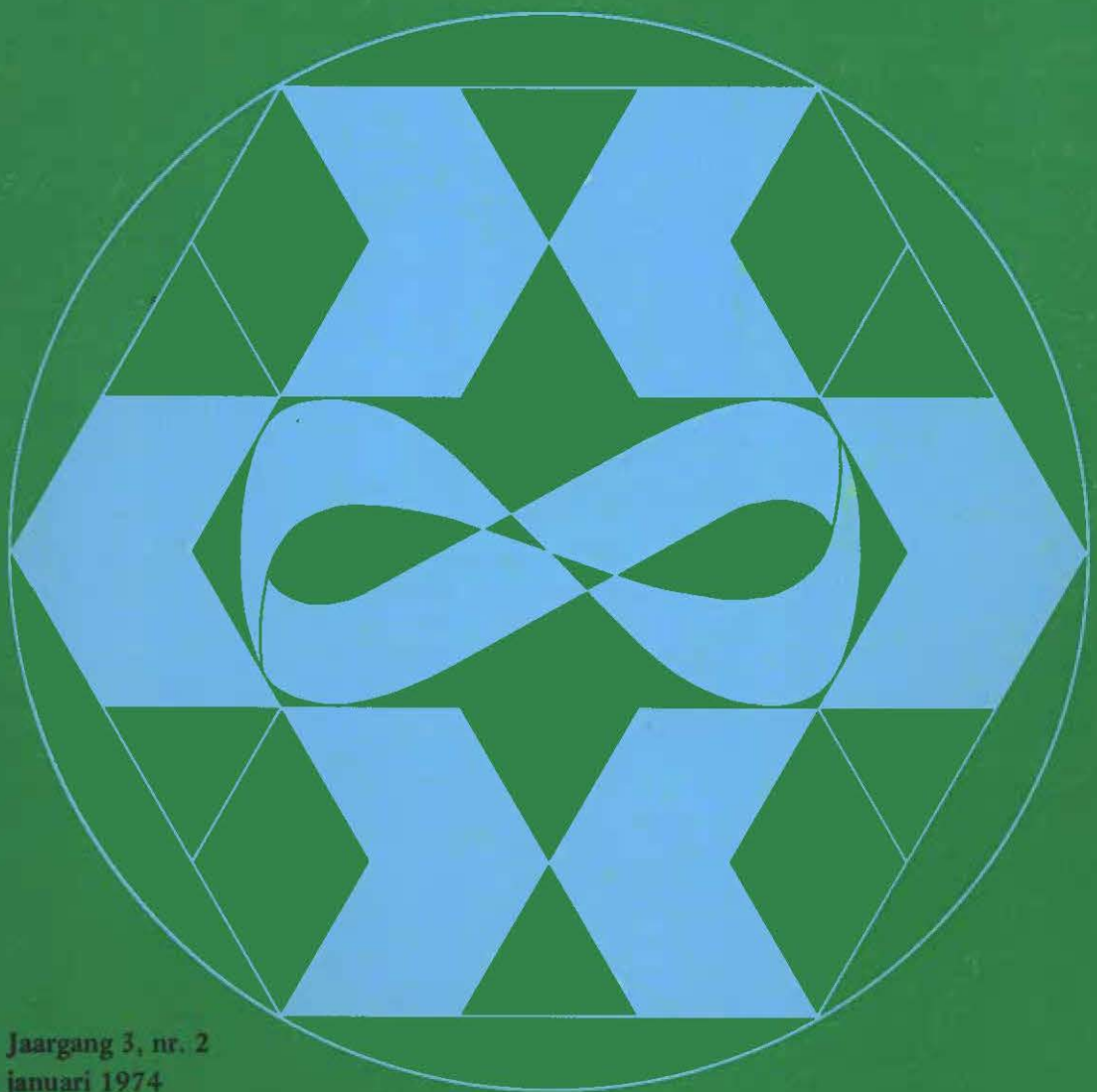


# wiskobas bulletin



Jaargang 3, nr. 2  
januari 1974

## Wiskobas-Bulletin

- Bulletin ter begeleiding van het experiment 'Wiskunde op de Basisschool'
- Verschijnt gedurende de derde jaargang 6 keer

JAARGANG 3, Nr. 2 — JANUARI 1974

### REDAKTIE:

Drs. F. Goffree, Drs. R.A. de Jong (eindredacteur), G.H. Meijer, Drs. A. Treffers, Drs. E.J. Wijdeveld.

### MEDEWERKERS:

Prof. Dr. F. van der Blij, J. van den Brink, W.M.F. Bronnenberg, J. van Bruggen, K. Frenay, Prof. Dr. H. Freudenthal, L. Gilissen, H. Jansen, H. ter Heege, D. Karman, Drs. K.B. Koster, C.P. Leenders, F. du Maine, E. de Moor, D.W. Oort, P. Scholten, L. Streefland.

### LAY-OUT:

Ton Voortman.

### CARTOON:

Hans de Boer.

### REDAKTIEADRES:

INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE  
ONDERWIJS  
Tiberdreef 4, Utrecht.  
t.a.v. R.A. de Jong.

### ABONNEMENTENADMINISTRATIE:

STICHTING IVIO,  
Postbus 37, Lelystad.  
Voor aanmeldingen, adreswijzigingen,  
betalingen, enz.

### ABONNEMENTSPRIJS:

Per jaargang f 30,—.  
Reduktietarief voor studenten P.A. en  
wiskobas-kursisten f 20,—.  
Gelieve uitsluitend te betalen met aksept-giro-  
kaarten. Deze worden u toegezonden.

## INHOUD

### VAST BLOK

Redactioneel .....	102
Kolommen: H. Freudenthal .....	104
Wiskunst: F. van der Blij .....	107
Problematica: Huub Jansen .....	111
Berichten uit het binnenland: Louis Gilissen .....	112
Berichten uit het buitenland: Klaas Koster .....	116
Een pijnlijke operatie: H. Freudenthal .....	118
Leerplanologie: Johan van Bruggen en Adri Treffers ...	122
Bijna noemen: Jan van den Brink .....	129
Wim Wiedes: Hans ter Heege .....	132
Skriptoteek: Huub Jansen .....	134
Wiskunde voor het lager beroepsonderwijs: Wim Sweers .	137
Kleuters en wiskunde: Jes Melis en Henneke de Lorme- Bakker .....	140
Basje, een jonge onderzoeker: Dik Oort .....	143

### VARIABLE BLOK

2.1 Inleiding en leeswijzer .....	148
2.2 Wie 't kleine niet eert...: Jan van den Brink .....	150
2.3 En dan gaaaaan we naar de speeltuin: Johan van Bruggen .....	157
2.4 Introductie decimale getallen: Leen Streefland ...	166

### RESPONS BLOK

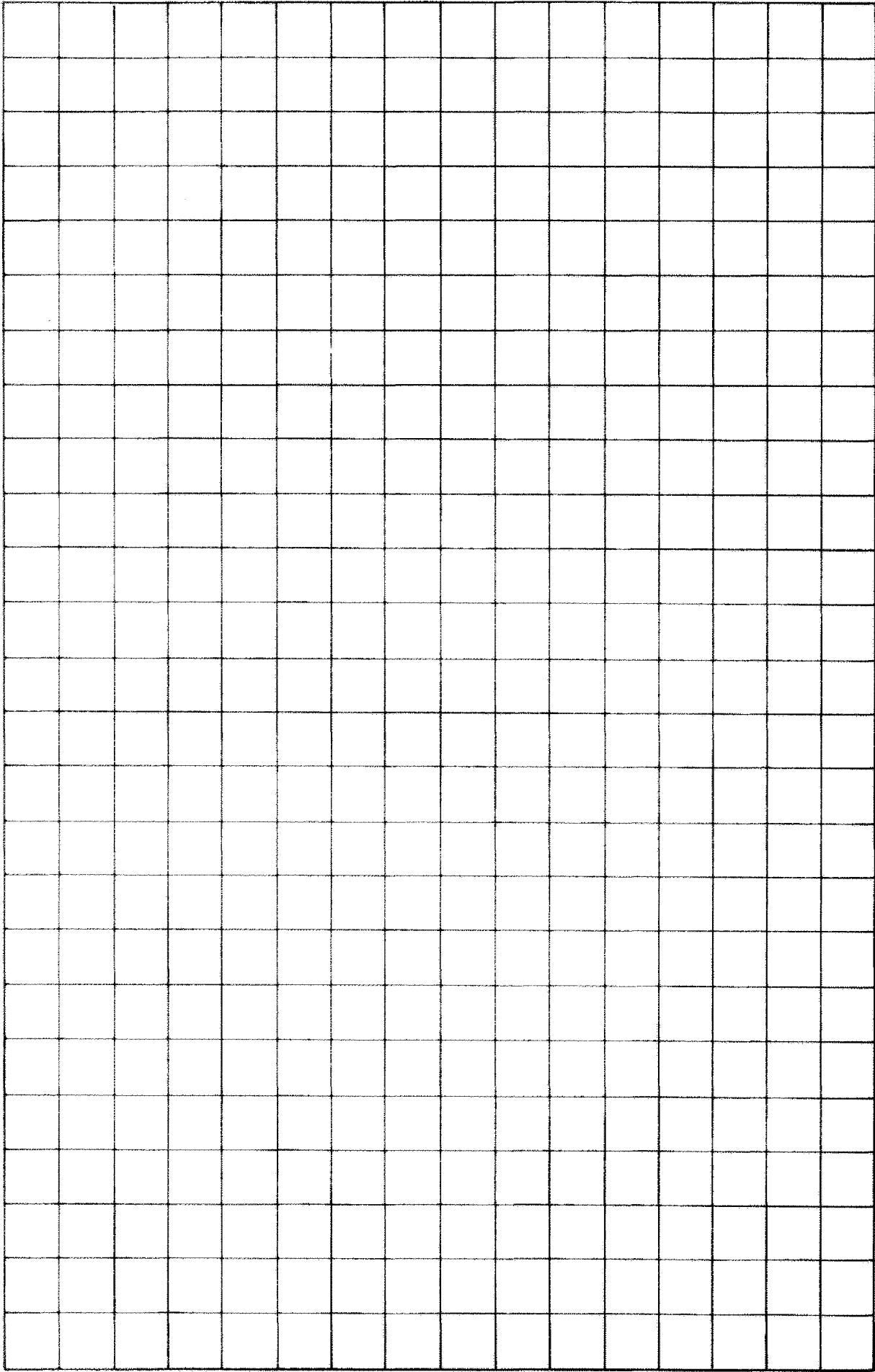
2.1 Inleiding .....	192
2.2 Zestien oplossingen .....	193
2.3 Ordenend tellen .....	196
2.4 Ordenend tellen .....	199
2.5 Meten voor 4-6 jarigen .....	200
2.6 Eén-éénduidigheid bij muzieknotatie .....	202
2.7 Ouder-werkavonden in bennekom .....	203

Omslag: Hans Gauw

Druk: De Gulden Pers B.V.

© 1974 Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde  
Onderwijs

Niets uit deze uitgave mag worden veeveelvoudigd en/of open-  
baar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of  
op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke  
toestemming van de houder van het copyright.



# VAST

## INHOUD

<i>Redactioneel</i> .....	102
<i>Kolommen</i> .....	104
H. Freudenthal	
<i>Wiskunst</i> .....	107
F. van der Blij	
<i>Problematika</i> .....	111
Huub Jansen	
<i>Berichten uit het binnenland</i> .....	112
Louis Gilissen	
<i>Berichten uit het buitenland</i> .....	116
Klaas Koster	
<i>Een pijnlijke operatie</i> .....	118
H. Freudenthal	
<i>Leerplanologie</i> .....	122
Johan van Bruggen en Adri Treffers	
<i>Bijna noemen</i> .....	129
Jan van den Brink	
<i>Wim Wiedes</i> .....	132
Hans ter Heege	
<i>Skriptoteek</i> .....	134
Huub Jansen	
<i>Wiskunde voor het lager beroepsonderwijs</i> .....	137
Wim Sweers	
<i>Kleuters en wiskunde</i> .....	140
Jes Melis en Henneke de Lorme-Bakker	
<i>Basje, een jonge onderzoeker</i> .....	143
Dik Oort	

# blok

# redaktio- neel

ROB DE JONG

Iedere school doet — dacht ik — wel iets aan public relations, zeker wanneer de relaties *niet* goed zijn. Te weinig wordt dan overigens de totale situatie geanalyseerd; je bent tevreden met oppervlakte-oplossingen (wegnemen van de slechte gezindheid en niet de oorzaak van deze gezindheid).

Schoolleiders willen dat hun school een goede 'image' heeft. De buitenwereld dient kennis te maken met een 'schone façade'. Een bepaald beeld wordt opgeroepen bij de groep die direct om de school gecentreerd is (ouders, wijkbewoners). Niet altijd zal dit beeld in overeenstemming zijn met datgene wat binnen de school gebeurt — je probeert je immers vaak mooier voor te doen dan je bent (façadisme). Dit geldt te meer waar een school zich niet in een monopoliepositie bevindt en een 'wervend beleid' moet voeren.

Beeldvorming heb je echter slechts zeer ten dele in de hand, omdat beelden altijd zijn: beelden-voor-iemand.

\* \* \*

Eén van de basisscholen in de wijk vreugdeloos van educadam heeft het vak *Groen-is-mijn-dal* geïntroduceerd. Het nieuws- en advertentieblad 'vreugdeloos vooruit' — dat kosteloos huis aan huis de brievenbus inglijdt — zet met veel tam tam een artikel op de voorpagina met als kop '*Groen-is-mijn-dal in vreugdeloos*'. De drukker c.q. uitgever heeft een dochtertje op de betreffende school, vandaar.

Voor de lezers van het blad wordt de school nu de '*Groen-is-mijn-dal*'-school.

De andere dingen die op school gebeuren vormen geen nieuws. Jaartallenpomperij, invuloefeningen en breuken komen niet op de voorpagina. Het 'gewone' hoeft immers niet geweten te worden.

Kortom: de argeloze wijkbewoner vormt zich een beeld van de school op grond van een bepaald berichtje over een (betrekkelijk kleine) verandering.

De affaire zet zich voort. Een dokumentalist van een landelijke krant stuit op het betreffende artikel en ziet er iets aardigs in — al lange tijd is er geen berichtgeving uit en over educadam geweest. De volgende dag — over zeven kolommen — verneemt de nederlandse lezer '*Onderwijsprimeur in educadam*' en konkludeert: 'vooruitstrevend onderwijs in het oosten van het land, zeg!' Zelfs de televisie interesseert zich voor '*Groen-is-mijn-dal*' en weet haar programma naar de v.s. te verkopen.

De kijker — ergens in florida — wordt gekonfronteerd met een film over onze school uit

vreugdeloos en vormt zich op grond hiervan een beeld omtrent het nederlandse onderwijs.

In dit – wat overtrokken – voorbeeld wordt een aantal keren een deel waargenomen en voor het (een) geheel gehouden (pars pro toto-effekt):

- Groen-is-mijn-dal – alle activiteiten in die school
- een school in vreugdeloos – onderwijs in vreugdeloos
- onderwijs in vreugdeloos – onderwijs in educadam
- onderwijs in educadam – onderwijs in nederland.

Ook andersom. Wanneer we een televisieprogramma van Bob Ris over de NOVA-school (florida) zien, trekken wij – onverstandige kijkers die we zijn – konklusies met betrekking tot het hele amerikaanse onderwijs.

De VPRO kan natuurlijk nooit het *bele* amerikaanse onderwijs tonen. Een omroep moet kiezen. Degene die selekteert is zich ervan bewust dat de ontvanger het gekozen deel gaat veralgemenen. De verantwoordelijkheid is groot: het ene deel representeert het geheel juist dan het andere deel. Geen enkel deel representeert echter volkomen.

\* \* \*

Bij de verslaggeving van de activiteiten aan het integratieplan vindt ook steeds een keuze plaats. Uitgaande van 5 reken/wiskunde-lessen per leerjaar per week levert een eenvoudige vermenigvuldiging voor 4 leerjaren<sup>1)</sup> gedurende een periode van 6 weken, 120 lessen op. Integrale verslaggeving hiervan is onmogelijk. Daarom: selektie!

Bij de beschrijving van het in eerste instantie gekozen, vindt een tweede selektie plaats: wát beschrijf ik (hoofdzaken) en wát laat ik weg (bijzaken).

Uiteindelijk moet er een blok worden samengesteld dat de omvang van 40 pagina's niet mag overschrijden. Het rode potlood funktioneert voor de derde keer.

Wanneer het bulletin dan verzonden wordt, is ieder zich van de griezelige mogelijkheid bewust dat het proces kan gaan optreden van: *delen waarnemen en houden voor het geheel.*

*Een voorbeeld.* Wanneer een onverstandige lezer kennisneemt van een bijdrage uit klas 4 over 'meten', kan hij reageren met: 'niets nieuws onder de zon; deed ik al lang'; 'aan staartdelingen doen ze tegenwoordig niets meer'.

<sup>1)</sup> In elk Variabel Blok komen – zo mogelijk – de leerjaren 1, 3, 5 aan bod, alsmede één van de leerjaren 2, 4, 6.

Wellicht doet het u – verstandige lezer – wat ongeloofwaardig, vreemd en dom aan. Nochtans komt het voor. Zelfs nog zeer resent en bij kollega's aan een school voor v.o. ('wiskobas doet niets meer aan breuken').

De verstandige lezer zal niet direkt met z'n oordeel klaar staan en eerst eens nagaan wat er in de andere bijdragen aan de orde wordt gesteld en in de volgende nummers van het bulletin. Misschien staat daarin wél iets nieuws of worden de staartdelingen daar wél behandeld.

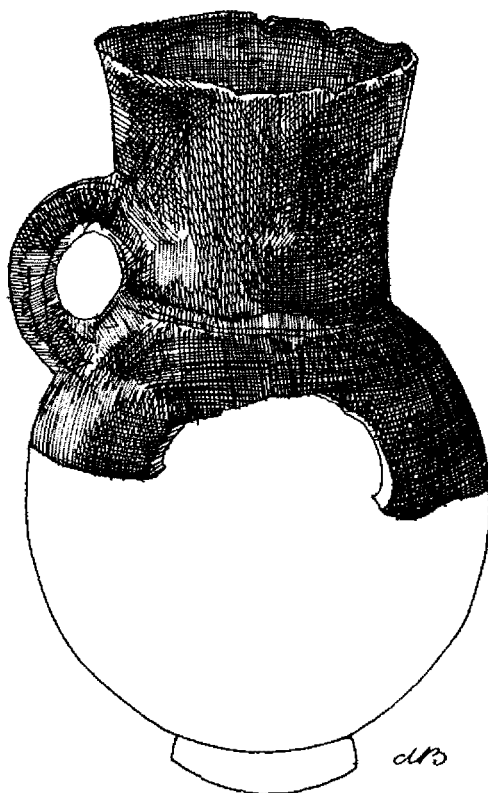
Verder weet hij dat het om een stuksgewijze verslaggeving gaat, dat er meer niet dan wel genoemd wordt.

\* \* \*

De redaktie kiest de bijdragen zodanig dat er een zo zuiver (d.i. eerlijk) mogelijk beeld ontstaat. Niet alleen de mooie, geslaagde, zeer geavanceerde stukken onderwijs. Ook de alledaagse zaken – die niet zo spektakulair zijn – horen erbij.

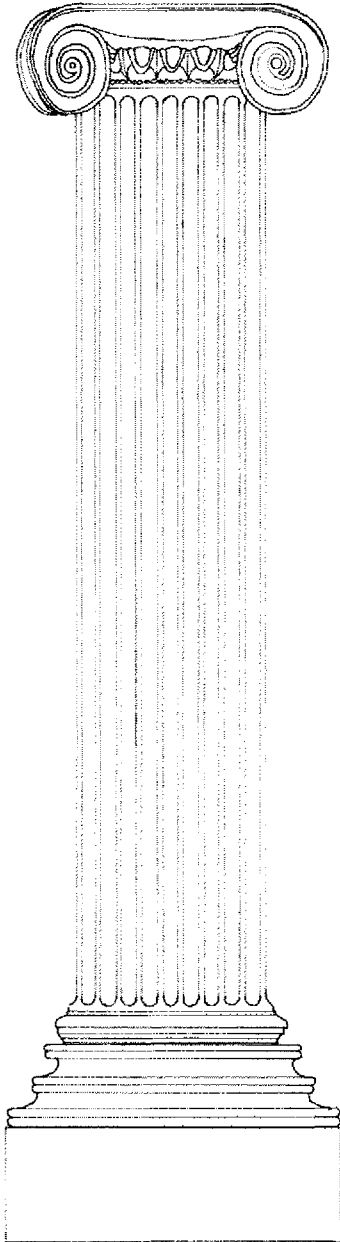
Je kunt met 'Geschick' en 'Glück' selekteren, maar het beeldvormingsproces is nooit volledig te beheersen. Beelden zijn immers altijd beelden-voor-iemand. Zo heeft de ontvanger het laatste woord (klank, beeld), en dat is maar goed ook.

De verantwoordelijkheid van de redaktie wordt er overigens niet minder om.



'pars pro toto'

# kolommen



WISKOBAL

H.FREUDENTHAL

Hoe ziet tegenwoordig een voetbal er uit? Bekijk hem nader — een mozaïek van zes-  
hoeken en vijfhoeken. Om precies te zijn, 20  
zeshoeken en 12 vijfhoeken, naar het schijnt  
in een bonte mengeling. Maar als u de voetbal  
tussen uw vingertoppen laat wentelen, ont-  
dekt u dat er veel symmetrie in dat patroon  
zit.

De figuur van 20 zeshoeken en 12 vijfhoeken  
is eigenlijk een veelvlak, dat onder de lucht-  
druk van binnen een bolgedaante heeft aan-  
genomen. Het is geen *regelmatig* veelvlak. Een  
veelvlak dat *regelmatig* wil zijn, moet door  
één soort *regelmatige*, onderling *kongruente*  
veelhoeken zijn begrensd, waarvan er in elk  
hoekpunt evenveel bijeenkomen. De figuur  
van 20 zeshoeken en 12 vijfhoeken is wat men  
noemt *halfregelmatig*. In plaats van één zijn er  
hier twee soorten *regelmatige* veelhoeken als  
zijvlakken, en die van dezelfde soort zijn on-  
derling *kongruent*.

Maar laten we eerst met *regelmatige* veel-  
vlakken beginnen; en wel allereerst met de-  
gene waarvan de zijvlakken *regelmatige drie-  
hoeken* zijn. Bij een hoekpunt van het veel-  
vlak kunnen er drie, vier of vijf van die drie-  
hoeken bijeenkomen (fig. 1a, b, c — waarbij u  
de gemerkte zijden aan elkaar geplakt moet  
denken). Meer dan vijf *regelmatige drie-  
hoeken* in één hoekpunt zijn *onmogelijk*, omdat zes  
driehoeken samen al een *vlakke* figuur op-  
leveren.

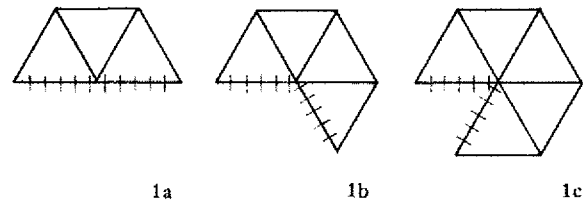


fig. 1

Maakt u de veelvlakken af, dan krijgt u in de  
gevallen 1a, 1b, 1c respectievelijk een *regel-  
matig viervlak*, *achtvlak*, *twintigvlak* (zie  
fig. 2a, b, c).

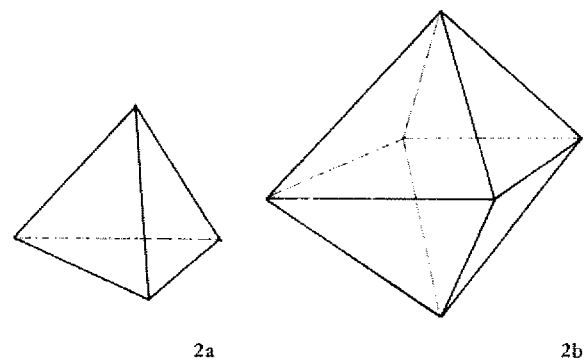
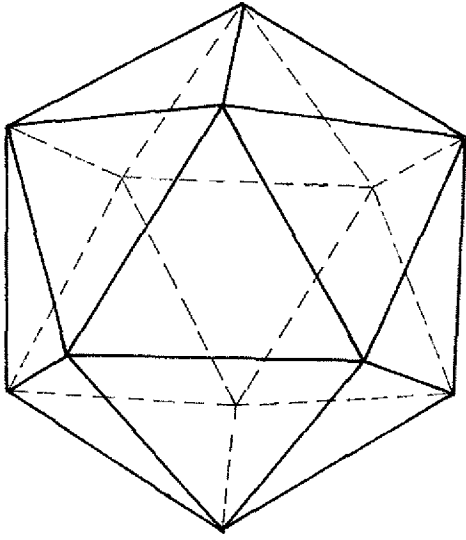


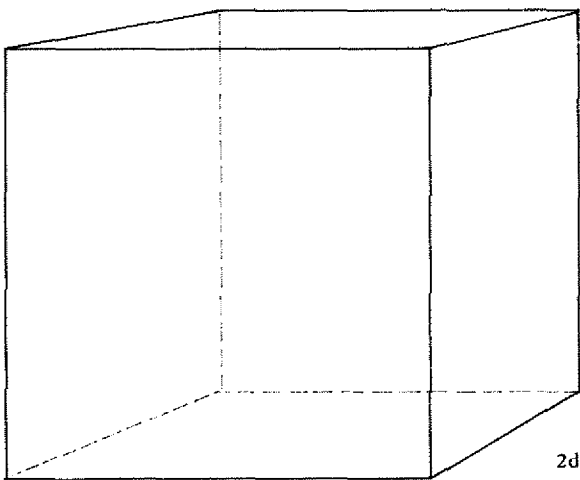
fig. 2



2c

De tekening van het viervlak spreekt voor zichzelf; het achtvlak is klaarblijkelijk uit twee vierzijdige piramiden samengesteld; het twintigvlak heeft boven en onder een vijfzijdige piramide, die in een hoek van  $36^\circ$  tegen elkaar verdraaid zijn, met ertussen een gordel van tien driehoeken die afwisselend met een hoekpunt naar boven en naar beneden wijzen.

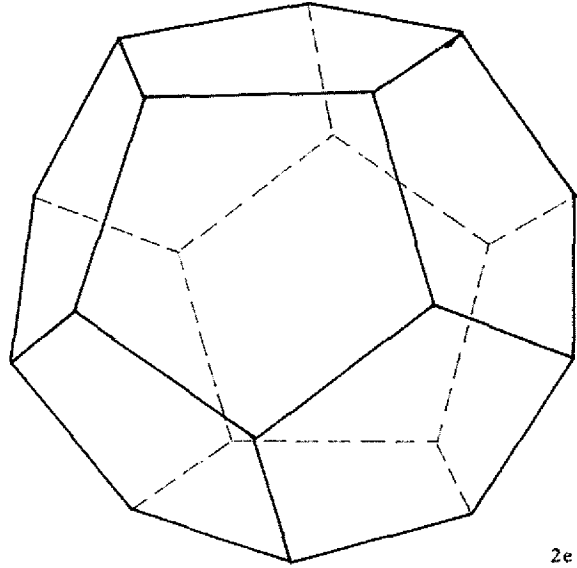
Behalve deze drie regelmatige veelvlakken is er nog één, door vierkanten en één, door regelmatige vijfhoeken begrensd: een zesvlak, ook kubus genaamd en een twaalfvlak (fig. 2d, e).



2d

Meer zijn er niet, want al drie regelmatige zeshoeken in één hoekpunt zouden elkaar tot een vlakke figuur aanvullen.

2a-e zijn de vijf regelmatige veelvlakken, ook platonische lichamen genaamd, omdat ze in een der dialogen van Plato optreden als bouwstenen van het heelal.



2e

Als volgt een lijst van de aantallen zijvlakken, ribben en hoekpunten van die vijf veelvlakken:

zijvlakken	ribben	hoekpunten
4	6	4
6	12	8
8	12	6
12	30	20
20	30	12

Men merkt hier een merkwaardige dualiteit op: het zesvlak heeft 8 hoekpunten en het achtvlak 6 hoekpunten en beiden hebben 12 ribben; het twaalfvlak heeft 20 hoekpunten en het twintigvlak 12 hoekpunten en beiden hebben 30 ribben. En verder: bij een zesvlak komen in een hoekpunt 3 vierkanten bijeen; bij een achtvlak zijn het 4 driehoeken. Bij een twaalfvlak zijn het 3 vijfhoeken in een hoekpunt; bij een twintigvlak 5 driehoeken.

Dit suggereert nauwe verbanden tussen zesvlak en achtvlak, tussen twaalfvlak en twintigvlak. Inderdaad:

\* Teken op de kubus (zesvlak) de middelpunten van de zijvlakken — ze vormen een achtvlak.

\* Teken op het achtvlak de middelpunten van de zijvlakken — ze vormen een zesvlak.

\* Teken op een twaalfvlak de middelpunten der zijvlakken — ze vormen een twintigvlak.

\* Teken op een twintigvlak de middelpunten der zijvlakken — ze vormen een twaalfvlak.

Zesvlak en achtvlak heten *duaal* met elkaar, evenzo twaalfvlak en twintigvlak. Het viervlak heet *zelfduaal*.

\* \* \*

Wil men een veelvlak als voetbal kunnen opblazen, dan verdient het aanbeveling er een

met een groot aantal zijvlakken te nemen, en om er iets fraais van te maken, zouden we graag een regelmatig veelvlak kiezen. Een twintigvlak zou zo gek niet zijn, maar blijkbaar vond men twintig zijvlakken niet genoeg voor een veelvlak dat een voetbal moet worden. Men heeft er een genomen met 20 zeshoeken en 12 vijfhoeken — doet het u niet aan twintigvlak en twaalfvlak denken? Is het er misschien een combinatie van?

Laten we met een gemakkelijker combinatie beginnen. Van een kubus zagen we als het ware de hoeken af, en wel door middel van vlakken, die de drie van zo'n hoekpunt uitgaande ribben middendoor delen (fig. 3).

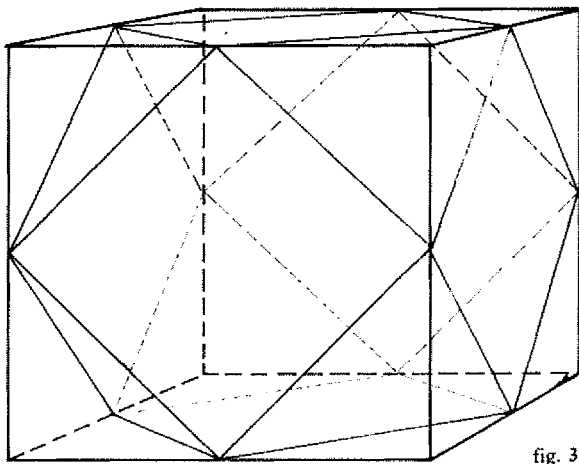


fig. 3

Het viervlak, dat door deze operatie ontstaat, wordt begrensd door zes vierkanten die van de oorspronkelijke zijvlakken van de kubus zijn overgebleven en acht driehoeken, beantwoordende aan de acht (afgezaagde) hoekpunten van de kubus, samen 14 zijvlakken.

Men kan de kubus echter ook wat zuiniger opereren. Men amputere bij de hoekpunten net zoveel dat van de zijvlakken regelmatige achthoeken overblijven. Het ontstaande veel-

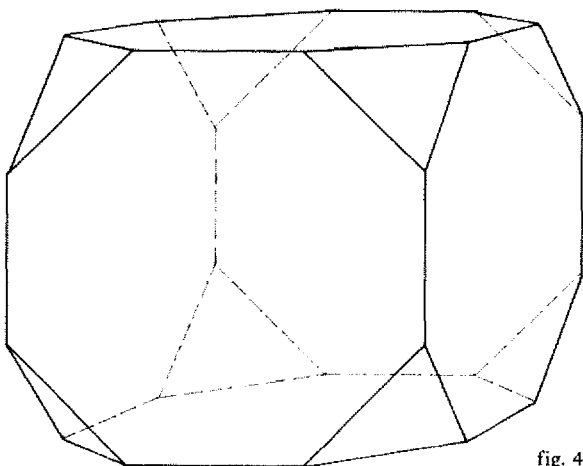


fig. 4

vlak (fig. 4) heeft acht driehoeken en zes achthoeken tot zijvlakken.

