel procent van de reizigers woont minder dan 2 km vanaf het station?

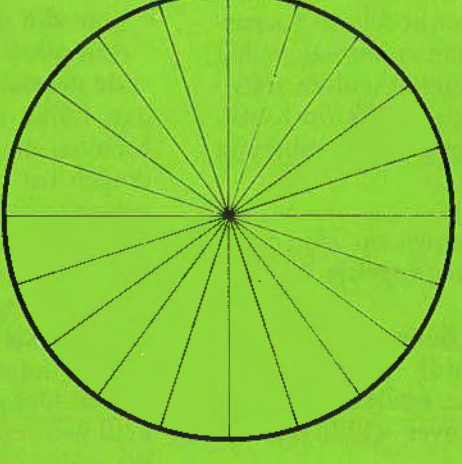
Hoeveel procent van de reizigers woont meer dan 2,5 km vanaf het station?

2 Teken nogmaals het staafdiagram over en maak daarin het gedeelte van de reizigers rood, dat minder dan 1 km en meer dan 2 km van het station woont.



Maak een sectordiagram waarin de volgende percentages in beeld worden gebracht:

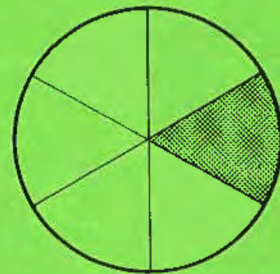
a. reizigers die minder dan 1 km van het station wonen
b. reizigers, die meer dan 2 km van het station wonen
c. de rest



een, twee, drie... plof

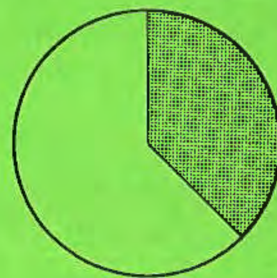
1

de dobbelsteentol



de kans op een zes

2



de kans op groen

de kans op niet-groen (inkleuren)

Het voorgaande was een voorbeeld van toepassing van breuken binnen een ander vakgebied van de wiskunde (waarschijnlijkheid en statistiek), dat op zichzelf, getuige 'Kijk op Kans', weer rijke toepassingsmogelijkheden blijkt te hebben.

Wanneer we ons gaan bezinnen op vragen als:

- **waarom is er geen kleiner vogeltje dan een kolibri?**
- **waarom zakt een walvis door zijn ribben als hij aanspoelt op het strand?**
- **is de lilliput-wereld, die Swift oproept in zijn bekende verhaal over Gulliver, wel mogelijk?**
- **wat zijn de konsekwenties van de faktor $\frac{1}{10}$ van alles in die wereld in vergelijking met de mensenwereld?** ,

dan blijkt een wereld open te gaan, waarin breuken en verhoudingen (onder andere) bijdragen tot het vinden van antwoorden op die vragen.
Een rijk biologie-projekt, waarin wiskundige metoden mede bijdragen tot het beantwoorden van vragen uit de biologie op het nivo van de zesde klassers komt dan in het vizier.
Verder kunnen we eigenlijk nog niet uit de school klappen. Dit projekt moet nog ontwikkeld worden.
We zullen daartoe zeker een poging doen.

respons blok

INHOUD

MEDEWERKERS AAN DIT BLOK:
Schoolteam o.b.s. De Valkhof te roden, Leo Bosselaar, Lucas Capiteyns, Jane Hough, S. Huitema, Huub Jansen, Ada de Jong, C.A. van der Klis, Sjef van Laerhoven, Wim Meijer, G.W.J. van de Molengraaf, Jan Nieland, John Schenker, Douwe Terpstra, E. van der Ven, Ton Zwaard, Daan Karman, Rob de Jong.

4.1 inleiding

Het ingestuurde materiaal is ook deze keer weer zo enorm omvattend — erg verheugend overigens — dat we bij de samenstelling van dit blok moesten kiezen.
Over de argumenten die bij dit kiezen een rol spelen, hebben we 't al eens eerder gehad, met name over de *varieteit* en *leesbaarheid*.
Een ander argument zou je — met wat goede wil — kunnen benoemen met de term *waardevermeerdering*, een nogal subjektief kriterium dat daarom ook vrij intuïtief funktioneert.
Reakties kunnen dwingen tot een verscherping van ideeën, tot een herziening van ontwerpen, waardoor de oorspronkelijke ideeën en ontwerpen waardevoller worden.
Vanuit minstens drie terreinen kan die waardevermeerdering aangezet worden:

— *De beproeving*
Materiaal is door een schoolteam besproken. Groepen leerlingen hebben ermee gewerkt. Teksten blijken te moeilijk of te makkelijk. Stijl en opmaak spreken wel of niet aan. Soms wordt in detail gekorrigeerd, veelal worden voorstellen voor een ander trajekt gedaan.

— *De verrijking*
Nieuwe toevoegingen, die voortvloeien uit het beproeven, maar dit hoeft niet persé. Het samenspel tussen buro- en praktijkwerk is hier van belang.

— *De meningsvorming in meer algemene zin*
Het kan hierbij gaan om meningen over leerplanontwikkeling, strategische kwesties, inbreng van ouders, enz.

* * *

Wat gebeurt er nu verder met het ingestuurde, ook met alles dat niet wordt opgenomen?
Dat wat binnenkomt, per post of spesiale koerier, wordt grof geselekteerd en doorgestuurd naar degene die voor ontwerp en revisie van het betreffende materiaal verantwoordelijk is. Zo gaat respons op 'De Tijdmachine' naar Leen Streefland en het verhaal van kollega Van de Molengraaf naar Hans ter Heege. Deze lezen de reakties door en maken notities op een moederkorrektiemodel, dat is een oorspronkelijke versie waarop alles genoteerd wordt dat bij de volgende herziening in ogenschouw moet worden genomen.
Voorts wordt het sistematisch bewaard, zodat het direkt beschikbaar blijft. Je weet immers nooit, met *zaken van waarde!*

4.2 zonder uniform in de kazerne

In een voorgaand Respons-Blok hebben we toegezegd enkele gesprekken met deelnemers aan het wiskobas-projekt te zullen weergeven. Het gaat hierbij om peilingen: hoe wordt over wiskunde-onderwijs gedacht, welke ervaringen zijn hierbij opgedaan?
Het kiezen van de gespreksdeelnemers is ook deze keer weer zo eerlijk mogelijk geweest. Prikken met een scherpgepunt potlood bracht ons bij kollega Gerrit van Eijsden — docent wiskunde en didaktiek aan de gemeentelijke pedagogische akademie te rotterdam.
Via hem kwamen we in kontakt met de studenten die in het derde en laatste jaar van hun beroepsopleiding als spesialisatie 'wiskunde-didaktiek' hebben gekozen, namelijk: Ada de Jong, Wim Meijer, Ton Zwaard, Sjef van Laerhoven, Lucas Capiteyns, John Schenker en Leo Bosselaar.
Ondanks het feit dat deze studenten vlak voor hun eksamen zaten en dus in tijdnood, waren ze zeer gekonsentreerd waardoor het gesprek geanimeerd verliep en minder 'stellend' dan de lezer wellicht uit de weergave zou afleiden. Uit redaktionele overwegingen hebben we frekwent voorkomende relativeringen als 'volgens mij', 'ik dacht dat', enz. geschrapt.

WB[1]) : *Welke motieven hebben jullie gehad om in dit derde jaar wiskunde als spesialisatie te kiezen? Ieder van jullie heeft daar zo z'n gronden voor gehad. Het kan een positieve of negatieve keus zijn geweest.*
Probeer dat zo eerlijk mogelijk weer te geven.

Ada : Omdat ik 't een fijn vak vond. Ik wist welke leraar het zou geven en ... nou ja, 't lag me 't meest.

Wim : Door de bloks die we in de eerste 2 jaar gedaan hebben, heb ik zoveel belangstelling gekregen voor het wiskunde-onderwijs, dat ik daarin verder wilde gaan. En omdat het ook een van de weinige vakken is waarin op 't ogenblik veel vernieuwing is.

Ton : Door de bloks van het afgelopen jaar. Verder dacht ik dat het een vak was waarbij je begeleiding zou krijgen.

Sjef : Ook die bloks van de afgelopen jaren en dit vak is helemaal nieuw dit jaar. Ik dacht: ik ga 't eens proberen, een beetje eksperimenteren.

Lucas: 't Is mijn tweede keuze. Ik had eerst natuurkunde gekozen, maar dat ging niet door omdat er te weinig gegadigden waren. M'n interesse was toch wel opgewekt door de blokken.

[1]) WB: redaktie Wiskobas-Bulletin.

Van links naar rechts: Ada de Jong, Wim Meijer, Leo Bosselaar, Ton Zwaard, Sjef van Laerhoven, Lucas Capiteyns en John Schenker

John : Eigenlijk had ik ook natuurkunde gekozen. Ik was van plan om verder te gaan studeren in de natuurkunde met wiskunde erbij. Zodoende heb ik wiskunde gekozen.

Leo : Nou, ik vond 't in de afgelopen twee jaar een heel erg leuk vak en dat komt dan ook tot uitdrukking in het feit dat het 't enige vak was waar ik hoger dan een 6 voor had. Dientengevolge heb ik 't gekozen.

WB : *Hebben jullie een idee waarom je klasgenoten geen wiskunde hebben gekozen?*

Ton : Nou, d'r zijn een heleboel mensen die niet eens normaal kunnen rekenen, laat staan dat ze ook maar enige belangstelling hebben voor die blokken. 't Gaat hun gewoon helemaal boven de pet en ze hebben 't idee: 't is wiskunde en daarom vervelend.
'tWoord wiskunde is eigenlijk al vervelend genoeg om nog verder te gaan.

Wim : Vaak wordt de vraag gesteld: waarom worden er geen gewone breuken behandeld of zo iets? Dat moet je toch op de lagere school doen? Waarom die nieuwe dingen? Vaak weten die mensen ook niet wat je hiermee op de lagere school bereiken kunt. Ze hebben eigenlijk liever dat ze precies weten hoe ze een vermenigvuldiging moeten uitleggen.

Ada : Ze gaan er van uit dat het moeilijk is. Ze denken bij voorbaat al dat ze het niet kunnen.

WB : *Is dat zo? Is het programma inderdaad te zwaar voor een groot gedeelte van je medestudenten?*

Ton : Nou, als je er gewoon een beetje belangstelling voor toont dan hoeft het helemaal niet zwaar te zijn. Maar je moet wel van te voren rekenachtergronden bezitten. Je moet een beetje met getallen overweg kunnen.

WB : *Als studenten gemotiveerd in dit derde jaar aan de wiskunde-spesialisatie beginnen, kunnen ze dan – onafhankelijk van hun vooropleiding – een eind op weg komen? Jullie hebben toch ook geen van allen – behalve Ada – een wiskundige achtergrond.*

Wim : Ik geloof dat die wiskunde die je vroeger op de havo geleerd hebt, stereometrie en zo, weinig van pas komt. Ik geloof dat daarom een hoop mensen afgeschrikt worden door het woord wiskunde.

eo : Daar heb ik andere ervaringen mee. Een heleboel jongelui begrijpen dit gewoon niet. Dat heeft niets te maken met die hbs. Op de hbs snapte ik er ook niets van, dus dan zou ik ook door het woord wiskunde afgeschrikt worden. Ik heb toen drieën en vieren op m'n rapport gehaald. Maar er zijn verschillende lui waarmee ik vorig jaar een tentamen heb voorbereid, die echt wel willen en ook de interesse hebben, maar die 't gewoon niet kunnen. Ook al leg je 't ze tien keer uit.

/B : *Hoe komt 't dan dat wiskunde zo'n slechte naam heeft?*

on : Ik zelf heb wiskunde gehad op de mulo en daar vond ik ook niet zoveel aan. Hier op school met die blokken kreeg je eigenlijk pas in de gaten dat 't ook op een leuke manier gegeven kan worden. Ik herinner me ook een tekenfilm die we bij muziek gehad hebben met een of andere Donald Duck. Die deed allemaal wiskundige truukjes, er kwamen allemaal dingen in voor die je vroeger al eens bij algebra had geleerd, maar nu in konkrete situaties. Toen dacht ik: waarom kan het niet op zo'n manier?

Pas was ik op een lagere school om een les te geven over kombinatoriek. Het hoofd had van te voren verteld aan de klas: 'er komt straks een mijnheer wiskunde geven'. Die klas interesseerde er zich op dat moment helemaal nog niet voor. Maar toen ze eenmaal bezig waren was 't helemaal geen wiskunde voor ze, maar gewoon iets grappigs. Het woord wiskunde stoot af.

B : *Kun je die wiskunde echt wel dichterbij het kind brengen?*

ucas: Ja, dat is mogelijk met die manier van Wiskobas, door dichterbij de werkelijkheid te beginnen, daarbij aan te sluiten. Op de mulo en op de havo zijn het allemaal abstrakte dingen.

da : Op de mulo gaat het nog echt op de oude manier, met vierkantsvergelijkingen en zo. Nu had ik een leraar die altijd kwaad was als je 't niet snapte. Hij legde 't één keer uit en daarna moest je het zelf maar uitzoeken. Ik had 't geluk dat ik 't altijd na die ene keer begreep, maar van de 25 leerlingen die we hadden waren er maar twee die ulo-b deden. Toen kwam ik daarna bij Van Eijsden en die vond ik altijd erg goed lesgeven.

Ton : Vrij veel scholen zijn toch overgestapt op de moderne wiskunde? Dan komt 't toch al een beetje uit de abstrakte sfeer, met konkrete tekeningen, verzamelingen, enzovoorts.

WB : *Is er nu wel een onderwijs in wiskunde mogelijk dat van binnenuit motiveert?*

Wim : Je moet uitgaan van de wereld van het kind. Toevallig heb ik gisteren in het Wiskobas-Bulletin dat optellen met die bus gelezen — voor de eerste klas —.

Ada : En met aftelversjes bijvoorbeeld. Zulke dingen gebruiken ze allemaal, maar ze weten nauwelijks wat er allemaal achter kan zitten. Als je er dieper op ingaat, blijk je daar een heleboel mee te kunnen doen. Net zoals die kermis die wij gedaan hebben. Dan kun je een heleboel uit de belevingswereld van de kinderen halen, waarmee je — met wat ombouw — veel wiskundige begrippen kunt bijbrengen.

WB : *Vertel eens wat over die kermis?*

Ada : 't Is een lessencyklus. We hebben een aantal lessen gemaakt voor een eerste klas. Er zou een kermis gesimuleerd worden met o.a. een rad van avontuur — dat was een achterwiel van een fiets — waaraan nummertjes zaten. Dit werd echt gespeeld met de kinderen. Ook ballen gooien. Van daaruit — na het een paar keer te doen met de kinderen — kon je over de kans gaan praten: bij het rad van avontuur een kans van 1 op 10 en bij ballen gooien heb je zelf de kans in handen, maar niet altijd een prijs. Bij touwtjetrekken heb je altijd een prijs. Zo hebben we verschillende dingen van kans gedaan.

Ton : 't Begrip kans vulling geven.

Ada : Daarna kon je echt kansberekening doen. Bijvoorbeeld met het rad van avontuur. Eerst hadden we in 't rad van avontuur tien even grote stukken. Daarna hebben we een 'vals' rad gemaakt: de helft met nummertjes 2, de andere helft was verdeeld in 1, 3 en 4. De kans op 2 was dus veel groter. En dan onderzoeken of de kinderen het door hebben.

WB : *Hebben jullie nog andere ervaringen opgedaan? Kunnen jullie ook iets vertellen over de reakties van de onderwijzers?*

Ton : Ja, ik kan wel iets vertellen over een ervaring die ik had met die kombinatoriek-lessen. 't Hoofd zat achterin, 't was zijn klas. Hij zei: 'Ja, ik vind 't wel leuk, 't hoort er wel een beetje bij. Dat moderne gedoe, dat doe je alleen maar als je op de kweekschool zit, ik zou er beslist niet meer mee beginnen; ten eerste je weet er zelf niets van en ... nou ja, 't staat niet in je metode'.
Erg vastgeroest! Ik vind dat bij veel onderwijzers zo.