\* \* \*

Men kan dergelijke amputaties op verschillende wijzen bij de diverse regelmatige veelvlakken uitvoeren en we doen het nu met het twintigvlak. We zagen de hoeken weg, zodat tenslotte van de diverse driehoekige zijvlakken van het twintigvlak regelmatige zeshoeken resteren. Rond een hoekpunt ziet het er als in

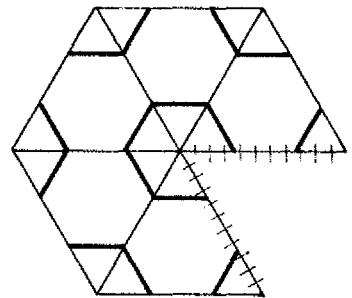


fig. 5

fig. 5 uit (de gemerkte zijden weer aan elkaar plakken!) In 't geheel ontstaat een veelvlak (fig. 6) begrensd door 20 zeshoeken, die er

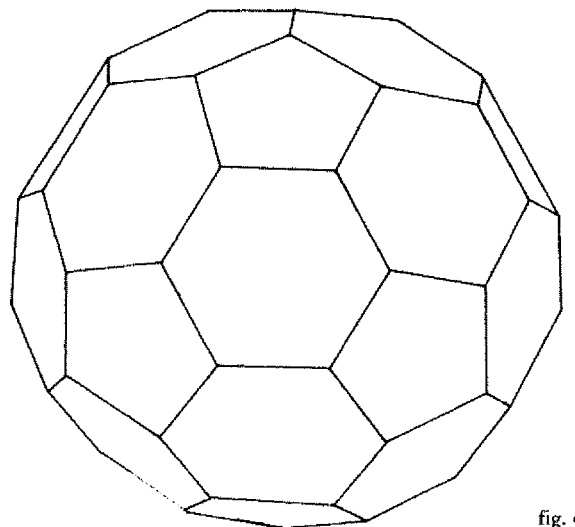
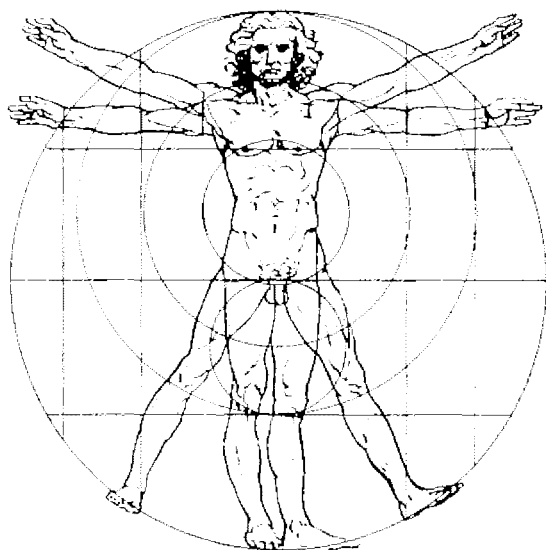


fig. 6

van de zijvlakken van het twintigvlak over zijn, en 12 vijfhoeken, afkomstig van de hoekpunten van het twintigvlak, samen 32 zijvlakken. Elke zeshoek is omgeven door drie zeshoeken en drie vijfhoeken die elkaar afwisselen, beantwoordende aan de zijde en hoekpunten van de oorspronkelijke driehoeken; de vijfhoeken daarentegen liggen los van elkaar, ze zijn door vijf zeshoeken omgeven. De middelpunten van de vijfvlakken vormen een regelmatig twaalfvlak, de middelpunten van de zeshoeken vormen een regelmatig twintigvlak.

Ziedaar de voetbal, een halfregelmatig, of zoals men ook zegt, Archimedisches lichaam.

# wiskunst

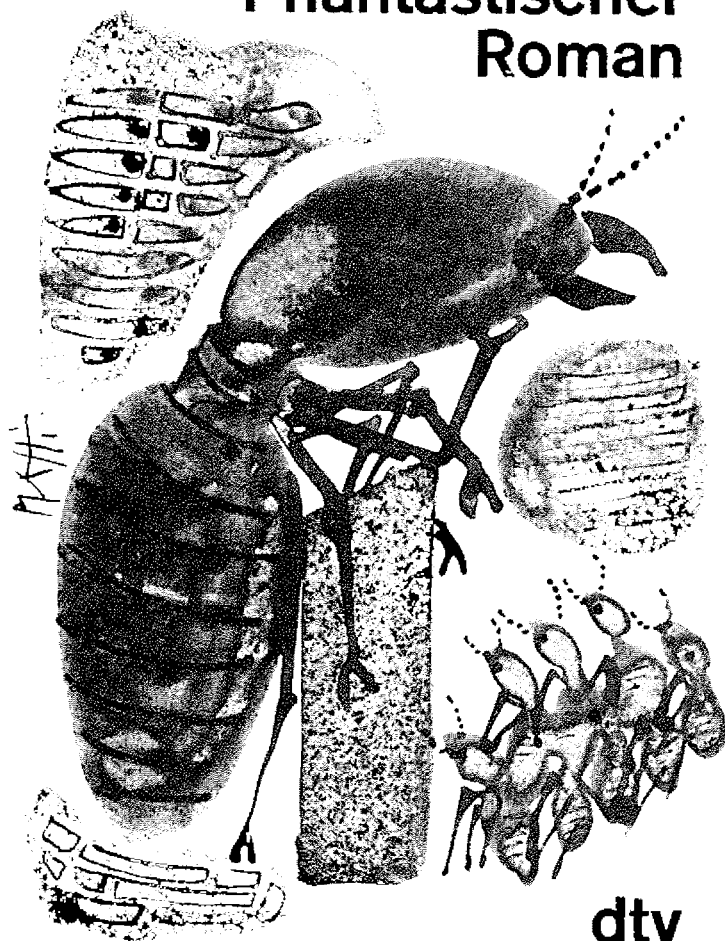


PROF. MMAA'S COLLEGE

F. VAN DER BLIJ

Dit keer aandacht voor de fantastische roman onder nevenstaande titel. De auteur, Stefan Themerson, werd in 1910 in Polen geboren. Deze roman schreef hij in 1942/43 in de Engelse taal en werd in 1953 gepubliceerd. Helaas was ik even tevergeefs op zoek naar de Engelse uitgave en behelp me voor deze wiskunst nu maar met de Duitse vertaling.<sup>1)</sup>

## Stefan Themerson: Prof. Mmaa's Vorlesung Phantastischer Roman



dtv

Het boek heeft een voorwoord van Bertrand Russell, dit is al een aanwijzing dat deze roman gerust in onze rubriek besproken kan worden. Een volgende aanwijzing is te vinden in ander werk van de auteur. Ik noem het in Nederlandse vertaling verschenen *Het leven van Kardinaal Pölatuo*.<sup>1)</sup> Laat ik enkele zinnen uit deze biografie navertellen:

<sup>1)</sup> Deutscher Taschenbuch Verlag, 850, 1972.

<sup>1)</sup> De Bezige Bij, 1967 (inleiding van W.F. Hermans).

'Zelfs als kind wist ge al dat  $2 + 2 = 4$  een andersoortige propositie is als: alle zwanen zijn wit. Als iets een fysisch feit is, moet er dan geen fundamentele fysische constante, zoals  $e, m, M, h, c, G, \lambda$  voor zijn? En als het geen empirisch feit is, zou er dan geen symbool voor zijn bij de logische constanten  $\sim, \nu, \supset, \exists, =, O, s, (, )$ ?'

We weten dat Themerson natuurkunde heeft gestudeerd, van Bertrand Russel zal hij wel de logika hebben leren gebruiken. Overigens vinden we in dit boek reeksen formules, waarvan ik er enkelen als kuriosum afdruk.

4b. waaruit volgt dat

$$dR = \frac{1}{dR}; dR^2 = 1; dR = \pm \sqrt{1}; dR = \pm 1$$

4c. Evenzo

$$iR = \frac{1}{iR}; iR^2 = 1; iR = \pm \sqrt{1}; iR = \pm 1$$

4d. Zijn derhalve beide werkelijkheden groter dan nul,  
5. dan neemt de Katholieke Vergelijking voor de Relativiteit van b. Werkelijkheid de volgende vorm aan:

$$1 = \frac{1}{1}$$

5a. (waarvan de gelijkenis met de vorm van het Kruis al dan niet toevallig kan zijn).

### § III. Over de Drie Werkelijkheden

1. Indirecte Werkelijkheid wordt niet door iemand gemaakt; noch wordt zij geschapen of verwekt.
2. Directe Werkelijkheid komt uit indirecte Werkelijkheid: niet gemaakt, of geschapen, maar verwekt.
3. Taal Werkelijkheid ( $tR$ ) komt uit  $dR$  en  $iR$ : niet gemaakt, niet geschapen, maar voortgesproken uit.

[Men merkt op dat de Vergelijking voor de Relativiteit van beperkte (b) Werkelijkheid geen symbool bevat voor de Werkelijkheid van Taal ( $tR$ ). Dit is zoals het hoort, omdat de Werkelijkheid van Taal een bijzondere eigenschap bezit, nl.  $tR = 0$  te stellen wanneer dit wordt bijgeteld, terwijl zij  $tR = 1$  stelt wanneer dit met iets wordt vermenigvuldigd of er door gedeeld. Dus,

of we nu schrijven dat  $iR = \frac{1}{dR} + tR$  of dat

$$iR = \frac{1}{dR} \cdot tR,$$

Op pag. 193 vinden we in een Science Fiction verhaal, zich afspelend in het jaar 2022, het persoonstransport van de zondagmiddag

televisieserie *Star Trek* van de NOS uitvoerig beschreven.

Een ander, ook bij De Bezige Bij in vertaling verschenen boek *Tom Harris* bevat vele originele, meestal natuurkundige mogelijkheden en onmogelijkheden (televisiekamera als kunst-oog, de waargenomen informatie wordt via een stuk hoofdhuid met de tastzin opgenomen). De wiskunde is daar o.a. in problemen rond oriëntatie van de ruimte en spiegel-invariantie aanwezig.

Maar ik wilde iets vertellen over het College van professor Mmaa, en dat vraagt al inleiding genoeg. De professor en zijn studenten en zijn levensgezellen zijn namelijk termieten. Een faset van hun wetenschappelijk werk wordt bijzonder belicht, de studie van de biologie en in het bijzonder van een ekseptioneel soort zoogdieren, de homo. Informatie over deze soort kan men verkrijgen door zijn lichaam, meest in horizontale stand, te verteren en de informatie – o.a. in zijn kop opgenomen – te verteren. Maar ook zijn er cellulose artefakten, die, mits in horizontale rijen gekonsumeerd, informatie geven. Zo is er volgens *mr. Stefannos* een boek van Maurice Maeterlinck dat veel informatie geeft. Maar *dr. Nosnafets* beweert dat ook dit boek, zoals Thora, Mischna en Gemara van rechts naar links opgegeten moet worden en geschreven is door *Kcnilreteam Eciruam*.

Professor Mmaa en zijn wetenschappelijke staf slaan hun informatie op in chemische structuren. Maar alle details moet u eventueel zelf eens nalezen. Ik wil twee fragmenten naar voren halen.

En wel allereerst uit het hoofdstuk *Matematiek, politiek, muziek, literatuur en wetenschap*.

De assistent Nonobody legt ons uit hoe een termiet rekt. Om 128 met 2 te vermenigvuldigen, laat men de middelste voelspriet de 'c' horen en verandert daarna zijn lengte tot men het oktaaf hoort. De frekwentie leest men af en deze is  $2 \times 128$ . Om 128 met 3 te vermenigvuldigen, verandert men de lengte totdat men de 'gis' hoort, de frekwentie is dan  $3 \times 128$ . Delen kan ook, bijvoorbeeld 6144 door 2048. Men stemt dan de voelspriet op G en C en bemerkt dat een interval van  $9\frac{1}{2}$  noot te horen is. Nu heeft de  $9\frac{1}{2}$  noot na de noot met frekwentie 1 juist de frekwentie 3. Het antwoord van de deling is dus 3.

U ziet: in plaats van meetkundige methoden met evenredige lijnstukken, de muzikale perceptie als rekenmethode.

Een volgende bladzijde laat ik u even integraal zien:

Noten (oder 3 Noten) von der Frequenz 1, so hört man sein Ergebnis, was  $G = 3$  ist (oder  $Fis = 45/32$ ).

Sodann absolvierte er einige Übungen im Erheben von Zahlen zu verschiedenen Potenzen und im Wurzelziehen als auch im Kolorieren einiger chromatischer Tonleitern sowie einiger Passagen und Läufe von geometrischen Progressionsreihen und einer Anzahl von Permutationen und Kombinationen, die man im Umgang mit allen Problemen der Statistik so nötig braucht (und ist nicht die statistische Behandlung der Wechselwirkungen von Organismen als lebenden Ganzheiten die Grundlage für die Konversion der Naturgeschichte zur Wahrwissenschaft?). All das ist aber gar nicht so schwer, wenn man ein geschärftes Hörvermögen hat und wenn man — was Nonobody konnte — bloß nach dem Gehör die beiden Frequenzen 24 000 und 24 001 scharf unterscheiden kann.

Nach einer Pause bei Null lief er flink die Tastatur der harmonischen Reihe bis zum oberen Grenzwert, wo er das Pedal trat, um den Ton durch die ganze lange Pierre-Fermate der Makro-Infinität zu halten; dann, rückläufig, spielte er eine Reihe stetig akzelerierender Stakkati und erreichte auf diese einfache Weise das Infinitesimale, unterdessen die Verse rezitierend:

»Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux Sages!

Immortel Archimède, artiste, ingénieur,  
Qui de ton jugement peut priser la valeur,

Pour moi, ton problème eut de pareils avantages«, — was eine mnemotechnische Methode zum Erinnern der Konstante  $\pi$  war. Schließlich, in die polyphonen Saiten der Matrizen greifend, die sich aus endlosen Zahlenreihen zusammenspannen, wählte er diejenigen davon aus, die verschiedene Zustände eines und desselben Homo repräsentierten und Werte verschiedener Energie von sich gaben oder absorbierten, und mittels einiger weniger Additionen und Multiplikationen rechnete er sie durch.

Nachdem er sich so einige Zeit auf dem großen Rechen-Bio-Pianola — einer der größten Erfindungen der Epoche — eingespielt hatte, machte er sich ans Werk, um das Problem zu lösen, das Professor Mmaa ihm gestellt hatte.

Het 'horen' te gebruiken naast tellen en meten, waarop onze wiskundige ervaring gebouwd is, lijkt een boeiende mogelijkheid. Zou temperatuurzin of reuk ook gebruikt kunnen worden om een wiskunde op te bouwen? Nonobody is een echte wiskundige. Onder zijn aantekeningen zou ik haast geschreven hebben. Maar eigenlijk bedoel ik in zijn chemische associatie vastleggende stof. Hier vinden we: nog eens  $3 \times 2$  precies berekenen. En dat bijvoorbeeld een met trompetten gedanstte fokstrot als een oplossing van wiskundige problemen beschouwd kan worden.

Ik kan niet nalaten nog een fragment te citeren van Nonobody's studies. Een stukje wiskunde, gericht op de vorm van de neus. Ik herken de studies van Birkhoff over formules die de schoonheid van een vorm meten.

**DIE QUANTITATIVE METHODE  
ZUR VERMESSUNG DES RECHTES  
EINES JEDEN INDIVIDUUMS  
AUF BEEINFLUSSUNG EINER  
BESONDEREN ZIVILISATION**

von  
*Periclae Nonobody*

ES gibt eine stetig wachsende Zahl von Bürgern, die die Meinung vertreten, daß der moralische und gesellschaftliche Einfluß bestimmter Individuen oder bestimmter Gruppen von bestimmten Individuen in einer besonderen Zivilisation schädlich ist, und die deshalb anstreben, diesem Einfluß entgegenzuwirken und ihm ein Ende zu setzen. Bis jetzt sind sie bei der

Verwirklichung dieser Prinzipien stark behindert gewesen, weil ihnen der eindeutige Maßstab fehlte, an dem sie die Gegenstände ihrer Untersuchungen hätten messen können. Erst der Verfasser dieser Zeilen hat der Idee die wahrhaft wissenschaftliche Form gegeben, die es von nun an und fernerhin erlauben wird, sie im täglichen Leben — im öffentlichen wie im privaten — praktisch anwenden zu können.

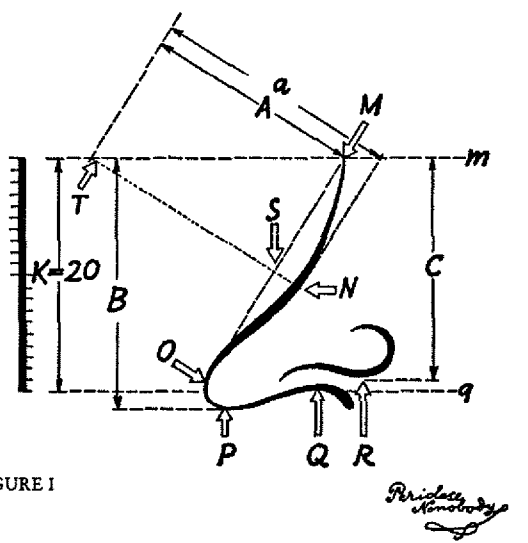


FIGURE I

UM herauszufinden, ob ein Exemplar ( $X$ ) das Recht hat oder nicht, eine besondere Zivilisation zu beeinflussen, müssen wir auf dem äußeren Geruchsorgan besagten Exemplars 6 Punkte markieren, die wir mit den Buchstaben  $M, N, O, P, Q, R$  kennzeichnen (FIGURE I). Durch die Punkte  $M$  und  $Q$  ziehen wir zwei waagerechte Parallelen, die wir entsprechend mit den Buchstaben  $m$  und  $q$  kennzeichnen. Der Abstand zwischen ihnen liefert uns die Quantität  $K$ , die, nachdem wir sie in 20 gleichgroße Abschnitte unterteilt haben, uns als Skala für weitere Messungen dient. — Wir verbinden nun den Punkt  $M$  mit dem Punkt  $O$  und erhalten so die Gerade  $MO$ , auf deren Mitte ( $S$ ) wir die Mittelsenkrechte errichten, die die Gerade  $m$  in einem Punkt schneidet, den wir  $T$  nennen. Die Länge dieser Mittelsenkrechten ( $ST$ ) nennen wir  $A$ , und den Abstand zwischen dem Punkt  $N$  und dem Punkt, in dem besagte Senkrechte die Gerade  $m$  schneidet, nennen wir  $a$  (oder die Strecke  $NT$ ). Der Abstand zwischen dem Punkt  $R$  und der Geraden  $m$  heiße nun  $C$ . Mit Hilfe der Skala  $K$  (immer = 20) messen wir jetzt die Strecken  $A, a, B, C$  und setzen die Meßergebnisse in folgende GOLDENE FORMEL ein, die vom Verfasser dieser Zeilen ausgearbeitet worden ist:

NEU!!!	$\Psi = \frac{2 a C^2 K}{A B^2 (B + C)}$	NEU!!!
DIE INTERESSANTESTE ERFINDUNG DER NEUZEIT!!!		

Er zijn behalve wiskundige ook natuurkundige opmerkingen te vinden, bijvoorbeeld de berekening hoe snel revolverkogels van termieten zouden moeten gaan om de lichamen van andere termieten te doordringen. (Men had een liggende homo gevonden met een vreemd metalen objekt in zijn kardinaalpompe). De snelheid blijkt in een grove berekening de lichtsnelheid te overtreffen en dus is zo'n apparaat volgens de relativiteitstheorie niet mogelijk. Maar professor Seele ziet daar dan slechts een argument tegen de relativiteitstheorie in.

Randopmerkingen, zoals over de centrale rol van het getal 4 in het leven van de homo's — bijvoorbeeld vier ledematen, aan hun kleren benen voorwerpjes met vier gaten, enzovoorts, enzovoorts — moet u zelf maar ontdekken als u professor Mmaa's college gaat volgen.

Bertrand Russel schreef in zijn voorwoord:

'Er zijn te veel mensen op de wereld, die te veel geloven, en misschien ligt de hoogste wijsheid in de regel, dat wij des te weniger schade aanrichten, naarmate we minder geloven. Voor degenen, die deze regel aanvaardden, zal professor Mmaa's college een nuttig evangelie zijn.'

\* \* \*

Hadden we de vorige keer een beeldend kunstenaar — Paul Klee —, vandaag beperken we ons tot deze ene auteur en welhaast tot dit ene boek.

Als varium nog een tweetal aanwijzingen.

\* Op de Hoge Veluwe staat in de beeldentuin van het Kröller Müller Museum een wonderere toren van kabels en — ogenschijnlijk in de lucht zwevende — metalen staven. Het is een werkstuk van *Kenneth Snelson*.

Bij het Stedelijk Museum in amsterdam staat in de tuin een kleinere variant. Wellicht gaan we deze konstruktie een volgende keer eens analyseren.

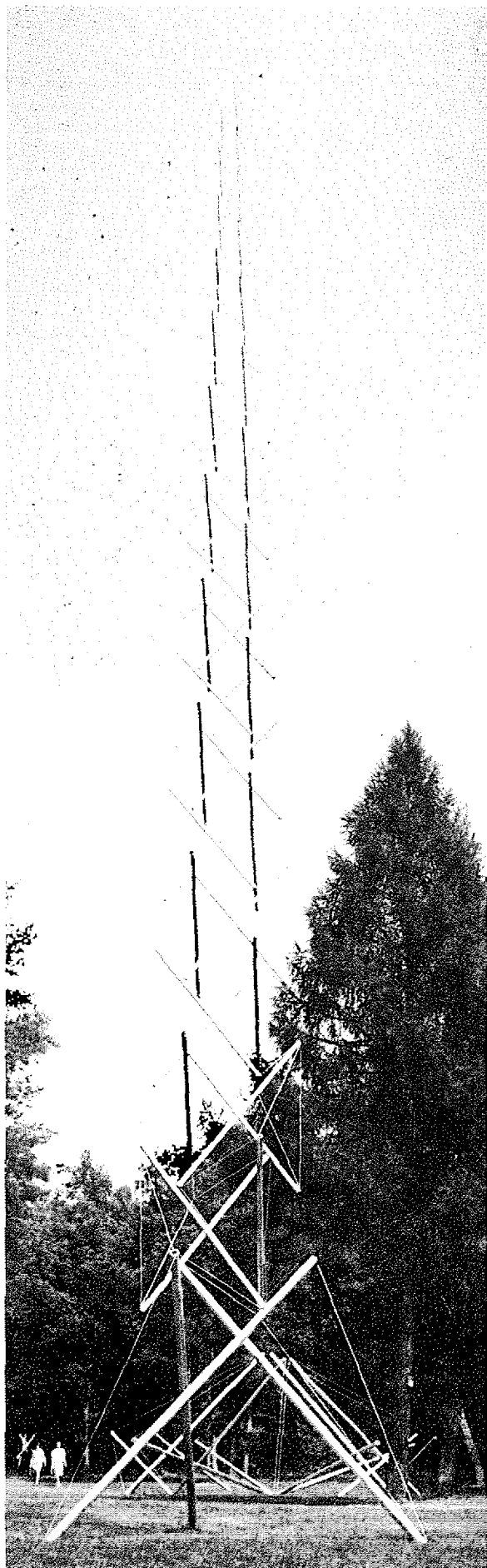
\* In het Stedelijk Museum in amsterdam hangt op de eerste verdieping een fraai wiskundig kunstwerk. De italiaan *Alighiero Boetti* (geb. 1940) is daar vertegenwoordigd met *Senza Numero*, 1972.

Het werk bestaat uit enveloppen gefrankeerd met 200 lire, gevormd door het naast elkaar plakken van postzegels van 5, 10, 25, 40, 50 en 70 lire. De brieven zijn verzonden naar Galleria Sperone, Torino.

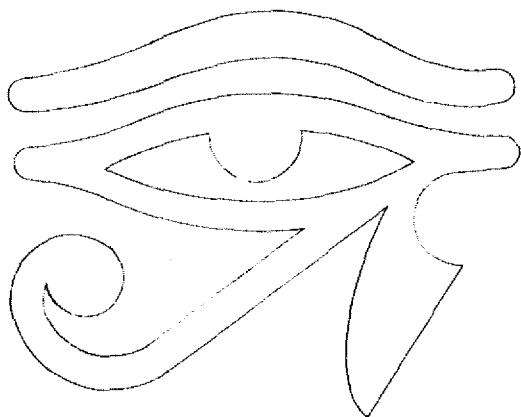
De kunstenaar stuurde de brieven met de zes postzegels<sup>1)</sup>, in alle mogelijke volgorde naast elkaar geplakt. Alle brieven (heeft u al even berekend dat het er  $6.5.4.3.2.1 = 720$  zijn?) zijn ordelijk in 30 rijen van 24 brieven in een schilderijlijst ondergebracht.

Heeft u een voorstel wat 'ordelijk' in dit verband zou kunnen zijn?

<sup>1)</sup> Alle inzenders van wiskundige postzegels dank; vooral als je er wat natuurkunde bij neemt is er een mooie tema-verzameling van te maken.



# problema- tika



HUUB JANSEN

1

REKENEN MET VIER VIEREN



$$\frac{4 + 4}{4 + 4} = 1$$

$$\frac{4 \times 4}{4 + 4} = 2$$

$$(4 + 4 + 4) : 4 = 3$$

$$\frac{4444}{4444} = 4$$

$$\frac{4444}{4444} = 4$$

U ziet het! Met precies vier cijfers 4 is een begin gemaakt van een rijtje sommen met uitkomsten 1, 2, 3, ....

De vraag is natuurlijk *hoever we, al doende, in de rij der natuurlijke getallen kunnen doordringen*. Tot 10, tot 20, tot 100? Wie zal het zeggen?

Duidelijk is wel dat een soepel toelaten van allerlei rekenkundige bewerkingen het aantal mogelijkheden sterk doet stijgen:

$$\sqrt{4} + \sqrt{4} + \frac{4}{4} = 5$$

$$\frac{4!}{4} \times \frac{4}{4} = 6^1$$

Aangezien we in een prestatie-maatschappij leven, zijn wij benieuwd wie van de lezers met vier vieren het verste komt. De prijs daarvoor is slechts roem en eer. Goede prestaties vermelden we in een van de volgende nummers van dit bulletin met naam en toenaam.

En dat betekent dan dat duizenden nederlanders uw naam vol bewondering zullen uitspreken!

*Werkt daarom allen mede!*

<sup>1)</sup> 4! is de verkorte schrijfwijze van  $1 \times 2 \times 3 \times 4$ .

2

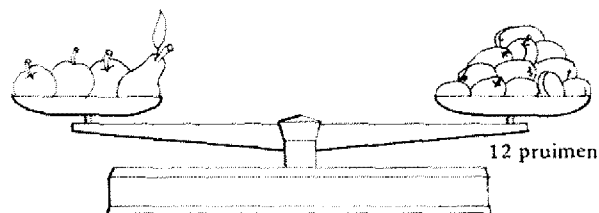
## HET VERHAAL VAN DE EENZAME GROENTEMAN



De groenteman om de hoek doorleeft zware tijden. Een supermarkt – groot, glimmend en bol van reclame – zuigt al zijn oude klanten weg.

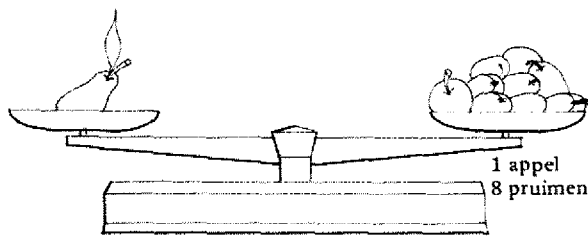
Die reclame dwingt ieder te geloven dat machinaal in plastic verpakte groente en fruit lekkerder, gezonder en goedkoper is.

Bedroefd staart onze groenteman naar zijn antieke weegschaal waarop een aantal prachtig rijpe appels en pruimen tesamen met een enkele peer in vreedzaam evenwicht op kopers ligt te wachten.



Het duurt uren vóór een toevallige klant toch nog waardering voor dit glanzende fruit weet op te brengen.

Somber gestemd speelt onze kleine zelfstandige met de resten van zijn koopwaar en, al probeerend, brengt hij weer evenwicht in de materie:

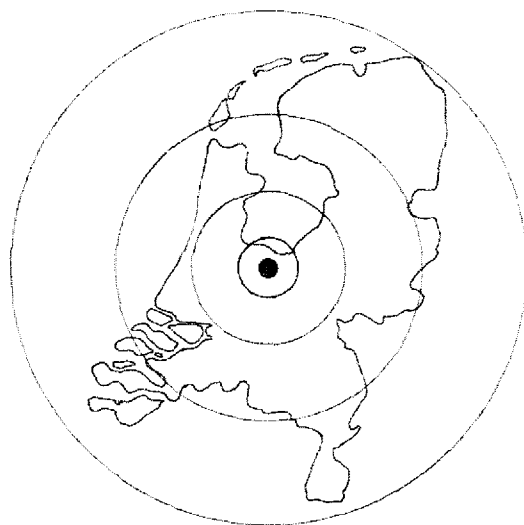


Tenslotte verlost een tweede klant hem nog van de resterende pruimen en de appel. Uitsluitend de peer herinnert nu nog aan het vak dat hier in vroeger tijden met zoveel plezier werd uitgeoefend.

Slechts de theoretische vraag *hoeveel pruimen er nodig zouden zijn om met die ene peer evenwicht te maken*, hield onze middenstander voor de rest van de dag nog op de been ....

Teoretisch, want we nemen maar aan dat elke appel even zwaar is, en dat ook pruimen maar één standaardgewicht kennen.

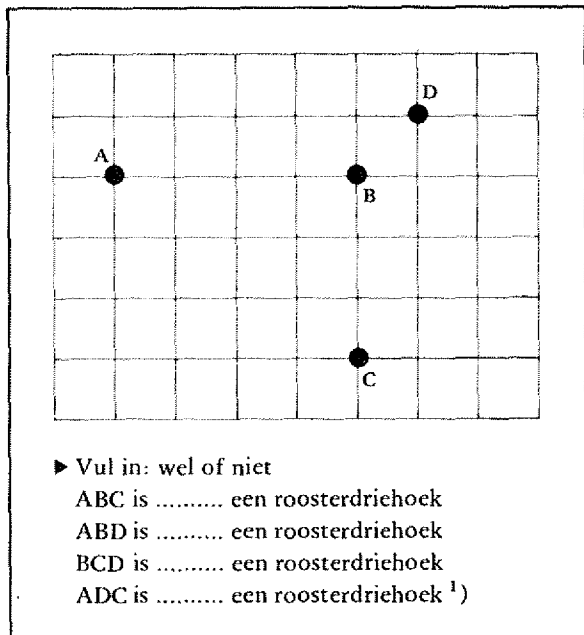
# berichten uit het binnenland



*Uit de activiteiten die in samenwerking met diverse instanties uit het onderwijs hebben plaatsgevonden, hebben we een tweetal gekozen waarvan we hier kort verslaggeven.*

*De beide verslagjes beginnen met een of twee problemen; deze zijn opgenomen om een sfeertekening te geven. De oplossingen kunt u vast zelf wel vinden. Waar nodig, zijn wat aanwijzingen gegeven.*

LOUIS GILISSEN



Dit probleem was een van de opgaven uit een praktikum 'Het Stadsplan', dat de leerkrachten van een viertal basisscholen kregen door te werken tijdens twee bijeenkomsten in gebouw 'De Echo' te Hilversum op 4 oktober en 1 november j.l.

Bovendien hadden deze leerkrachten in de eerste bijeenkomst 'huiswerk' opgekregen. Enkele suggesties voor activiteiten moesten in de klas uitgevoerd worden. Tijdens de tweede bijeenkomst werd verslag uitgebracht van dit huiswerk. De bedoeling van dit alles zal blijken uit het volgende.

Op dit ogenblik worden Wiskobas-heroriënteringskursussen voor onderwijzers gegeven. Deze kursussen duren 2 jaar (per jaar 20 bijeenkomsten van ieder 2 uur). Tijdens die bijeenkomsten worden 9 blokken aan de orde gesteld. (Stadsplan, Grafieken, In Orde -dubbel

<sup>1)</sup> Dit probleem is voor lezers, die nog geen kennis hebben gemaakt met het blok 'Stadsplan' niet zonder meer op te lossen. Enkele aanwijzingen:

- de punten in deze meetkunde zijn de roosterpunten (snijpunten van de roosterlijnen);
- onder de verbindingslijn tussen 2 punten verstaan we de verzameling van wegen die we langs de roosterlijnen kunnen afleggen van het ene naar het andere punt, zonder een omweg te maken;
- zo'n weg noemen we een afstandsweg;
- een punt A ligt tussen een punt B en een punt C als A ligt op een afstandsweg van B naar C;
- in de vlakke meetkunde kunnen we een driehoek definiëren als een verzameling van 3 punten - die niet alle 3 op één rechte lijn liggen - mét de verbindingslijnen tussen die punten.

blok-, Spijkerbord, Tel-op-Tal, Open Bepalingen, Meten, Waarschijnlijkheid en Statistiek).

De vraag kan gesteld worden - en die vraag werd ook binnen Wiskobas gesteld -: kun je nu van iedere leerkracht van het basis- of kleuteronderwijs verwachten dat hij of zij een zoveel tijd en energie verslindende cursus gaat volgen? De vernieuwing van het rekenonderwijs is niet het enige dat de aandacht van de mensen in het onderwijs opeist.

Vanuit deze vraag zijn we gaan denken aan een alternatief in de vorm van een cursus die slechts één jaar in beslag neemt en waarin toch in voldoende mate aandacht geschonken wordt aan de voor het basisonderwijs relevante wiskunde op het niveau van de onderwijzer en het doorvoeren van deze wiskunde in de praktijk van het onderwijs in de klas.

Wil dat verwezenlijkt worden dan zal een groter gedeelte van de bijeenkomsten besteed moeten worden aan de wiskunde op het niveau van de onderwijzer en minder aan het praktijkwerk dan in de 'normale' kursussen het geval was.

Als dan dat praktijkwerk toch volledig tot zijn recht moet komen - en dat is zeker de bedoeling - dan zal in de school zelf meer moeten gebeuren. We denken hierbij aan teambesprekingen onder leiding van een begeleider (of in aanwezigheid van een begeleider) en begeleiding in de klas bij de lessen. Samenwerking met een begeleidingsinstituut is noodzakelijk.

Vanuit deze gedachten is in mei 1973 contact gezocht met de schoolpedagogische en -psychologische dienst (SPPD) in Hilversum. Na enige gesprekken met directeur en medewerkers van de SPPD bleek, dat een begeleiding - als hierboven summier aangeduid -, strookte met de begeleidingsstrategie van deze dienst.

Grofweg is die strategie als volgt: de dienst biedt het basisonderwijs in de regio Hilversum een aantal mogelijkheden (onderwerpen), waarin begeleiding kan worden ontvangen (rekenen, wereldoriëntatie, e.d.); volledige schoolteams kunnen op een onderwerp intekenen en ontvangen dan een vier jaar durende begeleiding met betrekking tot dat onderwerp.

Het jaar heroriënteringskursus met begeleiding in de praktijk zou een onderdeel kunnen vormen van die vier jaar durende begeleiding. Overeengekomen werd, dat die vier jaar als volgt zullen worden ingedeeld:

- eerste jaar : cursus, gegeven door twee medewerkers van Wiskobas met begeleiding van medewerkers van de SPPD;

- tweede jaar: onder begeleiding van onderwijskundige medewerkers van de SPPD, bijgestaan door medewerkers van Wiskobas, invoeren van delen van een nieuw schoolwerkplan voor het wiskunde-onderwijs in alle klassen;
- derde jaar: evaluatie van de activiteiten in het tweede jaar en invoering van een geheel nieuw schoolwerkplan voor het rekenonderwijs in alle klassen;
- vierde jaar: evaluatie van het werk in het derde jaar; revisie en doorvoering van de gerevideerde versie van het schoolwerkplan.

De mate waarin de activiteiten in het tweede en derde jaar zullen plaatsvinden, is afhankelijk van ervaringen gedurende de eerste twee jaar.

Dat de schoolteams, die voor begeleiding bij het rekenen hadden ingeschreven, zelf moesten beslissen of ze met een dergelijk begeleidingsmodel in zee wilden gaan, werd als vanzelfsprekend beschouwd. Ook zouden de leerkrachten van die teams inbreng moeten hebben in de vormgeving van een en ander.

Een vijftal schoolteams – summier op de hoogte gebracht van deze opzet – had ingetekend op begeleiding bij rekenen. Op 4 oktober en 1 november werden bijeenkomsten gepland met als doel:

- kennismaking met het IOWO (afdeling Wiskobas)
- het kennisnemen van de plannen
- beslissing over het al dan niet doorvoeren van deze plannen
- vaststelling van het aantal bijeenkomsten en verdere vormgeving.

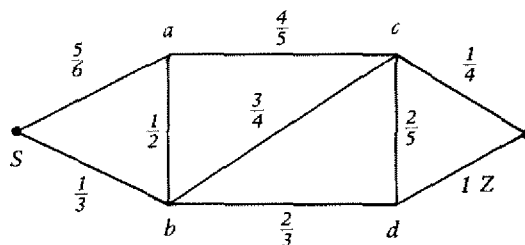
Om deze doelstellingen te realiseren, werd op 4 oktober informatie gegeven over het IOWO en in het bijzonder over het werk van de afdeling Wiskobas. Verder werd 'Blok 0: Stadsplan – Oriëntatie over Wiskobas' aan de aanwezigen gepresenteerd. Vervolgens werd aan dit blok gewerkt, zoals dat in het vervolg van het eerste jaar zou gebeuren. Huiswerk werd opgegeven: suggesties voor de eigen klas uit het tweede deel van het blok moesten op school worden uitgevoerd. Op 1 november vond hiervan een verslaggeving plaats (een aanzienlijk aantal leerkrachten had zijn huiswerk gemaakt). Tevens werd de rest van het praktikum afgemaakt en besproken.

Na een discussie, waarbij werd ingegaan op diverse vragen van de kant van de leerkrachten, besloten 4 van de 5 schoolteams mee te doen. Afsproken werd dat om de 3 weken bijeen zou worden gekomen onder

leiding van de 2 medewerkers van het IOWO. In de tussenliggende periode zal een teambespreking worden gehouden in aanwezigheid van een medewerker van de SPPD, gewijd aan het praktijkwerk bij de cursus.

*Het grote belang van dit samenwerkingsproject zal u duidelijk zijn. Het gaat om een meer hanteerbare vorm van heroriëntering van leerkrachten met betrekking tot het wiskunde-onderwijs. Maar dat niet alleen. Daarnaast zal – naar wij hopen – een overdraagbaar model van begeleiding ontstaan, een begeleiding die wij van wezenlijk belang achten voor de invoering van een modern wiskunde-onderwijs aan 4-12-jarigen.*

► 100 jaar geleden was het in het wilde westen gevaarlijk om te reizen. Hieronder ziet u een kaartje waarop een aantal roetes van plaats S naar plaats Z is getekend. Bij ieder traject is de kans op overleving aangegeven. Zoek de meest veilige roete. (Je mag geen weg twee keer afleggen).



► Een groep van negen mensen kwam aan bij de grens west-duitsland-nederland. Vier mensen van dit groepje hadden ettelijke flessen geestrijk vocht in hun bagage gestopt. De dienstdoende douane-beambte pikte 3 man ertussen uit en onderzocht hun bagage. Bij alle drie werd (niet aangegeven) drank gevonden. De vraag luidt: is deze douane-beambte zo handig dat hij de 'schuld' van het gezicht van de mensen afleest of heeft hij toevallig een goede greep gedaan?

Op 2 en 3 november ontvingen wij op het instituut bezoek van prof. A. Engel van de Goethe-universiteit te stuttgart. Dit gebeurde op uitnodiging van prof. Freudenthal en onder auspiciën van het Goethe-instituut te amsterdam.

Prof. Engel had zich bereid verklaard enige uiteenzettingen te geven over zijn (beroemde) werk op het gebied van de kansrekening in het onderwijs. 2 november stond in het teken van de basisschool en op 3 november stond de bovenbouw van het voortgezet onderwijs centraal.

Tijdens de ochtend van 2 november besprak prof. Engel voor een gezelschap van genodigden (docenten pedagogische academie, die hadden deelgenomen aan het experiment 'De Teerling') en medewerkers van het IOWO een aantal voorbeelden van activiteiten op het gebied van kansrekening in verschillende klassen van het basisonderwijs.

Eerstgenoemd sommetje is een voorbeeld van een opgave, die met succes in de 3e en 4e klas kan worden opgegeven. Grafen (wegendiagrammen) nemen een centrale plaats in bij de kansrekening, zoals prof. Engel die voorstaat. Aan iedere weg is een kans toegevoegd ('Pfadwahrscheinlichkeit').

De opgave is hier een aardige illustratie van. De produktregel rolt er automatisch uit als je start met een aantal (zeg 180) mensen en je rekent uit hoeveel er via een gekozen weg in Z uitkomen.

Deze opgave illustreert ook de volgende opmerking van prof. Engel:

'Ik geef u een aantal voorbeelden van opgaven die met succes in de verschillende klassen van de basisschool kunnen worden aangeboden. Ik ga niet voor u analyseren wat er allemaal voor wiskundige activiteiten in zitten. Een verstandig iemand kan dat er zelf wel uithalen. In ieder geval zit er in praktisch elk voorbeeld een grote dosis rekenen.'

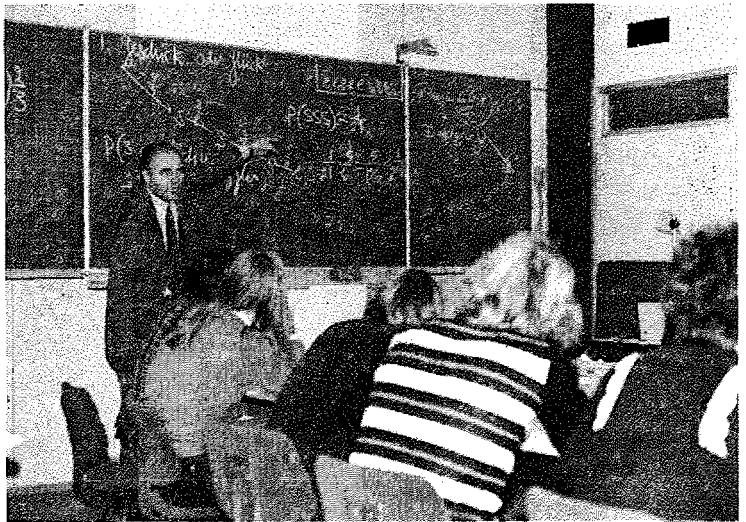
Nog enige belangrijke punten:

- \* Simuleren is belangrijk tot men het probleem met rekenen kan oplossen.
- \* Het vertalen van een probleem in een grafe speelt bij dit onderwijs een grote rol.
- \* Er wordt in de door prof. Engel gecoachte klassen ook aan beschrijvende statistiek gedaan: het gebruikelijke verzamelen van statistische gegevens uit het dagelijks leven. Het probleem hierbij is om goed materiaal te vinden.

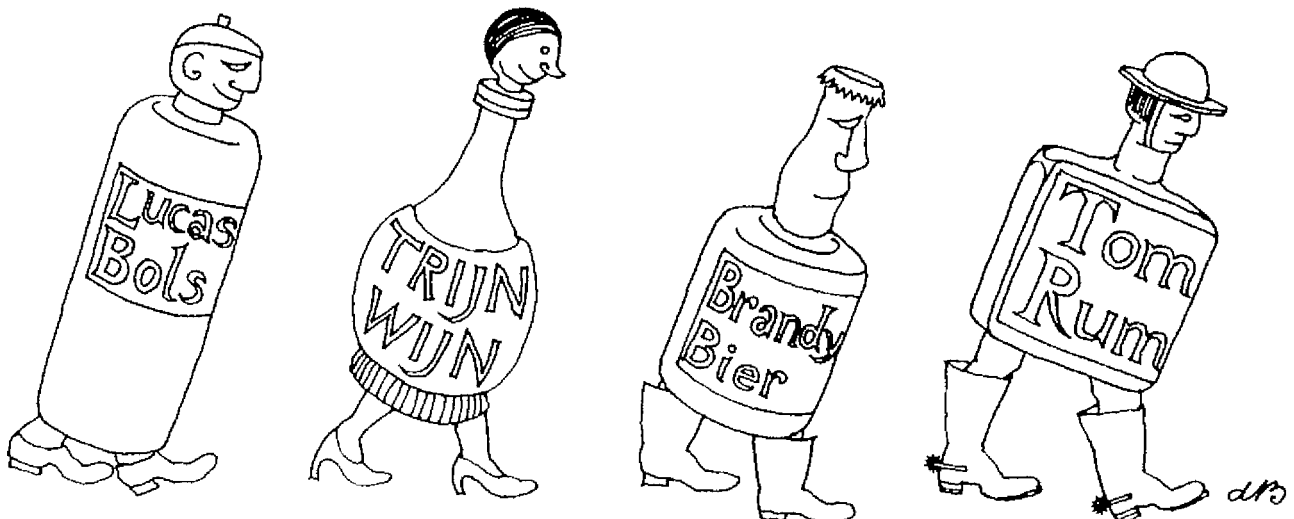
In de middag gaf prof. Engel les aan een groep studenten van pedagogische akademies uit eindhoven, meppel en arnhem.

'Ik ga u in 80 minuten 'waarschijnlijkheid' bijbrengen, zoals dat ook bij 13-jarigen gebeurt. De waarschijnlijkheid is een zo eenvoudige tak van de wiskunde, dat dat mogelijk is. We hebben hierbij precies 2 regels nodig.'

Ook in deze les demonstreerde prof. Engel duidelijk dat met zeer eenvoudige middelen, te weten de grafen als voorstellingsmiddel en twee eenvoudige regels (som- en produktregel), een schat van problemen uit de waarschijnlijkheid kan worden opgelost. Het tweede probleem is hiervan een voorbeeld.

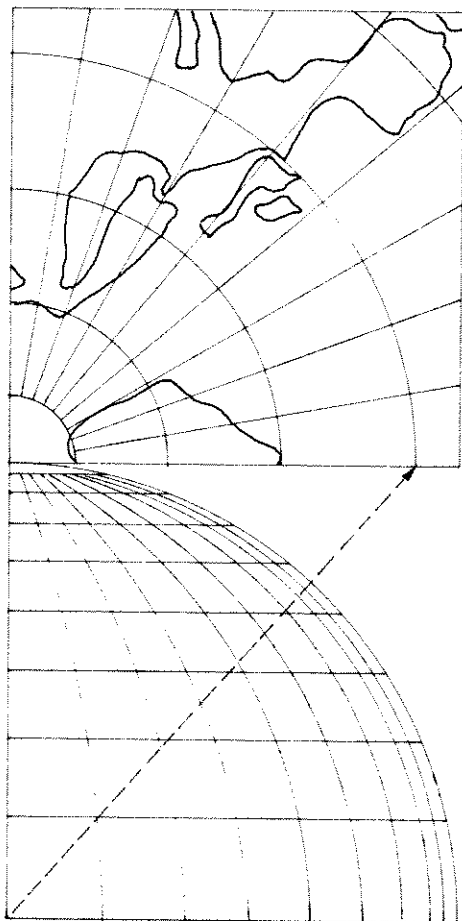


Op zaterdagochtend 3 november sprak prof. Engel voor een aantal genodigde wiskundeleraars van het vwo. Ook hier liet hij aan de hand van enkele voorbeelden zien dat je in de bovenbouw van het vwo met bovengenoemde eenvoudige hulpmiddelen geweldige dingen kunt doen op het terrein van de waarschijnlijkheid.



'bet douane-probleem'

# berichten uit het buitenland



KLAAS KOSTER

Met ingang van het schooljaar 1972/1973 geldt in de bondsrepubliek Duitsland een nieuw wiskunde-rekenleerplan voor de basisschool. Alle eerste klassen zijn vorig jaar gestart met nieuwe wiskunde-programma's. Dit jaar komen daar de tweede klassen bij, volgend jaar de derde klassen, enz.

Het besluit tot invoering van dit nieuwe programma werd al genomen op 3 oktober 1968 door de 'Kulturministerkonferenz' (K.M.K.), een orgaan waarin alle Duitse deelstaten zijn vertegenwoordigd. De totstandkoming en effectuering van dit besluit ging gepaard met heftige discussies over de inhoud van het nieuwe leerplan, waarbij o.a. veel werd geschreven over het nut van het leren van verzamelingentaal binnen het aanvankelijk reken-wiskunde-onderwijs. Maar uiteindelijk hebben deze discussies weinig invloed gehad op het van kracht worden van het nieuwe leerplan of op de inhoud ervan.

Net als in Nederland wel zal gebeuren, hebben de Duitse producenten van schoolboeken en ander onderwijs-leermateriaal geantisipeerd op de invoering van het nieuwe leerplan door allerlei daarop aansluitende onderwijsleerprogramma's te publiceren.

Bij één van de grote Duitse schoolboekenproducenten, het Ernst Klett Verlag te Stuttgart, verscheen in dit verband een wiskundepraktikum over kombinatoriek en waarschijnlijkheid, waaraan Arthur Engel, Tamas Varga en Willy Walser meewerkten. Het wiskundepraktikum bestaat uit een 'kansist' en een daarbij behorende handleiding met spelletjes. In een nog bij Klett te verschijnen leerkrachtenhandboek worden de achtergronden (wiskundig en didactisch) en de gebruiksmogelijkheden van het kansistmateriaal uitvoeriger beschreven. Omdat onlangs Arthur Engel bij het IOWO op bezoek was, besteden we in dit bericht graag wat aandacht aan deze uitgave. De nadruk zal daarbij vallen op de onderwijskundig-didactische kant van het geheel.

Maar eerst iets over de drie auteurs.

*Arthur Engel:* werkt in Duitsland als wiskunde-didactiek docent en is als adviseur-medewerker verbonden aan het Amerikaanse Cemrel project van Burt Kaufman.<sup>1)</sup>

*Tamas Varga:* werkt in Hongarije en verricht veel onderzoek naar het leren van waarschijnlijkheidsbegrippen door jonge kinderen.<sup>2)</sup>

*Willy Walser:* werkte enige jaren samen met Dienes in Sherbrooke (Canada) en verricht — evenals Varga — onderzoek naar het leren van

<sup>1)</sup> Zie de leerplanologie-rubriek van dit bulletin.

waarschijnlijkheidsbegrippen door jonge kinderen.<sup>3)</sup>)

Dit drietal gaat bij de opbouw van hun programma uit van een reeks didaktische stappen, die begint met spelen met concreet materiaal en eindigt met het in symbolen vastleggen van de regels die de uitkomsten van deze spelen verklaren. Zij besteden in hun didaktiek veel aandacht aan de wijze waarop de overgang van concreet handelen naar abstracte formuleringen kan worden gerealiseerd.

In alle gevallen dient volgens de auteurs het invoeren van nieuwe wiskundige begrippen te beginnen met senso-motorische ervaringen van de leerlingen. Daartoe biedt de dagelijkse omgeving van de kinderen talrijke mogelijkheden, maar vaak in een vorm waarin de aandacht van de kinderen niet op de in die situatie relevante dimensies valt. Daarom moeten de leerlingen via de leerkracht gewezen worden op de dagelijkse problemen die met combinatoriek en waarschijnlijkheid te maken hebben.

Naast het materiaal, dat de dagelijkse omgeving rechtstreeks biedt (denk bijvoorbeeld aan de voorbeelden uit 'Kijk op Kans'), gebruiken Engel c.s. vooral speciaal gekonstrueerde leermiddelen, zoals koppelbare rekenkubussen, gekleurde kralen en staafjes, dobbelstenen, kanstollen, kleurige spelborden, enz.

Ter toelichting op de afzonderlijke fasen in het abstractie-proces geven zij o.a. een analyse van het spelletje 'Wie bouwt de meeste torentjes?':

#### *Vrije spelfase*

Eerst bouwt het kind gewoon zo kleurig mogelijke torentjes — en misschien houdt het zich daarbij aan de gestelde regels om de leerkracht een genoegen te doen. Maar vooral heeft het plezier in de mooie torentjes die het bouwt.

#### *Spelen met regels*

In tweede instantie worden voorwaarden gesteld waaraan de te bouwen torens moeten voldoen. Dan moeten bijvoorbeeld alle mogelijke torentjes gebouwd worden met een

bepaalde hoeveelheid kubussen. Het uiteindelijke doel is, onafhankelijk van het concrete probleem van het bouwen van de torentjes, vast te stellen hoeveel combinaties van  $n$  elementen te vormen zijn van  $k$  verschillende elementen. Maar zo'n algemene formulering kan pas plaatsvinden na een groot aantal ervaringen met concreet gebouwde torentjes.

#### *Gebanteerde regels bij het spelen noteren*

Om te controleren of tijdens het bouwen van torentjes, die aan bepaalde voorwaarden moeten voldoen, geen mogelijkheden over het hoofd zijn gezien, stellen Engel c.s. het gebruik voor van grafische voorstellingen, zoals bijvoorbeeld boomdiagrammen. Deze 'vertalen' de gebouwde of te bouwen situaties in een half abstracte taal, die het mogelijk maakt de aandacht te richten op de belangrijke eigenschappen.

Bomen zijn, aldus Engel, grafische middelen, die bruggen slaan tussen concrete situaties en abstracte begrippen. Bomen dragen er toe bij orde te scheppen en een overzicht te krijgen van de situatie. Wordt het aantal mogelijkheden groter, dan worden ook bomen onoverzichtelijk. Op dat moment voeren Engel c.s. het gebruik van tabellen in. Bomen geven een aanschouwelijker beeld, tabellen konsentreren meer informatie op een kleiner formaat en maken de informatie gemakkelijker toegankelijk.

Door tenslotte *formules* in te voeren wordt het laatste stadium bereikt.

In een bespreking van het verschil tussen combinatoriek en waarschijnlijkheid merkt Engel op dat een 'oorzaak vinden van een ontdekte situatie' binnen de waarschijnlijkheid veel later wordt bereikt dan binnen de combinatoriek. Hij waarschuwt dan ook tegen waarschijnlijkheidsleer als deduktieve theorie voor de basisschoolleerlingen.

De werkwijze in 'Zufall oder Strategie' (de titel van de lerarenhandleiding) sluit aan bij de opvattingen van Dienes en Servais over het verloop van de overgang van concrete naar abstracte begripsvorming en wordt ook in de ontwikkelde spelen didactisch gerealiseerd. Wel heb ik de indruk dat Engel c.s. soms te snel overgaan van het spelen met regels naar een formalisering van deze regels in schema's en/of formules. In de terminologie van de russische leerpsychologen zou meer aandacht geschonken moeten worden aan het verwerven van een 'oriënteringsbasis'.

Aansluitend bij suggesties van Freudenthal lijkt de indeling van Engel in nivo's van wiskundig handelen wel aanknopingspunten te bieden voor de konstruktie van differentiatie-modellen in het wiskunde-onderwijs.

<sup>2)</sup> Literatuur: Varga T. — 'Combinatorials and Probability for Young children' (Journal of Structural Learning, Vol. 1, no. 2-4, 1969).

<sup>3)</sup> Literatuur: Daniël Gilis en Bernhard Héraud — 'Introduction des Probabilités à l'Elémentaire' en Willy W. Walser — 'Le comportement des enfants face aux situations aléatoires, fonction de la fréquence des événements' (Journal of Structural Learning, Vol. 3, no. 2, 1972, 41-77).

# een pijnlijke operatie

*De lezers van dit bulletin zullen zo langzamerhand wel weten dat de behoefte aan scherpe reacties, aan polariseren, niet zo groot is bij Wiskobas.*

*Toch dient op dit moment een pijnlijke operatie te worden verricht.*

*Onlangs verscheen namelijk een — op zich niet eens zo bar slecht — boekje voor de pedagogische academie.*

*Dit boekje is op te vatten als representant van een o.i. gevaarlijke tendens, en wel om de wiskunde te beschouwen vanuit een grote hoeveelheid min of meer samenhangende definities en notaties. De operatie is m.n. op deze tendens gericht en niet zozeer op het boek zelf — al vormt het wel het aangrijpingspunt.*

H. FREUDENTHAL

Uit een boekje voor de pedagogische academie<sup>1)</sup> citeer ik het begin, de eerste halve bladzij:

## *Verzamelingen*

Het begrip verzameling laat zich niet definiëren. De grondlegger van de verzamelingentheorie (Georg Cantor 1845-1918) gaf weliswaar een definitie van zijn 'Mengenlehre', maar later heeft men terecht bezwaren tegen zijn definitie geopperd.

Wanneer we spreken over de verzameling kinderen uit het gezin Bos, weten we echter wel, wat hier met het woord verzameling bedoeld wordt.

Belangrijker is, dat een verzameling nauwkeurig omschreven moet zijn. Zou het echtpaar Bos een kind hebben geadopteerd, dan moeten we uitdrukkelijk vermelden, of we dit kind al dan niet tot de genoemde verzameling rekenen.

De verzamelingenleer heeft tal van wijsgerige en wiskundige problemen opgeroepen. Wij gaan aan deze problemen voorbij en behandelen de zogenaamde naïeve verzamelingenleer. In dit hoofdstuk komen hoofdzakelijk eindige verzamelingen ter sprake.

We gaan nu de verzameling kinderen uit het gezin Bos nader bekijken.

Uit het huwelijk van de heer en mevrouw Bos zijn 7 kinderen geboren, en wel 3 jongens: Jan, Klaas, Wim; 4 meisjes: Astrid, Til, Mien, Nora. Voor het gemak duiden we deze 7 kinderen met hun klein geschreven voorletters aan.

Als u niet begrijpt wat Cantor's definitie van zijn Mengenlehre is, wees gerust — ik begrijp het ook niet en kan zelfs niet gissen wat bedoeld zou kunnen zijn. Uiteraard is het ook niet de bedoeling dat het begrepen wordt. Wat men onder naïeve verzamelingenleer bedoelt, weet ik wel, maar niet wat er in dit boekje mee bedoeld wordt.

Ook zonder iets van wiskunde af te weten, zal de lezer konstateren, dat de auteur niet de juiste betekenis hanteert van het nederlandse woord 'gezin'. Volgens het woordenboek en het normale taalgebruik is 'gezin' synoniem met 'huishouding', eventueel beperkt tot ouders en kinderen. Of uit het huwelijk van de heer en mevrouw Bos zeven kinderen zijn gesproten, zegt niets omtrent de samenstelling van het gezin Bos. Misschien zijn er al enkelen van overleden, misschien woont er geen meer bij zijn ouders. Misschien zijn de ouders ook al dood.

<sup>1)</sup> J.H. Meijer, Rekenen en moderne wiskunde, Thieme, Zutphen, 1972.

Maar vooral, hoe weet de schrijver dat de heer en mevrouw Bos zeven kinderen hebben en hoe ze heten? Ik verdenk de schrijver ervan, dat hij maar iets verzonnen heeft om zijn lezers op de mouw te spelden. Mag je in de wiskunde zo maar wat verzinnen? Wel, je mag veronderstellingen verzinnen, om er conclusies uit te trekken. Bijvoorbeeld: je mag verzinnen, dat die driehoek daar (ook al lijkt hij er niet op) gelijkzijdig is, om te bewijzen dat hij dan ook gelijkhoekig is. Het prettige is nu dat, als je eens echt een gelijkzijdige driehoek tegenkomt, je het bewezene kunt toepassen. Maar hoe rechtvaardig je wat je omtrent het gezin Bos hebt verzonnen?

\* \* \*

Ik heb uit het begin van het boekje iets geciteerd. Ik zou echter niet willen suggereren dat het zo verder gaat. Ik heb het boekje maar ten dele doorgewerkt. Het aantal fouten overtreft op geen bladzijde de drie en het gemiddelde per bladzijde zal bij de één liggen. Dit is vergeleken met wat men op dit gebied in 't buitenland te zien krijgt — trouwens stilaan ook bij ons — weinig te noemen. Er komt nog bij dat de auteur geen nieuwe fouten heeft verzonnen en zelfs van de gebruikelijke fouten een aantal heeft vermeden.

Ik zal straks enkele saillante fouten signaleren, maar daarvoor heb ik dit stuk niet geschreven. Ik vind het boekje echt niet zodanig om wegens zijn fouten te worden afgekraakt. Bovendien is dit een averechtse procedure. De reactie op een negatieve kritiek is heel gauw: als dit boek werkelijk zo slecht is, dan zal het voor mijn klas wel net goed zijn. Ik vind trouwens dat de auteur zich veel moeite heeft getroost, om zich duidelijk uit te drukken, en soms zelfs van originele denkbeelden blijkt geeft. Ik keur het boek niet om zijn fouten af, maar om principes, dat stel ik echter tot het eind uit. Ik zou het niet van de P.A. willen weren. Integendeel, het zou daar een voortreffelijk onderwerp van kritisch onderzoek kunnen zijn.

\* \* \*

Het begint ermee, dat zeven kinderen afgekort met hun zeven beginletters worden aangeduid. Hoe zou het zijn geweest als enkele van die namen met dezelfde letter waren begonnen? Weer zo'n gekke vraag. Maar er zit meer achter. Het *lettergebruik in de wiskunde* is een karakteristiek, maar didactisch moeilijk te verwerken verschijnsel. Het is het grote probleem bijvoorbeeld in het algebra-onderwijs. Hoevelen falen niet, omdat ze op dit punt nooit tot het juiste begrip geraken.

Letters worden in de wiskunde praktisch alleen gebruikt om variabelen aan te duiden. In

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

staan  $a$  en  $b$  voor alle getallen, in

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

staan  $A, B, C$  voor alle punten die samen een driehoek met een rechte hoek bij  $B$  vormen, in

$$A \subset A \cup B$$

staan  $A$  en  $B$  voor willekeurige verzamelingen, in

$$p \Rightarrow p \vee q$$

van de logikataal staan  $p$  en  $q$  voor alle proposities.

Ik geef toe dat er uitzonderingen zijn; als er ergens

$$\pi = 3,1415926\dots$$

staat, kan het zijn dat die  $\pi$  tot nader order of tot het einde der tijden maar dit ene getal betekent, en met

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$$

bedoelt men geen variabele, maar vaste objecten (de verzameling der natuurlijke, gehele, rationale, reële getallen, respectievelijk), maar het merkwaardige lettertype wijst er al op dat hier iets bizonders aan de hand is.

In tegenstelling met het wiskundig gebruik bedoelt schrijver in de eerste hoofdstukken met letters meestal konstanten. Dit is didactisch volstrekt verwerpelijk. Het kost ontzaggelijk veel moeite om beginnelingen bij te brengen, dat letters variabelen voorstellen en dat dus best  $a = b$  kan zijn. Elk gebruik van letters als konstanten, indien dan in 't geheel aan te bevelen, dient van ekstra waarschuwingen vergezeld te gaan en zeker in een boekje dat onderwijzers van het vak op de hoogte moet stellen.

Natuurlijk heeft de schrijver ook letters voor variabelen nodig en wel direkt op de eerste bladzij. De invoering geschiedt, hoewel eerder gesuggereerd is dat letters konstante betekenis hebben, zonder enig commentaar. Als letter die een variabele moet aanduiden, dient daar  $x$ , blijkbaar omdat dit praktisch niet als beginletter van namen voorkomt; later komt er nog  $y$  bij, hoewel de vaak voorkomende naam Yvonne dit zou kunnen beletten. In hoofdstuk II worden ook  $p, q, z$  als aanduiding van variabelen toegelaten en ineens vanaf hoofdstuk 7 dient de lezer zonder toelichting te aksepteren, dat  $m$  en  $n$  niet respectievelijk Mien en Nora zijn en dat het om duistere redenen nu zelfs mag gebeuren dat  $m = n$  is. De  $x$  die op de eerste bladzij ineens verschijnt moet 'een willekeurig kind uit het gezin Bos

aanduiden', zegt de auteur en noteert dan de kinderverzameling van het gezin in de vorm

$\{x \mid x \text{ is een kind uit het gezin Bos}\}$

De lezer zal zich de ogen uitwrijven. Waarom niet eenvoudig

$\{x\}$ ?

Immers: aangezien  $x$  al bij voorbaat alleen kinderen van het gezin Bos doorloopt, is die tweede helft overbodig. In andere gevallen, zoals blz. 17

$\{x \mid x \text{ is een 5vd}\}$

enz., zou ik gissen dat de schrijver bedoelt 'de leeftijd van  $x$  is een vijfvoud', aangezien ik me niet kan voorstellen hoe een kind (al was hij een vijfving) een vijfvoud zou kunnen zijn. Gelukkig komt die notatie verderop praktisch niet meer voor.

Op blz. 10 wordt de *universele verzameling* ingevoerd:

'een vaste verzameling waarvan alle in een beschouwing voorkomende verzamelingen deelverzameling zijn. Nemen we  $K = \{j,k,w,a,t,m,n\}$  dan kunnen we bijvoorbeeld alle gezinnen, die in dezelfde straat wonen als de familie Bos, als universele verzameling nemen. Nu geldt  $K \subset U$ .'

Dit is totaal fout.  $K \subset U$  betekent, dat elk lid van  $K$ , dus elk kind Bos, ook lid van  $U$ , dus een gezin is uit die straat. Daar kan natuurlijk geen sprake van zijn. Misschien heeft de auteur bedoeld  $K \in U$ . Maar zelfs dit is fout. Het zou namelijk betekenen, dat  $K$  ook een gezin is uit die straat. Maar dat is  $K$  niet;  $K$  is deel van het gezin Bos (alleen de kinderen). Verder is het voorbeeld, hoe dan ook, ondeugdelijk om te illustreren wat de schrijver op de twee volgende bladzijden met  $U$  doet; er valt naar dit  $U$  geen komplement te vormen. Gelukkig wordt de universele verzameling even gauw weer van de agenda afgevoerd. In de echte verzamelingenleer bedoelt men met universele verzameling iets wat anderen dan specialisten nauwelijks aangaat of uit te leggen valt. De schrijvers van boekjes, die menen, dit op laag nivo te kunnen behandelen, hebben een klok horen luiden, maar weten niet waar de klepel hangt.

Zoals de schrijver *orde-relaties* invoert, bedoelt hij kennelijk totale orde.

'Het is vaak zinvol, de elementen van een verzameling te ordenen volgens een bepaald voorschrift', waarop een voorbeeld van totale orde volgt. De definitie, die daarop volgt, slaat echter op partiële orde. Op zijn minst had dit verschil moeten worden uitgelegd.

Op blz. 71 worden de *aksioma's van Peano* voor de natuurlijke getallen opgesomd. De enige toepassing ervan is opgave 2, op blz. 73:

'Welk axioma van Peano leert ons, dat het aantal natuurlijke getallen oneindig groot is?'

Het is een uiterst moeilijk vraagstuk en geheel misplaatst in een boek, waarin praktisch geen wiskunde voorkomt. De behandeling van dit vraagstuk vereist heel speciale technieken, maar de lezer heeft nergens een bewijs of redenering gezien, waar hij aanwijzingen tot het bewijs uit zou kunnen putten. De auteur vermoedelijk ook niet. Immers het antwoord (blz. 179) 'Ax.2' is gewoon fout; onmisbaar zijn aksioma 1 (tegenvoorbeeld: lege verzameling), aksioma 3 (tegenvoorbeeld: eindige cyclische verzameling), aksioma 4 (tegenvoorbeeld  $\{1,2\}$  waarbij 2 opvolger van 1 en 2 is). Van aksioma 2 wordt alleen een helft gebruikt die bij een juistere formulering elders had moeten worden geplaatst.

Op blz. 72 wordt beweerd dat zekere eigenschappen van optelling en vermenigvuldiging door middel van de aksioma's van Peano kunnen worden bewezen. Dit is onzin, aangezien er in het aksioma-systeem van Peano geen andere operatie dan de opvolger-operatie voorkomt.