Ada : Dat was in gouda?

Ton : Ja, maar je vindt het op zoveel scholen. De mensen draaien gewoon hun lesje af en volgend jaar doen ze precies hetzelfde.

Wim : Ik heb een iets andere ervaring. Ik heb op een jenaplanschool gezeten en daar heb ik een aantal dingen gedaan met het spijkerbord en met operaties in IN. En nadat ik dat gedaan had, nadat die 8 weken voorbij waren, heeft het hoofd gevraagd of ik na afloop van m'n studie woensdagsmiddags wilde komen om werkkaarten te maken, die dan een volgend jaar in de wiskundewerkhoek gebruikt zouden kunnen worden. Dat vond ik wel een leuke ervaring. Toch is de metode die ze gebruiken erg traditioneel.

Leo : Ja, ik heb ook op een school met het spijkerbord gewerkt. De eerste reaktie toen ik wilde beginnen, was: 'Nou ja, je bekijkt 't maar, je probeert 't maar, 't zal wel niets worden, we zullen je de beste 10 leerlingen geven die er bij het rekenen zijn.' Helemaal geen entoesiaste reakties. De kinderen hebben 't wèl enorm leuk gevonden.

Wim : Ik ben na jou op die school gekomen. Toen hadden ze 't dus gezien. Ze zeiden: 'Oh ja, dat zijn die spijkerborden, daar is al leuk mee gewerkt.' Da's ook zo met andere lessen die ik daar heb gegeven. Ik heb drie lessen gegeven over de kommutatieve en associatieve eigenschap met een dominospel en een kwartetspel en memory. Dat vonden ze erg leuk. Ook de onderwijzer was daar zeer entoesiast over.

Ton : Ja, ze vinden het allemaal erg leuk, maar ze zeggen: 'Dat doe je omdat je nog op school zit.' Misschien is dat ook wel zo. Ik weet niet of je volgend jaar, als je zelf voor de klas staat, nog zo entoesiast bent.

Wim : Ik heb ook nog een stel heroriënteringsmensen gesproken en die zeide
'Op je eigen school zit je vast aan
metode, maar voor individueel wer
bijvoorbeeld in de wiskunde-wer
hoek, is het goed bruikbaar.'
Kinderen kunnen iets, als ze 't ni
snappen, met een andere metode (b
voorbeeld met werkkaarten) to
gaan begrijpen.

Ada : Tijdens een sollicitatiegesprek op e
vrij moderne school met een tameli
jong hoofd vroegen ze: 'Wat heb
voor spesialisatie?' Ik zei toen: 'I
en dat'. Ze vroegen vervolgens waarc
ik wiskunde gekozen had. En to
vertelde ik over Wiskobas. Ik kre
toen de indruk dat het hoofd helema
niet wist dat Wiskobas bestond. I
inspekteur zat nog zo'n beetje
knikken van: 'Oh ja, daar heb ik to
wel eens iets van gehoord'.

WB : *Hebben jullie een idee wat een ond*
wijzer zou moeten kennen en kunn
om wiskunde-onderwijs te kunnen g
ven? Welke kennis en vaardighed
zijn nodig?

Sjef : Volgens mij moet je een goede acht
grond hebben. Die kun je door
blokken krijgen. Ook een ontzette
grote fantasie om die blokken
kunnen uitwerken via de realiteit v
de kinderen zelf. Een grote fantasie
dus erg belangrijk om te kunnen ov
dragen.

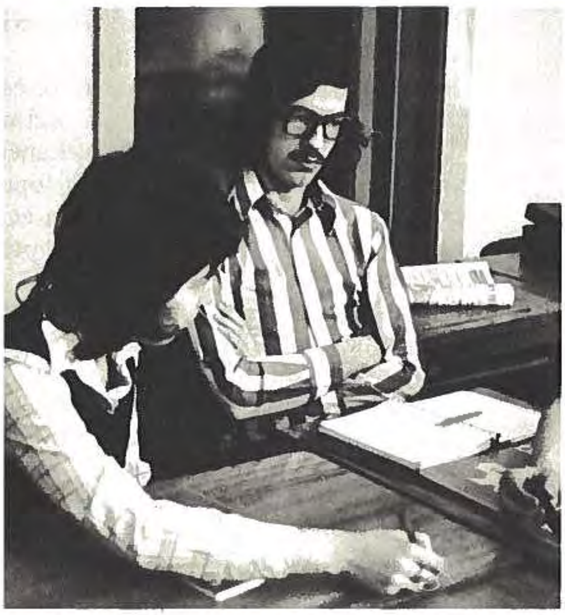
Ton : Die fantasie zie ik niet zo zitten. 't
wel leuk als je iets zou kunnen verz
nen, maar ik ga er vanuit dat ik z
nooit die dingen uit die blokken z
kunnen bedenken. Daarvoor heb
een wiskundige achtergrond nodig. A
je iets goed door hebt, dan kun je o
met leuke dingen komen. Meestal is
bij ons een gebrek aan achtergron
En of je nu die wiskundige acht
grond van de onderwijzer mag v
wachten, dat weet ik niet. Ik gelc
van niet; die achtergrond zou m
schien door een instelling als h
IOWO verzorgd moeten worden bij
onderwijzers.

Ada : Door metodes, dacht je? Zodat ze h
zo volgens het boekje kunnen doe

Ton : Nou ja, ze moeten niet helemaal g
bonden zijn. Een metode waar ze z
toch ook nog wel wat bij moet
bedenken. Laat ik het zo zeggen: als
zelf een leuke les wilt geven en
verzint wat, dan kom je op je een

toch niet zover. Dan komt de vakdocent kijken en die zegt: 'Joh, waarom doe je 't niet zo en zo?' Je krijgt een heleboel tips waarmee je een hele goede les had kunnen maken. Dat komt omdat die mensen een heleboel kennis bezitten, waardoor ze een lijn kunnen trekken naar allerlei konkrete situaties.

ıda : Volgens mij is dat ervaring. En die fantasie is misschien niet noodzakelijk, maar het is wel duvels makkelijk als je er de beschikking over hebt. Je kunt 't dan op verschillende manieren aanbieden.



eo : Ik geloof dat de interesse van de leerkracht 't belangrijkste is. Hij moet dat kunnen overbrengen op de kinderen. Als de leerkracht zelf geïnteresseerd is in de stof en 't leuk vindt om er mee te werken, dan kan hij 't ook overbrengen op de kinderen, dan gaan de kinderen 't ook leuk vinden. Als je iemand hebt die er zelf van loopt te balen, dan kun je niet verwachten dat de kinderen er ooit plezier in krijgen.

on : Je geeft niet één vak, maar wel een stuk of tien. Je kunt niet voor alle vakken gemotiveerd zijn. Je kunt ook niet voor alle vakken de vereiste kennis bezitten.

da : Ook al ben je nog zo gemotiveerd voor wiskunde. Ik ben er enorm voor gemotiveerd hoor. Ik vind 't hardstikke leuk, maar ik zie me later echt niet iedere week van die toestanden op touw zetten met kermissen en weet ik veel. Daar ga je aan kapot, daar word je doodmoe van.

Lucas: Nou ja, je bent nu nog in een beginfase. Als je nu iets wilt opzetten moet je 't allemaal zelf maken. Maar doe je dit een paar jaar, dan kun je 't herhalen.

Wim : Ik geloof ook dat een team van een school er achter moet staan. Wiskobas heeft 't goed gezien dat ze heroriënteringskursussen aan hele schoolteams geven.

Lucas: Je hoort ook van hoofden van scholen dat ze graag jonge leerkrachten hebben die pas van de PA komen. Die zitten nog vol energie en springen er met frisse moed in. Maar als ze 5 jaar in een school hebben gestaan, dan vinden ze 't allemaal wel best, ze gaan helemaal volgens de metode werken en zo, ze worden zeer traditioneel.
Als er dan één man op een heroriënteringskursus van Wiskobas zit ...

Wim : Dan zal die niet altijd zin hebben om steeds maar na te blijven, om alles in z'n eentje te maken.

WB : *Leo, een begrip als 'matematiseren', zegt jou dat iets?*

Leo : Ik dacht dat 't inhield vanuit de werkelijkheid te komen tot 't wiskundig maken van de problemen, 't in de wiskunde gaan verwerken van problemen uit de werkelijkheid.

WB : *Nu konkreet! Als je in de werkelijkheid van 't kind wilt beginnen en je moet naar de wiskunde toe — je kunt ook daar vraagtekens zetten, of je er inderdaad naar toe wilt, maar laten we dat voorlopig aannemen — hoe doè je dat dan?*

Wim : Ja, ik zit nu te denken aan de wegenproblemen. Van de ene stad naar de andere stad heb je twee wegen en naar de volgende stad drie wegen. De kinderen moeten dan vinden dat er 2 x 3 mogelijkheden zijn. Of als je eerder begint: 't rokjes- en bloesjes-probleem.

Ton : Of op de kleuterschool met muizen die door poortjes gaan. Dat is volgens mij erg belangrijk. Misschien is 't nog geen wiskunde, maar dan toch wel een voorbereiding.

Ada : Mozaïeken op de kleuterschool bijvoorbeeld, dat is al helemaal wiskunde.

Wim : 't Spijkerbord: 't aantal hokjes tellen, figuren maken, leren tellen, terwijl ze tòch bezig zijn met konkrete dingen.

Leo : En wat dacht je van de talloze kinderen die thuis samen met hun vader de kompetitiestanden en uitslagen van wedstrijden bijhouden? Zo'n rij maken: 't aantal gewonnen, verloren en gelijkgespeelde wedstrijden, enzovoorts.

Lucas: Volgens mij ben je dan al te ver weg. Je moet van de klas zèlf uitgaan. De problemen die zich in de klas voordoen, op dat moment. Een kind is volgens mij bezig in 't moment. Als ze bijvoorbeeld in een bepaalde groep gaan werken. Waarom? En de ordening van die groep. En waarom ze in deze klas zitten en waarom niet in die andere klas.

WB : *Als je nu in een school komt en men vraagt je 'waarom eigenlijk een vernieuwing van het rekenonderwijs?', wat antwoord je dan?*

Ada : Het is nodig om het rekenen op een andere, meer wiskundige manier te doen, omdat er op de traditionele manier zoveel kinderen uit de boot vallen.

Wim : Er worden op 't ogenblik dingen op de basisschool gedaan die irrelevant zijn voor het latere leven. Er worden breuken behandeld als $\frac{12}{83}$ en zo. Dan moet je je toch wel afvragen wat de kinderen daar later mee moeten.

Ton : Een groot nadeel is dat de kinderen veel ezelsbruggetjes aanleren, zonder enig inzicht, dat ze abstrakte regels moeten leren opdreunen. Hele klassen leren opdreunen: delen van een breuk is vermenigvuldigen met z'n omgekeerde. Als je zo'n zin uit z'n kontekst haalt, hou je iets absurds over. Ze weten helemaal niet wat ze aan 't doen zijn.

Ik geloof dat moderne wiskunde 't inzicht bevordert. De slechte naam die wiskunde nog heeft, kan dan een beetje verdwijnen.

Sjef : De kinderen moeten vaak ongemotiveerd sommetjes maken. De meesten hebben er ook weinig zin in en die zitten dan ook vaak te donderjagen. Ik zou liever willen aansluiten bij de belevingswereld van de kinderen, zodat ze zien dat ze met die wiskunde wat kunnen gaan doen in hun eigen wereldje.

Lucas: Het rekenen zoals dat nu op de basisschool wordt gegeven is vaak te abstrakt en sluit helemaal niet aan b de werkelijkheid van de kinderen. D wiskunde die Wiskobas naar vore brengt sluit daar veel beter op aan da de traditionele metoden.

John : Als je er van uit zou gaan wat c mensen die nu op de middelbai school zitten, van wiskunde onthoi den hebben uit de tijd dat ze op d basisschool zaten, dan zal blijken dž er niet zoveel is blijven hangen, dž het erg abstrakt was. Verder is oo duidelijk dat ze weinig gemotiveer waren. Er was weinig belangstellin voor. Geef je nu op een echt konkret manier wiskunde, dan zal de belan; stelling toenemen. Dan zouden er oo niet zo weinig kandidaten voor wi kunde in een klas als deze zijn.

Leo : Je moet de kinderen wel degelijk ee basiskennis geven. Ze moeten wel o de traditionele manier leren rekener zodat ze later niet spaak gaan lope met het verkeerd uitrekenen van eei voudige vermenigvuldigingen en opte lingen.

Daarnaast moet je de kinderen ve meer wijzen op akkuratesse, dat ze ei goed letten op wat ze doen, dat z niet slordig zijn. Ik geloof dat he wiskunde-onderwijs in z'n algemeer heid door de kinderen niet worc begrepen omdat ze door kleine rekei foutjes helemaal op 't verkeerde pur uitkomen. Wanneer je nu op ee andere manier wiskunde gaat geve bijvoorbeeld met die Wiskoba metode, dan zullen ze op wat mind punten spaak lopen met eenvoudig kleine berekeningen. Ze zijn dan bet gemotiveerd. Vanuit die motivatie zu len ze meer akkuraat zijn bij 't goe oplossen van iets, omdat ze me willen weten en meer willen doen m hetgeen ze geleerd hebben.

....

Kinderen moeten op een gegeven m ment toch echt wel de tafels van 1 t en met 20 kennen. Ze kunnen da eenvoudige berekeningen als 5 × 1 snel en goed uit het hoofd maken. D is tijdsbesparend!

Ada : Ik vind dat ze juist inzicht moete kunnen krijgen. Ze moeten kunne schatten hoeveel het antwoord ong veer zal zijn. Dat vind ik belangrijke Want als ze bijvoorbeeld rekenmach nes gebruiken kunnen ze fouten m ken — iets verkeerds aanslaan — d kunnen ze toch kontroleren in welke buurt het antwoord ongeveer moet liggen.

eo : Natuurlijk is dat belangrijk. Maar er blijft een ruimte waarbinnen je ook zonder die rekenmachines zèlf moet kunnen rekenen. Daarvoor moet de kennis worden aangebracht.

ohn : Ik vind toch niet dat je de tafels van 1 tot en met 20 zou moeten aanleren. Van 1 tot en met 10 vind ik genoeg. De andere bewerkingen kun je dan ook wel maken.

B : *Het Wiskobas-Bulletin: hoe lees je het? hoe waardeer je het? zijn er artikelen die je er uit licht, die je bij voorkeur leest?*

da : Tot nog toe heb ik er voornamelijk in gezocht naar dingen die ik voor m'n skriptie kon gebruiken. En verder als het ging om gesprekken met kinderen over een onderwerp dat me interesseerde. Die kunstdingen en artikelen waar ik geen aansluiting mee heb of waar ik nog nooit een blok over heb gehad, die sla ik domweg over.

im : M'n aandacht gaat voornamelijk uit naar het Variabel Blok, waarin meestal hele nieuwe zaken staan en waaruit ik onder andere de breuken — uit de eerste jaargang — gedaan heb als eigen onderwerp. Verder vind ik Problematika erg leuk en Skriptoteek en Kleuters en Wiskunde.
Ook de reakties in het Respons-Blok vind ik altijd wel aardig om te lezen.

on : Ik lees 'm alleen maar voor die onderwerpen die ik nodig heb, omdat het altijd een nogal uitgebreid tijdschrift is. Ik heb er de tijd niet voor om het helemaal te lezen. Soms het Respons-Blok om te kijken hoe anderen iets hebben aangepakt.

ef : Ik kijk ook vooral naar die onderwerpen die ik kan gebruiken. Verder vind ik dat er leuke ideetjes om lessen te geven in staan.

ucas: 't Is zeer bruikbaar als je er de tijd voor hebt. Ik lees echter alleen die dingetjes die ik nodig heb.

ohn : Ik vind het belangrijk voor de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs in de basisschool. Tot nu toe heb ik er niet zoveel in kunnen lezen, in verband met de tijd. Alleen dat wat belangrijk is voor de school. Ik hoop er na het eksamen wat meer in te kunnen kijken, omdat ik er toch wel veel belangstelling voor heb. Misschien zou er ook iets over natuurkunde in kunnen staan, want dat vak wordt in de basisschool erg verwaarloosd. Vanuit de natuurkunde kan de wiskunde heel makkelijk in de school worden gebracht. Veel konkreter, met proefjes en zo. De belangstelling van de kinderen hiervoor is erg groot.