\* \* \*

Laat ik het hierbij laten. Er is een ander, belangrijker, faset. Op de eerste  $4\frac{1}{2}$  blz. (van niet te groot formaat) worden over de lezer welgeteld *30 definities en notaties* uitgestort, en hoewel elke door één voorbeeld is geïllustreerd, lijkt me dit wat teveel van het goede. Er wordt van die definities of notaties nauwelijks verteld wat je ermee doet. Het is ook niet nodig. Na hoofdstuk 5 mag je ze allemaal vergeten, samen met de vele anderen, die er inmiddels nog bij zijn gekomen. Ze worden nergens toegepast en er wordt ook niet aangeduid waar en hoe ze ooit zouden kunnen worden toegepast. Na hoofdstuk 6 wordt het iets beter. Toch worden de aksioma's van Peano opgeschreven, zonder een idee van een toepassing (behalve een foutief vraagstuk). In hoofdstuk 12 worden sneden van Dedekind gedefinieerd, zonder enige toepassing. Maar voor 't overgrote deel bevatten de hoofdstukken vanaf het zesde wat ouderwetse 'rekenkunde', met wat algemene didaktische opmerkingen, en met een totaal gebrek om deze stof dan toch wiskundig te doordringen. Het geheel bestaat uit losse opmerkingen — een hap hier en snap daar. Het meest groteske teken van de ongerelateerdheid van rekenen en wiskunde is wel de titel van Hoofdstuk 10 'Breuken (De verzameling  $Q$ )' — noch verzamelingen noch die  $Q$  komen verder in dit hoofdstuk ter sprake, maar wel

het meest ouderwetse dat je van breuken kunt vertellen.

Ik beklemtoon het nog eens: dit boek slaat temidden van wat er zo geproduceerd wordt, nog niet zo'n slecht figuur.

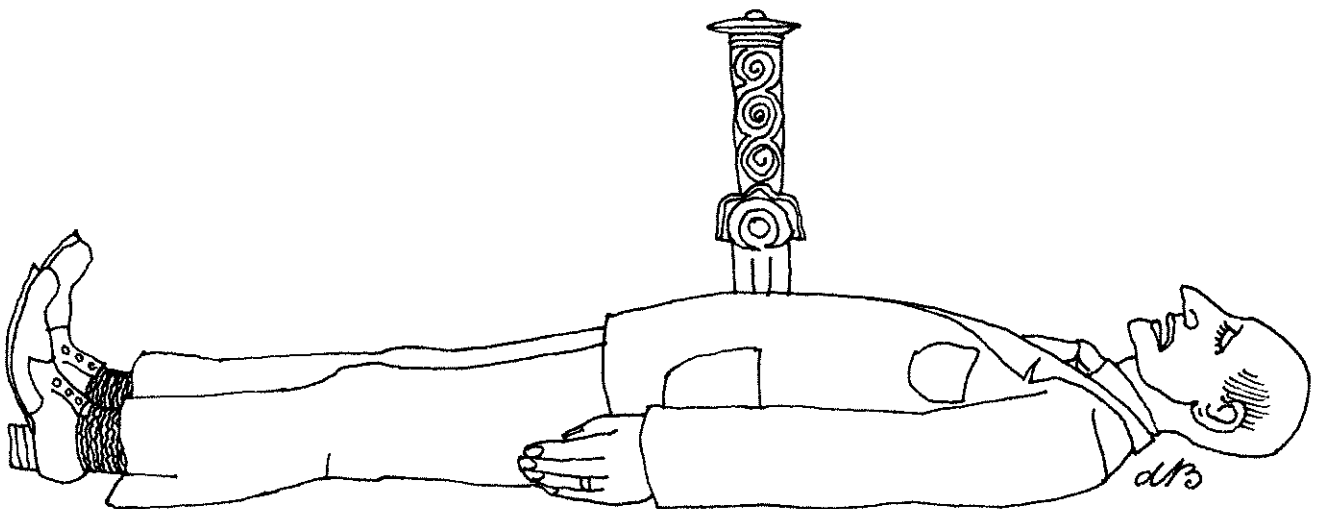
Boeken die dit soort verzamelingen leer wél met het rekenen willen relateren, doen het meestal nog erger. Bij de auteur blijft de zogenaamde rekenkunde in al haar poverheid dan toch in 't algemeen onbesmet door schijnwiskundige grootspraak.

Hetgeen in dit boek en in talloze andere als 'moderne wiskunde' wordt aangeboden, heeft met werkelijke wiskunde bitter weinig te maken. Een onverteerbare hoop definities en notaties. Niet wordt duidelijk gemaakt waarvoor deze zaken dienen. Een algemene tendens komt aldus naar voren. Men neemt eenvoudig over wat men elders — in buitenlandse boekjes — vindt.

Ik wil niet op de droevige historie ingaan. In verschillende landen wordt sinds enkele jaren speciaal voor de school gefabriceerde matema-

tische nonsens als moderne wiskunde gepropageerd. Vooral in Duitsland heeft dit zich weten door te zetten. Ik heb de Duitse wiskundigen er jaren lang tegen gewaarschuwd. Ze haalden de schouders op, omdat ze het niet mogelijk achtten dat zoiets in het — uitstekende — Duitse rekenonderwijs ooit ingang kon vinden, en ze deden niets. Ze krijgen nu de rekening thuis, in de vorm van een ontwricht rekenonderwijs. In Frankrijk is het zo mogelijk nog erger, al liggen de moeilijkheden daar in het voortgezet onderwijs.

In Nederland zijn we er gelukkig tot nu toe aardig in geslaagd de boot af te houden. Af en toe wordt er iets van die buitenlandse literatuur, vertaald of vrij bewerkt, over onze grenzen gespoeld, af en toe verschijnt er in Nederland iets wat daarop geïnspireerd is. Men begrijpt nu waarom ik op het besproken boekje zo scherp heb gereageerd. *Het is een pijnlijke operatie, maar zij is nodig.* Niet



omdat het zo bar slecht zou zijn, maar om wat er op zou kunnen volgen. Het zou het eerste schaap kunnen zijn, dat een hele kudde voorspelt, en daarvoor is mij ons wiskundeonderwijs te lief.

*Losse brokjes van definities en notaties vormen geen wiskunde*, en het rekenen valt er niet mee te doordringen, al staat de rekenkunde in hetzelfde boekje. Echte wiskunde is geen los zand, maar in zichzelf gerelateerd, gerelateerd met het rekenen en met de realiteit. Maar vooral: wiskunde is een middel, een geesteshouding, om problemen op te lossen — echte, levende problemen, die heus niet gekompliseerd en hoogdravend hoeven te zijn. Wiskunde dient ergens voor — iedereen voelt dit tegenwoordig enigszins aan, als hij van ruimtevaart of computers hoort spreken en economische grafieken ziet. Er bestaat een enorme goodwill voor de wiskunde. Natuurlijk kun je iemand zonder voorbereiding niet vertellen hoe een satelliet elektronisch bestuurd en een economisch model wiskundig geëvalueerd wordt. Je kunt je leerlingen niet uitleggen wat er allemaal met de wiskunde gedaan kan worden, en dat hoeft ook niet. Je kunt wel — op elk nivo — laten zien *dat* er iets met wiskunde kan worden gedaan, en dat *iedereen* er iets mee kan doen. Iemand opzadelen met een wiskunde waar hij niets mee kan doen, is te veel van het goede. Iemand verstoken doen zijn van die wiskunde die hij wel kan gebruiken, is hem geestelijk uithongeren.

Nog iets: studenten heten vandaag 'kritisch' te zijn. Ik weet te weinig van de gang van zaken af, om te kunnen zeggen, hoe vaak ze de vraag stellen 'waarom moeten we dit leren?' en hoe vaak ze het terecht doen. 'Om eksamen te doen' is een afdoende, maar onbevredigende verklaring. Het is zeker niet altijd gemakkelijk om iemand die net begint een onderwerp te bestuderen uit te leggen, waarvoor hij dit of dat moet leren. Desniettemin dacht ik, dat wij als docenten en als leerstof-ontwerpers voortdurend aan het antwoord op die vraag moeten werken. En dit kan bijvoorbeeld geschieden door niet een in te pompen leerstof te presenteren, maar de leerling met problemen te konfronteren, die de moeite waard zijn opgelost te worden en waarvan het oplossen hen een stap verder brengt, objectief en subjectief.

*Zijn dit hooggespannen idealen?* Laat ik dan dicht bij de grond blijven, heel dicht bij de grond. Ik dacht dat we alle leerstof moeten weren, waarvan we, als de leerling vraagt 'waarvoor dient dat?' met een goed geweten alleen maar kunnen zeggen: 'nergens voor'.

# leerplan<sup>o</sup> logie

*Nevenstaand artikel vormt het besluit van een serie artikelen over wiskundeonderwijs en leerplanontwikkeling. Het geeft een globaal overzicht van de voorgaande bijdragen tegen de achtergrond van een andere visie op wiskundeonderwijs en leerplanontwikkeling.*

JOHAN VAN BRUGGEN  
ADRI TREFFERS

# BESTELKAART

**Ik schrijf in voor de**

## **ALGEMENE MISSIE KALENDER**

**tegen de prijs van f 3.90**

---

**Naam:**

**Straat:**

**Plaats:**

**Handtekening,**



AAN

MISSIEPROKUUR KARMEL  
Stommeerweg 15  
AALSMEER  
02977-20251 - Giro 84633

*Leerprijs 10,-*

## 0 INLEIDING

Gedurende een vrij korte periode in het voorjaar van 1973 bezochten twee medewerkers van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs de plaats carbondale in het zuiden van illinois in de verenigde staten van noord-amerika.

Tijdens bezoeken aan scholen, observaties van lessen, gesprekken met kinderen en vooral vele gesprekken met stafmedewerkers groeide een beeld van het *Comprehensive School Mathematics Project (CSMP)*. Het beeld werd verscherpt door een vrij grondige studie van publikaties vanuit CSMP en vooral door de analyse van de onderwijzersteksten en het leerlingenmateriaal, dat tot dusverre is ontwikkeld voor het wiskunde-onderwijs aan jonge kinderen.

Aldus ontstond de hierbij aangeboden beschrijving van een leerplanontwikkelingsproject, dat in vele opzichten lijkt op het werk van het IOWO. Bij grondiger studie vallen toch vele verschillen op, die niet alleen worden veroorzaakt door de verschillende maatschappelijke en onderwijspolitieke situaties, waarbinnen beide projecten werken, maar ook en vooral door het verschil in visie op wiskunde en wiskunde-onderwijs, dat aan de dag treedt.

### 1 DE VISIE VAN CSMP OP WISKUNDE EN WISKUNDE-ONDERWIJS, MET NAME OP DE DOELSTELLINGEN VOOR WISKUNDE-ONDERWIJS

Op 20 oktober 1972 hield Gerald R. Rising van de State University of New York, lid van het 'CSMP National Advisory Committee' een rede voor een groep wiskunde-leraren in des moines, IOWA over het thema '*Some current directions in mathematics education*'. (9)\*) Daarin keerde hij zich fel tegen de huidige tevredenheid over het wiskunde-onderwijs dat vanaf 1950 drastisch veranderd is. Sinds 1960 is er naar zijn mening een stilstand gekomen in de ontwikkeling. Het gevolg is dat de v.s. een achterstand hebben op europese en japanse ontwikkelingen. De 'mathematical community' is ingeslapen. Ondertussen hebben de 'behaviorists and technologists' hun slag geslagen en is hun opvatting van de wiskunde bepalend geworden voor het beeld van het wiskunde-onderwijs in de v.s. Volgens Rising zien zij wiskunde als

'merely a skill that is susceptible to trivialization by programmed instruction, teaching machines, computer drill programs, and individualized cradle-to-grave workbooks'.

\*) De tussen haakjes geplaatste cijfers verwijzen naar het literatuuroverzicht aan het eind van dit artikel.

Hun invloed is zo groot, dat een groep die door het nieuwe National Institute of Education (NIE) was ingesteld om leerplanontwikkelingsprojecten — die door de federale regering worden gefinancierd — te evalueren, adviseerde om de steun aan het enige 'contents-oriented' wiskunde-project, namelijk CSMP, te beëindigen. Alleen IPI (Individually Prescribed Instruction) van het 'Learning Research and Development Center' te pittsburgh en een project van de universiteit van wisconsin (Romberg en Steitz) om test-items voor wiskunde-begrippen te ontwerpen wilde men in het NIE onderbrengen.

Rising stelt dat de kwaliteit van het onderwijs al drastisch geleden heeft onder de pogingen om het onderwijs 'teacher-proof' te maken met behulp van allerlei geïndividualiseerde en/of technische systemen. Een dergelijk systeem is immers nog veel moeilijker te hanteren dan een konventioneel onderwijssysteem. Veel beter zou het zijn de 'quality of teaching' te verbeteren door a.s. onderwijzers te laten werken onder supervisie van 'master teachers' die hoog beloond zouden moeten worden. Verbetering van het onderwijs moet beginnen met een verbetering van de onderwijzersopleiding. De wiskunde-onderwijzer moet geschoold worden in het zoeken naar betere voorbeelden, originele problemen, diepergaande vragen. Hij kan dan zeker concurreren met de door 'behaviorists' ontworpen systemen.

Deze rede van Rising is exemplarisch voor de toon van diverse artikelen van staffunctionarissen van CSMP als Kaufman, Haag, Braunfeld, Exner e.a. Er spreekt een diepe bezorgdheid uit ten aanzien van de wetenschappelijk-onderwijskundige benadering van het wiskunde-onderwijs, waarin het 'eigenlijke' van de wiskunde verdwijnt in de lawine van operationele doelstellingen, test-items en geïndividualiseerde systemen. Men verwerpt niet het streven naar 'accountability' (rekening afleggen van wat je doet in het onderwijs door je te bezinnen op de doelstellingen), maar wel de wijze van uitwerking. De psychologische benadering leidt hierin tot atomisering en trivialisering. Niet de psycholoog of de algemeen-onderwijskundige zou doelstellingen (goals) moeten bepalen, maar: de beroepswiskundige, de gebruiker van wiskunde en de wiskunde-onderwijzer die goed getraind is in de moderne wiskunde. Alleen dan kunnen doelstellingen voldoen aan de ook door 'educationalists' onderschreven criteria van: *relevantie, efficiency en nut*.

Het algemene doel van CSMP is dan ook:

'to build a school mathematics curriculum in which the content truly reflects modern mathematical knowledge and applications, and which is anticipated from archaic goals set in the past by non-mathematically oriented educators'. (2;3)

Een andere formulering:

'the ultimate aim of the CSMP curriculum is to produce an American public that is mathematically literate'. (10;1)

Over dit begrip '*literacy*' heeft Peter Braunfeld (hoogleraar aan de universiteit van Illinois en staff associate van CSMP) een artikel geschreven. Drie graden van '*literacy*' worden onderscheiden naar analogie van de stadia van geletterdheid zoals men ze bij het gebruik van de moedertaal onderscheidt:

- \* alledaagse taal kunnen gebruiken, inclusief lezen en schrijven (alfabeet-zijn);
- \* bekend-zijn met de literatuur in de eigen taal (geletterd-zijn);
- \* kunnen-produceren van literatuur (iemand schrijft literair).

Op het *eerste* wiskundige *nivo* van '*literacy*' gaat het om de bekwaamheid tot het oplossen van alledaagse mathematische problemen: rekenen met natuurlijke getallen, breuken, decimale getallen en percentages; oplossen van eenvoudige lineaire vergelijkingen; bekendheid met de 'basic facts' van meetkunde en waarschijnlijkheidsrekening; het bepalen van welke berekening bij een gegeven probleem past – in de 21<sup>e</sup> eeuw belangrijker dan het snel en akkuraat rekenen zelf; het maken van redelijke schattingen en benaderingen; enige elementaire kennis van waarschijnlijkheidsrekening en statistiek. In de basisschool zou zo goed als elke leerling dit nivo moeten bereiken.

Op het *tweede nivo* mag van de high-school-gediplomeerde verwacht worden dat hij een redelijk goed idee heeft van waar het in de wetenschap van de wiskunde om gaat. Braunfeld noemt:

- \* Begrijpen van het typische van wiskundige redeneringen binnen een aantal belangrijke wiskundige leerstofgebieden; vooral het aksiomatische wordt beklemtoond.
- \* Ervaring met en appreciatie van het wiskundige taalgebruik (definiëring, symboolgebruik).
- \* Ervaring met het gebruik van wiskundetaal en wiskundige benaderingswijzen bij het aanpakken van niet-alledaagse complexe problemen.
- \* Ervaring met en appreciatie van het ontdekken van en werken met wiskundige structuren waarin – met behulp van abstraktie van verschillen – wordt gezocht

naar overeenkomsten tussen problemen of gebieden, die op het eerste gezicht zeer verschillend schijnen (groep, ring, vektorruimte).

- \* Begrip van algoritmische procedures en van het werken van computers.
- \* Ervaring met het toepassen van de wiskunde in allerlei wetenschappen; enige kennis van mathematische modelvorming.

Voor wat betreft de keuze van de *leerstofgebieden* of onderwerpen, waarbinnen de bovengenoemde algemene doelstellingen zouden moeten worden bereikt, geldt, dat niet gezegd kan worden dat een bepaald gebied verkend moet zijn. Wel is een aantal 'klassieken' te noemen:

- Het gebied van de reële getallen (algebra; topologie; elementaire functies – in het bijzonder de polynomische, cirkulaire, logaritmische en exponentiële functies; limieten; integraalrekening).
- Meetkunde (elementaire meetkunde; transformatie-meetkunde; lineaire algebra).
- Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek.
- Getallentheorie (niet vanwege de toepassingen, maar vanwege de gelegenheid tot bewijsvoering, taalontwikkeling, redeneerwijzen in een stuk zuivere wiskunde).

Over het *derde nivo* schrijft Braunfeld niet.

Uit dit artikel van Braunfeld zou men kunnen konkluderen dat het in de basisschool vooral gaat om een aantal technieken en vaardigheden (flexibel, inzichtelijk gehanteerd) en een aantal begrippen, die bij de 'kulturele bagage' horen. Uitdrukkelijk wordt immers gesteld dat de zes algemene doelstellingen gelden voor het tweede nivo.

In het reeds eerder geciteerde overzichtsartikel (2) van Kaufman en Haag wordt gesteld dat de 'mathematically literate citizen of the 21st century' ervaring moet hebben met het toepassen van wiskunde op problemen van de moderne maatschappij en dat daarvoor kennis van moderne wiskundige technieken, denkwijzen en wetten nodig is op gebieden als rekenen, algebra, meetkunde, trigonometrie, analytische meetkunde, kalkulus, waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, lineaire algebra en meetkunde, topologie, logika, computerwetenschap, numerieke analyse, speltheorie e.d. Een dergelijke kontemporaine benadering van wiskunde-onderwijs vereist een organisatie van het onderwijs rond begrippen als: verzameling, relatie, functie, operatie-systeem, structuur e.d. (2;4)

In een artikel over de rol van de algebra in een modern leerplan voor 5-18-jarigen (12;19) sluit Braunfeld zich weer aan bij de boven-

omschreven opvatting van Kaufman en Haag. In zijn analyse van het basisschoolprogramma van CSMP beklemtoont hij dat men – vooral in de klassen 1, 2 en 3 – het programma van Frédérique Papy heeft overgenomen, omdat daarin sterk de centrale begrippen: verzameling, relatie, functie naar voren komen – in relatie met speciale ‘taaltjes’ (Venn-diagrammen, pijldiagrammen).

‘De minikomputer maakt een vroegtijdige introductie van het negatieve getal mogelijk; de pijldiagrammen het oplossen van lineaire vergelijkingen; met behulp van Cuisenaire-staafjes kunnen jonge kinderen restklassen-modulo 5 ontdekken (treintjes met zoveel mogelijk gele wagons) en een bijbehorende opteltabel konstrueren (samenvoegen van treinen en eventueel inwisselen).’

\* \* \*

Afgaand op de publikaties en vooral ook op grond van analyse van de programma’s voor de Kindergarten (K) en de klassen 1, 2 en 3 kunnen we ten aanzien van de *visie op wiskunde-onderwijs bij CSMP* stellen:

\* Er zijn aanzetten tot een coherente visie op de doelstellingen voor een longitudinaal wiskunde-leerplan (Braunfeld) maar de visie op het leerplan voor de basisschool is rudimentair. Er lijken zelfs tegenstellingen te bestaan tussen het fundamentele artikel van Braunfeld (11) en enkele andere publikaties. (2,12)

\* In de praktijk (ook van de programma’s) lijkt het belangrijkste uitgangspunt te zijn, de leerling zoveel mogelijk ‘echte’ moderne wiskunde te leren. Het gaat dan vooral om een functioneel gebruik van de verzamelingenleer en een van jongs af bezig zijn met relaties en functies. Zo vroeg mogelijk moeten de kinderen leren rekenen (cijferen) – met de minikomputer – om hen in staat te stellen ‘to tackle non-trivial mathematical problems’ (Kaufman). Dat zijn dan in hoofdzaak problemen uit de waarschijnlijkheidsrekening (althans in de klassen 1, 2 en 3).

\* Wiskunde wordt voornamelijk gezien als een systeem (van technieken, symbolen, afspraken) waarin de leerling moet worden ingeleid.

Deze opvatting heeft als konsekwentie: een vrijwel ontbreken van problemen en situaties, die eerst gematematiseerd (13,14) moeten worden, alvorens men de wiskundige kennis kan gebruiken. Dit blijkt meer uit de programma’s zelf dan uit de literatuur er omheen. (2,11,9)

Men kan zeggen dat ook CSMP niet is ontkomen aan een zekere inkonsistentie

tussen de ‘schone woorden’ en de daden in de klas. Met name de geobserveerde lessen in K, 1 en 2 waren zeer ‘teacher-directed’: de kinderen moeten tot elke didaktische prijs tot het goede antwoord gebracht worden.

\* Dezelfde inkonsistentie bestaat tussen de – geschreven – felle aanvallen op allerlei geïndividualiseerde systemen (PLAN, IPI) waarin de onderwijzer verwordt tot een ‘bookkeeper of test-records’ en het eigen individualiseringssysteem voor klas 3. Zeker is dat dit systeem zeer breed is opgezet en niet alleen maar traint op skills. Nochtans is het ook zeer eenzijdig gericht op individueel werk en zal de gemiddelde onderwijzer z’n handen vol hebben om de zaak draaiend te houden.

\* Hoewel de roep van Rising (9) om ‘quality teaching’ beaamd wordt door Kaufman en Haag (2;13) en ook door het Basic Program Plan (1;394 e.v.), sluit men zich aan bij de geldende praktijk: een ‘summer-course’ van 4 weken voor de onderwijzers van carbondale (gegeven door Frédérique Papy) en verder wat individuele begeleiding. Met de ‘Teacher training colleges’ heeft men niet veel contact, ook niet met de ‘School of Teaching’ van de kampus der Southern Illinois University te carbondale, waarvan de studenten hun praktijk opdoen in de scholen die werken met het CSMP-programma. Een integrale aanpak, zoals het IOWO die ten aanzien van de pedagogische akademies tracht te realiseren, zou in de Amerikaanse verhoudingen (bevoegd gezag, aantallen, afstanden) ook wel zeer moeilijk te verwezenlijken zijn.

\* \* \*

## 2 VERGELIJKING VAN CSMP EN IOWO

Reeds in de beschrijvingen van de werkwijze van CSMP zijn min of meer terloops opmerkingen van vergelijkende aard gemaakt. In dit gedeelte willen we proberen de verschillen en overeenkomsten scherper in ’t oog te krijgen. We doen dat aan de hand van een aantal vergelijkingspunten, die voor een deel korresponderen met de schema’s van Taba (4,438) en Wheeler (17;52).

In onze vergelijking willen we aandacht besteden aan de volgende punten:

- van welke visie op cultuur en samenleving gaat men uit?
- vanuit welke visie op wiskunde en wiskunde-onderwijs werkt men?
- wie bepaalt welke vakinhouden in het leerplan worden gebracht?

- welke praktische ontwikkelingsstrategie volgt men?
- welke visie heeft men op het eindproduct van een stuk leerplanontwikkelingswerk?
- hoe verhoudt het projekt zich tot het onderwijsveld (praktici, beleidsmakers, wetenschappers) en de totale onderwijsvernieuwing?

#### **Van welke visie op cultuur en samenleving gaat men uit?**

Geen van beide projectgroepen heeft een dergelijke visie geëksplisiteerd. Het is dan ook de vraag of een 'discipline-oriented' leerplanontwikkelingsprojekt een dergelijke visie moet expliciteren (ondanks de nadruk die schrijvers over leerplanontwikkeling op dit faset leggen). Toch kan men wel stellen dat er 'tussen de regels door' verschillen zijn op te merken in de visie op de mens die 'straks' moet leven en werken in de samenleving van de jaren 2000. In CSMP-kringen overheerst de bezorgdheid dat het wiskunde-onderwijs niet voldoende voorbereidt op taken en problemen, waarvoor een goede bekendheid met wiskundige technieken en benaderingswijzen nodig is. Het tot nu toe ontwikkelde materiaal is dan ook kwa leerstof op sommige punten nogal geavanceerd. Binnen Wiskobas heeft, vooral in de beginfase, ook sterk de gedachte opgeld gedaan dat het wiskunde-onderwijs niet meer 'is aangepast aan de eisen van deze tijd' en dat er vooral een leerstofvernieuwing nodig was. Maar in de laatste jaren (IOWO-tijd) wordt het 'voorbereidend-maatschappelijke' karakter van het wiskunde-onderwijs minder sterk beklemtoond ten gunste van meer formele aspecten: *wiskunde als een creatieve menselijke activiteit*, waarin een appel wordt gedaan op het ordenen, het schematiseren, het verbaliseren en het systematiseren als typisch-humane activiteiten, ook zonder dat ze direkt in dienst staan van de economische of technische vooruitgang.

#### **Welke visie op wiskunde en wiskunde-onderwijs heeft men?**

Het IOWO heeft zijn visie op wiskunde-onderwijs duidelijker geëksplisiteerd dan CSMP. In de CSMP-visie zoals die onder andere in het Basic Program Plan (1;375 e.v.) en het reeds besproken artikel van Braunfeld (11) en vooral in de programma's voor de basisschool naar voren komt, wordt wiskunde voornamelijk gezien als een systeem van kennis, afspraken, benaderingswijzen, technieken, dat geleerd moet worden op een zo economisch mogelijke wijze. (en dat is vaak de ontdekkende wijze!) Ook in het IOWO vindt men deze

opvatting, maar wiskunde wordt daar als meer dan alleen een te leren systeem gezien, namelijk ook als een specifieke aanpak van alledaagse problemen. Een dergelijk probleem moet dan 'gematematiseerd' worden; dat wil zeggen: op zodanige wijze worden getransformeerd dat 'het' wiskundige systeem voor de oplossing ervan bruikbaar wordt; het probleemveld moet als het ware binnen de wiskunde getrokken worden. Ook binnen CSMP wordt de term 'mathematization' gebruikt maar veelmeer als een 'toepassen van ...'. Zeer sprekend vindt men deze opvatting in boek A van EM: 'Short course in mathematization' (alleen de titel spreekt al boekdelen!). Hierin gaat het om verkiezingen van gouverneurs e.d. Er is niet een centraal, kompleks probleem dat geleidelijk aan wordt opgelost door het te beschrijven, te schematiseren, te simboliseren waarna wiskundige technieken worden toegepast (of ontwikkeld!). Al in de eerste bladzijden wordt een vloed van afspraken gemaakt en symbolen geïntroduceerd met betrekking tot 'voting bodies'. Vervolgens wordt onderzocht of zo'n 'voting body' een wiskundige structuur is of niet. Het gaat duidelijk om het toepassen van reeds geleerde kennis. In het IOWO daarentegen wordt beklemtoond dat in het wiskunde-onderwijs door en met de leerlingen 'wiskunde gemaakt moet worden' en wel zoveel mogelijk binnen een reële kontekst. (zie 13 en 18)

#### **Wie bepaalt welke vakinhouden in het leerplan worden ingebracht?**

De staf van CSMP is duidelijk van mening dat de beroepswiskundige, de wiskunde-gebruiker en de wiskunde-docent hier moeten beslissen. Deze opvatting wordt door het IOWO gedeeld, zij het dat men binnen het IOWO pogingen doet om de discussie hierover zo breed mogelijk te voeren; niet alleen met wiskundigen in universiteiten of bedrijven\*), maar ook met onderwijskundigen. Er is begrip en steun voor het samenwerken van verscheidene leerplanontwikkelingsgroepen op diverse vakgebieden. De opvattingen van Robinsohn (5) en anderen vinden weerklank binnen het IOWO. Wel wordt gesteld dat alleen degene die zelf wiskunde ervaren heeft zinvol kan meepraten over doelstellingen van wiskunde-onderwijs. Verscheidene pogingen zijn ondernomen om met groepen niet-wiskundigen tot

\*) In 1972 bijvoorbeeld werd een konsept-leerplan voor statistiek en waarschijnlijkheidsrekening voorgesteld aan docenten, universitaire medewerkers en bedrijfs-statistici.

een gesprek te komen door in konferenties eerst wiskunde te laten bedrijven (op een deelgebied) waarna over een ontwerp-leerplan op het betreffende gebied kon worden gesproken. Dezelfde gang van zaken wordt gevolgd bij de heroriënteringskursussen, die eveneens in dienst staan van de leerplanontwikkeling. Kortom: het IOWO streeft naar een 'demokratische leerplanprocedure' waarin ieder die met wiskunde-onderwijs te maken heeft, zijn inbreng kan hebben.

Van een dergelijke brede benadering is bij CSMP weinig te bespeuren.

### Welke praktische ontwikkelingsstrategie volgt men?

Als eenmaal een onderwerp gekozen is, begint het praktische handwerk van de leerplanontwikkelaar. Het werk van de 'teacher-writer' in CSMP is reeds beschreven. De wijze van werken is praktisch identiek aan die binnen het IOWO:

- maken van een ontwerp
- bespreken in de staf, veranderen
- praten met kinderen, veranderen
- uitproberen in een klas, veranderen
- bespreken in de staf, veranderen
- tweede ronde van uitproberen, veranderen
- op grotere schaal uitproberen, veranderen.

Een belangrijk praktisch verschil ligt in de inbreng van de grafische afdeling in CSMP die bij het IOWO gemist wordt. Een tweede verschil ligt in de — althans op papier — iets gedegener revisie-try-outs bij CSMP (pilot study, extended pilot study, field study). Men kan zich overigens afvragen hoe één medewerker deze revisie-try-outs tot werkelijk belangrijk werk kan maken. Binnen het IOWO heeft deze tweede ronde binnen dezelfde ontwerp-school plaats (in parallelklassen) en daarbuiten in volgscholen.

### Welke visie heeft men op het eindprodukt?

Men heeft binnen de onderwijskunde een onderscheid gemaakt tussen twee gebieden van onderwijskundig onderzoek en -theorievorming, namelijk het *didactisch handelen* (het werk van de onderwijzer met of rechtstreeks in verband met zijn leerlingen) en het *konditiebepalend handelen* (het werk van wetgevers, inspecteurs, scholenbouwers, leerplanontwikkelaars e.d. die de kondities voor het didactisch handelen scheppen of beïnvloeden). (19;13) Dit zeer globale onderscheid kunnen we hier wel gebruiken om het verschil tussen CSMP en IOWO te typeren.

CSMP richt zich praktisch uitsluitend op één konditie die het didactisch handelen beïnvloedt en wel het geschreven leerplan met

bijbehorend leerlingenmateriaal. Het leerplan bestaat uit banden met lesbeschrijvingen, werkbladen en organisatorische aanwijzingen. Voor het IOWO is duidelijk dat het didactisch handelen door veel meer kondities beïnvloed wordt en dat het werk van een leerplanontwikkelingsinstituut méér is dan alleen 'produkt-ontwikkeling', hoe zeer dit geschreven leerplan ook het hart van het projekt is. Daarnaast moet op veel meer fronten gewerkt worden:

- de onderwijzer moet het leerplan met begrip en fantasie kunnen gebruiken (heroriëntering!);
- de overgang naar nieuwe vormen en inhouden vereist begeleiding (kadervorming van schoolbegeleiders in schooladviesdiensten);
- de opleiding van a.s. onderwijzers moet zo vroeg mogelijk aangepakt worden; er moet worden samengewerkt met andere 'vakken';
- kontakten moeten worden gelegd met uitgevers, schrijversgroepen, leermiddelenfabrikanten om chaotische ontwikkelingen te voorkomen;
- in een vroegtijdig stadium moet gewerkt worden aan het ontwikkelen van een optimale innovatie-strategie en het creëren van de noodzakelijke beleidskaders (overheid, onderzoeksinstituten, inspectie, pedagogische akademies, ouders).

De eerlijkheid gebiedt te stellen, dat deze taken door het IOWO kunnen worden aangepakt, omdat de nederlandse situatie sterk verschilt van de Amerikaanse. De omstandigheden zijn in Nederland gunstiger (beleidsstructuur, grootte, afstanden, financiering), ondanks het tot nu toe ontbreken van een centraal beleid op het gebied van onderwijs-onderzoek, -ontwikkeling en -innovatie. In ons land is de mogelijkheid aanwezig van een 'produktontwikkeling' binnen het kader van een brede beweging van bewustmaking en partisipatie.

In de v.s. zou een dergelijke aanpak in theorie misschien mogelijk zijn (bij een veel centralistischer onderwijsbeleid dan het huidige), maar in de praktijk zou het toch op onoverkomelijke organisatorische en financiële problemen stuiten. Produktontwikkeling, gevolgd door autonome verspreiding, is de enige reële mogelijkheid, tenzij elk schoolsysteem apart professionele ontwikkelingsinstituten zou onderhouden. Deze laatste suggestie is wel gedaan in innovatie-literatuur vanwege de betere mogelijkheden tot partisipatie en identifikatie bij de onderwijzers. In de praktijk betekent deze werkwijze een te grote financiële belasting. Het zich richten op produktontwikkeling

(v.s.) heeft een zakelijke benadering tot gevolg, gepaard aan een sterk gevoel voor reklame.

Tot zover deze vergelijking, waarmee we de serie van zeven leerplanologie-artikelen besluiten. 't Was wel wat zware kost. Maar ja: de kost komt vòòr de baat!