Leo : Ik heb te weinig tijd om het helemaal te lezen. Ik pak er alleen datgene uit wat ik nodig heb.

Ongetwijfeld is er een fraaier gebouw te bedenken voor een pedagogische akademie dan aan de hofstedestraat — opgebroken en wel — in rotterdam staat. Zelfs al schijnt de zon op 4 april en krijgt het gedeelte van rotterdam tussen heemraadsingel en mathenesserbrug daardoor toch een heel eigen charme, de naam **kazerne** *— door de studenten aan hun gebouw gegeven — past goed. Maar dat is de buitenkant. Degenen die hier voor het onderwijs opgeleid worden krijgen zeker* **geen uniforme mentaliteit.** *Bovenstaand gesprek vormt hiervan een bewijs.*

4.3 investigation

In nummer 2 van deze jaargang introduseerden wij in de rubriek PROBLEMATIKA een biljart-probleem. Dit probleem speelde zich af op een 'normaal' biljart, bekend van kafé en tv. In engelse of amerikaanse films ziet u soms een ander soort biljart, waarbij in elke hoek een gat met zak zit, waarin de ballen moeten verdwijnen.
Van een kollega wiskunde-didaktiek, docerend aan de nottinghamse onderwijzersopleiding, ontvingen wij een werkstuk van een eerstejaars-studente, die onderzocht heeft in welke hoek van het biljart een bal terecht komt wanneer deze — zonder effekt — vanuit een bepaalde hoek wordt weggestoten en voortrolt over biljarts waarvan lengtes en breedtes variëren.
Onze nottinghamse kollega was nogal entoesiast over dit onderzoek inklusief de verslaggeving, en wij menen terecht. Sistematisch heeft onze jonge onderzoekster de verschillende mogelijkheden bekeken, ordeningen aangebracht, wetmatigheden ontdekt en vervolgens, met eenvoudige meetkundige middelen, deze wetmatigheden bewezen.

Wij drukken het verslag van dit onderzoek hier onverkort (en onvertaald) af, opdat u kennis kunt maken met een goed voorbeeld van wiskundige onderzoeksaktiviteiten in de engelse onderwijzersopleiding, maar ook met de heldere en beknopte verslaggeving ervan.
Eén wijziging is aangebracht: in het originele verslag zijn de hoekpunten met verschillende kleuren aangegeven. Omdat dit technische problemen gaf, hebben wij de hoekpunten met letters (A, B, C, ...) aangegeven.

JANE HOUGH

A rectangular billiard table m feet by n feet (where m and n are integers) has pockets only at the four corners. The ball is projected from a pocket at 45°. At a rebound the ball meets and leaves the cushion at the same angle.
Investigate for various values of m and n which pocket the ball will fall into and the number of bounces from the cushion. (Assume the ball always has sufficient speed to drop into a pocket.)

It became apparent when the path of the ball was traced in various sized rectangles that two different patterns were obtained. The rectangles were drawn on squared paper, as below where 1 foot = 6 cms. The two patterns that arose differed in the degree of complexing of the ball's path as in figure 1.

a) Where m and n do have no common factor the ball's path is complex with a relatively large number of bounces;
b) When m and n do have a common factor the ball's path is much shorter with relatively few bounces.

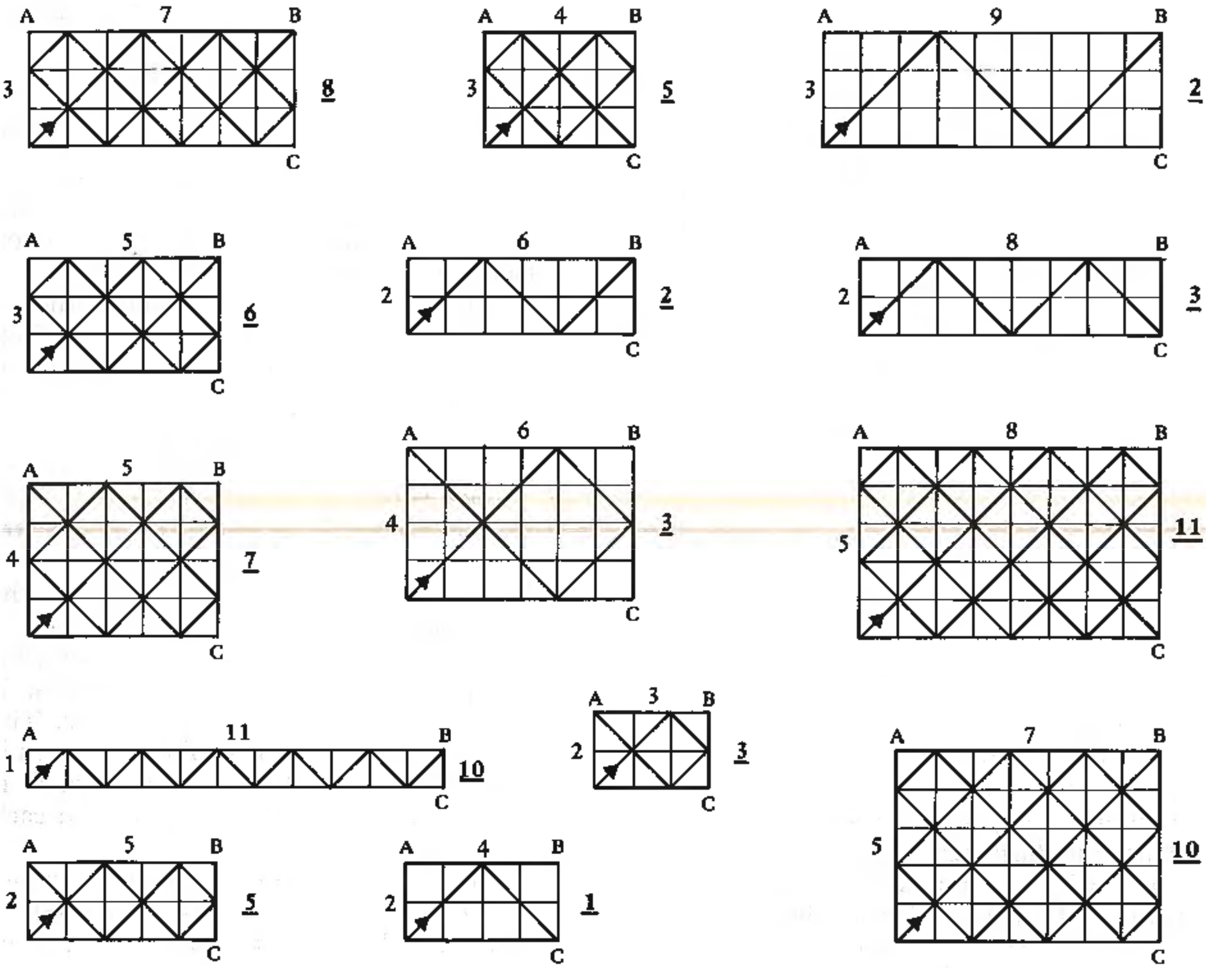
The simpler case when m and n have no common factor was considered first.

a These rectangles were grouped according to the pocket into which they fell and a pattern arose:

	A	B	C	
	4 x 4	3 x 7	3 x 4	
	2 x 3	3 x 5	5 x 8	
	2 x 5	1 x 11		
where		5 x 7		where
even < odd				even > odd
	even x *odd*	*odd* x *odd*	*odd* x *even*	

It was first noticed that dimensions where m and n are both odd and have no common factor the ball falls into the B-hole. When the dimensions of the rectangles where the ball fell into the other two holes were compared, it was realised that it was when the smallest side is even the ball falls into the A-hole and when it is odd the ball falls into the C-hole. (Rectangles whose dimensions are *even* x *even* have a common factor of 2.)
When the number of bounces was considered where m and n have no common factor the values of m and n in relation to the number of bounces were investigated, for example:

4 x 5 → 7	2 x 3 → 3	2 x 5 → 5
3 x 7 → 8	3 x 5 → 6	1 x 11 → 10
5 x 7 → 10	3 x 4 → 5	5 x 8 → 11



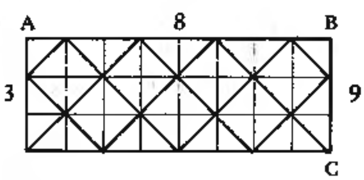
number of bounces

gure 1

By comparison of the numbers the following conjective was made:

$m + n - 2$

where m and n have no common factor.
This conjective was checked using the rectangle 3 x 8, where m = 8 and n = 3:

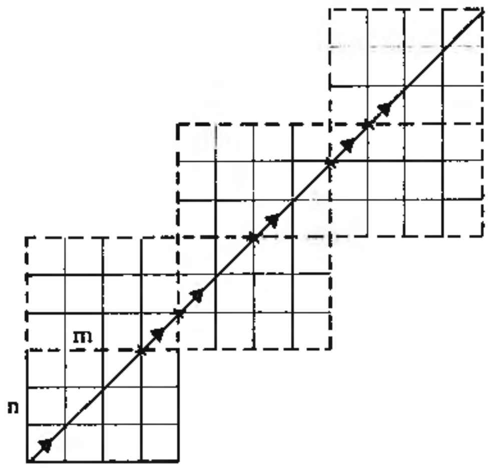


$m + n - 2 = 3 + 8 - 2 = 9.$

This particular rectangle fits the conjective but since not all rectangles can be investigated it must be proved more generally.
Every time the ball bounces, it changes its direction. The ball's path can be continued in a straight line if reflections of the rectangle are drawn. By tracing the path in this way the number of reflections that need to be drawn so that the ball falls into a pocket is equal to the number of bounces in reality. This is because every time the ball really bounces there is a need to correct the angle through which it travels where its path is projected in a straight line. Thus each bounce within the single rectangle corresponds to the crossing of the unidirectional ball's path from one rectangle to another.
Let m always be the length in feet of the horizontal side of the rectangle as it is drawn.
Let n always be the length in feet of the vertical side of the rectangle as it is drawn.

As the ball moves from pocket to pocket it crosses $(m - 1)$ horizontal rectangle sides and $(n - 1)$ vertical rectangle sides. Every time it crosses any one of these sides it passes into a new rectangle.

▶ *No. of rectangles passed through =*
$m - 1 + n - 1 = m + n - 2$



But no. rectangles passed through = no. bounces.

▶ *Number bounces = $m + n - 2$ (m and n have no common factor).*

b It was realised that those rectangles whose dimensions have a common factor can be said to be the highest common factor times larger than the corresponding rectangle with prime number dimensions.

When the diagrams of the rectangles 4 x 6 and 2 x 3 are compared it is seen that the path of the ball is identical in both cases. Thus the fact that one rectangle is twice the size of the other has no bearing on the number of bounces and pocket into which the ball falls. All rectangles whose dimensions have a common factor can be broken down in this way.

More generally: rectangles with dimensions m x n where 'a' is the highest common factor may be considered as a rectangle 'a' times bigger than the 'normal' rectangle: $\frac{m}{a} \times \frac{n}{a}$. ('Normal' is used to mean the rectangle whose dimensions are prime numbers.)

The pocket into which the ball drops follows the same rules as before, the odd and even values of $\frac{m}{a}$ and $\frac{n}{a}$ being the criteria governing which pocket it will be. (It is not possible to have a rectangle even x even because it can be broken down into a 'normal' rectangle by taking a common factor of at least 2.)

Since it is only the size of the 'normal' rectangle, as regards its dimensions, that accounts for the number of bounces that occur any rectangle m x n whose common factor is 'a' can be considered as a rectangle $\frac{m}{a} \times \frac{n}{a}$. Applying these dimensions to the formula for the number of bounces in a 'normal' rectangle the following result is obtained:

▶ *Number bounces = $\frac{m}{a} + \frac{n}{a} - 2$ (where 'a is common factor of m and n).*

For example:

in rectangle 4 x 6, let m = 6, n = 4, a = 2

no. bounces = $3 = \frac{6}{2} + \frac{4}{2} - 2 = \frac{m}{a} + \frac{n}{a} - 2$

This formula can also be said to apply t those rectangles with no common facto because in that case the highest commo factor can be said to be one.

When a ball is projected from one corner o a rectangular billiard table m feet x n feet where m and n are integers, at an angle o 45°, the pocket into which it falls i governed by the following rules:

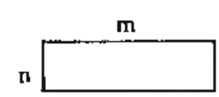
* $\frac{m}{a}$ and $\frac{n}{a}$ are odd, the ball falls in th B-pocket;
* $\frac{m}{a}$ is even and $\frac{n}{a}$ is odd and $\frac{m}{a} > \frac{n}{a}$, th ball falls in the C-pocket;
* $\frac{m}{a}$ is even and $\frac{n}{a}$ is odd and $\frac{m}{a} < \frac{n}{a}$, th ball falls in the C-pocket;
* it never falls in the pocket from which i is projected because in order to do so i must retrace some of its course. Th only way the course could be retraced i by bouncing out of a corner which i impossible since there is a pocket at eac corner.

  The number of bounces that occur be fore the ball falls into a pocket i $\frac{m}{a} + \frac{n}{a} - 2$, where 'a' is the H.C.F. of n and n which are dimensions.

This investigation can be extended further b introducing an extra pocket at the midpoin of each of the longer sides and considering it effect on the number of bounces and th pocket into which the ball will land.

In this consideration the positions of the tw extra pockets were visualised on the rectan gles already drawn and two lists were con structed contrasting the dimensions of th rectangles where these pockets were of no and some, consequence. When these tw pockets were of importance the old and ne pocket into which the ball falls were noted (Old and new are used to mean the pockets i the table of 4 or 6 pockets, respectively.)

dimensions unaffected by pockets P and Q	dimensions affected by pockets P and Q	(old) and new pockets
3 x 7	3 x 4	Q
3 x 5	[2 x 8] 2 (1 x 4)	Q
4 x 5	5 x 8	Q
1 x 11	[2 x 4] 2 (1 x 2)	P
2 x 5	3 x 8	Q
2 x 3		
5 x 7		
4 x 6		
2 x 6		
3 x 9		



key to pockets

The following points were noted from the results:

* larger sides of the rectangle must be even for the ball to fall in P or Q;
* whenever the 'old' pocket was C it now becomes P or Q;
* when the 'old' pocket was A or B it does not become P or Q.

If the larger sides of the rectangle are even then the incorporation of the extra pockets divides them into two integer halves. When the two sides are odd, the pockets divide them into two equal but rational parts. As the ball moves in the rectangle it is constantly forming isosceles triangles whose equal sides, formed by the sides, or parts of the sides, of the rectangle, must be of integer lengths. (See representation of ball's path in rectangles drawn on squared paper.)

Since the ball always meets the sides of the rectangle so that the side concerned is divided into two integer lengths, i.e. at bounces, pockets that are not at integer positions on the sides of the rectangle will not be approached by the ball. Thus when the longer sides of the rectangle are of odd lengths, extra pockets have no such effect on the number bounces or pocket used by the ball.

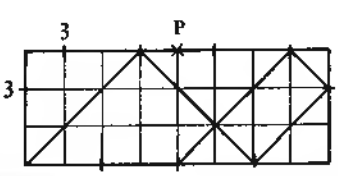
Pockets A and B are only used when the longer sides are odd thus, regardless of the presence of pockets P and Q, the ball will continue to land in those pockets.

When the 'old' pocket used was the C-pocket, the introduction of the two extra pockets always results in the 'new' pocket to be used, being either the P or Q pocket. This is because at some stage or other the ball would bounce on the midpoint of one of the longer sides. Which of the two pockets that the ball falls in, depends on the position of the midpoints of the longer sides in relation to the whole length of the perimeter of the rectangle. When the point of intersection of the ball's path with the perimeter of the rectangle are considered, it can be seen that they occur at 2 unit intervals along the perimeter in a clockwise direction starting at the pocket from which the ball is first projected.

Thus it is the pocket that is a marking place for the 2 unit intervals that the ball falls in.

Compare rectangles:

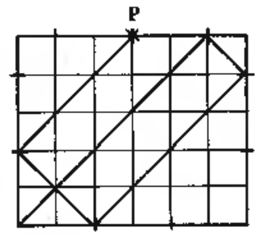
①



3 x 8

and

②



5 x 6

marks end of
2 unit interval

In ① pocket P becomes in between the 2 unit intervals.

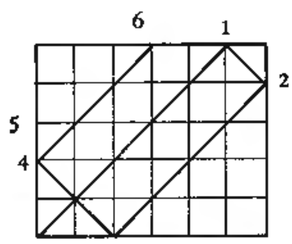
In ② the P pocket is at the end of a 2 unit interval and therefore the ball falls into it.

When the effects of the introduction of the 2 extra pockets were studied in terms of their effect on the number of bounces, a table was constructed for the relevant dimensions, the 'old' and the 'new' number of bounces:

dimensions	'new' number of bounces	'old' number of bounces
3 x 4	2	5
[2 x 8] 2 (1 x 4)	1	3
5 x 8	5	11
[2 x 4] 2 (1 x 2)	0	1
3 x 8	4	9
5 x 6	4	9

A reasonable conjecture, bearing in mind the number of bounces without pockets P and Q is: $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{a}-3\right)$.

This was checked, using rectangle 5 x 6: $m = 6$, $n = 5$, $a = 1$.



$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{a}-3\right) = \frac{1}{2}(6+5-3)$$
$$= \frac{1}{2}(8)$$
$$= 4.$$

This rectangle fits the conjecture.

When the number of bounces is changed due to the incorporation of these two extra pockets the ball lands in one of these pockets at the midway mark in its 'old' journey. The ball, therefore, loses one bounce due to the replacement of the mid-way bounce by falling into a pocket and the half of the bounces that occur after it.

Thus one must be deducted from the 'old' number of bounces to account for the entrance into the pocket:

$\frac{m}{a} + \frac{n}{a} - 2 \rightarrow \frac{m}{a} + \frac{n}{a} - 3.$

This number must now be halved to eliminate those bounces normally occuring after the mid-way mark.

▸ *'New' number of bounces: $(\frac{m}{a} + \frac{n}{a} - 3)\frac{1}{2}$.*

When one extra pocket is inserted at the midpoint of each of the longer rectangle's sides then the pocket into which the ball falls is governed by the following rules:

* if $\frac{m}{a} > \frac{n}{a}$ and $\frac{m}{a}$ is even the ball now falls in either the P or Q pocket;
* if the P-pocket lies at the end of a 2 unit interval on the perimeter of the rectangle starting from the pocket of projection it falls in it;
* if the Q-pocket lies at the end of a 2 unit interval on the perimeter of the rectangle starting from the pocket of projection it falls in it.

The number of bounces that occur before the ball lands in either the P or Q-pocket is $(\frac{m}{a} + \frac{n}{a} - 3)\frac{1}{2}$ where 'a' is the H.C.F. of m and n which are dimensions.

Achteraf nog één opmerking.
Wij – hollanders – vragen ons altijd af: wat neem je er van mee?

Konkreter gesteld: wat doe je met de resultaten van dit onderzoek in het onderwijs zelf?
Deze vraag heeft onze engelse onderzoekster zich niet gesteld en u vindt dan ook in het verslag geen antwoord.
Misschien is er een nederlandse student(e), die probeert tot een antwoord te komen door na te gaan op welke wijze dit biljart-onderzoek kan resulteren in een meetkunde-projektje voor de hogere klas van zijn (haar) oefen- of hospiteerschool.

4.4 waar gebeurd

JAN NIELAND

* *Hoe lang is het geleden?*
Dat moet geweest zijn in de zomer van 1952. Wiskobas was nog niet geboren. We moesten toen nog vijf jaar wachten op de eerste spoetnik aan de hemel, die de vernieuwing van het rekenonderwijs zou aankondigen.
Wat gebeurde er toen?
Nu ja, ik stond nog op de lagere school. Om precies te zijn, ik stond frontaal voor de klas, dus eigenlijk niet in de klas, als je begrijpt wat ik bedoel. De kinderen verveelden zich muisstil, ik ook, maar dan hardop.
Ik zei: 'Pak uit je geheugen een getal van drie verschillende cijfers.'
Ik schreef er zelf ook een op het bord: 149.
Ik zei: 'Verwissel de buitenste cijfers.'
Dat deden ze.
Ik ook: 941.
Ik zei: 'Trek de getallen van elkaar af.'
Op het bord kwam:

$$\begin{array}{r} 941 \\ \underline{149} \\ 792 \end{array} -$$

Ik zei: 'Als er nu een getal van twee cijfers uitkomt bij een van jullie, dan zet je een 0 voor dat getal.'
Er waren een paar die dat moesten doen.
Ik zei: 'Nu kunnen jullie uit de uitkomst allemaal een nieuw getal maken door de beide buitenste cijfers om te wisselen.'
Op het bord: 297.
Ik zei: 'Tel de beide laatste getallen op.'
Op het bord:

$$\begin{array}{rl} 941 & \text{(a)} \\ \underline{149} \; - & \text{(b)} \\ 792 & \text{(c)} \\ \underline{297} \; + & \text{(d)} \\ 1089 & \end{array}$$

De kinderen waren klaar. Ze keken naar het bord en dan verbaasd naar hun blaadje, naar de blaadjes van hun buren, ...
Wat toen?
Er kwam een enorme deining in de klas. Iedereen had er 1089 uit. En het grootste wonder heb ik pas later in de gaten gekregen: ik stond niet meer frontaal, als je begrijpt wat ik bedoel, maar meer er ín.
Is dat wáár gebeurd? Ja, echt waar gebeurd, vraag het ze maar eens.

* Bovenstaand verhaal heb ik, echt waar, uit mijn duim gezogen. Ik geloof dat ik deze rekenkundige vondst uit het boekje '*Volgens Bartjens*' heb.
Ik zocht toen een aantal originele opgaven voor de kweekschool in boekjes met ondertitels als:
'Hier naer volghen zommige ghenoughelijcke raedselen aenroerende den cijfer om eenighe ghezelschepen te verblijden.'
Deze vondst stond tussen erfenisverdelingen met en zonder tweelingen, geboren na de dood van de erflater en wel van zijn tweede vrouw, in.

* Maar hoe zit het nu met déze som?
Ik zou zeggen: geef hem eens op aan een zesde klas.
Laat zoveel mogelijk kinderen hun hele berekening op het bord zetten.
Ga nu samen kijken of je iets ziet.
De kinderen maken opmerkingen als:
— in de eerste uitkomst (c) staat altijd een 9
— als je bij (c) de buitenste cijfers optelt, krijg je ook 9.
Zonodig ga je nu sturen:
Schrijf alle getallen (c) en (d) eens in volgorde van grootte op je blaadje. Ze ontdekken de tafel van 99. Ze ontdekken ook, dat (c) en (d) samen altijd 11 maal 99 zijn. En $11 \times 99 = 1089$.
Meestal moet je nu stoppen, maar een hoogst enkele keer is het mogelijk om verder te gaan met de vraag: waarom zit (c) in de tafel van 99?
Dat zou als volgt kunnen gaan:

$$\begin{aligned} 941 &= 900 + 40 + 1 \\ &= 9 \times 99 + 9 + 40 + 1 \end{aligned}$$

Zo is ook:

$$149 = 100 + 40 + 9 = 1 \times 99 + 1 + 40 + 9.$$

En:

$$873 = 8 \times 99 + 8 + 70 + 3.$$

En:

$$265 = 2 \times 99 + 2 + 60 + 5.$$

U wijst op de drie cijfers, die telkens terug te vinden zijn in de drie resten. Bij het wisselen van 941 naar 149, blijven alle cijfers in het getal.
Als je nu aftrekt $941 - 149$ dan trek je eigenlijk van $9 \times 99 + 9 + 40 + 1$ af het getal $1 \times 99 + 9 + 40 + 1$. Met een beetje goede wil — volgens mij toch wel lastig voor de kinderen — zie je nu, dat bij het aftrekken de resten tegen elkaar wegvallen. Er blijft dus een 'zuiver' aantal keren 99 over.
Nogmaals: het eerste gedeelte is best te doen in klas 6, het tweede gedeelte is lastig. In dat tweede gedeelte staan wij trouwens ook weer grandioos te doceren.

* En nu ga ik zelf even doceren. Onze rekensom kan veel algemener gesteld worden. Je moet iedere keer twee blokjes getallen verwisselen, aftrekken, in de uitkomst weer verwisselen, optellen en je krijgt een voorspelbare uitkomst.

Ik neem als voorbeeld het telefoonnummer van het IOWO: **611611.**

Je mag bijvoorbeeld nemen:

- $\boxed{6}\,1\,1\,6\,1\,\boxed{1}$ en gaat verwisselen: $\boxed{1}\,1\,1\,6\,1\,\boxed{6}$. Nu trek je af.
  Aanvullen met nullen vooraan tot je zes cijfers hebt, is niet nodig, want de uitkomst bestaat al uit zes cijfers: 499.995. Je verwisselt nu in $\boxed{4}\,9\,9\,9\,9\,\boxed{5}$ weer de beide blokjes en telt op. Doe het maar met een ander getal van zes cijfers. Er komt telkens uit: 1.099.989.
- Je mag ook nemen $\boxed{61}\,16\,\boxed{11}$. Verwisselen: $\boxed{11}\,16\,\boxed{61}$, enzovoort.
  Er komt nu uit: 1.009.899 met welk getal van zes cijfers je ook begint, tenzij ...
- $\boxed{611}\boxed{611}$ en je gaat verwisselen: $\boxed{611}\boxed{611}$.
  Nu komt de aftrekking op 0 uit. Aanvullen en blokjes wisselen helpt ons aan de einduitkomst: 0. Hoe zit dat? Ja, dit is nu de enige moeilijkheid, die we tegenkomen. De blokjes mogen niet dezelfde getallen voorstellen. Daarom heb ik in het waar-gebeurd-verhaaltje drie verschillende cijfers genomen. (Ik had beter kunnen zeggen, dat de beide uiterste cijfers moeten verschillen, maar dan klinkt het verhaal niet zo goed!)

Even een konkreet voorbeeld met uitleg: we nemen een getal van zes cijfers en blokjes van drie cijfers:

$$
\begin{array}{lll}
936428 & = 936 \times 999 + 936 + 428 & \\
\underline{428936} & = 428 \times 999 + 428 + 936 & - \\
507492 & = (936 - 428) \times 999 = & \\
 & (936 - 428 - 1) \times 1000 + (1428 - 936) & \\
\underline{492507} & = (1428 - 936) \times 1000 + (936 - 428 - 1) & + \\
999999 & = 999 \times 1000 + 999. &
\end{array}
$$

- Een ander voorbeeld van vier cijfers en blokjes van twee cijfers:

$$
\begin{array}{lll}
4845 & = 48 \times 99 + 48 + 45 & \\
\underline{4548} & = 45 \times 99 + 45 + 48 & - \\
0297 & = (48 - 45 - 1) \times 100 + (100 + 35 - 48) & \\
\underline{9702} & = (100 + 35 - 48) \times 100 + (48 - 35 - 1) & + \\
9999 & = (100 - 1) \times 100 + (100 - 1). &
\end{array}
$$

- Nu algemener met het getal $A \times 10^{k+l} + A \times 10^{k+l} + B \times 10^k + C$.
  Hierbij zijn A en C getallen van k cijfers, B is een getal van l cijfers.
  Verder is $A > C$.

$$
\begin{array}{llll}
A \times 10^{k+l} & + \; B \times 10^k & + \; C & \\
\underline{C \times 10^{k+l}} & \underline{+ \; B \times 10^k} & \underline{+ \; A} & - \\
(A-C-1) \times 10^{k+l} & + \; (10^{k+l} - 10^k) & + \; (10^k - A + C) & \\
\underline{(10^k - A + C) \times 10^{k+l}} & \underline{+ \; (10^{k+l} - 10^k)} & \underline{+ \; (A - C - 1)} & + \\
(10^k - 1) \times 10^{k+l} & + \; 2(10^{k+l} - 10^k) & + \; (10^k - 1). &
\end{array}
$$

En hier zijn we dan bij een einduitkomst, die niets meer heeft uit te staan met de grootte van A en C, alleen met de lengte k van de blokjes en de lengte l van het tussenstuk B.
De aardigheid is er nu wel een beetje af, maar het is wel waar (gebeurd)!

- Rest me nog te vertellen, dat het ook mogelijk is om met verschillende eenheden te werken. Mijn kapper, die me altijd onderhoudt over het kommunistisch gevaar en over de laatste 'encyklopedie' van de paus, heeft een huishoudboekje uit de vorige eeuw, waarin aparte kolommen staan voor guldens, stuivers en centen. Onder een bepaalde voorwaarde kun je nu het aantal guldens als linker blokje nemen en het aantal centen als rechter blokje. Die voorwaarde is: neem een bedrag dat kleiner is dan *f* 6,–.
  Je kunt ook met uren, minuten en sekonden werken en met pond, shilling en pence.

Ik heb dit artikeltje zo opgesteld, dat er een blokje wis, een stukje ko en een blokje bas in zit. En voor bas zit er nog de volgende mogelijkheid in met getallen van twee cijfers, blokjes van één cijfer en vaste einduitkomst 99, bijvoorbeeld:

$$
\begin{array}{llll}
74 & = 7 \times 9 + 7 + 4 & & \\
\underline{47} & = 4 \times 9 + 4 + 7 & & - \\
27 & = 3 \times 9 & = 2 \times 10 + 7 & (c) \\
\underline{72} & & = 7 \times 10 + 2 & (d) \; + \\
99 & & = 9 \times 10 + 9. &
\end{array}
$$

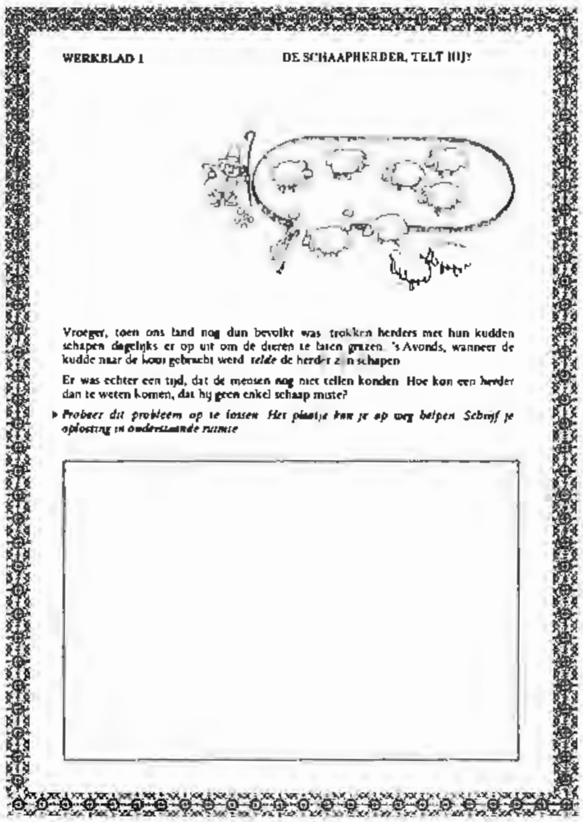
Ook hier kunnen de kinderen zelf vinden dat (c) en (d) in de tafel van 9 zitten, dat de einduitkomst 11×9 is, maar daarna wordt het weer moeilijk.

4.5 de tijdmachine

Nevenstaande reaktie op 'De Tijdmachine'[1]) ontvingen we van S. Huitema en C.A. van der Klis – medewerkers van de schooladviesdienst te arnhem en leden van de regionale wiskobaswerkgroep.