\* \* \*

### 3 GEBRUIKTE LITERATUUR

- 1 CSMP: Basic Program Plan  
(Cemrel, april 1972)
- 2 B. Kaufman en V. Haag: The Comprehensive School Mathematics Program; an experiment in content-orientation and individualization of instruction  
(Cemrel, 1972)
- 3 Wiskobas-Bulletin. jrg. 2 nr. 2  
(IOWO, 1972)
- 4 H. Taba: Curriculum development, theory and practice  
(New York, 1962)
- 5 S.B. Robinsohn: Bildungsreform als Revision des Curriculum  
(Berlin, 1971)
- 6 G. Willers: Das Bildungswesen der U.S.A.; eine Gesamtdarstellung der Entwicklung bis zur Gegenwart  
(München, 1965)
- 7 M. Hillson (ed.): Change and Innovation in elementary school organization  
(New York, 1967)
- 8 B. Kaufman en G. Rising: Some thoughts about behaviorism and curriculum  
(Cemrel, 1972)
- 9 Gerald Rising: Some current directions in mathematics education  
(Cemrel, 1972)
- 10 P. Braunfeld en B. Kaufman: A summary of the CSMP viewpoint on curriculum improvement  
(Cemrel, 1972)
- 11 P. Braunfeld: What is mathematical literacy?  
(Cemrel, 1972)
- 12 P. Braunfeld: The role of algebra in a modern K-12 curriculum  
(Cemrel, 1970)
- 13 MaTEMAtika, handboek voor de heroriëntering van onderwijzers  
(IOWO, 1973)
- 14 A. Treffers: De kubus (over doelstellingen voor wiskunde-onderwijs)  
(interne publikatie IOWO, 1972)
- 15 Science Education News, oktober 1972  
(Uitgave American Association for the Advancement of Science, 1515 Massachusetts Avenue, N.W., Washington D.C. 20005)
- 16 J.E. Shively and A.W. Holz: CEMREL-CSMP evaluation report  
(Cemrel, september 1972)
- 17 D.K. Wheeler: Curriculum Process  
(London, 1971)
- 18 Wiskunde L.B.O.: startpunt leerplanontwikkeling  
(IOWO, 1973)
- 19 J. Sixma: Leesvoorwaarden  
(Groningen, 1973).

# bijna noemen

OVER FUNKTIES VAN DE  
MOEDERTAAL IN WISKUNDIGE  
PROBLEMEN

JAN VAN DEN BRINK

Zijn lippen hingen aan het bijna noemen,  
Totdat de namen welden uit zijn mond,<sup>1)</sup>

*Het is herfst.*

*De kinderen uit de eerste klas hebben bladeren verzameld. Ze hebben ook bladeren getekend, gekleurd en uitgeknipt. De juf heeft ze daarna aan draadjes voor de klas opgehangen: een regen van 'vallende' bladeren.*



*'Welk blaadje heb jij gemaakt?', vraag ik aan een meisje.*

*'Die', en ze wijst.*

*'Deze?', vraag ik.*

*'Nee, die ene met dat rood en bruin.'*

*Om zeker te zijn, dat ik niet weer mijn oog op een verkeerde laat vallen, loopt ze naar voren en pakt haar blaadje beet.*

De woorden 'die' en 'deze' schieten hier blijkbaar te kort om direkt de juiste plaats aan te geven. Je moet dichtbij de bladeren gaan staan om ze te kunnen gebruiken. Doe je dit niet, dan ontdek je, dat je je taal moet uitbreiden. Met andere woorden: je wordt je

<sup>1)</sup> Uit 'In den beginne' van Bertus Aafjes.

van de taal *bewust* omdat ze – bijvoorbeeld binnen een wiskundig probleem (zoals het ‘plaatsbepalen’) – te kort schiet. Deze taalbewustwording<sup>1)</sup> speelt binnen het wiskunde-onderwijs aan 5-7-jarigen een uitermate belangrijke rol.<sup>2)</sup>

### Plaatsbepaling

*‘Ik neem een blad in gedachte’, zegt de juf. ‘Jullie mogen aan mij vragen stellen om het blad te vinden. Ieder moet wèl op zijn stoeltje blijven zitten. Je mag ook niet wijzen.’*  
*‘Ja, ik heb er één gekozen. Vraag maar!’*  
*‘Is het die?’*  
*‘Dit blad soms?’*  
*‘Is het een blad met een steeltje?’*  
*‘Is het blad helemaal groen gekleurd?’*  
*‘Hangt het in het midden?’*  
*‘Hangt het dichtbij?’*

Opvallend is, dat de kinderen zich in het begin bewegen op het demonstratieve taalnivo (‘die’, ‘dit’). Ze wijzen de bladeren aan. Ze proberen het blad te raden en ervaren spoedig dat dit taalnivo ontoereikend is om het probleem aan te pakken. Dan worden eigenschappen genoemd (‘die groene’) als uitbreiding of vervanging van de demonstratieven ‘die’, ‘dit’, ‘dat’. Dit ‘eigenschappen noemen’ vermindert echter de kans dat de kinderen een ‘denkschema’ (bijvoorbeeld een coördinatenstelsel) ontwikkelen om het probleem op te lossen.<sup>3)</sup>

*‘Draai jij je eens om en doe je ogen dicht’, zegt de juf tegen Kees.*

*Daarna wijst ze het blad aan dat ze in gedachte had.*

*‘Wie kan Kees nu vertellen, hoe hij moet kijken om het blad te vinden?’*

*‘Kijk, je gaat eerst naar het tweede draadje – van die kant af. Ja, dat draadje met dat rode blad van onderen. En dan is het het tweede blaadje van boven af.’*

Het is duidelijk dat hier meer plaats vindt dan uitsluitend het noemen van dingen of het beschrijven van eigenschappen. Naast deze activiteiten ontwikkelen de kinderen immers

een ‘denkschema’ om Kees de goede weg te wijzen.

Vele kinderen worden zich hierbij de noodzaak tot de ontwikkeling van een ‘fijnere’ taal bewust – het demonstratieve taalnivo (‘die’, ‘dit’) wordt door hen verlaten.

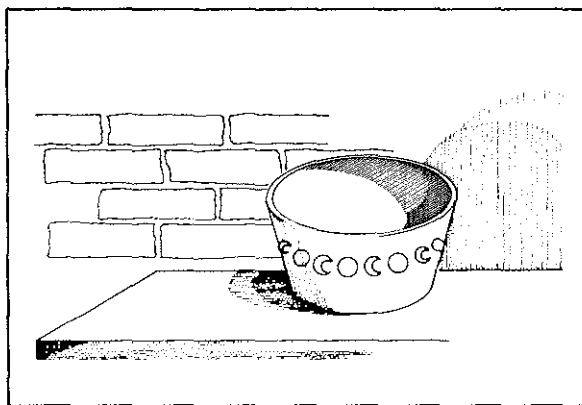
### ‘Zijn lippen hingen aan het noemen.....’

Is het niet onze taak om situaties in de klas te creëren waarbij de leerling genoodzaakt wordt een verhoging in zijn taalnivo tot stand te brengen?

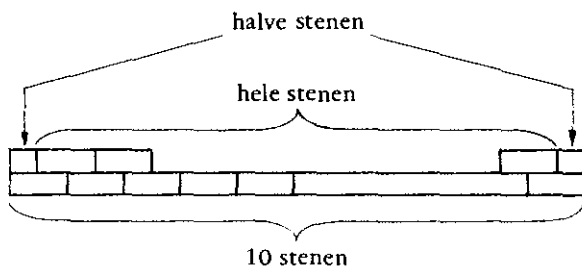
Om u en onszelf in dit nieuwe taal-wiskundegebied wat op weg te helpen, geven we hieronder, naast het reeds genoemde *plaatsbepalen*, enkele suggesties die taalnivo-verhogend kunnen zijn.

### Probleem-realisering

(Hoe realiseren kinderen zich een gesteld probleem?)



*‘In de onderste rij zijn 10 stenen. Hoeveel stenen denk je dat er in de tweede rij zullen zijn?’ Slechts één of twee kinderen in de klas vonden dat het er ook 10 moesten zijn. De meeste leerlingen vonden echter 11 stenen!*



*Daarna zijn ze muren gaan bouwen (plakken van rechthoekige stukjes papier op een groot vel), waarbij de kinderen voor elke nieuwe rij inderdaad 10 ‘stenen’ bij de juf moesten halen.*

De onderscheiding tussen *halve* en *hele* stenen is voor kinderen niet vanzelfsprekend.

‘Een halve steen is ook een steen’, redeneren ze bij het *bekijken* van de muur op het

<sup>1)</sup> We bedoelen zeker *niet* taalbeschouwing of taalbeschrijving!

<sup>2)</sup> Taalbewustwording in bovengenoemde zin is natuurlijk niet beperkt tot deze leeftijdsgroep. We kozen echter als voorbeelden situaties uit de kleuterschool en de eerste klas basisschool.

<sup>3)</sup> Misschien kunt u met een ‘sterrenhemel’ van kongruente sterren aan draadjes, het noemen van eigenschappen omzeilen.

werkblad. (Dit is overigens bij appels niet het geval!)

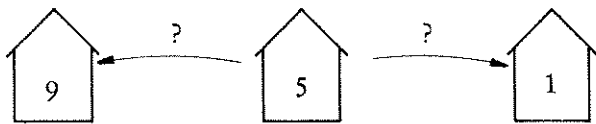
Bij de *bouw* van een muur speelt die onderscheiding echter wél een rol: ze halen steeds 10 stenen en knippen soms één steen in tweeën.

Het bewustworden van de eigen taal is blijkbaar afhankelijk van de objekten (een steen of een appel), maar *vooral* ook van de *aktiviteiten* (bekijken of bouwen) die bij de realisering van een probleem worden beoogd.

Momenten van taalbewustwording worden gemakkelijk ingeleid door opdrachten waarop *twee of meer verschillende realiseringen* kunnen volgen.

#### Bijvoorbeeld

*Mijn vriend woont 4 huizen verder aan de kade. Ik woon op nummer 5. Welk huisnummer heeft mijn vriend?*



#### Logika in uitspraken van kinderen

Tenslotte willen we hier wijzen op het 'logisch redeneren' door kinderen in verband met *taalnivo's*.

Met logisch redeneren bedoelen we hier niet, dat we uitsluitend willen nagaan welke konstrukties *uit de logika* in de taal van kinderen voorkomen. Evenmin bedoelen we de uit de handel bekende 'logische spelletjes', hoe instruktief ze ook mogen zijn.

We beogen met 'logisch redeneren door kinderen': het *overtuigen* van kinderen door kinderen, waarbij sprake is van een verhoging in taalnivo. Denk bijvoorbeeld aan situaties waarin de ene leerling aan de andere iets uitlegt: hij formuleert, hapert misschien, formuleert opnieuw in een toestand van 'bijna noemen'.

Naast verhoging van het taalnivo dienen we attent te zijn op plotselinge vaak verrassende logische konstrukties, zoals in dit gesprekje tussen kleuters:

'Onze juf zegt altijd: 'Ik ga eens kijken wie er naar de zandbak mag'.'

'Onze juf zegt dat nóóit. Jullie moeten altijd je mond dichthouden, hè?'

'Ja ... of je moet niet naar buiten willen.'

*Overtuigend of niet?*

### 3

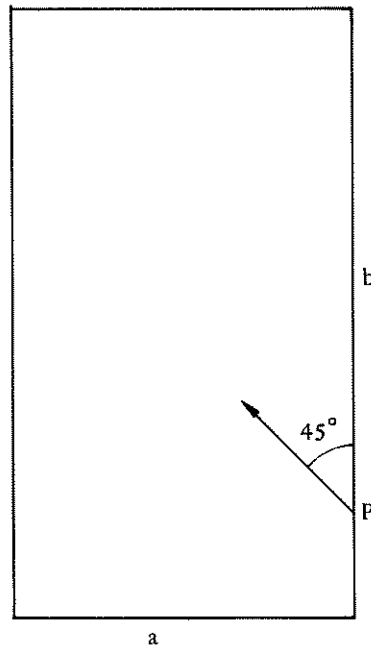
#### EEN PROBLEEM ROND KEU EN KRIJT



Biljarten rekenen we tot de edele sporten. Immers, spelbederf zoals het opzettelijk gooien van de bal in de tribunes komt zelden voor en het doelbewust neerleggen van de tegenstander door hem de keu tussen de benen te steken, is er nog niet uitgevonden.

Bovendien is biljarten een sport waarbij meetkundige intuïtie een belangrijke rol speelt.

Vandaar ons probleem:



*een biljart met zijden a en b*

P is de bal, die we wegstoten onder een hoek van  $45^\circ$ . Aan stoten met effect zijn we nog niet toe, wel aan de vraag:

*onder welke kondities komt de bal weer in P terug?*

Met kondities bedoelen we: de plaats van P op de lange of korte zijde, de onderlinge verhouding van die zijden, enz.

Mocht u regelmatig bezoeker zijn van het dorpscafé en het gemiddelde van Ceulemans benaderen, dan zult u er weinig moeite mee hebben.

Variatie in de afstoothoek:  $60^\circ$ ,  $30^\circ$ , ..... kan dan nog voor nieuwe impulsen zorgen.

# wim wiedes

HANS TER HEEGE

'Hoor eens Wim', zei Wies Wiedes op een avond, 'zo gaat het niet langer. Moet je eens kijken. Overal zitten er gaten in ons vloerkleed. Dat is toch geen gezicht.'

'Tut, tut', antwoordde Wim, want die dacht al aan zijn spaarcentjes. 'Tut, tut, het kan nog best een jaartje mee.'

Omdat er toen zo'n herrie kwam in het huis van Wim en Wies hebben we niet verder aan de deur geluisterd. We zijn een straatje om gegaan.

En toen we weer terug kwamen, hoorden we Wies nog net zeggen: 'Zo is het. Morgen kopen we nieuwe vloerbedekking.'

De volgende dag staan ze in de winkel. Ze kijken bij de vloerbedekking.

'Dat is mooi', zegt Wies.

'Laten we die tegels daar nemen', zegt Wim. Ze praten veel. Wies wil graag groene tegels hebben, maar Wim voelt meer voor rode tegels. Daar praten ze over.

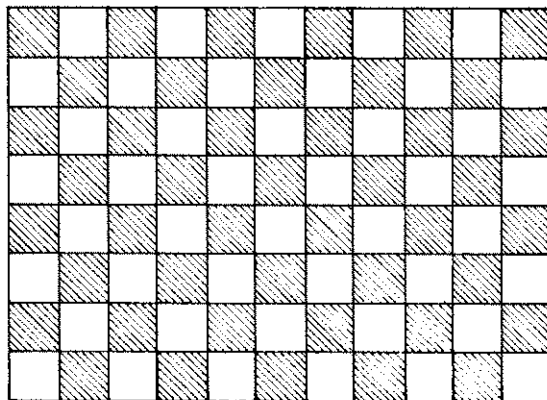
En wat denk je?

Juist! Ze nemen rode en groene tegels. Had je dat ook gedaan? Nou, ik niet hoor. Maar ja, Wim en Wies zijn nu eenmaal een paar rare mensen.

Luister maar.

Wim zegt: 'We leggen de tegels om en om. Dus eerst een rode, dan een groene, dan weer een rode, enzovoort.'

Kijk, zo ziet de kamer er uit als alle tegels gelegd zijn:



Als ze klaar zijn, puffen ze even uit. Wim veegt met z'n grote rode zakdoek de zweetdruppels van zijn voorhoofd. Zo zitten ze te kijken naar de mooie, nieuwe vloerbedekking. Dan springt Wim op.

'Wies we gaan treintje spelen! Ga in die hoek op de rode tegel staan.'

Wies doet dat, maar ze begrijpt er niets van.

Wim gaat zelf in een andere hoek op een groene tegel staan.

'Wat moet ik nu doen, Wim?'

'Loop nu schuin over de rode tegels, Wies.'

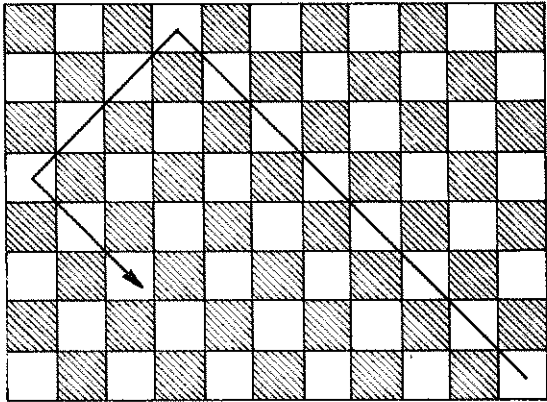
Wies doet dat.

Kijk maar hoe zij loopt. Ze loopt alleen over rode tegels. Ze loopt tot ze niet verder kan.

Dan zegt Wim: 'Sla nu de hoek maar om en loop verder.'

Dat doet Wies.

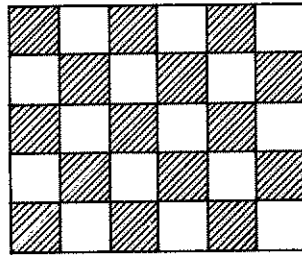
Kijk eens naar het voorbeeld!



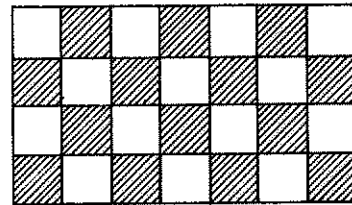
► Laat Wim over de groene tegels lopen tot hij niet verder kan.

► Zijn er nog tegels waar Wim of Wies niet gelopen hebben?

► Probeer hetzelfde eens op de tegels van deze vloer:

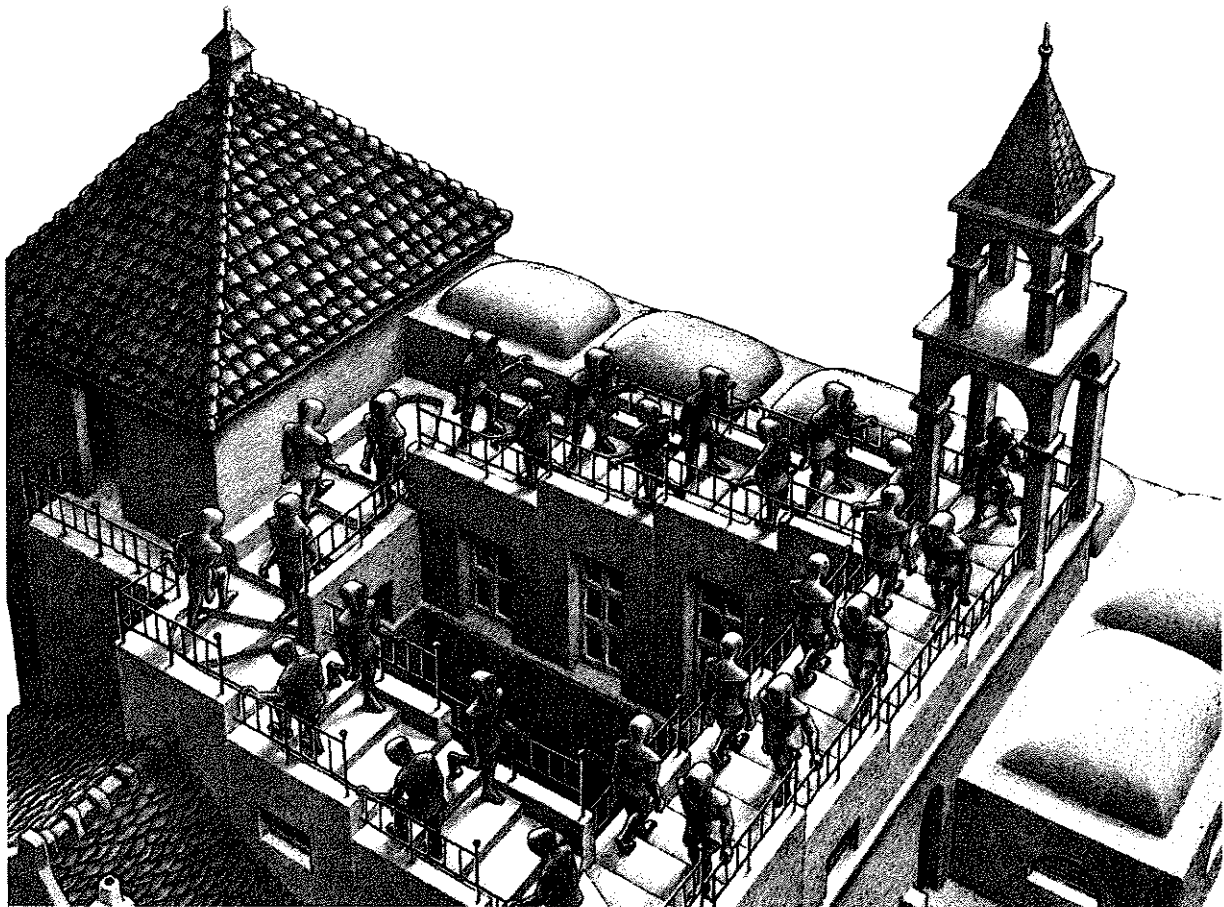


► En ook op:

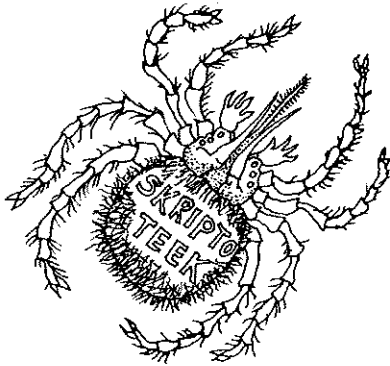


*En nu jullie:*

► Laat Wies zo lang over de rode tegels lopen tot zij niet verder kan.



# skriptoteek



*'Computerkunde in de basisschool' is de titel van een omvangrijke en gedetailleerde skriptie, geproduceerd door een drietal studenten van de R.K. pedagogische akademie te oudenbosch, t.w. Kees Gorissen, Jan Moerkens en Martijn Raymaekers.*

HUUB JANSEN

Met veel entoesiasme en creativiteit hebben de studenten geprobeerd een aaneengesloten leergang te ontwerpen voor alle klassen van de basisschool, met als doel de kinderen inzicht te geven in allerlei activiteiten die met automatiseringsprocessen in verband staan. Het uitgangspunt van hun werkzaamheden wordt door de makers van deze skriptie als volgt geformuleerd:

'..... doordat door de laatste technische ontwikkelingen (ruimtevaart, automatisering enz.) het onderwerp Computerkunde steeds meer in de belangstellingswereid van het lagere schoolkind is komen te liggen en doordat de rekenmethodes voor de basisschool niet in deze belangstelling voorzien.....'

De totale leergang, in dit werkstuk ontwikkeld en uitgeprobeerd, is als volgt onderverdeeld:

klas 1 en 2 – machientjes  
klas 3 en 4 – blokschema's  
klas 5 en 6 – ponskaarten.

Voor *klas 1 en 2* zijn 38 (!) lessen ontworpen waarbij begonnen wordt met logiblokken.

In de eerste lessen worden de logiblokken verkend, eigenschappen gevonden en geformuleerd, waarna het werken met machientjes geïntroduceerd wordt.

Machientjes met logiblokken: Vorm – Kleur – Grootte – Dikte (V – K – G – D) en samenstellingen van deze transformaties. Vanuit het werken met deze 'logiblok-machientjes' verschijnen achtereenvolgens:

plaatsmachientjes (Voor – Achter – Links – Rechts – Boven – Onder) waarbij o.a. het werken met coördinaten voorbereid wordt, en optel- en aftrekmachientjes.

In de lessen voor *klas 3 en 4* staat het leren lezen en samenstellen van blokschema's centraal. Heel bewust hebben de ontwerpers geprobeerd het werken met blokschema's ook te laten functioneren buiten het rekenen met getallen.

Als voorbeeld les 55:

\* Nu de leerlingen steeds meer ervaring gaan krijgen in het maken van blokschema's zullen de lessen ook voortdurend korter worden, als er maar één blokschema aan de orde wordt gesteld.

\* De les begint weer met een verhaaltje. Een rechter veroordeelt mensen die te snel gereden hebben op de volgende manier:  
Wanneer het de eerste keer was 25 gulden boete.  
Wanneer het de tweede keer was 50 gulden boete.

Bij elke volgende keer intrekking van het rijbewijs voor 6 maanden.

- \* Maak een blokkenketting met de volgende blokken:  
Was het de eerste keer?  
Was het de tweede keer?  
Start.  
Klaar.  
25 gulden boete geven.  
50 gulden boete geven.  
Rijbewijs intrekken voor 6 maanden.
- \* Het verdere verloop van de les is zoals in de voorgaande lessen. (bespreking enz.)'

De leergang voor *klas 5 en 6* en de daarbij behorende onderwijskundige verantwoording vormt het aantrekkelijkste deel van het werkstuk. De schrijvers hebben namelijk in deze lessen een duidelijk verband weten te leggen tussen de werkelijkheid en wiskundige activiteiten waarmee deze werkelijkheid geordend en geklassificeerd kan worden.

In klas 5 worden ponskaarten geïntroduceerd, waarna gegevens van elementen van verzamelingen (logiblokken, leerlingen van de klas, enz.) op ponskaarten worden overgebracht.

Zowel in klas 5 als in klas 6 bestaat de belangrijkste activiteit uit een uitgewerkte simulatie van de werkelijkheid waarbij het werken met ponskaarten een centrale plaats inneemt.

In klas 5 is dit het giro-verkeer tussen een achttal bedrijven (sigarenhandel, boekhandel, electriciteitsbedrijf, .....). Allerlei gegevens moeten op ponskaarten geplaatst worden. Het gefingeerde girokantoor zorgt voor de totale verwerking. De ontvangen ponskaarten moeten vervolgens afgelezen worden.

Iets dergelijks vinden we eveneens in klas 6. Een complete fabriek met de loonadministratie van 64 werknemers wordt ten tonele gevoerd.

Om enig idee te krijgen, geven we hier de introductie:

- \* Deze les begint met een verhaaltje over een fabriek, waar de computer zorgt voor het samenstellen van de lonen van werknemers. Hiervoor moeten natuurlijk de gegevens van alle werknemers op ponskaarten gezet worden. We gebruiken hiervoor ponskaarten zoals ze ook in de praktijk voorkomen.  
De leerlingen krijgen eerst werkblad 31. Aan de hand van dit werkblad gaan we eens kijken hoe men zo'n ponskaart moet ponsen.
- \* De ponskaart is verdeeld in kolommen. Iedere kolom is bestemd voor een bepaald gegeven:  
kolom A: Personeelsnummer  
kolom B: Geboortedatum  
kolom C: Functie van de werknemer  
kolom D: Belastinggroep waarin de werknemer valt  
kolom E: Aantal kinderen

kolom F: Gezinsomstandigheden  
kolom G: Tariefgroep waarin de werknemer zich bevindt

kolom H: Bruto maandsalaris  
kolom I: Maandelijksse toeslagen  
kolom J: Belastingvermindering  
kolom K: Netto maandsalaris.

- \* Aan de hand van een voorbeeld kunnen de leerlingen de gegevens op werkblad 31 invullen. Er zijn 64 werknemers (zie werkblad 32-33). Iedere leerling krijgt een paar werknemers toegewezen, zodat we een volledige administratie krijgen. Alle gegevens, die de leerlingen nodig hebben staan op de werkbladen 32 en 33.
- \* Als ze van de hen toegewezen werknemers de gegevens op hun werkblad hebben ingevuld dan kunnen ze de ponskaart op werkblad 31 gaan invullen. Als er ergens een gaatje moet komen moeten ze het cijfertje zwart maken.  
Op werkblad 34 zien we een voorbeeld uitgewerkt. Op deze manier moeten de leerlingen alle werknemers afhandelen.  
(iedere leerling krijgt 3 exemplaren van ieder werkblad; behalve van 32 en 33 natuurlijk).
- \* Iedere leerling kan ook van één werknemer een ponskaart invullen en van een andere werknemer een personeelskaart.  
Als hij dit gedaan heeft geeft hij zijn 2 werkbladen aan zijn buurman en die maakt van de ponskaart een personeelskaart en van de personeelskaart een ponskaart.'

#### *Een paar opmerkingen tot slot*

- \* We zeiden het reeds: een omvangrijk werkstuk, waarin geprobeerd is een samenhangende leergang voor de gehele basisschool te maken. Een leergang gericht op één onderwerp, namelijk automatisering.
- \* Alle lessen – in totaal 84 – zijn kort maar duidelijk omschreven voor ieder die dit onderwerp in zijn onderwijs wil herhalen.
- \* Elke serie lessen wordt voorafgegaan door een uitvoerige verantwoording, waarin een duidelijke uiteenzetting van de bedoeling van het onderwijs in deze lessen, zowel wat betreft de onderwijskundige kant als ook de wiskundige inhoud. Uit deze verantwoording blijkt dat een uitvoerige literatuurstudie is gepleegd.
- \* Elke lessenserie wordt gevolgd door een nabeschouwing waarin o.a. de mentoren van de verschillende klassen waarin gewerkt is, aan de hand van een uitvoerige vragenlijst hun commentaar geven.
- \* Vooral in de lessen voor de hogere klassen is gezocht naar integratie met andere vakken (verkeersonderwijs, aardrijkskunde, maatschappijkennis).

\* Een compliment voor de makers is hier wel op zijn plaats. Een compliment waarin ook

de betrokken p.a.-docent — kollega v.d. Molengraaf — verdient mee te delen.

uit de werkbladen 31, 32, 33

OLYMPIA  
machinefabriek

PERSONEELSKAART

Naam: \_\_\_\_\_

Adres: \_\_\_\_\_

A        
personeelsnummer

B        
Dag Mnd Jaar  
Geboortedatum

C     
Functie

E    
Aantal  
kinderen

D   
Belastinggroep:

f 947,62	f 65,73	f 132,16	f 881,19	1.
- 701,50	- 33,92	- 159,80	- 541,70	2.
- 646,60	- 117,36	- 202,51	- 1478,01	3.
- 685,44	- 133,21	- 157,72	- 527,72	4.
- 1064,76	- 137,89	- 175,84	- 1006,28	5.
717,56	- 136,88	- 166,82	- 737,64	6.
- 56	- 156,66	- 207,82	- 380,68	7.
	- 134,11	- 207,82	- 1097,65	8.
	25	- 134,11	- 720,63	9.
		25	- 881,21	10.
			- 782,09	11.
			- 928,80	12.
			- 1934,91	13.

naam:

1. M. v. Aart
2. W. Adriaansen
3. R. Adrianow
4. J. Alders
5. T. Alleman
7. A. v.d. Avert
7. A. v.d. Avert
8. A. v.d. Berg
9. H. Bergmans
10. K. de Bie
11. M. de Blom
12. E. v.d. Boom
13. C. Braeckmans
14. S. Broekhoven
15. P. Caldenhove
16. F. Claes
17. C. Coenen
18. P. Cordes
19. P. Cordes
20. P. Cordes

adres:

- Beukenlaan 34
- Parallelweg 168
- Dahlialaan 16
- N. Beetslaan 85
- J. Vermeerlaan 22
- Vondellaan 7
- Vondellaan 12
- Berkenlaan 12
- Liebevrouwestr. 3
- Bevrijdingsstr. 3
- PC Hooftlaan 43
- Julianalaan 62
- Potgieterlaan 29
- Beukenlaan 2
- Irislaan 26.
- Molens

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
125697	06-09-41	222	3	02	2	2	000000	000000	000000	000000
680421	28-12-53	111	1	00	1	1	111111	111111	111111	111111
321173	10-05-23	777	3	01	2	2	222222	222222	222222	222222
003305	19-07-55	111	1	00	1	1	333333	333333	333333	333333
402167	31-01-39	444	3	00	1	1	444444	444444	444444	444444
963272	02-11-51	111	3	03	2	2	555555	555555	555555	555555
163272	02-11-51	111	2	00	2	2	666666	666666	666666	666666
972161	16-03-37	555	2	00	2	2	777777	777777	777777	777777
544001	08-02-56	333	3	04	2	2	888888	888888	888888	888888
544001	08-02-56	333	1	00	2	2	999999	999999	999999	999999
015381	13-04-49	222	1	00	2	2				
718469	08-10-41	222	1	00	2	2				
346952										

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
000000	000000	000	0	00	0	0	000000	000000	000000	000000
111111	111111	111	1	11	1	1	111111	111111	111111	111111
222222	222222	222	2	22	2	2	222222	222222	222222	222222
333333	333333	333	3	33	3	3	333333	333333	333333	333333
444444	444444	444	4	44	4	4	444444	444444	444444	444444
555555	555555	555	5	55	5	5	555555	555555	555555	555555
666666	666666	666	6	66	6	6	666666	666666	666666	666666
777777	777777	777	7	77	7	7	777777	777777	777777	777777
888888	888888	888	8	88	8	8	888888	888888	888888	888888
999999	999999	999	9	99	9	9	999999	999999	999999	999999

# wiskunde voor het lager beroeps onderwijs

## OP HET SPOOR

*Met een leerstofpakket onder bovengenoemde titel tracht de lbo-groep de leerlingen in het begin van de brugperiode lbo op het spoor te zetten van een stukje grafische verwerking. Hierbij ligt het aksent meer op het laten kennismaken met wiskunde en het bevorderen van de onderlinge samenwerking bij de leerlingen dan op het leren van een stuk vakinhoud.*

*'Op het spoor' kan aan het begin van traject 2 – zoals dit beschreven is op bladzijde 45 van de 'Brochure lbo, startpunt leerplanontwikkeling'<sup>1)</sup> – geplaatst worden. Unit 2.1 en 2.2 komen gedeeltelijk aan de orde.*

WIM SWEERS

Om tot een reeks van activiteiten en zo mogelijk initiatieven te komen, worden de leerlingen gekonfronteerd met een probleem waarvan de oplossing aanvankelijk buiten hun bereik ligt.