S. HUITEMA
C.A. VAN DER KLIS

De lessen werden gegeven in twee vijfde klassen van 'gewone' basisscholen, waar men weinig werkt met werkvormen in groepen.
Voor deze gelegenheid werden de klassen, elk van ongeveer 30 leerlingen, door de leerkracht in groepjes verdeeld. Hierbij werden die kinderen bij elkaar gezet die het goed met elkaar konden vinden.
Er werden drie lessen gegeven met de gepubliseerde werkbladen en daarna nog een les met zelfgemaakte werkbladen (zie verder).
Les 1 ging over blad 1, 2 en 3; les 2 over blad 4 en 5; les 3 over blad 6 en 7; les 4 over blad 8 en 9.
Hieronder enkele ervaringen bij de diverse werkbladen.


WERKBLAD 1 DE SCHAAPHERDER, TELT HIJ?

Vroeger, toen ons land nog dun bevolkt was trokken herders met hun kudden schapen dagelijks er op uit om de dieren te laten grazen. 's Avonds, wanneer de kudde naar de kooi gebracht werd *telde* de herder zijn schapen

Er was echter een tijd, dat de mensen nog niet tellen konden Hoe kon een herder dan te weten komen, dat hij geen enkel schaap miste?

▸ *Probeer dit probleem op te lossen Het plaatje kan je op weg helpen Schrijf je oplossing in onderstaande ruimte*

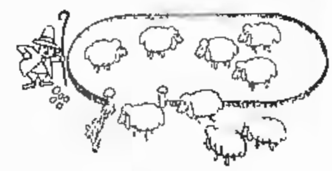
werkblad 1

Dit werkblad werd ingeleid met een klassegesprekje, waarbij zaken als getalsimbolen, getalnamen en notatiesistemen aan de orde kwamen.
Bij de vraag waarom mensen zouden zijn gaan tellen bleken de meeste leerlingen onvoldoende begrip te hebben van de primitieve tijden. Verder gaf het blad geen problemen.

[1]) Zie: Wiskobas-Bulletin, jaargang 3 no. 1, pag. 70 e.v.

WERKBLAD 2

WERKBLAD 3 **DE SCHAAPHERDER TELT OPNIEUW**



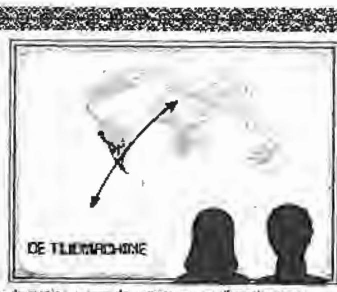
In werkblad 1 (over de schaapherder) hebben jullie gezien, dat hij steentjes gebruikte om na te gaan of er geen schaap aan zijn kudde ontbrak
Alleen, deze herder had een nogal flinke kudde, die zich nog voortdurend uitbreidde ook. De grote hoop steentjes, die hij steeds nodig had begon hem te vervelen, ook al omdat hij ze moest meeslepen, als hij besloot in een andere schaapskooi te overnachten

Hij gebruikte daarom voortaan zijn vingers
10 stenen
1 grote steen

► *Hoe ging deze herder in 't vervolg zijn schapen tellen?*
Tot welk aantal kon hij op die manier komen?
Maak een kort verslagje

WERKBLAD 4

HOE DE EGYPTENAREN REKENDEN



We gaan eens kijken naar de manier, waarop de egyptenaren getallen schreven en hoe ze er mee rekenden.
Dat is lang geleden, zeg!

① Hoe lang is het ongeveer geleden? (Je kunt het aflezen op de 'tijdmachine-kaart').

Ongeveer ______ jaar.

Voor de getallen 1 tot en met 9 gebruikten ze streepjes.
Voor tien, honderd, duizend, enz. hadden zij andere tekens. Kijk maar:

∩ (tien) boog — C (honderd) krul — ⚘ (duizend) lotusbloem

Zo schrijven wij CC∩∩∩|||| als 234.
De volgorde van de tekens was niet belangrijk
Dus ook ||||∩∩∩ƆƆ betekent 234.

② Zie je nog een ander verschil behalve de volgorde? Schrijf maar op:

③ Is de volgorde in ons getallenschrift belangrijk?
Schrijf ook op waarom?

④ Vul de volgende tabel verder in.

CC∩∩∩||||||	2 × 100 + 3 × 10 + 6 × 1	236
CCC∩|||||||		
		342
∩∩∩∩∩|||		
		89
		204
		2030

WERKBLAD 5

Zo, dan zullen we nu eens gaan kijken hoe ze rekenden

Optellen ging als volgt, bijvoorbeeld 128 + 316 =

C∩∩||||||||
CCC ∩||||||
CCCC∩∩∩|||||||||||||| of <u>CCCC∩∩∩∩||||</u>

① Hoe kregen ze het onderstreepte antwoord uit het antwoord daarvoor?

Als ze het verschil moesten vinden van bijvoorbeeld 218 en 96 deden ze dit zó: kijk hoeveel er nog bij 96 moet om 218 te krijgen.

② Probeer jij dat eens met egyptische tekens.

Vermenigvuldigen deden ze zó
dit is het voorbeeld van 12 × 12

	|| ∩	|	1	12	
	|||| ∩∩	||	2	24	
	|||||||| ∩∩∩∩	||||	4	48	
||||∩∩∩∩ Ɔ 𓏞	|||||| ∩∩∩∩∩∩∩∩∩	||||||||	8	96	som 144

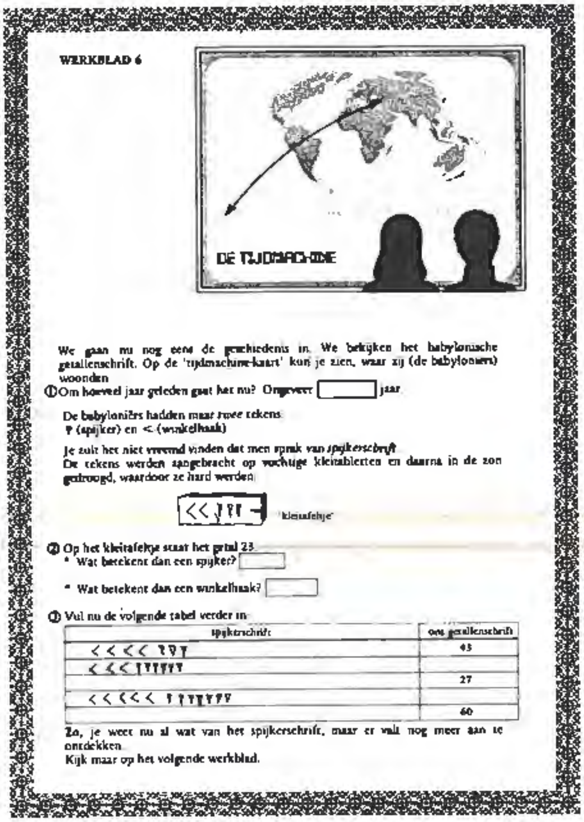
Links van het tekentje 𓏞 (teken van de boekrol) staat het antwoord

③ Kijk nauwkeurig het voorbeeld na en probeer te vertellen wat de egyptenaren precies deden om 12 × 12 te vinden

④ Probeer op die manier (zonder egyptische tekens) 23 × 25 eens uit te tekenen (een begin is al gemaakt)

1 × 25 25
2 × 25 50
4 ×

Hoe de egyptenaren deelden, zullen we in de les eens bekijken



WERKBLAD 6

We gaan nu nog eens de geschiedenis in. We bekijken het babylonische getallenschrift. Op de 'tijdmachine-kaart' kun je zien, waar zij (de babyloniërs) woonden.

① Om hoeveel jaar geleden gaat het nu? Ongeveer ☐ jaar.

De babyloniërs hadden maar twee tekens:
𒁹 (spijker) en < (winkelhaak)

Je zult het niet vreemd vinden dat men sprak van *spijkerschrift*.
De tekens werden aangebracht op vochtige kleitabletten en daarna in de zon gedroogd, waardoor ze hard werden.

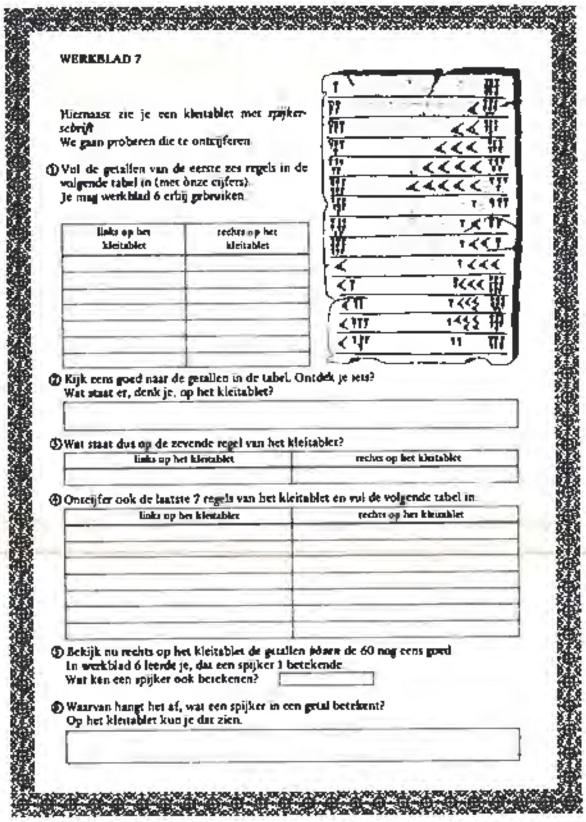
'kleitafeltje'

② Op het kleitafeltje staat het getal 23.
* Wat betekent dan een spijker? ☐
* Wat betekent dan een winkelhaak? ☐

③ Vul nu de volgende tabel verder in.

spijkerschrift	ons getallenschrift
< < < < 𒁹𒁹𒁹	43
< < < 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	
	27
< < < < < 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹	
	60

Zo, je weet nu al wat van het spijkerschrift, maar er valt nog meer aan te ontdekken.
Kijk maar op het volgende werkblad.



WERKBLAD 7

Hiernaast zie je een kleitablet met *spijkerschrift*.
We gaan proberen die te ontcijferen.

① Vul de getallen van de eerste zes regels in de volgende tabel in (met ònze cijfers).
Je mag werkblad 6 erbij gebruiken.

links op het kleitablet	rechts op het kleitablet

② Kijk eens goed naar de getallen in de tabel. Ontdek je iets?
Wat staat er, denk je, op het kleitablet?

③ Wat staat dus op de zevende regel van het kleitablet?

links op het kleitablet	rechts op het kleitablet

④ Ontcijfer ook de laatste 7 regels van het kleitablet en vul de volgende tabel in.

links op het kleitablet	rechts op het kleitablet

⑤ Bekijk nu rechts op het kleitablet de getallen bòven de 60 nog eens goed.
In werkblad 6 leerde je, dat een spijker 1 betekende.
Wat kan een spijker ook betekenen? ☐

⑥ Waarvan hangt het af, wat een spijker in een getal betekent?
Op het kleitablet kun je dat zien.

De tekening gaf een duidelijke hint waar de oplossing gezocht moest worden.
Als alternatieve oplossingen kwamen naar voren: de schapen merken, namen geven, een herder kent zijn schapen.
Sommige kinderen merkten op dat de steentjesmetode wel steeds hetzelfde aantal schapen voorstelde, maar niet of de herder onderweg een schaap was kwijtgeraakt en er tevens een lammetje was geboren.
Het zelf bedenken van 1–1 verbindingen verliep nogal moeizaam. (tafel-stoel, vork-mes)

werkblad 2
Verschillende telwijzen werden gebruikt:
- bloempje doorstrepen, turfje zetten
- vijf bloempjes doorstrepen, vijfmaal turven
- eerst kringen maken om vijf bloempjes, daarna kringen tellen
- alle losse bloempjes tellen (niemand kwam tot het goede aantal)
- vijf bloempjes doorstrepen, eenmaal turven.

In het afsluitend klassegesprek werd nagegaan welke van de gebruikte manieren de handigste was.

werkblad 3
Dit blad werd zonder voorafgaande toelichting gegeven. Slechts een enkele groep vond zelf de oplossing. De meeste groepen hadden duidelijk een zetje nodig, daarna ging het ook bij hen beter.
Oorzaken van het niet-zelf-vinden kunnen zijn:
- de tekening suggereert nog steeds een klein aantal schapen, zodat je aan de tien steentjes genoeg hebt, die je dan òp de grote steen zou kunnen leggen,
- de tien steentjes en de ene grote steen wilden de kinderen kombineren, de vingers pasten daar niet bij (vreemd element?).

Toen we na wat trekken zover waren dat je tien vingers kon inwisselen tegen een steentje was het probleem snel opgelost. Iedereen wisselde vlot in.
Als maksimaal aantal schapen werd 210 genoemd. Niemand noemde 199. Het inwisselidee werd naderhand nog met de abakus gedemonstreerd.

werkblad 4 en 5
Deze bladen leverden weinig moeite op en

werden door de groepen vrijwel zelfstandig verwerkt.
Tijdens de nabespreking kwamen de volgende zaken naar voren:
4.1: afronden,
4.2 en 4.3: tegenstelling positiestelsel/het gebruik van een hoop verschillende tekens, de funktie van de 0,
5.2: het verdubbelen vonden de kinderen erg leuk.
Eén voorbeeld was veel te weinig en er werden dus nog enkele voorbeelden ekstra gegeven.
Welke produkten moet je hebben om de hele tafel te kunnen afleiden?
Een kind merkte op: 'Egyptenaren hoefden dus alleen maar te kunnen optellen.'

werkblad 6 en 7
Over blad 6 is weinig spesiaals te vertellen.
De kleitablet van blad 7 werd snel herkend als de tafel van 9 (en de tafel van 11!).
Het ontdekken van het simbool voor 60 vroeg voor bijna allemaal wat meer begeleiding dan alleen het afwerken der vragen 3 tot en met 6.
Een kind merkte op dat het met deze schrijfwijze wel lastig was om het verschil aan te geven tussen 3 en 180.

Inskriptie op de Columna Rostrata
bevattende o.m. 20 tekens voor 100.000. De zuil werd in Rome opgericht om de overwinning op de Karthagers (260 voor Christus) te herdenken.

ten slotte
Er werd door alle kinderen met veel anim[...] gewerkt. Het onderwerp en het wereldoriënte[...]rend karakter der bladen werd duidelijk ge[...]waardeerd.
Als groepswerkbevorderende aktiviteit kun[...]nen deze bladen zeer goed worden gebruikt[...] Was het in het begin nog vaak een solistisc[...] zoeken naar oplossingen, zeer spoedig ont[...]stond er een overlegsituatie.
In de klassen bleek het werken in groepen z[...] goed aan te slaan bij de leerlingen en d[...] leerkracht dat deze werkvorm nu ook vake[...] zal worden toegepast.
De leerlingen bleken door de werkbladen duidelijk gemotiveerd.
Het bespreken van gevolgde strategieën, het komen met verschillende oplossingen, het elkaar overtuigen van de juistheid van de gevonden oplossingen waren zeer waardevolle elementen.
Het alleen maar laten maken van de werkbladen zou dan ook een ernstige verarming van de leersituatie betekenen.

enige kritische opmerkingen
- Het verband tussen de probleemstelling op de bladen 1, 2 en 3 en de probleempjes op de bladen 4 tot en met 7 kwam bij de leerlingen niet zo over. Wellicht speelde hier het verschil in belevingswereld van de diverse bladen een rol.
- De smalle antwoordbalken van de bladen 4 tot en met 7 bleken voor de antwoorden van de kinderen wat te beperkt.
- Naar ons gevoel moest er na de duik in de geschiedenis nog een overstapje worden gemaakt naar het heden. Vandaar dat wij nog twee werkbladen hebben toegevoegd waarop getracht wordt het steentjesprobleem en het positieaspekt in ons eigen rekenen een plaats te geven.
  Het laatste kwam met onze werkbladen bij de kinderen wel over, het inwisselen lukte minder. Bij optellen ging het nog wel, bij aftrekken was het duidelijk minder. De kinderen zitten in klas 5 ook al erg vast aan de techniekjes die je bij optellen en aftrekken gebruikt, en komen daar moeilijk van los.

WERKBLAD 8

TERUG NAAR ONZE TIJD

(1) Kijk eens goed naar de getallen

2584 en 4852

In beide getallen gebruiken we de cijfers:

Zijn dit nu ook dezelfde getallen?

Vul de volgende lijstjes eens in:

	in 2584	in 4852
de 2 is waard		
de 4 is waard		
de 5 is waard		
de 8 is waard		

(2) Een cijfer heeft dus niet altijd dezelfde waarde. Waar hangt het van af wat het cijfer waard is?

Dit hangt af van de

Zet de getallen in de goede hokjes:

	d	h	t	e
2584				
4852				
743				
2070				

d = duizendtallen / h = honderdtallen / t = tientallen / e = eenheden

(3) Tel op:

d	h	t	e	
	6	2	8	
5	3	7	2	+

Bij deze optelling gebeurt iets vreemds.

Elke keer als we 10 eenheden hebben, wisselen we die in voor 1
(denk nog eens aan de schaapherder!).

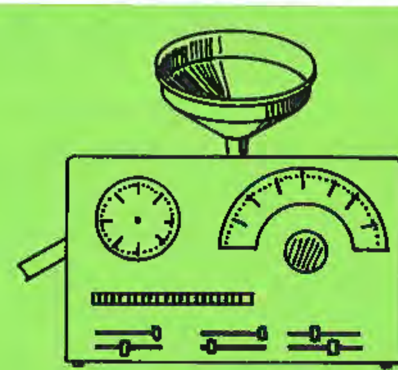
10 tientallen wisselen we in voor 1

10 honderdtallen wisselen we in voor 1

Let hier nog eens op bij de volgende optelling:

d	h	t	e	
7	3	8	5	
1	7	3	6	+

WERKBLAD 9



① We gaan aftrekken

d	h	t	e	
	4	6	5	
	2	7	6	–

Denk nu nog eens aan de optellingen die je hiervoor gedaan hebt.
Daar gingen we inwisselen.
Gebeurt er bij onze aftrekking nu ook zoiets?
Probeer met elkaar eens te bedenken wat er precies gebeurt.
Probeer het ook nog eens met de volgende aftrekking:

d	h	t	e	
6	4	3	5	
2	4	4	6	–

Schrijf hieronder op wat je ontdekt hebt.

⑤ Men zegt wel eens dat wij rekenen in het TIENTALLIG STELSEL.
Zou je kunnen zeggen waarom we dit zo noemen?

4.6 noordwijker hout '74

Het zal u niet onbekend zijn dat eind maart '74 een belangrijke wiskobas-konferentie in noordwijkerhout heeft plaatsgehad. Louis Gilissen heeft hiervoor in het eerste nummer van deze jaargang (pag. 18) al aandacht gevraagd.
Deelnemers aan deze konferentie waren: docenten wiskunde-didaktiek en pedagogiek aan pedagogische akademies (PA), docenten metodiek en pedagogiek aan opleidingsscholen voor kleuterleidsters (KLOS) en onderwijskundige medewerkers van schooladviesdiensten (SAD).
Een heet-van-de-naald-reaktie van kollega douwe terpstra uit almelo lijkt ons – gezien het door hem gesignaleerde – van belang voor een grotere lezersgroep dan waarvoor hij het oorspronkelijk schreef (de 'IOWO-getuigen').
In de volgende 'Berichten uit het binnenland' zal uitgebreid op de inhoud van deze reaktie worden ingegaan.

DOUWE TERPSTRA

Aan hen die van goede wil zijn

Beste IOWO-getuigen,

Even tussen het opstellen van naar-waarheid-ingevulde belastingbiljetten en gezagsgetrouwe bezwaarschriften door.
Ik schrijf niet graag, maar voel op dit moment – een dag na de (ont)redd(er)ing uit de 'Leeuwenkuil' – een korte doch hevige behoefte voor deze ene keer nog even na te mijmeren over onze
$\boxed{\text{KLOS – PA – SADe}}$.
Waarschijnlijk trap ik een open deur in, omdat jullie het toch al lang door hebben, maar misschien vind je het niet (te) erg om te ervaren, dat er in het veld toch minstens iemand is, die in de gaten krijgt, dat jullie dàn en alléén dàn op de goede weg zijn.
Die 'goede weg' dus.
Mijn interesse ging ditmaal in het bizonder uit naar de hofmakerij van het rationeel-agressieve wisko-mannetje naar het intuitief-receptieve kleuter-vrouwtje.
Misschien omdat ik zelf gedurende een 12-tal jaren wat lessen heb gegeven aan een KLOS, misschien ook doordat ik de laatste tijd wat betrokken raak op die andere integratie, namelijk van 4-12-jarigen.
Zeker is dat enkele gesprekken met KLOS-seressen(?), wat meedoen in een KLOS-groepje, een gesprekje met Jan Nieland over de spoedige uitgave van boek 1 van het herziene 'Denken en Rekenen' (naar ik meen?) en niet minder de 'vondst' van prof. Freudenthal, dat allemaal samen een smeulend idee nogal aangewakkerd heeft.
Zit ik fout in het volgende, dan hoor ik het wel – en graag!
Wat wiskobas wil, wordt in het kleuteronderwijs al lang gedaan. Zo zie ik het ten minste.
Zij doen ..... wat *wij* willen.
Alléén ......

wij *weten* niet (of nauwelijks) wat zij doen
en zij *weten* niet (of nauwelijks) wat wij willen.

En toch ligt hier nu precies het ontmoetingspunt.
Bovendien is daarmee mijns inziens onze strategie gegeven. En de volgorde!
In de heroriënterings-blokken is voortdurend sprake van 'aktiviteiten als doelstellingen'.
Wel, in de kleuterschool liggen die aktiviteiten voor het oprapen.
Daarom moeten *wij* – geloof ik – niet beginnen met te praten, laat staan met te doceren en instrueren, maar met te *luisteren!*
Laat ze maar eens alles vertellen wat ze zoal doen. En wij maar *kijken* ..... met beproefde wisko-blik!!!

Het eerste wat jullie mijns inziens zouden moeten doen is dan: ORDENEN! (las ik niet ergens dat dit een prachtige matematiserende bezigheid is?) Daarbij zullen jullie wel een *raamwerk* weten te vinden waarbinnen deze ordening een plaats krijgt.
Als wij zó ver zijn, moeten *zij* er van op de hoogte gebracht worden wàt er geordend kan worden en hòe.
In het groepje waar ik een poosje mee samenwerkte viel me op dat matematiseren vrijwel onmiddellijk en uitsluitend betrokken werd op het *getal.* Toen ik een paar andere ordeningsprincipes liet vallen, zaten ze meteen op het spoor en kwamen ruimte, tijd, grootte, kleur, vorm, ritme(!) e.a. te voorschijn. Vooral in dat 'ritme' zitten misschien levens-echte mogelijkheden!
Veel spelletjes en materialen worden gebruikt met een spesifiek doel: oefening van het waarnemen, de motoriek, de taal,.... Naar mijn stellige overtuiging is er onder de bedrijven door een sterk matematiseringsproces aan de gang. Alleen ... dat wordt veelal niet onderkend. Daarvoor moeten jullie vermoedelijk hun ogen openen.
Want nu ontstaat het gevaar dat goed bedoelde integratie-eksperimenten (kleuteronderwijs-basisonderwijs) ontaarden in het aanleren van begrippen onder de titel: *voorbereidend rekenen!* Er zijn — maar dat zullen jullie beter weten dan ik — van dat soort eksperimenten aan de gang.
Wat al ordeningsmogelijkheden: met blokken bouwen in 3 dimensies, de 'gaven' van Fröbel, mozaïekwerk, matjes vlechten, kralen rijgen, geometrisch knippen, symmetrisch knip- en scheurwerk, kleurenkombinaties, rubriseer- en sorteeroefeningen (naar het leven!), werken met lotto's, zangspelletjes en gymnastiek (ritme!), enz.
En dan — ook — tenslotte (?) de gerichte ordening naar tijd, hoeveelheid, rang, en ga maar door ....
Kortom: bij de kleuter gaat de wereld (voor ons?) open ....!!!

't Waren wat losse gedachten.
Maar wel gemeende!
Wellicht overbodig.
Gooi ze dan maar in de prullemand.
Ik heb toch een doorslag.

ALS DE KLEUTER MAAR NIET DE KLOS IS !!!

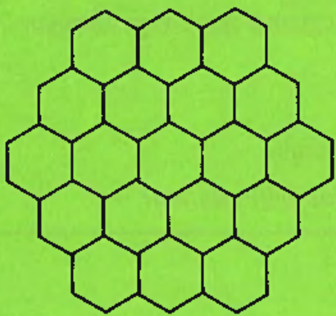
Dat was het,
w.g. douwe.

4.7 nog eens de PTT

G.W.J. VAN DE MOLENGRAAF

De volgende variant op de publikatie *'Een mooie, rooie bus'* [1]) werd ons ingegeven na het zien van een amerikaanse uitgave voor aanvankelijk aardrijkskunde-onderwijs. [2])

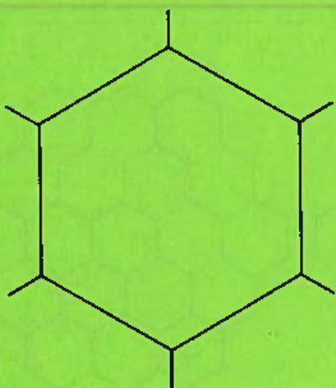
①



Hiernaast zie je de plattegrond van een stad. We noemen de stad voor het gemak maar *'honingraat'*.
Deze stad heeft meerdere wijken.
Iedere wijk wordt voorgesteld door een zeshoek.

▸ ***Hoeveel wijken kun je uittellen in deze stad?***

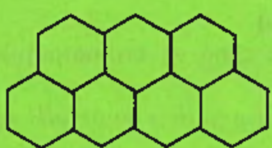
②



In iedere wijk ligt in het centrum een plein.
Dit plein valt samen met het middelpunt van de zeshoek.
Hiernaast is een stadswijk van honingraat vergroot getekend.

▸ ***Teken de plaats van het plein in deze wijk.***

③

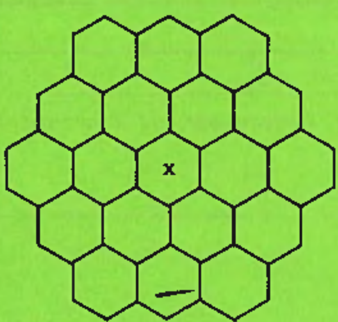


De hoofdverbindingswegen tussen de verschillende wijken lopen van plein tot plein.

▸ ***Teken in het stadsplangedeelte hiernaast de verschillende hoofdverbindingswegen.***

Willen we weten hoever twee wijken uit elkaar liggen, dan tellen we de afstanden van plein tot plein langs de hoofdverkeerswegen.
We proberen natuurlijk altijd zo gauw mogelijk van het ene plein naar het andere plein te komen. We nemen dus altijd de kortste weg.

④



Als twee wijken een gemeenschappelijke zijde hebben, dan zeggen we dat de afstand van hun pleinen 1 honingraatmijl is.
In nevenstaande plattegrond zie je door een x het plein van een van de wijken aangegeven.

▸ ***Zet nu bij de pleinen van de andere wijken de afstand in honingraatmijlen tot dit aangegeven plein.***

Zo'n getal noemen we het 'nabijheidsgetal' van deze wijk ten opzichte van de aangekruiste wijk.

---

[1]) Wiskobas-Bulletin, jaargang 3 no. 1, pag. 65 e.v.
[2]) J.P. Cole & N.J. Beynon – New ways in geography (parts 1, 2 and 3).

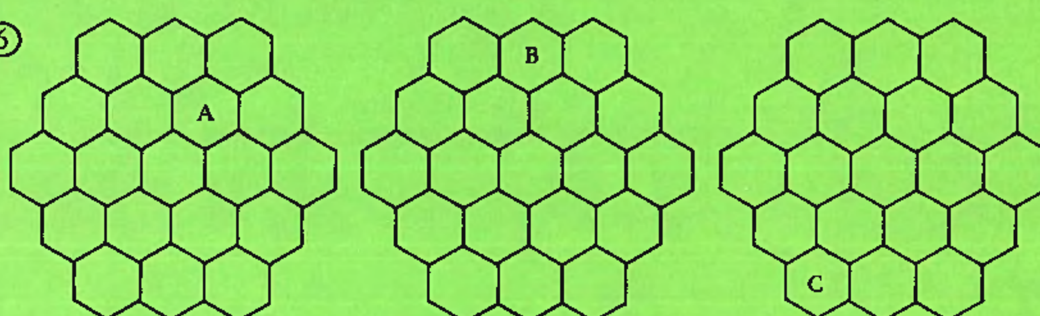
(5) We kunnen nu iets te weten komen over de betekenis van een bepaalde wijk. We gaan daartoe na wat de nabijheidsgetallen van de wijken ten opzichte van die door ons uitgekozen wijk is.
Tel nu alle nabijheidsgetallen, die je in je plattegrond hebt ingeschreven, bij elkaar.

▸ *Je vindt dan* ☐

Dit getal noemen we het 'centrumgetal' van deze wijk.

▸ *Hoe kun je dus het centrumgetal voor een bepaalde wijk vinden?*

(6)



Hierboven zie je 3 keer de plattegrond van onze stad.
In ieder van de plattegronden hebben we een wijk aangegeven, namelijk A of B of C.

▸ *Schrijf in ieder van de plattegronden de nabijheidsgetallen voor elk van de andere wijken ten opzichte van de aangegeven wijk.*
Als je daarmee klaar bent bepaal je in ieder van de 3 gevallen de centrumgetallen.

▸ *Het centrumgetal van wijk A is:*

▸ *Het centrumgetal van wijk B is:*

▸ *Het centrumgetal van wijk C is:*

We hebben nu 4 centrumgetallen gevonden.

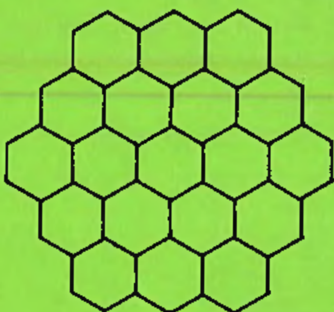
▸ *Zet deze getallen in opklimmende volgorde.*

▸ *Zeggen deze getallen iets omtrent de 'centrale' ligging van de bijbehorende wijk?*

⑦ De PTT is van plan één groot postkantoor te bouwen in deze stad.

Waar kan dit postkantoor het beste gebouwd worden?

⑧



We hebben nu al voor 4 wijken de centrumgetallen bepaald.

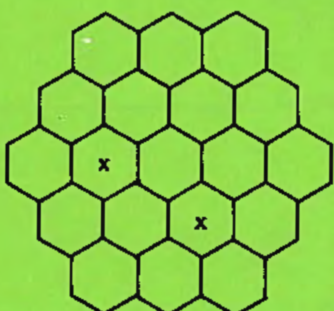
▸ *Schrijf deze in de plattegrond in de bijbehorende wijken.*

We zouden graag van de andere wijken ook de centrumgetallen willen weten.

▸ *Probeer deze ook eens te bepalen.*

Als je goed naar de plattegrond kijkt kun je ze misschien wel vinden, zonder er nog een uit te rekenen. Probeer maar eens.

⑨



We zijn nog niet uitgekeken op de wijken van 'honingraat'.

In de plattegrond zijn nu 2 wijken met een kruisje aangegeven.

▸ *Voor iedere andere wijk kun je nu nabijheidsgetallen aangeven.*

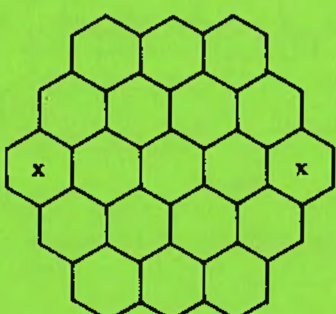
Van deze 2 getallen noteren we in de wijk alleen het kleinste van die 2 nabijheidsgetallen.

▸ *Tel al deze getallen weer bij elkaar op.*

Je vindt:

Dit getal is het centrumgetal van dit wijkenpaar.