Van dit probleem (Karavan-Kareltje moet opgespoord worden) zal de *motivatie* uit moeten gaan om tot bovenbedoelde activiteiten en initiatieven te komen. Het pakket bestaat uit stukjes leestekst, afgewisseld met zeven opdrachtkaarten die tezamen het verhaal bevatten, waarbij de opdrachtkaarten deels individueel, deels in groepjes verwerkt moeten worden.

Het *taalaspekt* springt duidelijk in het oog. Zowel het lezen in de moedertaal als het begrijpen en interpreteren van de tekst wordt in het pakket geëist. De *matematische activiteiten* die verricht moeten worden zijn:

- het lezen en maken van een beeldgrafiek
  - het lezen en maken van een tabel
  - het maken van een staafdiagram
  - 'plotten' of 'turven' als techniek om inzicht te krijgen in aangeboden gegevens
  - ordenen en combineren van verzamelde gegevens
  - redeneren op basis van waarschijnlijkheden.
- Wij willen u een samenvatting geven van het verhaal, afgewisseld met enkele ervaringen opgedaan tijdens het eksperiment in enkele lbo-brugklassen.

In de vroege ochtenduren wordt kommissaris Zuidewind uit zijn bed gebeld met de mededeling dat Karavan-Kareltje, een berucht smokkelaar, uit de gevangenis te groningen is ontsnapt.

Om snel te kunnen vluchten heeft hij een auto gestolen en blijkens een in zijn cel gevonden briefje is hij op weg naar de warmste streek in het land waar de meeste nederlandse toeristen heengaan.

Door de vraag 'naar welk land zou Kareltje vluchten?' worden de leerlingen gestimuleerd om de opsporing actief ter hand te nemen. Ook kunnen suggesties gedaan worden over verschillende mogelijkheden om K. op te sporen.

Het dossier van Karavan-Kareltje wordt gelicht en de gegevens, die in piktogramvorm zijn genoteerd, worden per telefoon vanuit het hoofdburo doorgegeven.

De gesuggereerde werkwijze in opdrachtkaart 1 is essentieel als eerste aanzet tot het maken van een taakverdeling.

<sup>1)</sup> Deze brochure is voor lbo-docenten verkrijgbaar bij het IOWO.

Oprichtkaart 1  
Voor 2 leerlingen.

GEWONENDE KARAVANS IN 1970

GEWONENDE KARAVANS IN 1971

**4 landen**

- I. Italië
- S. Spanje
- F. Frankrijk
- D. Duitsland
- P. Portugal
- B. België
- O. Oostenrijk

Dit zijn twee beeldgrafieken die laten zien hoeveel caravans Karel'tje in 1970 en 1971 naar verschillende Europese landen heeft gesmokkeld.

► In 1970 smokkelde hij er 8 naar Frankrijk. Zoek dit in de grafiek op.

Boven de F. staan maar  caravans getekend.

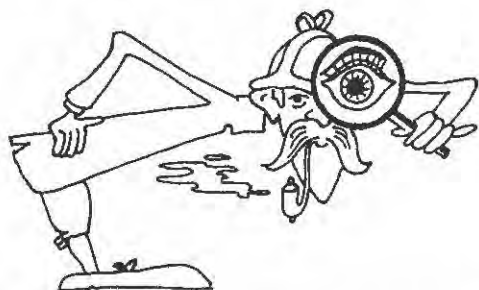
I getakende caravan betekent dus  caravans in werkelijkheid.

- Een van jullie speelt nu de rol van inspecteur Doornbos en "leest voor" wat er in de beeldgrafieken staat.
- De ander speelt de rol van inspecteur Valkoog en noteert deze gegevens in een lijstje (tabel) hieronder.

Schrijf ook op, hoeveel hij er totaal in 1970 en 1971 naar elk land afzonderlijk smokkelde.

Vervolgens moet de 'doorgebelde' informatie in een andere vorm worden weergegeven. Deze opdracht is bedoeld om de leerlingen de kans te geven (vanuit ervaringen in de basisschool of bij andere vakken) eigen ideeën te lanseren. Door gezamenlijk overleg komen de leerlingen tot resultaten die ze individueel misschien bereikt zouden hebben.

Daarna wordt doorgegeven dat Karavan-Karel'tje een auto heeft gestolen waarmee hij in zuidelijke richting gevlucht is.



De met de zaak belaste inspecteur Valkoog komt tot de konklusie dat Karel'tje zich ten hoogste op een afstand van 150 km van groningen kan bevinden. De volgende opdrachtkaarten bevatten een afstandstabel en een kaartje van nederland. Met behulp hiervan moeten de leerlingen uitzoeken waar Karel'tje kan zijn en waar-

schijnlijke vluchtroetes op de kaart aangeven. De leerlingen zijn in het rekenonderwijs steeds gewend geweest om een eksakte uitkomst te geven. Hierdoor zal hun oplossing van het probleempje 'de auto rijdt 150 km/uur, hij heeft een uur gereden' ook zijn dat Karel'tje zich op 150 km van groningen bevindt. Ze moeten tot de ontdekking komen, dat Karel'tje zich ook dichtter bij groningen kan bevinden dan op de maksimale afstand van 150 km.

Land	1970	1971
I	100	120
S	80	90
F	150	180
D	120	140
P	90	110
B	70	80
O	60	70

Bij deze opdracht kan de waarschijnlijkheid benadrukt worden. In het algemeen hebben de leerlingen te snel de neiging om op basis van onvoldoende gegevens iets als vaststaand aan te nemen. Het is bijvoorbeeld onzeker of Karel'tje wel steeds naar het zuiden blijft rijden.

Doordat de radio een politiebericht heeft omgeroepen, komen er meldingen binnen van plaatsen, waar K. is gesignaleerd.

*Bij de eerste eksperimenten met dit pakket zijn deze meldingen op de band opgenomen die in de klas werd afgespeeld.*

*Hierbij 'plotten' enkele leerlingen met kopselden op een wegenkaart van nederland (die op zachtboord is geplakt). De anderen verwerkten de meldingen met behulp van een klein kaartje.*

Plotten en turven zijn handige technieken om gegevens te ordenen. Deze technieken die mogelijk wel eens ervaren zijn door de leerlingen (in spionagefilms of bij het kaartspel), worden in het algemeen niet van nature gehanteerd.

De binnengekomen meldingen vormen een getuigenverklaring die op zijn waarde geschat moet worden. Naarmate er meer meldingen uit één plaats binnenkomen, wordt de waarschijnlijke vluchtroete duidelijker, maar niet zeker. Karel'tje blijkt tenslotte naar schipholt te zijn gegaan en is vandaar per vliegtuig vertrokken.

Door middel van een klasgesprek kan een strategie gevonden worden om erachter te komen waarheen de meeste nederlanders met vakantie gaan.

Voor de hand liggende suggesties zijn: vraag het aan de ANWB, de VVV of een reisburo.

De VVV of een reisburo is via de directeur, een kennis van Zuidewind, wel te bereiken. Deze stelt een lijst beschikbaar, waarop de namen en vakantiebestemmingen van honderd klanten staan vermeld. Deze lijst kan op het juiste moment door middel van een overhead-projector worden geprojecteerd of worden uitgereikt samen met opdrachtkaart 4.

Oprichtkaart 4  
Voor 3 leerlingen.

DE DIAGRAAF



De diagram is het nieuwste mechanische snuffje op het politie-bureau. Het apparaat dient om gegevens in beeld te brengen. De landen waar men zijn vakantie heeft doorgebracht, worden melding of schriftelijk in het apparaat ingevoerd. Bovenop zitten staven van 1 cm. breed, voor elk land één. Ze staan 1 cm. uit elkaar. Wordt nu een land genoemd, dan drukt de diagram de juiste staaf 1 cm. omhoog. De hoogste staaf geeft het land aan, waar de meeste mensen hun vakantie hebben doorgebracht.

► We gaan de diagram eens nadoen. Welke groep maakt de origineelste. Ja kunt knippen, plakken, kleuren. Belangrijk is, dat de staven de goede hoogte hebben en dat je gebruik maakt van de "meldingen". Het land, waar de meeste mensen hun vakantie zouden doorbrengen, is  Daar zal Kareltje dus wel haenvluchten!

Het is gebleken dat sommige leerlingen gaan turven, anderen gaan sorteren en tellen. Het maken van de diagram kan tijdens een handvaardigheidsles of als hobbywerk thuis gebeuren.

(Tijdens het experiment gingen enkele leerlingen hun gegevens controleren bij een naburige reisburo. Dit bracht de klas tot discussie over de vraag wat het meest bezochte vakantie-land is.)

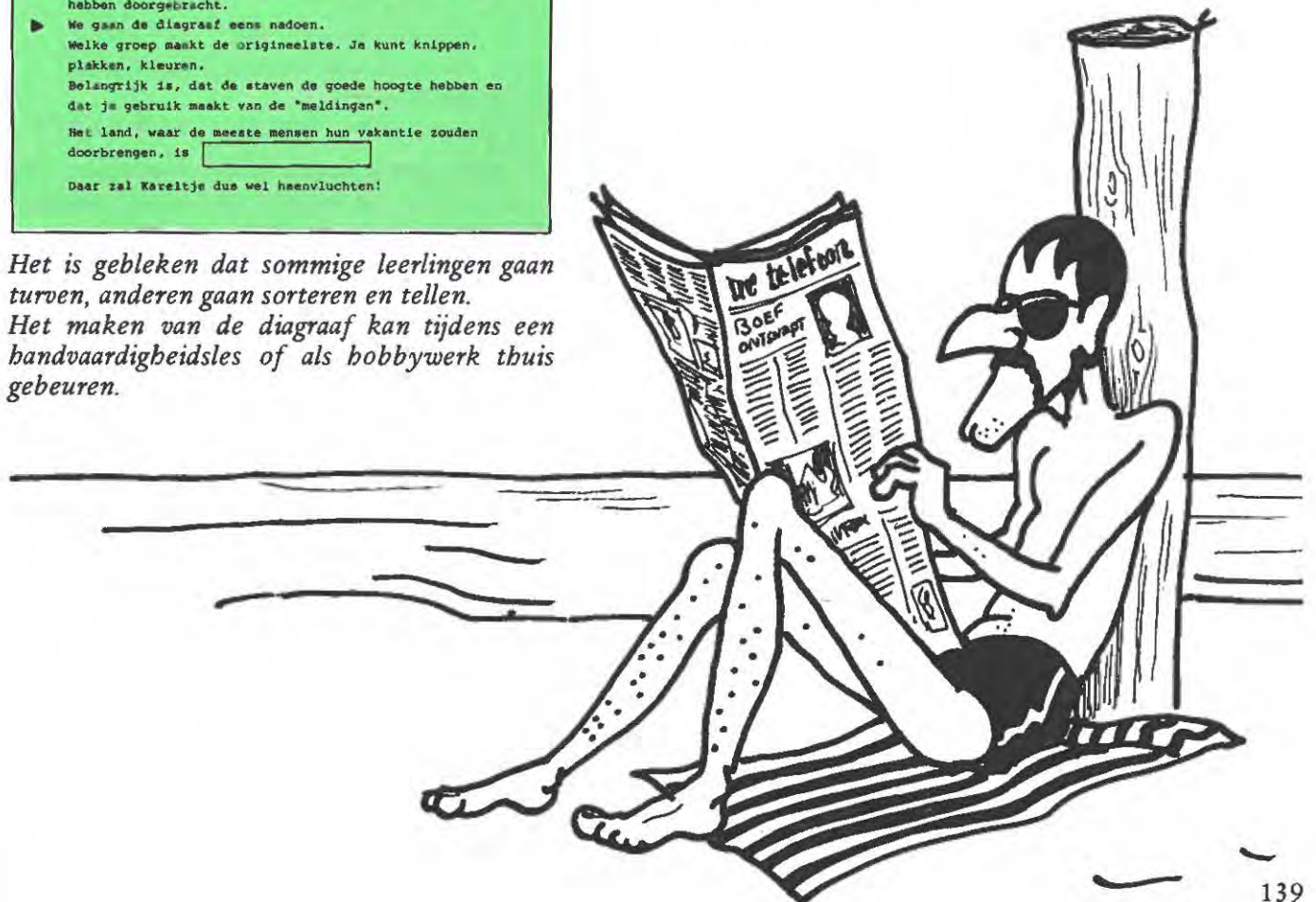
De onzekerheid die overblijft na deze tamelijk kleine steekproef, wordt grotendeels weggenomen na het uitreiken van opdrachtkaart 5 met gegevens over vakantiebestemmingen van 1972 (overgenomen uit het Statistisch Zakboek).

De waarschijnlijkheid speelt nu nog maar een geringe rol. Als er in 1973 geen wezenlijke verschuiving in vakantiebestemmingen heeft plaatsgevonden en als K. zich strikt aan de opdracht van het briefje houdt, is de bestemming nu zeker. Maar spanje is zo groot. Waarheen zal K. gaan?

Kommissaris Zuidewind haalt uit zijn auto het ANWB-boekje, waarin een temperatuurtable van verschillende streken in spanje is opgenomen. De leerlingen hoeven slechts de plaats met de hoogste gemiddelde dagtemperatuur op te zoeken en K. kan gepakt worden.

Of zal hij toch nog aan het strand kunnen genieten van de spaanse zon?

Dit blijft een open vraag.



# kleuters en wiskunde

WERKEN EN SPELEN MET EEN DOBBELSTEEN

JES MELIS  
HENNEKE DE LORME-BAKKER

De gezellige, grote, felrode dobbelsteen met de witte stippen is voor de kleuters heel aantrekkelijk. Vrijwel alle kleuters weten ook dat het een dobbelsteen is en dat je hem nodig hebt als je *mens erger je niet* of *ganzenbord* speelt.

Het is wel te merken waar deze spelen thuis nog gebruikt worden.

Bij het bespreken van de dobbelsteen komen we al gauw tot de konklusie dat je er mee kunt gooien: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

'Wanneer we nu gaan gooien en we willen van 1 tot en met 6 de punten hebben, hoe dikwijls moeten we dan minstens gooien?'

'Zes keer.'

Volgens één van de kleuters moet je dan wel geluk hebben.

'Zouden we in plaats van stippen ook iets anders op de dobbelsteen kunnen zetten?'

Verschillende voorstellen worden gedaan: sterretjes, kruisjes of andere figuren.

Na nog wat verder vragen vond één van de kinderen dat je er eigenlijk net zo goed cijfers op zou kunnen zetten:

'Je hoeft dan niet elke keer te tellen!'

'Wat kunnen we nog meer over een dobbelsteen vertellen? Zoek maar eens in de kasten of je iets kunt vinden dat er op lijkt.'

'Ja juf, de dominé!'

'O ja? Waarom de dominó?'

'Nou, die heeft ook stippen, maar is plat!'

'En de dobbelsteen?'

'Dat is een kubus, maar met ronde hoeken.'

De dobbelsteen wordt verder besproken. Hij heeft vlakken en randen en (ronde) hoeken. 'Tel eens hoeveel van elk!'

'We gaan een spelletje doen. We gooien de dobbelsteen en jullie moeten raden hoeveel stippen er aan de onderkant zijn. Als het goed is schrijven we het op.'

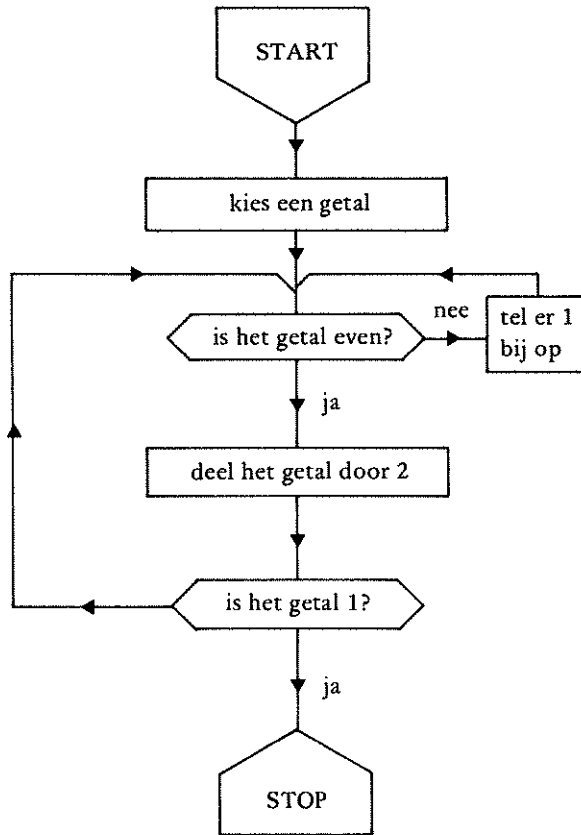
Na een poosje komen de kinderen tot de ontdekking dat de som van de tegenover elkaar gelegen vlakken steeds 7 is. Het raadspel is nu dus een teloefening geworden.

In de klas staat een doos papieren plakrondjes en er ligt een stapeltje kleine vierkanten blaadjes. De kleuters mogen om de beurt de dobbelsteen gooien en wat gegooid is namaken. Van de beplakte vierkantjes wordt dan tot slot een grafiek gemaakt. (zie afbeelding)

In het speellokaal worden de kinderen genummerd. Met behulp van de dobbelsteen kunnen nu vooraf gestelde opdrachten uitgevoerd worden.

Een leuke *variantie*: werken en spelen met een kleuren-dobbelsteen.





We beginnen met het kiezen van zomaar een getal: 9.

Onze wandeling verloopt dan als volgt:

START → 9 → 10 → 5 → 6 → 3 → 4 → 2 → 1 → STOP.

Nog een voorbeeld:

START → 41 → 42 → 21 → 22 → 11 → 12 → 6 →  
→ 3 → 4 → 2 → 1 → STOP.

*De vraag rijst of we, wanneer we beginnen met een willekeurig natuurlijk getal, altijd bij 1 uitkomen.*

*En hoe is dat dan te verklaren?*

Wellicht vindt u deze vragen wat simpel. Daarom een ander blokschema. Met dezelfde vragen. Over het al of niet simpel zijn, mag u dan zelf oordelen.

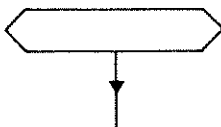
Hierboven een eenvoudig blokschema, bestaande uit

opdrachten:

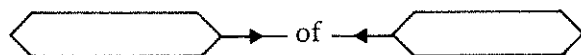
en vragen:

De vragen kunnen met 'ja' of met 'nee' beantwoord worden.

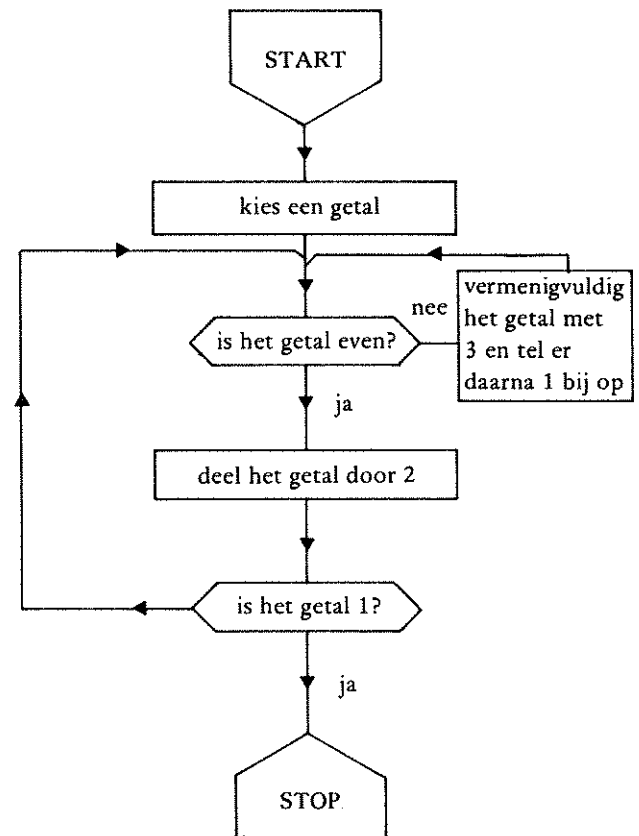
Is het antwoord 'ja' dan volgen:



Is het antwoord 'nee' dan:



Een wandeling door het blokschema verduidelijkt de gang van zaken.



# BASJE

## een jonge onder- zoeker

MARCHE MACABRE

DIK OORT

*Als Vader binnenkomt zit Basje met z'n Scrabblespel te spelen.*

**Vader** : Zo Basje, wat ben je aan 't doen?

**Basje** : Ik heb hier wat letters en daar probeer ik een woord van te maken.

**Vader** : Welke letters heb je?

**Basje** : De letters *e, o, m, r* en *t*.

**Vader** : En heb je al woorden gevonden?

**Basje** : Ja, *roemt* en *moert*, maar ik weet niet zeker of dat laatste woord wel een goed woord is.

**Vader** : Dat kun je in 't woordenboek opzoeken.

**Basje** : Maar nu wil ik weten of er nog andere woorden zijn.

**Vader** : Wat bedoel je met een woord?

**Basje** : Nou, een woord dat in 't nederlands bestaat.

**Vader** : Laten we nu eens afspreken, dat we met woord bedoelen elke rangschikking, die met die vijf letters gelegd kan worden.

**Basje** : Dus *eomrt* is ook een woord?

**Vader** : Ja, maar geen woord, dat in 't nederlands voorkomt.

**Basje** : Wat heb ik daar dan aan?

**Vader** : We gaan eerst alle woorden van vijf letters opschrijven, die we van de letters *e, o, m, r* en *t* kunnen maken; dan lezen we ze na en zien welke we kunnen gebruiken.

**Basje** : Zijn dat er veel?

**Vader** : Dat zullen we eens zien.

**Basje** : Hoe moet ik dat aanpakken?

**Vader** : Laten we eens beginnen met de drie letters *m, r* en *t*.

**Basje** : Ik leg eerst *mrt* en dan *mtr*. Met de *m* voorop heb ik alles gehad.

**Vader** : En nu?

**Basje** : Nu leg ik de *r* voorop, dan krijg ik *rmt* en *rtm* en tenslotte de *t* vooraan, dan krijg ik *tmr* en *trm*. Dus met drie letters zijn er zes woorden.

**Vader** : Juist! Denk er wel om dat de letters onderling verschillend moeten zijn.

**Basje** : Ja, natuurlijk want van de drie letters *t*, *t* en *t* kun je maar één woord leggen.

**Vader** : Precies! En nu nemen we de letter *o* als vierde letter erbij.

**Basje** : Dan leg ik eerst de letter *o* voorop en dan kan ik daar de zes rangschikkingen van *m*, *r* en *t* achter leggen.

*o m r t*  
*o m t r*  
*o r m t*  
*o r t m*  
*o t m r*  
*o t r m*.

**Vader** : En verder?

**Basje** : Dan leg ik de *m* voorop en daarna alle rangschikkingen van de letters *o*, *r* en *t*.

**Vader** : Hoeveel zijn dat?

**Basje** : Natuurlijk ook zes.  
En dan zet ik de *r* voorop met daarachter steeds één van de zes rangschikkingen van de letters *o*, *m* en *t*. En tenslotte de *t* voorop en steeds één van de zes rangschikkingen van *o*, *m* en *r* erachter.

**Vader** : Hoeveel woorden heb je dan?

**Basje** : 24.

**Vader** : Let eens op: met 3 letters heb je 6 rangschikkingen.  
En met vier letters?

**Basje** : Ja, dat is leuk. Door de vierde letter er bij te nemen krijg je vier keer zoveel rangschikkingen. Gaat dat altijd zo door?

**Vader** : Laten we eens kijken. Hoeveel rangschikkingen heb je bij de ene letter *t*?

**Basje** : Dan heb je maar één letter. Mag je dan wel van rangschikking spreken?

**Vader** : Laten we afspreken van wèl.

**Basje** : Nou, dan kun je alleen *t* leggen, dus één rangschikking.

**Vader** : En nu nemen we de tweede letter *r* erbij.

**Basje** : Hier klopt 't. Nu is 't aantal rangschikkingen  $2 \times 1 = 2$ : *rt* en *tr*.

**Vader** : En nu de derde letter *m* erbij.

**Basje** : 't Klopt weer! We hebben straks al gevonden dat drie letters zes rangschikkingen geven. Dat is  $3 \times$  zoveel als bij twee letters:  $6 = 3 \times 2 \times 1$ . En we weten ook al dat bij vier letters 't aantal rangschikkingen 24 is. Dat is  $4 \times 3 \times 2 \times 1$ .

**Vader** : Dus wat denk je dat 't aantal rangschikkingen bij vijf verschillende letters is?

**Basje** : Ik vermoed:  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ . Dat is 120.

**Vader** : Zo is het inderdaad. We zullen eens kijken of we dit kunnen verklaren. Leg de *t* eens neer.

*Basje legt de t.*

**Vader** : Dat kan dus maar op één manier. Nu leggen we de letter *r* als tweede letter er bij.  
Waar kun je die leggen?

**Basje** : O, ik zie 't al: links of rechts van de *t*, dus op twee manieren.

**Vader** : Dus het aantal rangschikkingen...?

**Basje** : ... is  $2 \times$  zoveel als met één letter.

**Vader** : En als ik er nu een derde letter *m* bijneem?

**Basje** : Nu heb je bij elk woord van de twee letters *r* en *t*, dus zowel bij *rt* als bij *tr*, drie plaatsen om de *m* neer te leggen. Namelijk geheel links, in 't midden of geheel rechts.  
We hadden bij twee letters  $2 \times 1$  rangschikkingen, dus bij drie letters wordt dat drie keer zo veel. Dat is  $3 \times 2 \times 1$ .

**Vader** : En zie je 't ook verder?

**Basje** : Ja, bij een woord van drie letters, bijvoorbeeld *rtm* heb je vier plaatsen om de vierde letter neer te leggen, namelijk links van de *r*, tussen de *r* en de *t*, tussen de *t* en de *m* en rechts van de *m*.

Bij vier letters heb je vijf plaatsen, bij vijf letters heb je zes plaatsen en dat gaat steeds zo door.

**Vader** : En nu nog een andere verklaring. We hebben weer de vijf letters *e*, *o*,

*m*, *r* en *t*. Die plaatsen we in de volgende rondjes:



We beginnen met rondje nummer 1. Op hoeveel manieren kun je rondje 1 van één letter voorzien?

**Basje** : Nou, daar kan ik elk van de vijf letters in leggen. Dus vijf manieren.

**Vader** : Laten we aannemen dat in rondje 1 één letter ligt; het doet er niet toe welke.

**Basje** : Dan heb ik nog vier letters over. Dus bij elk van de vijf manieren waarop rondje 1 voorzien is van een letter kan ik rondje nummer 2 op vier manieren met één letter vullen.

**Vader** : Op hoeveel manieren kan ik dus de rondjes nummer 1 en 2 samen vullen?

**Basje** : Op  $5 \times 4$  manieren. Ik zie nu hoe 't verder gaat: voor rondje nummer 3 heb ik nu nog drie letters over, waaruit ik moet kiezen.

**Vader** : Dus de eerste drie rondjes?

**Basje** : Die kan ik op  $5 \times 4 \times 3$  manieren elk van een letter voorzien.

**Vader** : En voor rondje nummer 4....?

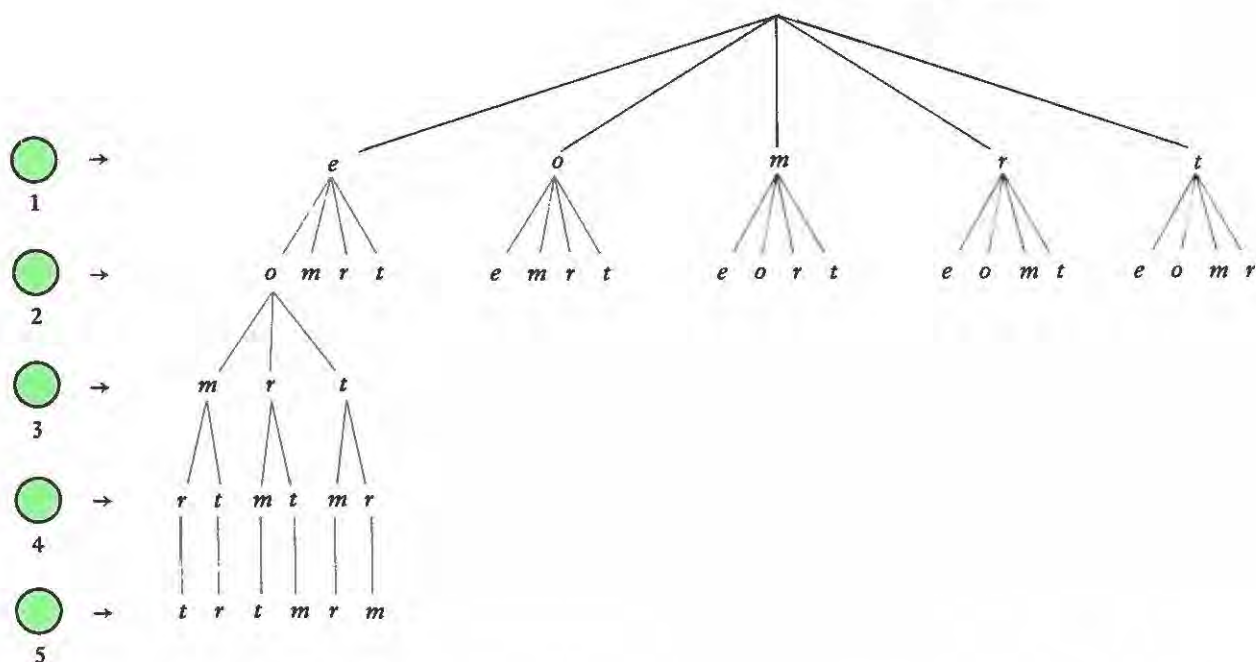
**Basje** : Heb ik nog twee letters over, dat geeft voor 't plaatsen van letters in de eerste vier rondjes  $5 \times 4 \times 3 \times 2$  manieren.

En voor rondje nummer 5 heb ik geen keus meer, want nu heb ik nog één letter over.

Alle rondjes kan ik dus op  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  manieren vullen.

**Vader** : En al die manieren zijn verschillend, geven onderling verschillende rangschikkingen, dus verschillende manieren. Je kunt 't ook nog met een boom duidelijk maken.

Vader tekent 't volgende:



**Vader** : Je ziet dat deze boom, die naar beneden groeit, nog lang niet volledig is. Maak hem straks eens af, maar teken 't dan eerst over op een breed stuk papier.

Als je alle takken getekend hebt,

hoeveel uiteinden heb je dan aan de onderkant?

**Basje** :  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ . En als ik langs een bepaalde weg van boven naar beneden ga, lees ik meteen één woord.

- Vader** : Juist, en verschillende wegen geven verschillende woorden; er zijn dus ook  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  woorden. En als je nu eens tien verschillende letters had, hoeveel woorden zou je dan kunnen maken?
- Basje** : Dat is nou gemakkelijk:  $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ . Dat is zeker wel een groot getal?
- Vader** : Erg groot; 't is al een heel werk om het met maaltkens op te schrijven. Daarom schrijven we  $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  kortweg als  $10!$  en we zeggen: *tien fakulteit*.
- Basje** : Ik wist niet dat een uitroepteken ook bij het rekenen werd gebruikt.
- Vader** : Het is hier ook geen uitroepteken, maar een fakulteitsteken. Je kunt er leuke sommetjes mee maken. Hoeveel is  $6!$  gedeeld door  $3!$ ?
- Basje** : Dat is 2.
- Vader** : Nu loop je er wel vlot in. Schrijf het maar eens uit.
- Basje** :  $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1}$  ;  
o, nou zie ik hoe stom ik was; dat is  $6 \times 5 \times 4 = 120$ .
- Vader** : Zo is het en nu vroeg je of  $10!$  een groot getal is. Je kunt 't natuurlijk even uitrekenen. Maar ik heb nog wel een probleempje voor je. In een klas zitten 10 kinderen.
- Basje** : Dat is wel 'n klein klasje.
- Vader** : Ja zeker, maar 't antwoord wordt al groot genoeg. Dit klasje heeft elke week twee keer gymnastiek. Ze beginnen steeds met een paar rondjes looppas en hebben afgesproken dat ze zich elke keer bij de gymles in een andere volgorde opstellen, tot ze alle rangschikkingen gehad hebben. Hoeveel tijd hebben ze daarvoor nodig?
- Basje** : Nou, dat is hetzelfde probleem als met 10 verschillende letters. Je zou zelfs 10 verschillende papieren letters kunnen nemen en elk kind één letter op z'n gympak kunnen plakken. Dan is het precies 't zelfde probleem. Het aantal rangschikkingen is dus  $10!$ , dat is  $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ .
- Vader** : Goed zo! En na hoeveel tijd hebben ze alle rangschikkingen gehad — stel
- maar dat ze 42 weken per jaar naar school gaan —?
- Basje** : Ik had  $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ . Ze hebben 84 keer per jaar gymnastiek. Als ik nou de 7, de 4 en de 3 weglaat, dan heb ik door  $7 \times 4 \times 3$ , dat is 84, gedeeld. Dan duurt het dus:  $10 \times 9 \times 8 \times 6 \times 5 \times 2 \times 1$  jaar. Goiedag, dat had ik toch nooit gedacht.
- Vader** : Maak daar eens eeuwen van.
- Basje** : Dan moet ik nog door 100 delen; dus ik kan bijvoorbeeld nog de 10, de 5 en de 2 weglaten. Het duurt dus  $9 \times 8 \times 6 \times 1$  eeuwen;  $9 \times 48 = 9 \times 50 - 9 \times 2 = 450 - 18 = 432$ . Dat is 432 eeuwen.
- Vader** : Juist. En als die kinderen de afspraak maken in 1973?
- Basje** : Dan zijn ze pas klaar in 't jaar  $1973 + 43200$ , dus in 't jaar 45173. Maar dat is toch erg; als ze werkelijk elke week doorgaan lopen ze zich dood.
- Vader** : Zo is dat. Maar jij zou nog alle woorden opschrijven die je kunt maken van de vijf letters *e, o, m, r* en *t*. Is dat te doen of moet je dat ook met de dood bekopen?
- Basje** : 't Zijn er  $5!$ , dat is maar 120.
- Vader** : Nou, dat gaat! De kunst is om er niet een te vergeten en geen woord twee keer op te schrijven.
- Basje** : Ik pak een overgebleven stuk behang en maak op de achterkant de boom af. Dan kan me niks gebeuren.
- Vader** : Goed zo! Waarschuw me als je klaar bent, dan gaan we samen de 120 woorden plukken.

# variabel

# blok

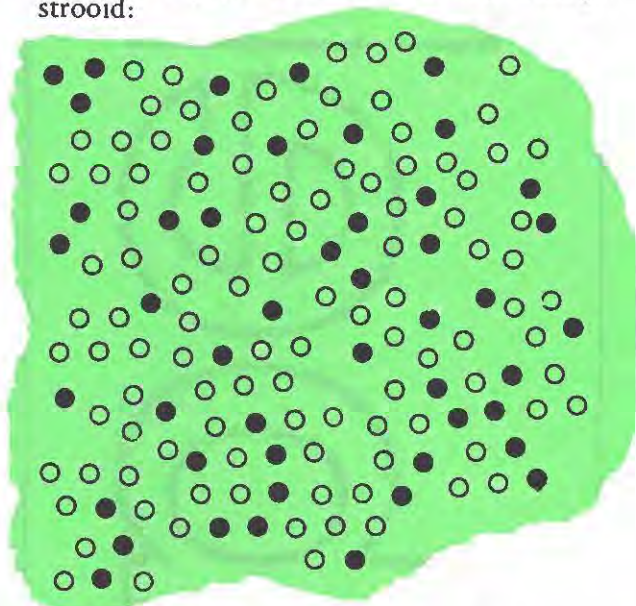
## INHOUD

2.1 <i>Inleiding en leeswijzer</i> .....	148
2.2 <i>Wie 't kleine niet eert...</i> .....	150
Jan van den Brink	
2.3 <i>En dan gaaaaan we naar de speeltuin</i>	157
Johan van Bruggen	
2.4 <i>Introductie decimale getallen</i> .....	166
Leen Streefland	

## 2.1 inleiding en leeswijzer

*Het loopt tegen 5 december.*

In de eerste klas van de ontwerpschool heeft zwarte piet pepernoten over het werkblad gestrooid:



Juf en kinderen buigen zich over de vraag waarvan er meer zijn, witte of zwarte?

Voor diverse kinderen blijkt er geen probleem te bestaan: er zijn meer witte, dat kun je zo zien!

Juf is niet overtuigd door deze motivering via het 'zo maar zien'. Hoe kun je het nu *zeker weten*.....?

In de voorgaande periode hebben verschillende activiteiten rond het tellen plaatsgevonden. **Jan van den Brink** geeft in 2.2 verslag van een deel hiervan. Hij laat onder andere zien dat reeds bij deze elementaire rekenkundige vaardigheid een wiskundig inzicht ontwikkeld kan worden. Naast de een-eenduidige relatie, die tussen de telrij en de te tellen verzameling bestaat, kunnen andere verbanden, indien gesignaleerd, het tellen ondersteunen.

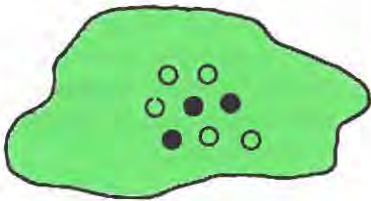
Moeder hangt de was te drogen. Voor die  $n$  handdoeken gebruikt ze  $2n$  knijpers. Het kan overigens ook zo zijn dat ze slechts  $n + 1$  knijpers nodig heeft.

Ditzelfde verband tussen de kardinaalgetallen van twee 'verwante' verzamelingen bestaat op het volgende werkblad bij de rij bomen en de bankjes daartussen. De wetmatigheid *moet bekend* worden, want een deel van de banken wordt door struikgewas aan het oog onttrokken. Zetten de kinderen de bomen echter in een kring, dan gaat de relatie  $n \rightarrow n + 1$  verloren en komt de 1-1 relatie weer tevoorschijn: bij elke boom behoort het bankje rechts ervan, of iets dergelijks.

Even later worden de patronen wat minder doorzichtig. In een kralensnoer zijn naast 4

witte steeds 4 rode kralen geregen. Voor het onderzoek van 'meer of minder' is een blik op de uiteinden van het snoer voldoende, tenminste... als een doorzichtige redenering gehouden kan worden. Dit redeneren wordt een noodzaak als je de opdracht krijgt om figuurtjes in een ornament op een vaas te tellen. Je ziet alleen de voorkant van de vaas..... Echte zekerheid krijg je pas als je de vaas in de hand zou kunnen houden.

Met deze ervaringen keken de kinderen naar de witte en zwarte pepernoten. Men kan zich voorstellen dat een kind zijn blik laat 'dwalen' over het hele veld van pepernoten. Steeds ziet het dan een lokale situatie van dit soort:



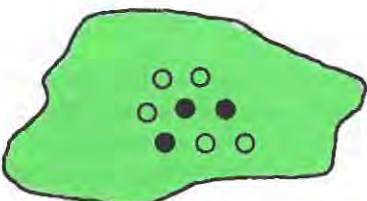
Hier kun je als het ware nog tellen: 5 witte, 3 zwarte. En daar overal dit beeld weer opdoemt – althans ongeveer –, geldt voor de hele plaat: *méér witte dan zwarte*. Dit overtuigt ook andere kinderen.

\* \* \*

Ook in de derde klas van de ontwerpschool is een deel van de tijd besteed aan dergelijke problematieken.

**Johan van Bruggen** beschrijft een aantal lessen rond een statistisch probleem. (2.3) Tellen, turven en schatten zijn fundamentele activiteiten hierin. Een speeltuin moet ingericht worden. Geld en ruimte is beschikbaar. De vraag is: hoeveel van welke speeltoestellen moeten er in komen? En bij de beantwoording wil je tegemoetkomen aan de wensen van de toekomstige klantjes.

Een eerste enquête onder de leerlingen van deze klas levert al heel wat beschrijvend statistisch materiaal. Maar representeert deze telling de wens van *alle* kinderen?



Deze vraag, die in principe ook bij het bovenstaande plaatje gesteld kan worden, stemt tot nadenken.

Moet je méér kinderen vragen, of....?

De steekproeftelling kan slechts een schatting van de werkelijkheid zijn. Maar binnen de kontekst van dit probleem kun je ermee tevreden zijn. De erop volgende berekeningen, die in principe de begrippen fraktie en verhouding betreffen, kunnen vanuit de schatting ongestoord plaatsvinden.

\* \* \*

Een ander soort telproblematiek komt in de bovenbouw aan de orde. Evenals in de vorige stukjes onderwijs is het element van 'niet precies zijn' weer aanwezig.

**Leen Streefland** presenteert een groot deel van zijn pakket 'Ralph, de zeerover'. (2.4) Het is bedoeld als voorbereiding op het begrip *kommagetal*. Als middel is de procedure gekozen die gevolgd wordt bij het benaderen van oppervlakte.

Gegeven: vier grillig gevormde eilanden, afgebeeld op een oude kaart. Gevraagd wordt naar het kleinste van de vier. De vijfdeklassers trachten de oppervlakten te meten met de hun bekende middelen. Maar zelfs het transparante ruitjespapier leidt niet tot een direkt antwoord. Wat immers te doen met de hokjes op de rand? Wat moet je wél, wat moet je niet meeTELLEN? Je moet wel heel erg tolerant zijn als je van al die randhokjes zoudt willen afzien! Daarom ga je de meetmaat verfijnen. De vierkante centimeter wordt 100 mm<sup>2</sup>. En nu kun je weer gaan tellen....

Het telresultaat vertoont een nieuwe karakteristiek, die duidelijker tot uitdrukking komt dan wanneer dit in cm<sup>2</sup> wordt weergegeven. De uitkomst '17, 24 cm<sup>2</sup>' kan nu een concrete betekenis hebben: 17 van die grote hokjes, 24 van die hele kleine.

Het meten van deze oppervlakte leidt niet tot kommagetallen met meer cijfers achter de komma. In principe is de toegang tot de wereld van het continue aangegeven. Het positionele stelsel, de meetprocedure en het tellen spelen samen in een poging om ook deze wereld met eenvoudige middelen te beschrijven.

## 2.2 wie 't kleine niet eert...

OVER 'T TELLEN VAN *KLEINE*  
HOEVEELHEDEN DOOR *KLEINE*  
KINDEREN (KLAS 1)

JAN VAN DEN BRINK

In de eerste periode hebben we onze aandacht o.a. gericht op grote hoeveelheden en op het vinden van verschillende manieren om die grote hoeveelheden te vergelijken (door: zien, groeperen, turven, e.d.).

In het begin van de tweede periode is veel aandacht besteed aan het *tellen* van *kleine hoeveelheden*.

Allerlei spelletjes zijn in de klas uitgevoerd om snel kleine hoeveelheden te herkennen. Verschillende series werkkaarten zijn daartoe ontwikkeld. We kozen uit deze series een vijftal werkkaarten die de volgende telsituaties beogen:

\* *Wasdag*

Vanuit een komplekse situatie, waarbinnen verschillende oplossingen mogelijk zijn, relaties ontdekken tussen het aantal wasknijpers en het aantal stukken wasgoed. Deze relaties zijn afhankelijk van de wijze waarop een kind de was ophangt.

\* *Bomen en banken*

Dit werkblad levert een isomorfe situatie waarin echter vooral het aksent wordt gelegd op de inverse relatie(s) en op het generaliseren van de relatie(s).

\* *Bomen en banken in het park*

Door bomen en banken in een kring te plaatsen ontstaan nieuwe telsituaties, die met allerlei voorwerpen uit de klas ingeleid of uitgebreid kunnen worden — bijvoorbeeld met:

\* *De vaas voor de muur*

Essentieel hierbij is dat de objecten die moeten worden geteld, niet allemaal te zien zijn. Er moet met bepaalde overwegingen van symmetrie (zowel bij de vaas, als bij de muur) geredeneerd worden om het aantal te vinden.

\* *Kralensnoer*

Het kralensnoer levert weer een andere telsituatie. Alle kralen zijn wel te zien, maar het is ondoenlijk om ze te tellen. Er moet dus een strategie ontworpen worden.

Met deze kaarten nodigen we u uit voortzettingen of uitbreidingen te bedenken. De reacties van uw kinderen op de kaarten kunnen dienen tot leidraad.

*Tenslotte nog een opmerking over het gebruik van de kaarten.*

*Tussen de originelen staan verkleinde kopieën van de werkbladen met daarnaast enige didactische opmerkingen. Deze opmerkingen kunnen u tijdens de bespreking van de kaarten in de klas enige steun geven.*

WASDAG

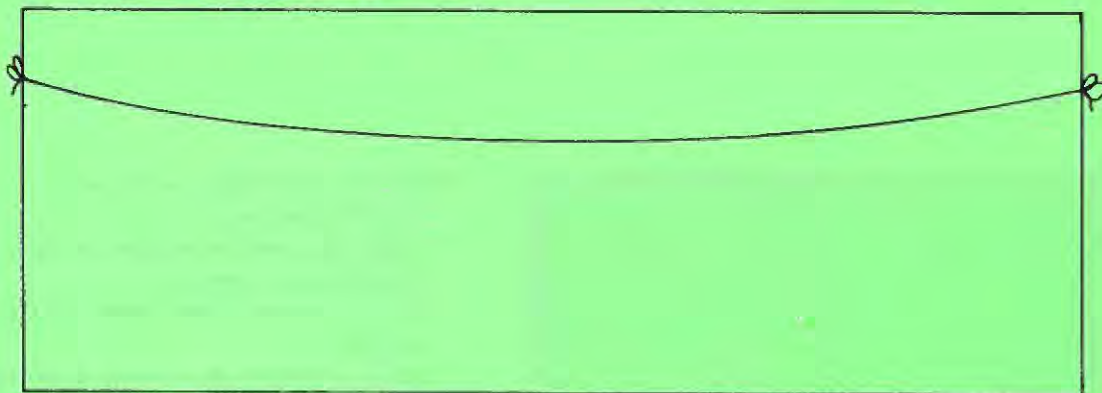
WERKBLAD 1

ZAK-DOE-KEN DRO-GEN



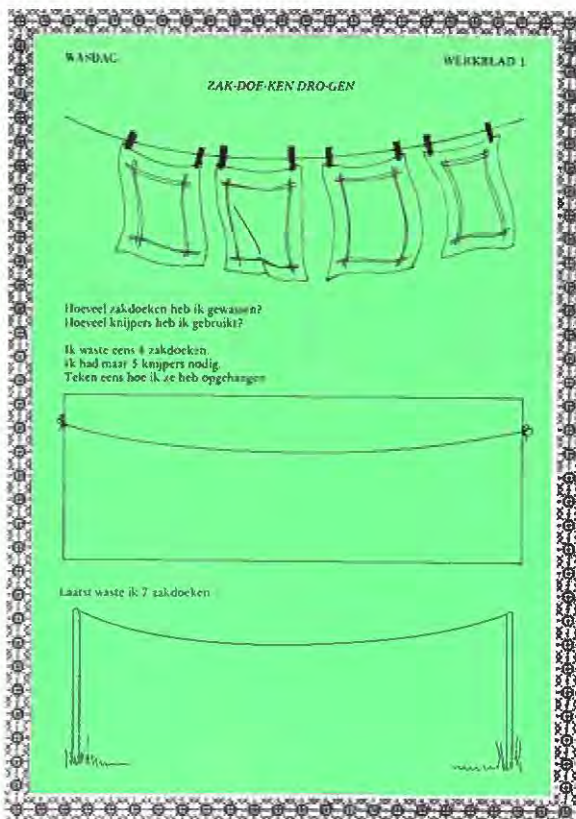
Hoeveel zakdoeken heb ik gewassen?  
Hoeveel knijpers heb ik gebruikt?

Ik waste eens 4 zakdoeken.  
Ik had maar 5 knijpers nodig.  
Teken eens hoe ik ze heb opgehangen.



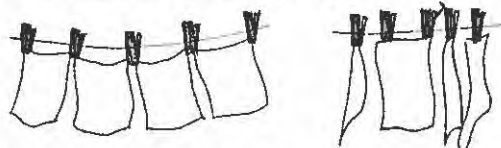
Laatst waste ik 7 zakdoeken.



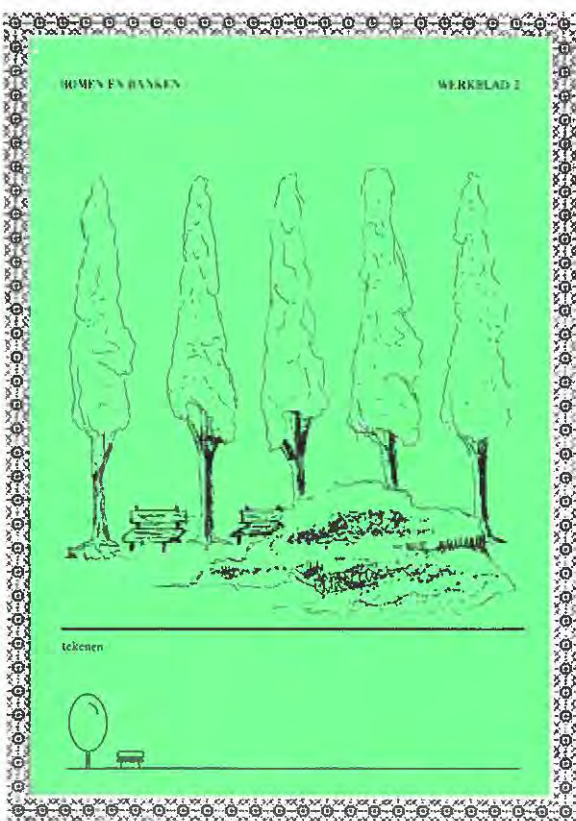


### Didaktische opmerkingen werkblad 1

- \* Inleiding.  
Span een waslijn in de klas en laat 4 handdoeken ophangen.
- \* Vragen om te voorspellen.  
5 handdoeken: hoeveel knijpers? (10)  
6 handdoeken: hoeveel knijpers? (12)
- \* Wie kan het ook anders ophangen?



- \* Wanneer droogt het beter? (gesprekje; proef met 2 waslijnen met natte zakdoeken die verschillend opgehangen zijn en de hele dag te drogen hangen in de klas.)
- \* Omgekeerd.  
Ik heb maar 5 knijpers en 4 zakdoeken.  
Wie kan ze 'goed' ophangen?
- \* Tekst op het werkblad voorlezen, laten tekenen en bespreken. (steeds één knijper méér nodig dan er zakdoeken zijn)
- \* Laat een lange waslijn tekenen en wasgoed ophangen.



### Didaktische opmerkingen werkblad 2

- \* Hoeveel bomen zie je?
- \* Tussen elke twee bomen staat een bank.  
Hoeveel banken staan er?
- \* Als er 17 *bomen* staan, hoeveel banken zouden er dan zijn?
- \* Als er 17 *banken* staan tussen de bomen, hoeveel bomen zijn er dan? (tekenen en kleuren)
- \* Generaliseren.  
Als er 93 bomen zijn, hoeveel banken staan er dan?

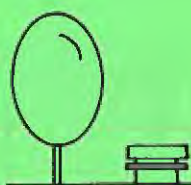
BOMEN EN BANKEN

WERKBLAD 2



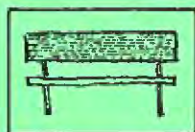
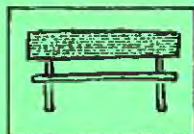
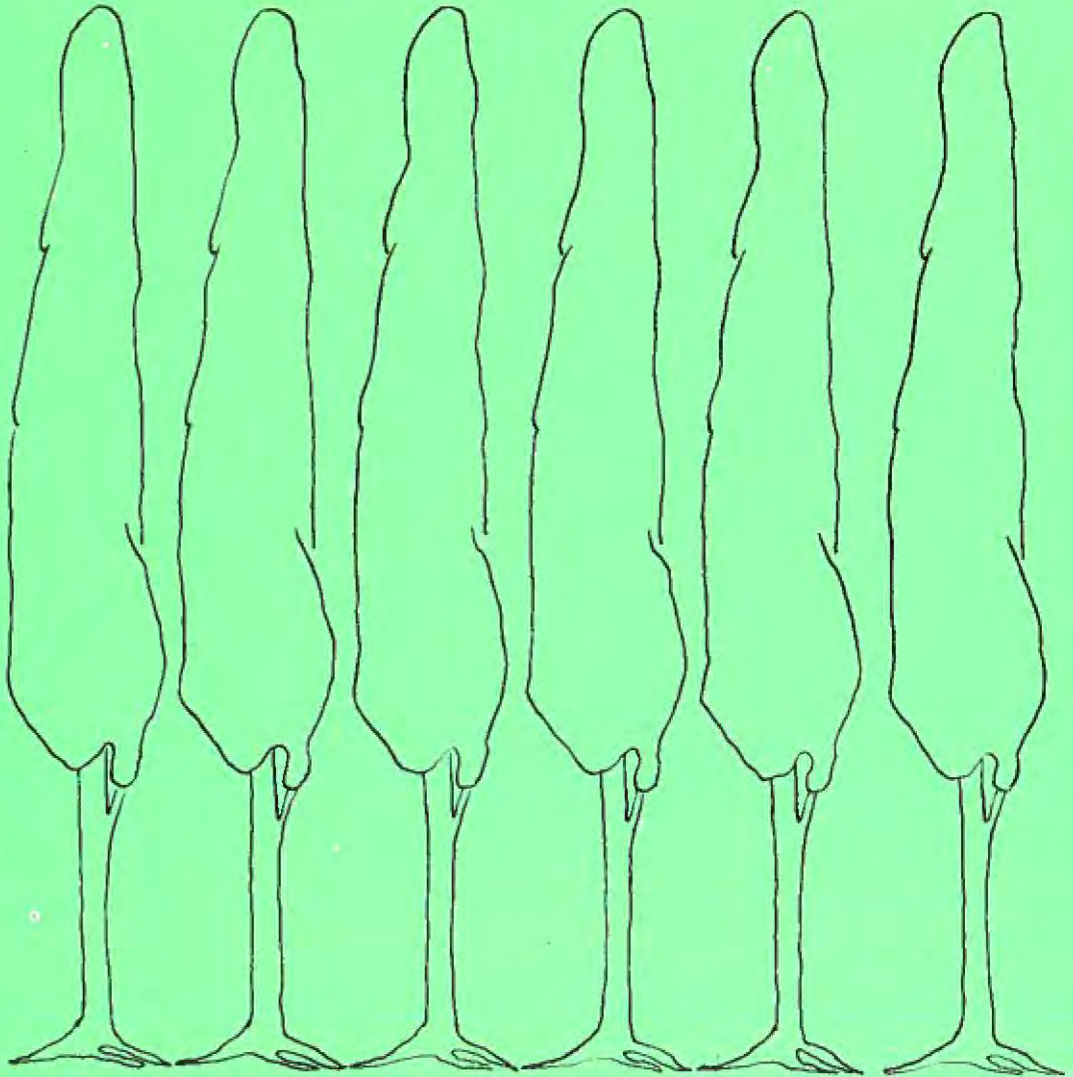
---

tekenen



BOMEN EN BANKEN IN HET PARK

WERKBLAD 3





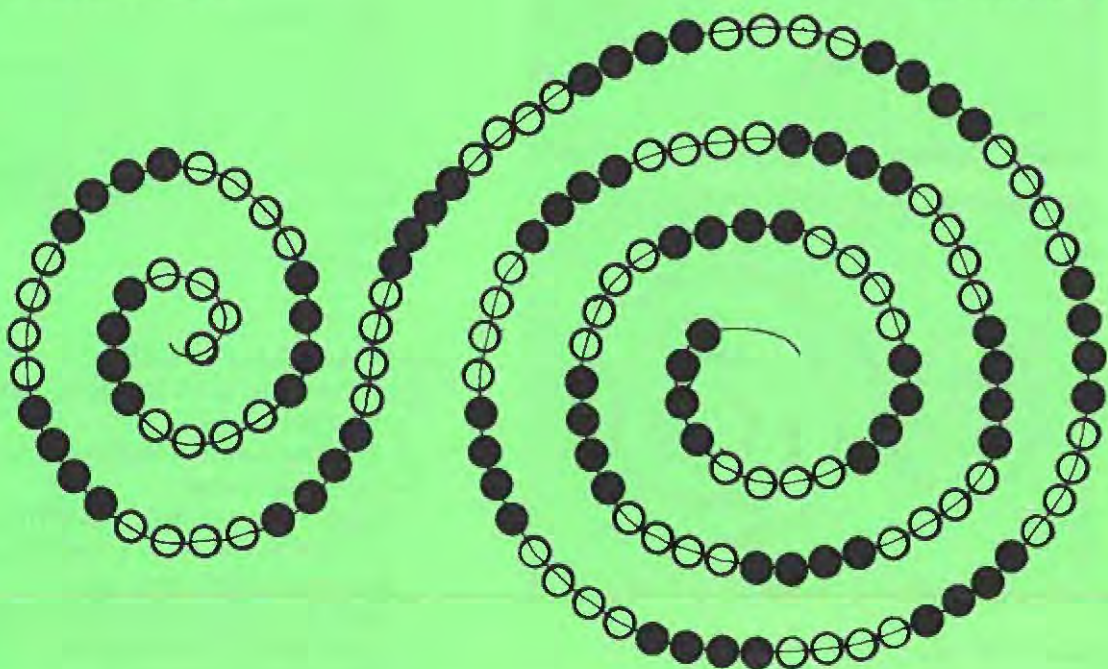
DE VAAS VOOR DE MUUR

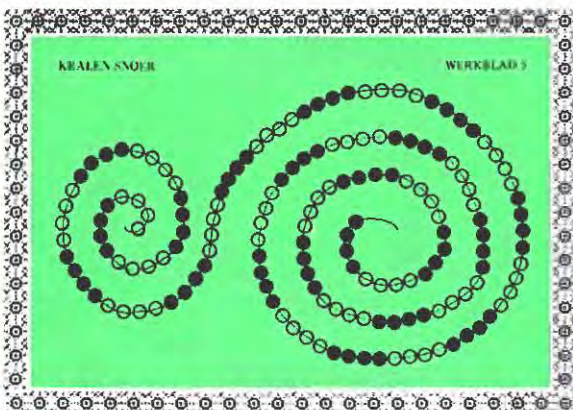
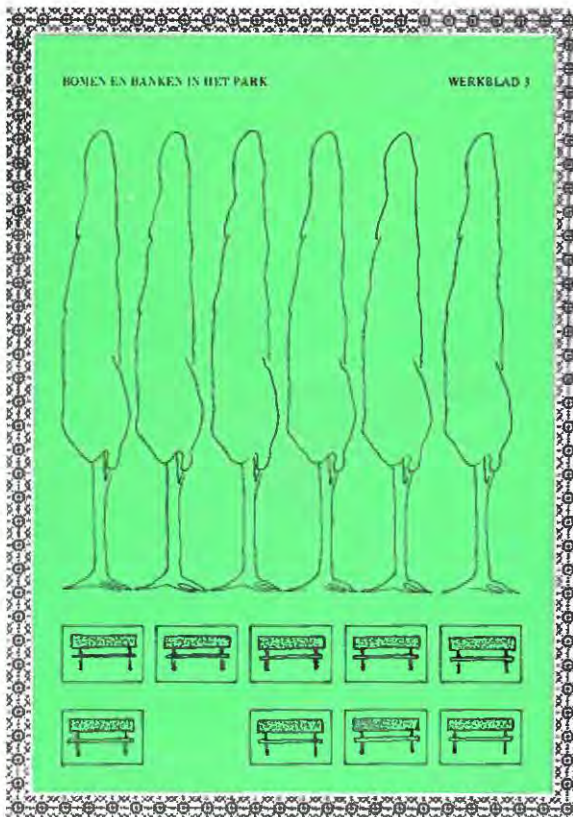
WERKBLAD 4



KRALEN SNOER

WERKBLAD 5





*Didaktische opmerkingen werkblad 3*

- \* Hoeveel bomen?  
Hoeveel banken? (2 x 5) – 1.
- \* Als je 6 bomen *in een kring* plant (plakt) en tussen elke twee bomen in de kring moet één bank staan,

hoeveel banken heb je dan nodig? (plakken; het spel 'kat en muis' doen)

- \* Als je alle banken wilt gebruiken, hoeveel bomen moet je dan planten?
- \* Laat slingers tekenen *van boom tot boom*. (in de kring)  
Hoeveel slingers heb je getekend? (15 maximaal)

*Didaktische opmerkingen werkblad 4*

- \* Twee grote problemen:
  - a de maantjes en zonnetjes op de vaas,
  - b de stenen in de muur.
- a Inleiden met een échte vaas of pot waarop een ornament staat. Doel hierbij is: kun je ook iets zeggen over de dingen die je *niet* ziet?  
Vragen:
  - hoeveel zonnetjes zie je?
  - hoeveel zonnetjes zullen er op de hele vaas staan?
  - zijn er evenveel zonnetjes als maantjes? waarom?
 (uit te voeren met kinderen in een kring: jongen – meisje – ...)

- b Vraag:
  - als er in de bovenste rij getekende stenen 10 stenen zijn, hoeveel zijn er dan in elke andere rij? (voorspellen en daarna laten tekenen).

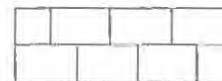
Probleem:

- is een halve steen ook een steen? (zie blz. 130 van dit bulletin)

Voortzetting:

- bouwen van 'muren' door te plakken.

N.B. 2 muren:



evenveel stenen in elke rij duidelijk!

of



evenveel in elke rij?

*Didaktische opmerkingen werkblad 5*

- \* Zijn er evenveel witte als zwarte kralen? (dit is niet te tellen, wél te 'zien')
- \* Als de kinderen het niet zien kunt u op verschillende wijzen steun verlenen:
  - koppel – in gedachte – het begin en eind van het snoer aan elkaar en u vindt een afwisselend patroon zoals ook op de vaas, of neem het eerste groepje van 8 kralen en vraag: 'zijn er *evenveel* witte als zwarte?' (vraag niet: 'hoeveel witte of zwarte?'); neem dan het tweede groepje van 8 erbij, vervolgens het derde, enz.
- \* Laat patronen rijgen. (kleuren)

## 2.3 en dan gààn we naar de speeltuin

EEN KOMPLEKS PROBLEEM VOOR  
KLAS 3 <sup>1)</sup>

JOHAN VAN BRUGGEN

<sup>1)</sup> De foto's in dit artikel zijn (met toestemming) ontleend aan een katalogus van NIJHA B.V., lochem.

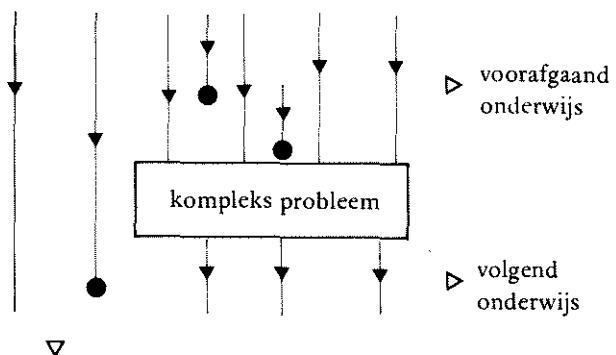
In de eerste zes weken van het programma voor klas 3 is gewerkt op diverse fronten:

- \* leren optellen en aftrekken op een wijze die recht doet aan het matematiseringsaspect en bovendien zo snel mogelijk tot beheersing voert<sup>1)</sup>);
- introduktie van het kruispuntenmodel voor de vermenigvuldiging<sup>2)</sup>);
- \* werken aan
  - memoriseren en verdere aanbieding van de tafels van vermenigvuldiging,
  - verkennen van eigenschappen van getallen en van operaties op getallen,
  - kennismaken met de breuknotatie als 'verslag' van een verdeling,
  - meten van oppervlakte en inhoud met natuurlijke maten,
  - tellen en vergelijken van grote (> 400) hoeveelheden en het uitvinden van strategieën daartoe;
- \* ordenend tellen aan de hand van enkele vrij lastige telproblemen;
- \* eerste verkenning van het begrip symmetrie.

In de laatste week van deze eerste werkperiode is gewerkt aan een *kompleks probleem*, dat langzamerhand — via een matematiseringsproces op zeer intuïtief nivo — werd opgelost. In dit oplossingsproces gaan enkele verworven inzichten en vaardigheden uit het voorafgaande onderwijs hopelijk functioneren (het evaluatie-aspekt van dit stuk onderwijs).

Tegelijkertijd wordt vanuit het probleem gelegenheid geboden om een start te maken met de verkenning van nieuwe begrippen en leergangen (het motivatie-aspekt).

In een eenvoudig schema:



▽  
niet in het komplekse probleem geïntegreerd wiskunde-onderwijs (bijvoorbeeld de leergang optellen en aftrekken; symmetrie; tafels)

<sup>1)</sup> Zie: Wiskobas-Bulletin jaargang 3 no. 1 (pag. 55 en v.)

<sup>2)</sup> Zie: Wiskobas-Bulletin jaargang 2 no. 3 (pag. 779 en v.)

Behalve dit 'leerplanmatige' in het complexe probleem is er ook nog een ander aspekt: we geloven dat het van grote waarde is om met de kinderen een dergelijk probleem aan te pakken en te proberen het – met de middelen die ze hebben of kunnen bedenken – op te lossen. Die waarde ligt in het creatieve, probleemoplossende, in de discussie, in het elkaar dwingen tot schematiseren; kortom in het *matematiseren binnen een bredere kontekst*.