⑩



plan A

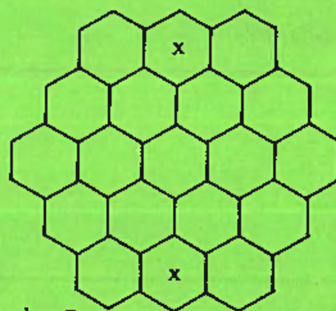
De PTT ziet af van één groot postkantoor en besluit tot meerdere postagentschappen.

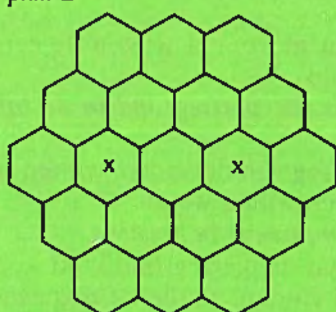
De eerste gedachte is 2 postagentschappen.

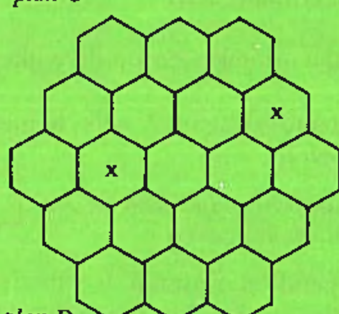
Er komen 4 voorstellen: plan A – plan B – plan C en plan D.

Beoordeel ieder van deze 4 voorstellen.

▸ *Hoe zou je dat kunnen doen?*


plan B


plan C


plan D

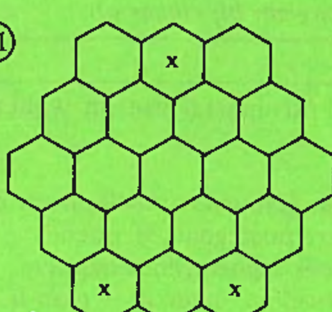
Rangschik de voorstellen in volgorde van bruikbaarheid. Het best bruikbare voorop.

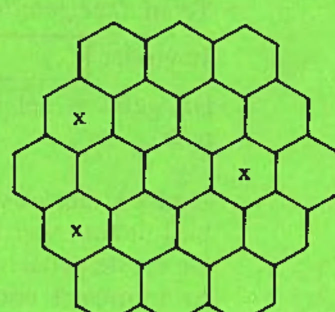
▸ *De volgorde wordt dan:*

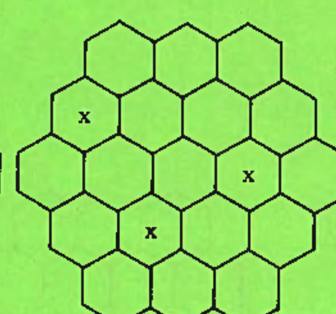
Zou je bij plan A kans zien de kruisjes ergens anders (andere kleur) in te vullen, maar zo dat het centrumgetal voor dat wijkenpaar hetzelfde is als dat van plan A?
Ook zo voor plan B, C en D.
Blijven er nog wijken over voor nog een ander plan?

▸ *Probeer er eens een.*

(11)

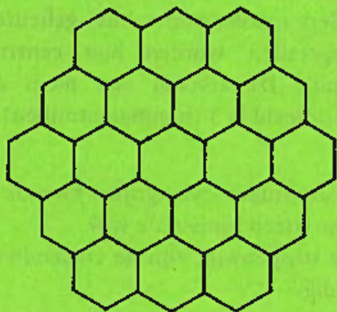

plan A


plan B


plan C

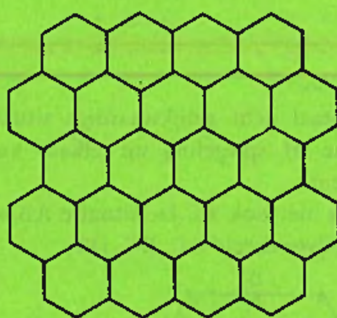
Er worden ook nog plannen ingediend voor 3 agentschappen. Je ziet ze hierboven.
Onderzoek ze op hun bruikbaarheid.

▸ *Rangschik de voorstellen weer in volgorde van bruikbaarheid; het best bruikbare voorop.*

12 

De PTT is pas tevreden als alle inwoners kunnen beweren dat de afstand tot het dichtstbijzijnde postagentschap 1 is.
Probeer dit met een zo klein mogelijk aantal postagentschappen te bereiken.

▸ *Het aantal postagentschappen, dat hiervoor nodig is bedraagt:*

13 

In de stad 'honingraat' lag een van de wijken precies in het midden van de stad.
Hiernaast zie je de plattegrond van een andere stad. Laten we deze stad maar *'bijenstad'* noemen.

▸ *Is er hier ook een wijk aan te wijzen, die precies in het midden ligt?* ja/nee

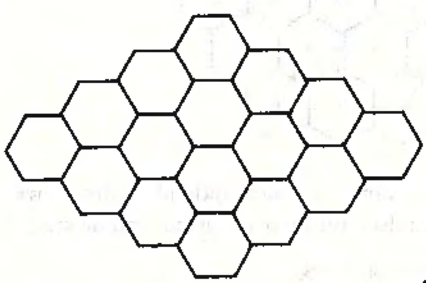
We gaan weer eens voor iedere wijk het centrumgetal bepalen.
Probeer dit te doen met zo weinig mogelijk telwerk.

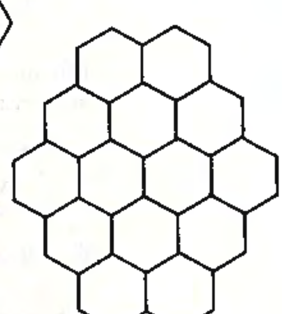
▸ *Hoe kan dat?*

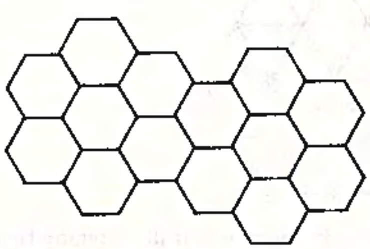
▸ ***Kleur de wijken, die hetzelfde centrumgetal hebben met dezelfde kleur. Natuurlijk een andere kleur voor een ander centrumgetal.***

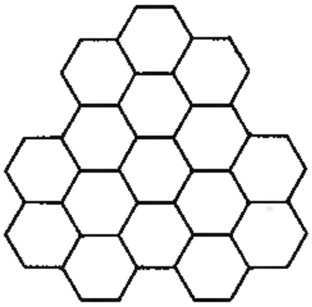
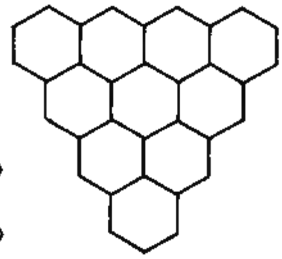
ENKELE OPMERKINGEN BIJ 'NOG EENS DE PTT'

* De spreidingsproblemen, die hier aan de orde gesteld worden zijn naar andere terreinen te vertalen, bijvoorbeeld: Spar- of AH-winkels – politieburo's – poliklinieken, etc.
* Voor 'stadsplanaktiviteiten' in deze plattegronden kan het best gebruik gemaakt worden van het rooster van de middelpunten.
  Dit zal leiden tot een scheef koördinatenstelsel met de assen onder een hoek van 60° en als eenheidsafstand: de afstand van de middelpunten van twee zeshoeken, die een zijde gemeenschappelijk hebben.
* Verder nog enkele, niet al te uitgebreide plattegronden:







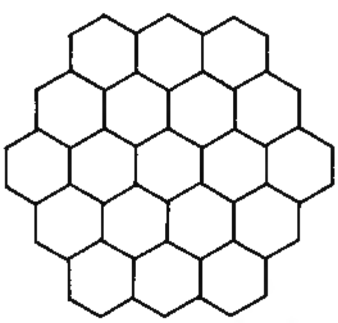
KOMMENTAAR

'Nog eens de PTT', noemt de heer Van de Molengraaf zijn voortreffelijke bewerking van het artikel 'Een mooie, rooie bus'.

Het gaat inderdaad om een overeenkomstige problematiek.

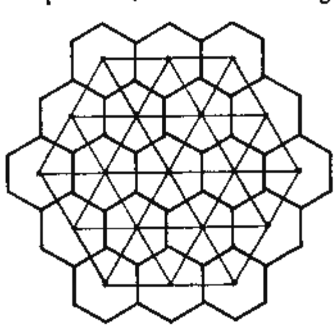
Ik geef daarvan een aantal voorbeelden:

* In 'Nog eens de PTT' maken we kennis met de stad *honingraat,* die uit een aantal wijken bestaat:

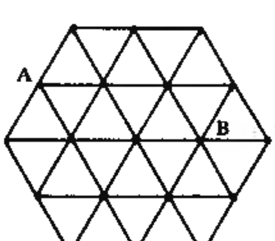


In deze wijken heeft men pleinen die, voor zover het aan elkaar grenzende wijken zijn, een onderlinge afstand hebben van één mijl.

We tekenen deze pleinen en de verbindingen tussen die pleinen (hoofdverkeerswegen).



Terwille van de duidelijkheid lichten we het 'stratenstelsel' uit de plattegrond van de stad:



Al gauw wordt duidelijk dat de ontstane figuur een rooster is, wat groter dan de drie-bij-drie-stippenwijk uit 'Een mooie, rooie bus'.

Op dit rooster zijn afstanden te tellen zoals dit ook in 'Een mooie, rooie bus' gebeurde (bereikbaarheidsgetallen worden hier centrumgetallen genoemd). De afstand van plein A tot plein B bijvoorbeeld is 3 (honingraatmijlen).

* Een uitermate belangrijke kwestie is die van de symmetrieën binnen de wijk.

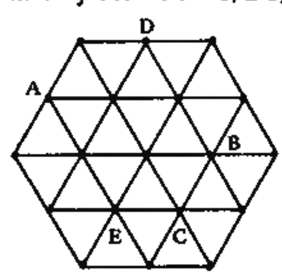
In de stippenwijk zijn de volgende situaties gelijkwaardig:

· X · ·	· · X ·	· · · ·
· · · ·	· · · ·	· X · ·
· · X ·	· X · ·	· · · X
· · · ·	· · · ·	· · · ·

enzovoort.

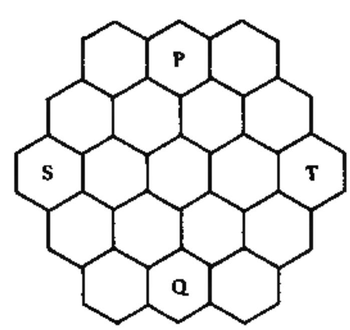
In totaal acht gelijkwaardige situaties, die door rotatie of spiegeling uit elkaar kunnen worden afgeleid.

Dat is hier ook zo. De situatie AB is gelijkwaardig met bijvoorbeeld AC, DC, DE.

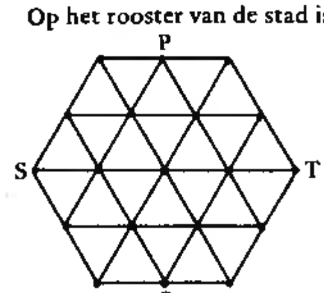


Maar, pas op!

In de stad 'honingraat' is de situatie PQ niet gelijkwaardig met ST!



Op het rooster van de stad is dit duidelijker:



Toch is het aardig om van beide situaties de 'centrumgetallen' te bepalen.

Doe dit maar eens! Hans ter Heege

4.8 onderzoek van de ruimte

Ongetwijfeld worden tijdens ouderavonden de veranderingen op het gebied van het rekenonderwijs vaak aan de orde gesteld. Alhoewel we via de regionale wiskobas-werkgroepen regelmatig op de hoogte worden gehouden van deze aktiviteiten, hebben we toch het idee dat er een heleboel aan onze aandacht ontglipt. Wilt u ons uw 'verslagen' toezenden, liefst met gegevens over het hoe, wat en waarom van de bijeenkomsten? Wellicht kunnen we er met elkaar iets mee doen. Deze keer ontvingen we van kollega Van der Ven — hoofd van de St. Alexanderschool te bennekom — een verslag van een ouderwerkavond die op 12 februari j.l. plaatsvond. De St. Alexanderschool werkt met de metode Denken en Rekenen.
Behalve de inleiding nemen we uit het werkboekje voor de ouders enkele bladen op.

E. VAN DER VEN

ORIENTATIE VAN DE RUIMTE

introduktie
Zoals u op uw uitnodiging hebt gelezen, zullen wij ons vanavond gezamenlijk gaan bezighouden met het 'Onderzoek van de ruimte', het verkennen van de ons omringende ruimte. Ik hoop, dat u op het eind van de avond ervan overtuigd zult zijn, dat het wezenlijk van belang is, dat wij ons hier op school bezighouden met deze materie.
'Wat is eigenlijk ruimte?'
Dit zou de eerste vraag moeten zijn, die we vanavond zouden moeten stellen. Deze vraag goed beantwoorden zou leiden tot langdurige filosofische overpeizingen.
Plato bijvoorbeeld zegt, dat ruimte méér is dan leegte en minder dan stof en dat het wezen van ruimte slechts door moeizaam redeneren van het verstand te bereiken is.
Kant wordt getroffen door de onmogelijkheid ruimte en tijd weg te denken: men kan alles wegdenken, dan nog blijft er ruimte over.
Hierover verder doorpraten lijkt echter niet zo erg zinnig in het kader van deze avond. Daarom zullen wij ons ertoe bepalen hoe ruimte door ons ervàren wordt.

ervaringen van het jonge kind
Vanaf zijn geboorte verkent het kind de ruimte. In het begin kijkt het ernaar, wat later beweegt het armen en benen in de ruimte, om er zich daarna in te verplaatsen. Er gaat vrij veel tijd overheen voor een kind écht een idee heeft van begrippen als afstand, diepte, dikte, perspektief.
Ook voor het ontwikkelen van begrippen als erin, erbuiten, voor en achter, voor en na, is tijd nodig.

Het kleine kind bekommert er zich weinig om hoever de voorwerpen van elkaar af staan of over de afstand waarover ze verplaatst worden. Deze dingen merkt het eigenlijk stilzwijgend op.

Het kind is vooral geinteresseerd in wat het moet doen om de dingen, die het graag wil hebben, te pakken. Als het kind bepaalde dingen wil hebben, die in een doosje zitten, bijvoorbeeld snoepjes, is het voor hem belangrijk te weten, hoe hij met zijn hand (of mond) *in* dat doosje kan komen.
Het is dus voor een kind een belangrijke ontdekking dat er doosjes mét en zonder deksel zijn. Deuren staan soms open, soms zijn ze dicht. Het kind merkt ook, dat het de kamer alleen in en uit kan via een deur of door een open raam.
Onder alle dingen, die het kind in de ruimte onderzoekt, behoort ook de 'keerzijde' van de

dingen. Zo ziet men iedere baby belangstellend kijken naar de andere kant van de openstaande deur, de achterkant van een plaat. Later ontdekt hij, dat hij — als hij één kant van het vel volgetekend heeft — dit vel om kan keren en ook op de andere kant kan tekenen. Het kind is dus al erg vroeg geinteresseerd in binnen en buiten, in openingen, in voor en achter, boven en onder, enz.

uitbreiding van de ervaring van het jonge kind op de kleuterschool

Op de kleuterschool worden deze begrippen al aan de orde gesteld, de kinderen worden ermee vertrouwd gemaakt, ze worden aangemoedigd de ervaring, die ze reeds met deze 'ruimtebegrippen' hebben, uit te breiden.

Wat we echter steeds voor ogen moeten houden is, dat deze begrippen *niet te onderwijzen* zijn. Alles wat we kunnen doen — op kleuterschool en op basisschool — is situaties kreëren, waarin de kinderen de nodige ervaringen kunnen opdoen!

basisschool

Wat is nu in de praktijk de door ons (en de metode die we hanteren) gevolgde werkwijze?

In de allereerste plaats laten we de kinderen al spelend met materiaal omgaan. Dit materiaal wordt spesiaal aangeboden om ze ervaring te laten opdoen met ruimtelijke begrippen. Hiervoor worden gebruikt: konstruktierietjes, logi-blokken, colour-factor-materiaal, MAB-materiaal, enz.

Door dit spelend omgaan zullen de kinderen komen tot een ordening van materiaal en ruimte.

Hier komt ook de taal, die op de kleuterschool al aan de orde kwam, weer eksplisiet naar voren, om de vormen bespreekbaar te maken. Bijvoorbeeld: dik(ker), hoog-hoger, laag-lager, boven-onder, enz.

De eerste opdrachten in een klas zijn, of zouden kunnen zijn: maak maar wat, bouw maar eens wat met dit materiaal. Na deze eerste verkenning worden de opdrachten wat spesifieker: er worden eisen gesteld aan de vorm van het gemaakte — maak nu een hoog bouwwerk, zet de dingen achter elkaar, zet het éénònder het ander. Het materiaal wordt meer 'toegespitst', beperkt, bijvoorbeeld tot alleen de vierkanten, of alleen de driehoekjes.

drie dimensies algemene metodiek

We zijn hiermede eigenlijk al gekomen in het stadium van de naamgevingen: we trachten de verschillende vormen en bouwsels te benoemen. Daarvoor kunnen de termen gebruikt worden die we allen kennen: kubus, bol cilinder, maar er kunnen ook — voorlopige — afspraken met de klas gemaakt worden om een bepaalde vorm zó te noemen: dit noemen we een blok, dat is een piramide, enz. Tijdens het spelen zijn de diverse 'grondvormen' meestal al aan de orde geweest. Deze grondvormen worden gezamenlijk geordend. (We treffen genoemde vormen ook al aan op de kleuterscholen bij bijvoorbeeld Montessori, Fröbel.)

De zojuist genoemde vrije opdrachten zult u in het werkboekje, dat de kinderen geregeld mee naar huis nemen, niet tegenkomen. Dit is een van de spesifieke trekjes van de metode: het werkschrift bevat eigenlijk alleen een soort samenvatting, een schriftelijke neerslag van wat in de klas aan voorbereidend werk is gedaan. Dat dit veel hogere eisen stelt aan de inventiviteit en kreativiteit van de leerling én leerkracht, zal u duidelijk zijn, als u deze wijze van werken vergelijkt met de traditionele rekenmetode. Hierin staat iedere aktiviteit van leerling en leerkracht nauwkeurig omschreven in een handleiding, waar zijsporen tot verwarring leiden, waar naamgevingen uniform dienen te zijn, waar in feite iedere omweg vermeden dient te worden, omdat die niet rechtstreeks tot het doel voert. Dat die omweg voor het kind vaak veel begrijpelijker is en tot een juist inzicht voert, wordt daarbij over het hoofd gezien.

twee dimensies (roosters)

Degenen onder u, die de afgelopen maanden gekeken hebben naar de wereldkampioenschappen schaken en dammen op de TV, of die kampioenschappen via de kranten hebben gevolgd, zullen er misschien bij stilgestaan hebben, dat de wijze van aanduiden van de hokjes op de schaak- respektievelijk damborden, de zogenaamde velden, een vrij simpele en evenzo noodzakelijke kwestie is.

Bij schaken zijn de rijen genummerd en de kolommen aangeduid met letters.

Bij dammen zijn alle zwarte velden dóórgenummerd tot 50. Op deze wijze is vrij snel te noteren wie welke zet gedaan heeft. Hoe het verloop van de wedstrijd was, kan na jaren nog bekeken worden. Andere mogelijkheden om dit te noteren zijn er wel, maar die zijn zo omslachtig, dat ze in onbruik zijn geraakt.

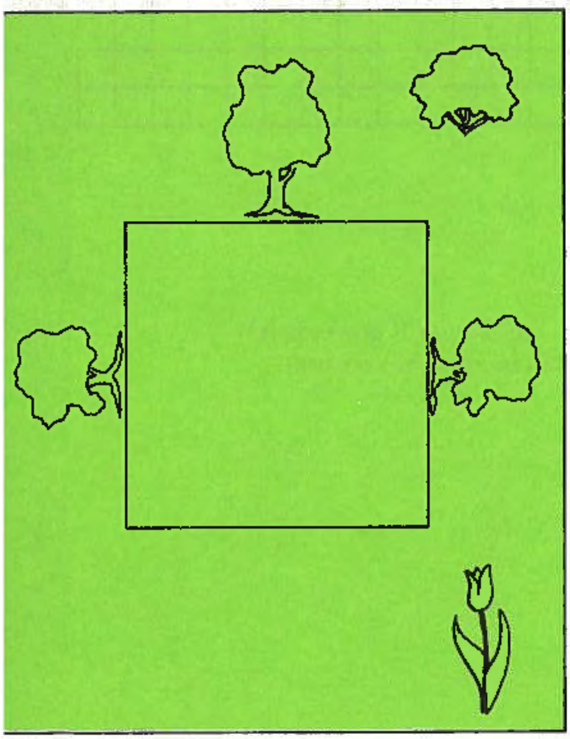
Deze tamelijk effektieve wijze van werken vinden we ook terug bij koördinaten op kaarten (landkaarten). U weet wel: die genummerde lijnen op autokaarten, atlassen, e.d.

van drie dimensies naar twee dimensies

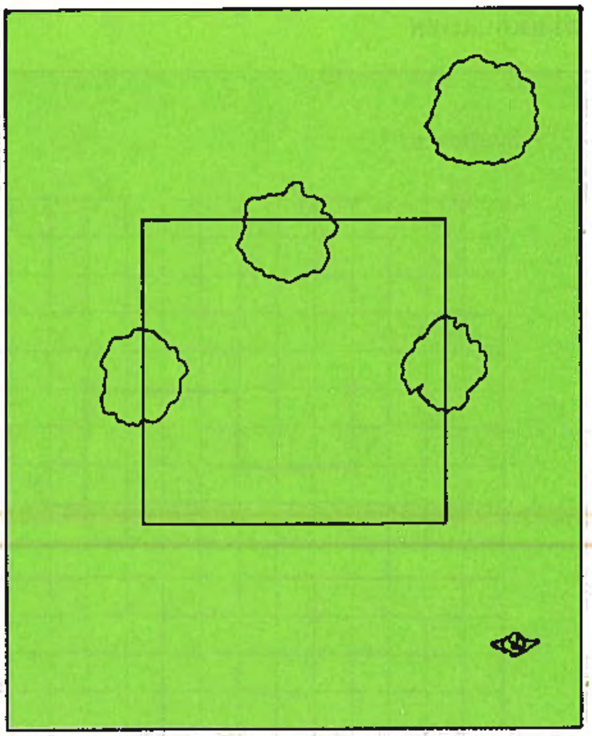
We komen zo van het spelen met drie-dimen-

ionale dingen (dingen met lengte, breedte en oogte) op het weergeven, tekenen, zien van rie dimensies in een plat vak.
Een voorbeeld zal dit duidelijker maken: inderen hebben er, na een bepaalde ontwikeling te hebben doorgemaakt, geen enkele noeite mee om te zien, dat een tekening (die ieeft maar twee dimensies: lengte en breedte) lleen maar een afbeelding is van iets wat in verkelijkheid drie dimensies heeft. Ze zullen rij snel een plattegrond kunnen lezen van een ien bekende omgeving. Voorwaarde is echter, lat je de drie-dimensionale werkelijkheid be-grepen' hebt.
Het woordje 'grijpen' zit hierin en dat moet etterlijk opgevat worden: het kind moet al pelend omgegaan hebben met de drie-dimenionale dingen, anders kun je ze nooit schemaiseren. (Vergelijk stereometrie op de middelbare school: hoevelen hebben hier geen onoverkomelijke moeilijkheden mee gehad?)

praktijkervaring
Op een basisschool heb ik eens ervaren hoe de ongste kinderen in een kombinatieklas tot die chematisering in twee dimensies komen. De opdracht was een ontwerpplattegrond te tekenen voor een tuin. Een aantal kinderen deed lit zó:



De bedoeling was echter:



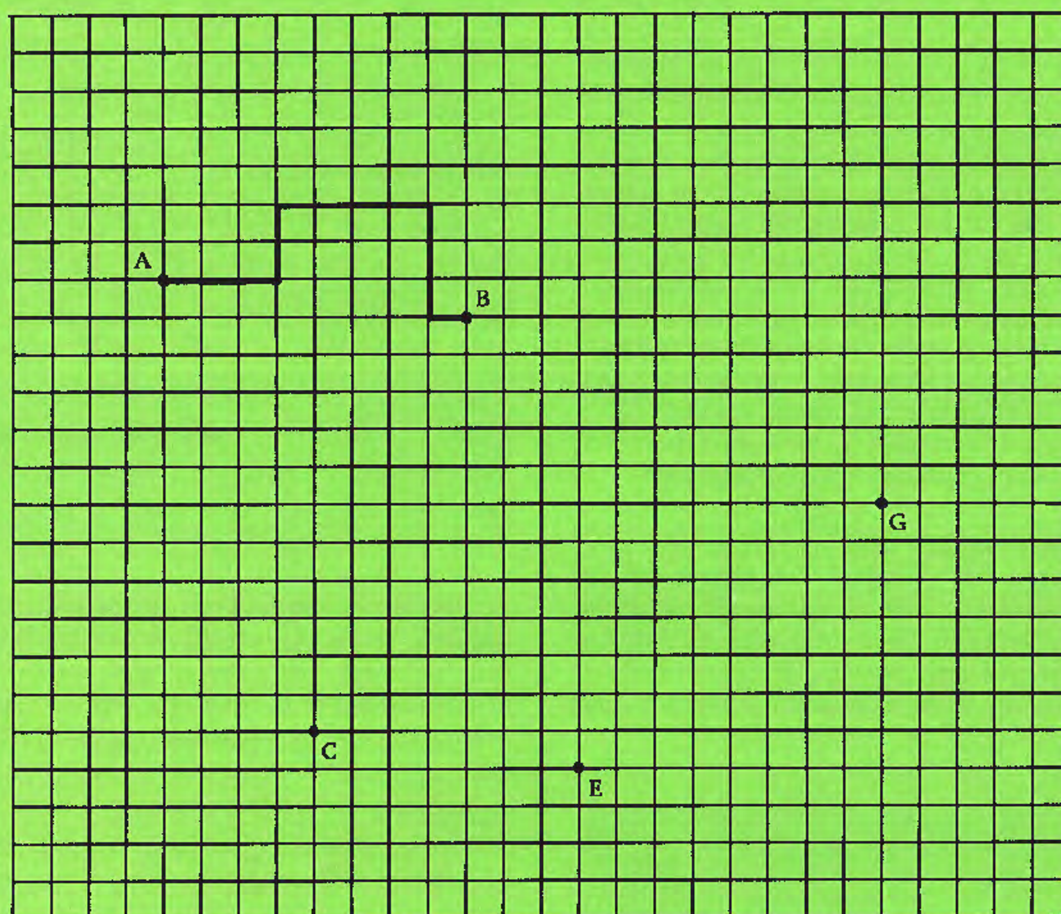
Ze konden de derde dimensie, de hoogte, niet loslaten. Dit is een aspekt in de ontwikkeling van het kind, dat vroeger gewoon over het hoofd werd gezien, maar dat wel degelijk van belang is voor de ontwikkeling in zijn totaliteit.

algemeen
Afbeelden van drie dimensies is tenslotte een bij uitstek wiskundige aktiviteit, die in vrijwel iedere vorm van vervolgonderwijs aan de orde zal komen.
Denkt u maar aan de werktekeningen, die op de technische scholen gemaakt worden, de patronen die op de huishoudscholen 'gelezen' en getekend worden, de al eerder genoemde stereometrie.

naar de werkopdracht
De roosters, die u straks zult tegenkomen en die enige gelijkenis vertonen met dam- en schaakbord, zullen de kinderen later gebruiken bij het meten van lengte, breedte en oppervlakte.
Ook zullen deze roosters later kunnen bijdragen tot een beter begrip van grafieken en staafdiagrammen.

Wilt u het werkboekje, dat vóór u ligt, samen met uw tafelgroep doorwerken? Probeert u elkaar te helpen, als er moeilijkheden zijn. Komt u er niet uit, dan zullen wij als 'deskundigen' rondlopen om mét u de moeilijkheden op te lossen.
Al het benodigde materiaal vindt u op uw tafel. Veel sukses!

werkblad 10



$A \xrightarrow{(3r,\quad 2h,\quad 4r,\quad 3b\quad 1r)} B$

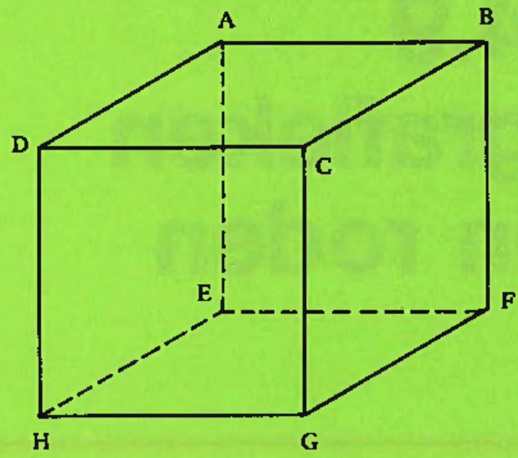
Kunt u uit deze regel aflezen hoe de wandeling van A naar B geweest is?
Voer dan ook de volgende wandelingen uit en teken ze in het rooster.

$C \xrightarrow{(4h,\quad 2r,\quad 2b,\quad 3l,\quad 5b)} D$

$E \xrightarrow{(3l,\quad 4h,\quad 6r,\quad 2l,\quad 4b,\quad 2l)} F$

$G \xrightarrow{(2l,\ 2h,\ 2l,\ 2h,\ 4r,\ 2h,\ 2l,\ 2b)} H$

werkblad 14



De ribben AB, BC, CD en DA zijn samen de rand van een *zijvlak*.
Maak dit zijvlak rood.

Hoeveel zijvlakken heeft een kubus?
Pak de door u zélf gemaakte kubus.

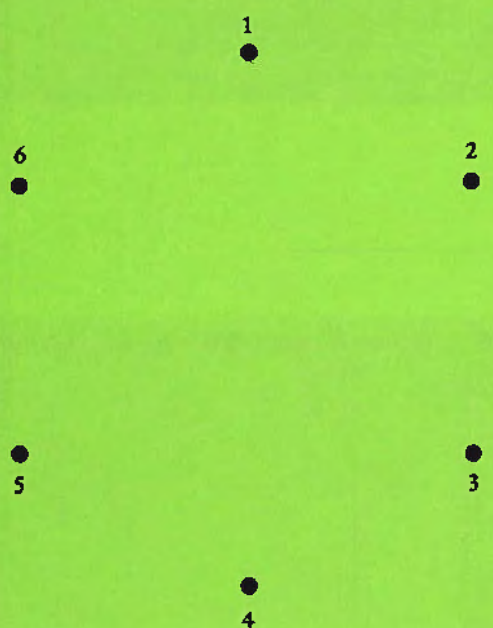
Geef ieder hoekpunt een naam, zoals op de tekening.

Schrijf 1 op het zijvlak ABCD
2 op het zijvlak BCGF
3 op het zijvlak ABFE
4 op het zijvlak CDHG
5 op het zijvlak ADHE
6 op het zijvlak EFGH

Maak nu de plaatjes af.

Teken alle pijlen.

Het zijvlak met nummer ...
grenst aan het zijvlak met nummer ...



Het zijvlak met nummer a grenst aan het zijvlak met nummer b.

a \ b	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

4.9 grafieken in roden

Leerlingen van de openbare basisschool 'De Valkhof' te roden hebben op grote vellen papier grafieken gemaakt van gegevens die ze eerst zelf verzameld hebben, over: zakgeld, dagbladen, huisdieren, verkeersintensiteit, gewichten, bedtijden, voorkeurvakken, favoriete sporten, geboorteplaatsen, enz. enz.
In dit nummer kunnen we slechts 2 grafieken plaatsen. We hopen in aflevering 6 wat meer ruimte beschikbaar te hebben voor leerlingenwerk.