Maar... oordeelt u zelf na lezing (en liefst eigen activiteit met een derde – of vierde,

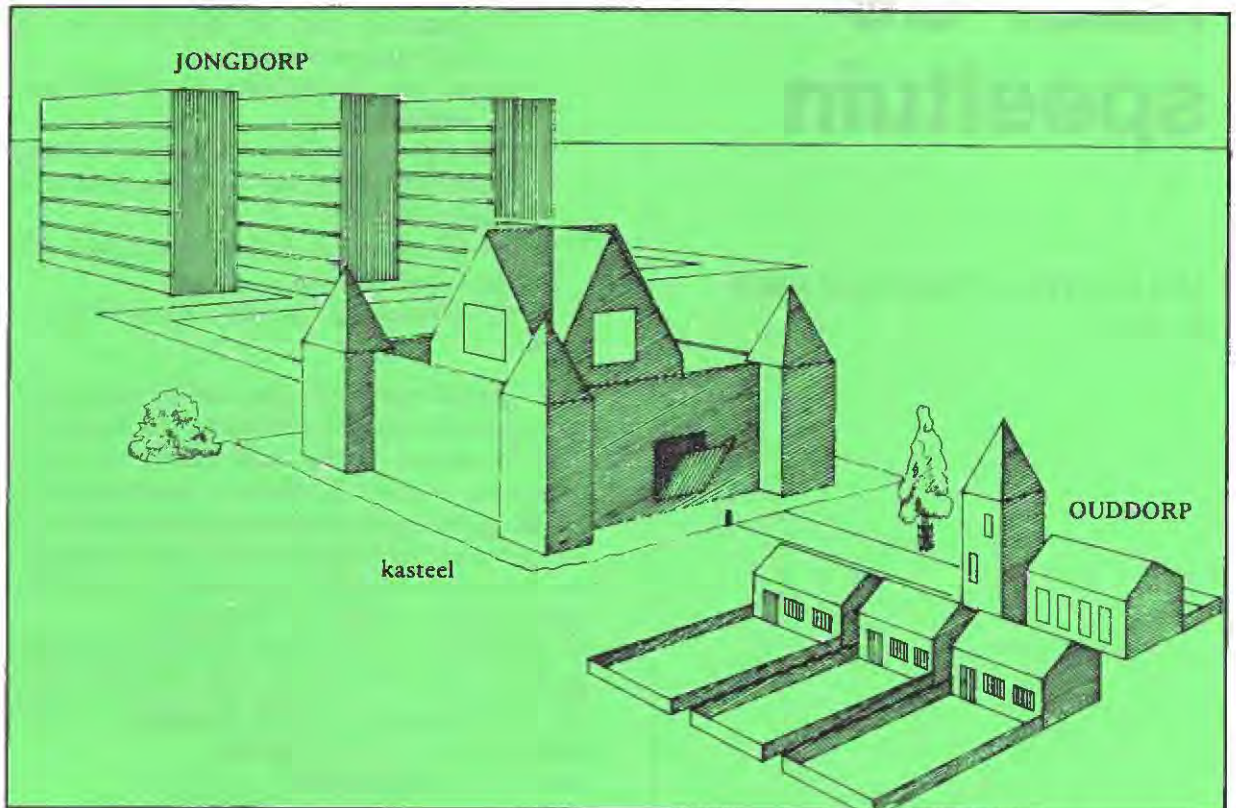
vijfde klas!) van het verslag van de activiteiten.

Hopelijk spreekt het voor zichzelf. Hier en daar maken we een opmerking in de marge van meer wiskundig-didactische aard.

#### ► PROBLEEMSTELLING

Een kaartje wordt gepresenteerd (bord, plaat, overheadprojektor) van het land van koning Pompelmans de Zesde.

Het is een raar land.



Er zijn maar twee dorpen en midden tussen die twee dorpen ligt het kasteel van de koning. Het ene dorp heet ouddorp, het andere jongdorp. Dat komt omdat er in het land van Pompelmans een heel vreemde wet is. In die wet staat dat alle jonge mensen, die minder dan 40 jaar zijn, in jongdorp moeten wonen en alle mensen boven de 40 jaar in ouddorp. Waarom zouden ze die wet gemaakt hebben? (gesprek: in ouddorp geen last van belletje trekkende kwajongens en huilende babies, geen knetterende bromfietsen; in jongdorp wonen allemaal gezinnen met jonge kinderen, ze hoeven dan niet zoveel te verbieden; in ouddorp hoeven geen scholen gebouwd te worden en in jongdorp geen bejaardentehuizen...).

Op een dag kreeg de koning een brief van een kind uit jongdorp (tonen op vel papier of transparant):

*Lieve koning,*

*Bij ons is het heel slecht weer. Bij u ook?*

*Maar er is iets heel naars. Als we in de speeltuin willen spelen moet je overal heel lang wachten. Gisteren wilde ik op de schommel, maar er stonden wel meer dan dertig kinderen te wachten! Nou, dan is er ook niets meer aan.*

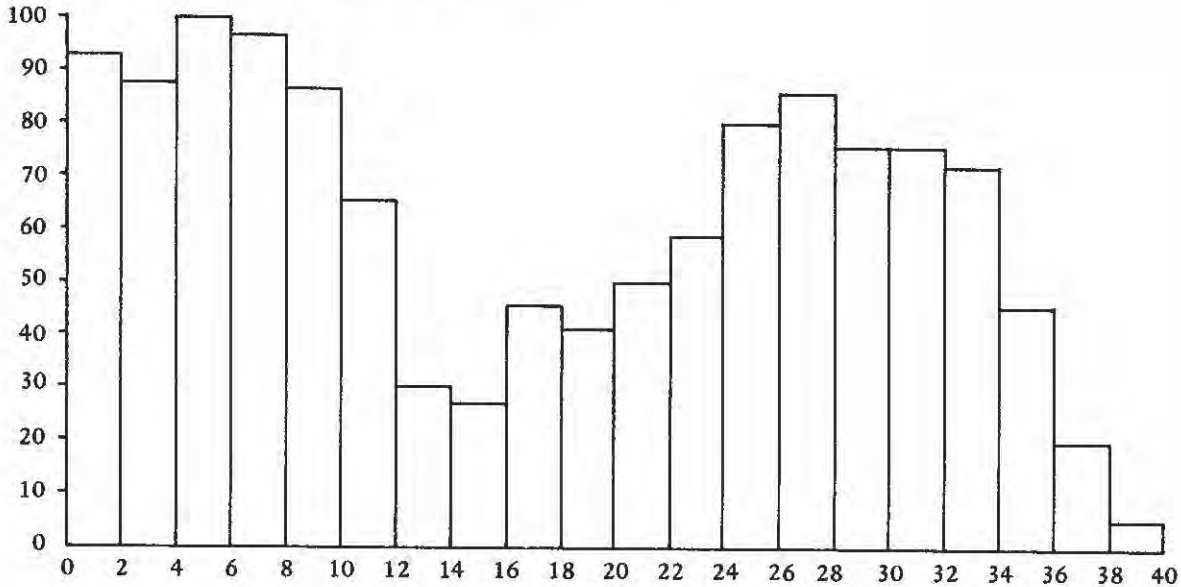
*Ik vind dat er veel te veel kinderen in de speeltuin gaan spelen. Kunt u er iets aan doen?*

*Hartelijke groeten,  
Joop van Duin.*

Toen de koning de brief gelezen had wilde hij wel eens weten of er inderdaad zoveel kinderen in jongdorp woonden. Dus riep hij de

minister van bevolkingszaken bij zich en vroeg hoeveel kinderen er in jongdorp woonden. De minister vond dat een heel makkelijke vraag. Hij zei: 'Alstublieft sire', en gaf de koning dit

papiertje (bord, overheadprojector, vel papier). Daarna ging hij weer gauw naar zijn bureau.

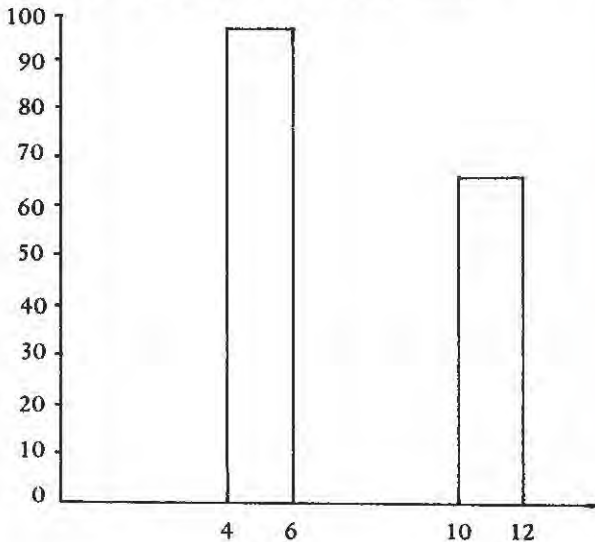


De koning werd helemaal bleek, want hij begreep er niets van. Vlug riep hij zijn raadsheer-in-bijzondere-dienst, graaf Janus de Slimmerik, om uit te laten leggen wat er op dat plaatje stond.

► **LEERGESPREK 1**

We vragen of er iemand in de klas is, die het even aan de koning uit kan leggen. (hoewel de kinderen diverse malen staafgrafieken hebben gelezen en gemaakt, hebben ze toch grote moeite met deze vrij abstracte grafiek en er is dan ook niemand, die het helemaal duidelijk kan maken).

Het verhaal gaat verder: graaf Janus tekent gauw even voor de koning een nieuw plaatje (bord, vel papier, overheadprojector):



Met dit plaatje kan hij het wel aan de koning uitleggen: we vragen opnieuw een 'uitlegger' in de klas en vullen zelf de uitleg aan:

- vertikaal lees je af hoeveel er zijn (leg je liniaal er langs om goed tussen 90 en 100 en tussen 60 en 70 te kunnen schatten);
- horizontaal staan de leeftijden;
- er zijn dus 98 (97 of 99 is ook goed!) kinderen van 4 en 5 jaar, etc.

Nu begrijpt de koning wel hoe hij het plaatje van zijn minister moet lezen en hij gaat gauw aan het werk om uit te zoeken hoeveel kinderen beneden de 10 jaar er in jongdorp wonen.

► **LEZEN VAN STAAFGRAFIEK**

De kinderen krijgen nu een werkblad waar de bevolkingsgrafiek van jongdorp op staat met daaronder de vragen:

*Hoeveel kinderen van 0 en 1 jaar wonen er in jongdorp?*

*Hoeveel kinderen van 2 en 3 jaar wonen er in jongdorp?*

*Reken nu uit: hoeveel kinderen van 0 tot 10 jaar wonen er in jongdorp?*

Ieder werkt in principe voor zich, maar toegelaten (bij sommigen aangemoedigd) wordt dat men elkaar helpt bij de interpretatie. De

meeste leerlingen pakken spontaan de abakus uit de kast om de optelling te maken.

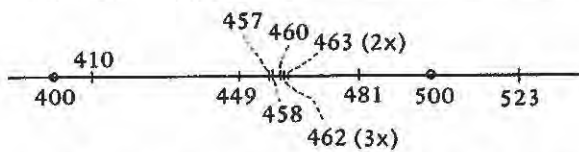
► **LEERGESPREK 2**

Als ieder zo'n beetje klaar is vragen we uitkomsten; uiteraard komen er direkt al verschillen.

Hoe kunnen we zo ongeveer het goede antwoord voor de koning vinden?

Een goede methode hiervoor hebben de kinderen in het voorafgaande onderwijs geleerd, namelijk het plaatsen van uitkomsten op een getallenlijn en dan de uitkomst aksepteren, die het 'mooist' ligt.

Deze methode wordt nu inderdaad door de kinderen naar voren gebracht:



Het is duidelijk dat 410, 523, 481 en 449 zeer waarschijnlijk fout zijn en dat het juiste antwoord in de buurt van 460 ligt. Afgesproken wordt dit antwoord te aksepteren.

De koning was ook klaar met zijn berekening; hij had er 461 uit. Nu, dat maakt niets uit met ons antwoord. Hij wist dat de speeltuin in jongdorp berekend was op 250 kinderen. Het was dus wel duidelijk: er moest een nieuwe speeltuin bijkomen.

Samen met de minister voor bouwzaken zocht de koning een terrein uit. Daarna kreeg de minister de opdracht daar een speeltuin te maken.

► **NADERE PROBLEEMSTELLING**

Daar zat de minister nu: er is wel een stuk grond en er is ook wel geld om speelwerktuigen te kopen. Maar wát moet hij kopen? Waar zouden de kinderen het meest van houden? En hoe kom ik dat te weten?

► **LEERGESPREK 3**

De kinderen suggereren strategieën om de minister te helpen en brengen bezwaren aan tegen elkaars strategieën (ongemerkt wordt het leergesprek een echt klasgesprek!):

- vraag het alle kinderen en maak een grafiek ('duurt te lang en bovendien kun je het de hele kleintjes niet vragen');
- ga kijken in de speeltuin hoe vaak kinderen op de wip gaan enz. en turf dat ('duurt te lang en bovendien is het veel te druk in de speeltuin');
- vraag het aan een kleine groep kinderen hoe die erover denken ('eigenlijk niet helemaal eerlijk – maar je weet in ieder geval iets').

Op de laatste strategie (steekproeftrekking!) willen we de kinderen hebben. Ze brengen het zelf naar voren en we gaan er op door.

Wel, dacht de minister, laat ik dan maar naar één van de scholen in jongdorp gaan en in één van de klassen vragen wat de kinderen er van vinden. (Natuurlijk komt hij toevallig net in deze klas terecht!)

► **INVENTARISATIE-ONDERZOEK IN DE STEEKPROEF**

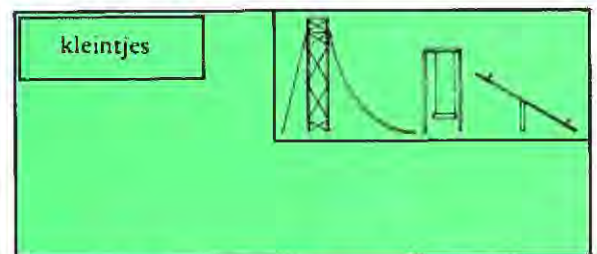
De minister (= onderwijzer(es)) vraagt aan de kinderen: wat willen jullie? (we doen dat ook echt en dit geeft natuurlijk een geschreeuw door elkaar van jewelste). Uiteindelijk komt een inventarislijst op het bord van wat je allemaal in een speeltuin zou kunnen zetten. De minister was er erg blij mee, maar zat toch nog wel met enkele problemen. Moet dat er nu allemaal in? Heb ik aan één wip genoeg en één glijbaan, etc.? Zouden alle kinderen deze dingen wel leuk vinden?

De kinderen komen zelf met de stelling dat het eigenlijk niet eerlijk is om alleen kinderen uit de derde klas te vragen. De kleintjes willen heel andere dingen. Met andere woorden: ze vinden dat zij als steekproef niet representatief zijn voor de gehele populatie.

We lossen dat op door ons in gedachten in de plaats van de kleintjes te stellen en in een hoek van de speeltuin zandbakken, klimrekken, hobbelpaarden e.d. neer te zetten.

Onze inventarislijst wordt dus korter.

Als we de lijst eens wat beter bekijken zien we dat er dingen op staan die er in ieder geval in moeten, maar waarvan je er slechts één nodig hebt: draaimolen, grote glijbaan, kabelbaan. Ook hiervoor reserveren we een hoek van onze speeltuin en we tekenen nu tevens een plattegrond, waaruit blijkt dat we niet zo veel ruimte meer over hebben.



Daarom zegt de minister: ik wil er niet meer dan zes verschillende dingen in hebben, anders wordt het zo'n rommeltje-van-alles-wat.

In verband met het vervolg is het nodig dat we met niet veel meer dan 5 à 6 categorieën verder werken; in sommige van de ontwerpklassen was dat al zo na de beide 'zevingen' van de inventarislijst; in één klas niet en daar volgden we de werkwijze, zoals hier beschreven.

Maar welke zes dan? De kinderen stellen voor te stemmen en in een leergesprek wordt daarvoor een geschikte procedure vastgesteld: ieder schrijft zijn zes voorkeursdingen op (uit de lijst van elf) en via handopsteken wordt vastgesteld welke zes objecten de voorkeur krijgen.

► **NADERE PROBLEEMSTELLING**

Zo, de minister weet nu wat hij voor de kleintjes moet kopen. Hij weet ook dat er een draaimolen etc. in moet. Hij weet eveneens dat er:

- kleine glijbanen,
- trapkarren,
- roltonnen,
- wippen,
- kleine schommels,
- klimrekken (hoge!),

in moeten.

‘Eens even nadenken’, zegt de minister, ‘heb ik nu alles aan deze kinderen gevraagd wat ik van ze weten moet om de speeltuin klaar te gaan maken?’

De leerlingen beseffen dat je nog niet weet in welke aantallen de zes speelwerktuigen moeten worden aangeschaft.

Hoe moet je daar nu achter komen?

Sommigen brengen naar voren dat het er van af hangt waar de kinderen het meest van houden, ‘want als je met z’n twintigen bij twee trapkarren staat te wachten en er staan acht wippen leeg, dan is ‘t ook zonde...’.

Geen kind komt op de gedachte dat het tevens van de beschikbare ruimte afhangt (daar ben je ook kind voor!). Deze faktor wordt dan ook door de onderwijzer(es) ingebracht. Vastgesteld wordt dat alle zes de soorten wel ongeveer dezelfde ruimte innemen en dat de minister heeft opgemeten dat er circa 50 speelwerktuigen in kunnen.

\* Het probleem is nu zeer kompleks geworden: je moet 50 plaatsen verdelen over zes categorieën, maar de verhouding waarin dat moet gebeuren is nog niet vastgesteld; bovendien: is onze steekproef groot genoeg om de verhouding te bepalen?

\* We moeten het gegeven van de 50 plaatsen niet te nadrukkelijk naar voren schuiven, omdat anders de neiging zou kunnen ontstaan de plaatsen maar eerlijk over de zes categorieën te verdelen, terwijl we eerst de voorkeursverhoudingen tussen de categorieën moeten vaststellen.

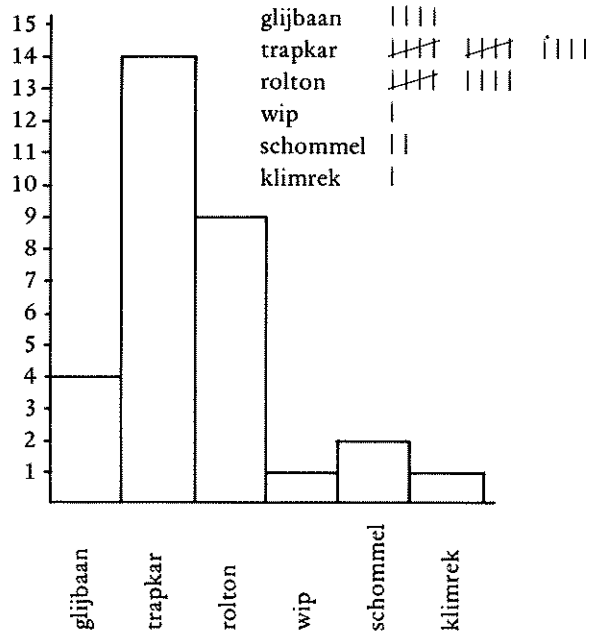
Hoe komen we te weten van welk ding de kinderen uit jongdorp het meeste houden? Dat is niet moeilijk: we gaan stemmen! Ieder schrijft op een briefje wat hij ‘t liefst heeft. Het stemburo leest en telt de briefjes,

terwijl iemand op het bord turft en na afloop de aantallen noteert.

‘Hé’, dacht de minister, ‘daar kan ik weer zo’n mooie grafiek van maken, dan kan ik het duidelijker zien.’

► **MAKEN VAN STAAFGRAFIEK**

Ieder maakt individueel een staafgrafiek van de stemminggegevens:



► **OPNIEUW HET PROBLEEM**

Wat kunnen we nu in de grafiek lezen?

- ‘Je moet veel trapkarren en roltonnen kopen.’
- ‘Eén wip is wel genoeg.’
- ‘Je moet ongeveer half zo veel glijbanen als roltonnen kopen.’
- ‘Er zijn 14 trapkarren.’

Uit deze uitspraken blijkt dat er kinderen zijn die enig begrip hebben van het feit dat niet de absolute aantallen van belang zijn, maar de verhoudingen (uitspraak 1 en 3). Er zijn ook leerlingen die de neiging hebben om de verhoudingsgetallen uit de steekproef een absolute waarde toe te kennen. We vragen dan ook nogal wat! Namelijk om in te zien dat je nu als volgt moet rekenen:

$$\frac{4}{31} \text{ (glijbaankiezers)} \times 50 \text{ (te verdelen ruimte)}$$

En bovendien is er nog steeds het probleem van de betrouwbaarheid van de steekproef: zitten er in onze klas niet toevallig net veel trapkarfans? Hoe groot moet de groep kinderen zijn die ik bevrage, om een redelijk vertrouwen in de ontstane verdeling te mogen hebben?

De minister zit toch nog wel even te piekeren:



nou heb ik het wel aan deze kinderen gevraagd, maar zouden alle 460 kinderen in jongdorp er zo over denken? Misschien zijn er toch wel meer kinderen, die graag in klimrekken willen klimmen.

Hoe kom ik daar achter?

#### ► LEERGESPREK 4

De kinderen zijn nu opnieuw geneigd om te stellen dat je het alle kinderen van jongdorp moet vragen.

De minister (onderwijzer) zucht eens diep: 'Dat is me een werk!'

Sommige kinderen suggereren: 'Vraag het dan aan nog een paar klassen van onze school.'

Aldus wordt besloten.

Het is natuurlijk erg goed om dit onderzoek echt te laten uitvoeren: twee kinderen met het lijstje werktuigen naar een klas en even inventariseren.

In de ontwerpschool gebeurde dit niet; in de eerste plaats om tijd te winnen, in de tweede plaats om bewust te kunnen manipuleren met de cijfers, zodat de kwestie van de betrouwbaarheid van de steekproef en het verband met de steekproefgrootte naar voren gehaald kon worden.

De onderwijzer(es) presenteert nu drie staafgrafieken van dezelfde soort als de staafgrafiek die van de eigen klas is gemaakt (via een groot vel papier of overheadprojector) en wel van twee tweede klassen en één vierde klas.

Deze grafieken worden met elkaar vergeleken. Het blijkt dat dit het beste lukt door de gegevens te vertalen in een tabel, die op het bord komt:

	3b	2a	2b	4a	totaal
glijbaan	4	8	5	6	23
trapkar	14	9	15	20	58
rolton	9	3	10	1	23
wip	1	5	--	--	6
schommel	2	3	2	--	7
klimrek	1	6	4	--	11
	31	34	36	27	128

Eerst wordt steeds een bepaalde klas vergeleken met de eigen klas:

- in 2a spelen ze net zo graag met een glijbaan als met een trapkar,
- in 4a zijn er nog meer dan bij ons die graag met een trapkar spelen,
- in 2a willen er nog meer met de wip spelen dan bij ons met een glijbaan,
- ...

Welke klas moet de minister nu geloven? Dit blijkt de kernvraag te zijn. Vrij gemakkelijk komen de kinderen op het idee dat je het

best alle klassen samen kunt nemen; dan heb je 't aan een heleboel kinderen gevraagd. Daarna wordt dan in alle richtingen getotaliseerd (af en toe met behulp van de abakus!); ook de controle van vertikaal en horizontaal optellen wordt ontdekt en uitgevoerd.

► **OPNIEUW HET VERHOUDINGSPROBLEEM**

Hoeveel van elk ding moet de minister nu in de speeltuin zetten? Je weet: er zijn maar 50 plaatsen!

De kinderen zijn niet in staat om veel kwantitatieve uitspraken te doen; ze missen ook nog het daarvoor benodigde (breuken, verhoudingen, procenten) taalapparaat. Ze komen niet veel verder dan:

- in onze klas wil bijna de helft het liefst in een trapkar,
- van alle klassen samen wil ook bijna de helft het liefst in een trapkar,
- je moet ongeveer evenveel glijbanen als roltonnen hebben,
- je moet ongeveer evenveel wippen als schommels nemen,
- véél minder dan de helft van de kinderen wil in een glijbaan of een rolton.

We hebben geprobeerd meer-kwantifiserende uitspraken aan de kinderen te ontlokken door een grafische voorstelling van de getallen: we leggen alle stembriefjes (getekend op transparant voor overheadprojector of op bord) bij elkaar en kleuren de verschillende voorkeuren:

t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	t	g	g	g	g	g	g	g	g
g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g
g	g	g	g	r	r	r	r	r	r	r
r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r
r	r	r	r	r	w	w	w	w	w	w
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
s	s	s	s	s	s	s				

Ze zien nu duidelijker: ongeveer de helft van de kinderen wil het liefst een trapkar om mee te spelen; we doen er dus verstandig aan om van de 50 plaatsen er bijvoorbeeld 22 te bestemmen voor trapkarren.

Glijbanen en roltonnen hebben samen ongeveer evenveel voorkeur als de trapkarren; dus samen ook 22 plaatsen en dan ieder 11.

Er zijn nog 6 plaatsen te verdelen; 11 stemmen voor de klimrekken en 13 voor wip en schommel samen; het eerlijkst is dan 3 klimrekken en 3 plaatsen voor wip en schommel. Maar die kun je weer niet eerlijk verdelen, dus

laten we dan 2 wippen, 2 schommels en 2 klimrekken nemen.

Het definitieve lijstje komt op het bord:

trapkar	: 22
glijbaan	: 11
rolton	: 11
klimrek	: 2
wip	: 2
schommel:	$\frac{2}{50} +$



► **AFSLUITING**

Nu de minister het probleem heeft opgelost, moet hij natuurlijk verslag uitbrengen aan de koning. De kinderen schrijven dat verslag (hoe heb ik het uitgezocht?, wat moet er in voor de kleintjes?, wat voor de groten?) als afsluitende activiteit.

De werkwijze – zoals boven geschetst met de oppervlakte-benadering – bevredigde niet geheel. Misschien is een andere mogelijkheid de totaalgetallen in een staafgrafiek te zetten, daarna de staven los te knippen en achter elkaar te leggen (kleur!) en over deze strook via meten de 50 plaatsjes te verdelen. Aldus:

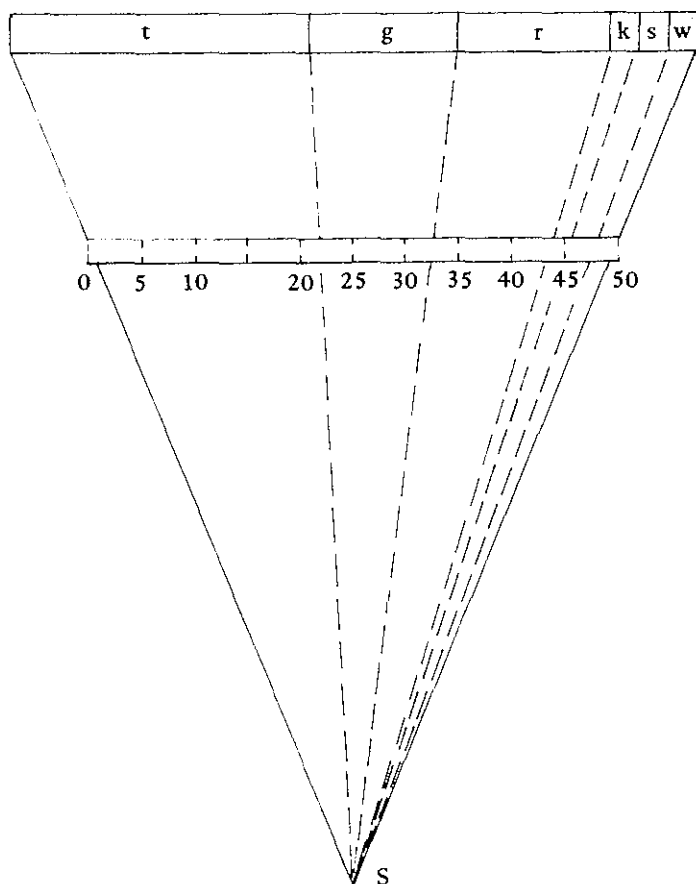
t	g	r	k	s	w
t	g	r			

50 plaatsjes

t → iets minder dan de helft, namelijk ... van de ... dm (bijvoorbeeld  $11\frac{1}{2}$  van de 25 als er voor 1 stembriefje 2 cm genomen wordt, of bijna 6 van de 13 als er voor 1 stembriefje 1 cm genomen is),

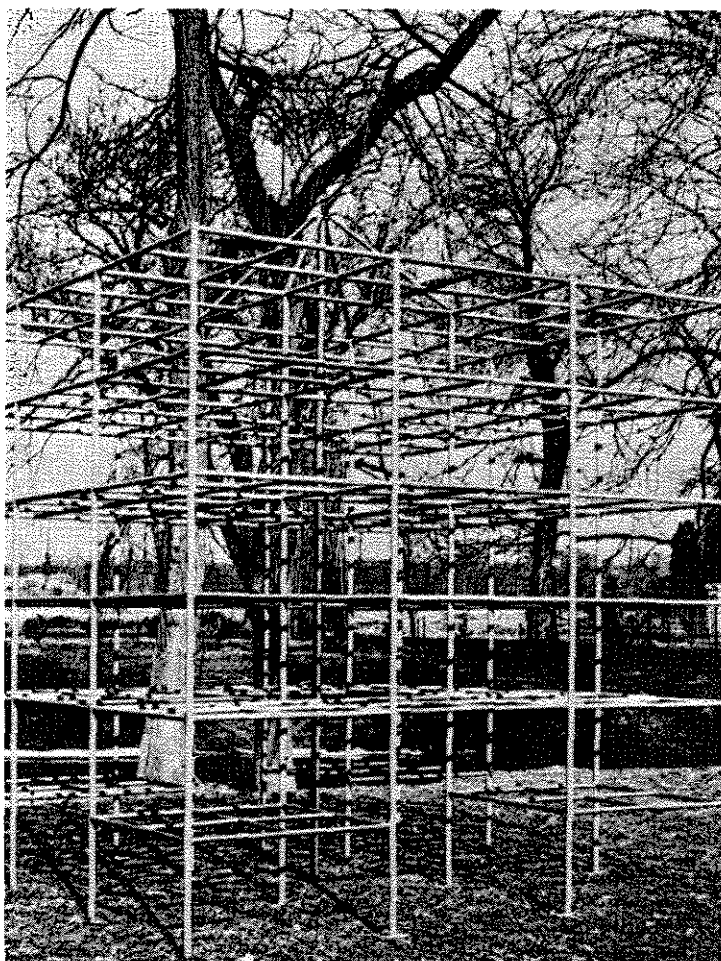
g → ruim 2 van de 13, etc.

Nog een andere mogelijkheid is de meetkundige vermenigvuldiging: leg weer de 128 stembriefjes op een rij; teken de 50 plaatsjes er onder; verbind de uiteinden tot het snijpunt s en trek vervolgens alle verbindingslijnen; je kunt dan het aantal plaatsjes aflezen:



► NOG ENKELE OPMERKINGEN

- \* We gebruiken veelal de overheadprojector; het kan ook met voorgetekende grafieken op het bord (achterkant) of op een vel papier, maar dat brengt iets meer werk mee.
- \* We zijn erg benieuwd naar uw reacties, met name op het laatste gedeelte en naar uw eventuele ervaringen met een andere aanpak van het verhoudingsprobleem.
- \* Het geheel nam drie lessen van een uur, één van drie kwartier en één van een half uur. Hoewel de werkvorm af en toe wat monotoon was (veel leergesprek) bleven de kinderen zeer gemotiveerd.
- \* Wat hebben de kinderen nu geleerd? Als antwoord op deze belangrijke vraag noemen we enkele van de naar onze mening meest belangrijke momenten:
  - staafgrafieken lezen en maken,
  - gegevens samenvatten in een tabel,
  - verscherpen van de intuïtie omtrent steekproeftrekking, representativiteit, betrouwbaarheid,
  - verscherpen van de intuïtie omtrent verhoudingsrekenen,
  - oefening in optellen met en zonder abakus,
  - een kompleks probleem analyseren, deeloplossingen zoeken, scherpere vragen stellen, niet te gemakkelijk aksepteren van voorstellen en oplossingen, strategieën bepalen en uitvoeren.
- \* In een (tijds)schema ziet het er als volgt uit:
  - les 1*
    - 1 introductie van de probleemstelling
      - het land van Pompelmans
      - de brief
      - de minister met z'n grafiek
    - 2 eerste gesprek over het lezen van de grafiek
    - 3 graaf Janus tekent een deelgrafiek
    - 4 uitleg staafgrafiek
    - 5 verwerken staafgrafiek informatie, individueel
    - 6 leergesprek: selectie van het antwoord met de grootste kans op juistheid
    - 7 nadere probleemstelling: wát moet erin?
  - les 2*
    - 8 zie 7
    - 9 leergesprek, strategieën bedenken en tegen elkaar atwegen
    - 10 maken van de inventarislijst
    - 11 nieuwe vragen:
      - hoe te selekteren?





- is de steekproef representatief?
- 12 uitdunnen van de inventarislijst:
  - dingen voor de kleintjes
  - uniek voorkomende dingen
- 13 eventueel: selectie van zes categorieën door stemmen
- 14 probleemstelling: in welke verhouding?
- 15 leergesprek: strategieën bedenken
- les 3* 16 stemmen over de voorkeur
- 17 maken van staafgrafiek
- 18 interpreteren van de staafgrafiek in verband met de vraag naar de verhouding (eerste poging)
- 19 probleem van de betrouwbaarheid
- 20 uitbreiding van de steekproef met andere klassen
- 21 gezamenlijk verwerken van vier staafgrafieken in één tabel
- 22 de vraag naar de verhouding (tweede poging) in verschillende klassen
- les 4* 23 zie 22
- 24 uitbreiding van de steekproef door totaliseren
- 25 de vraag naar de verhouding (derde poging) in de totaalgroep; akseptatie van intuïtief-kwantificerende uitspraken
- 26 visualisering in een tegelvloer
- 27 opnieuw de vraag naar de verhouding (vierde poging)
- 28 gezamenlijk nemen van zo rationeel mogelijke beslissingen over de aan te schaffen aantallen
- les 5* 29 terugblik op de hele cyclus (leergesprek: wat hebben we nu allemaal gedaan?)
- 30 schrijven van de brief aan de koning, waarin de minister rapporteert.

## 2.4 intröductie decimale getallen

'RALPH, DE ZEEROVER', EEN PAK-  
KET VOOR DE BOVENBOUW <sup>1)</sup>

LEEN STREEFLAND

<sup>1)</sup> De illustraties in dit pakket zijn gemaakt door Rob Wighman.

### INLEIDING

In het vorige nummer van het Wiskobas-Bulletin schreven we op pagina 74:

'Wanneer de verzameling  $N$  verkend is en de vier hoofdbewerkingen met hun algoritmen beheerst worden, blikken we hierop terug, alvorens het positionele systeem een uitbreiding in de vorm van decimale breuken te laten ondergaan.'

Het zal, gezien voorgaand citaat, bij de lezer geen verbazing wekken, dat in de tweede periode van de werkzaamheden aan het integratieplan in de ontwerpschool de decimale breuken in klas 5 inderdaad in het vizier kwamen. Voordat we nu komen tot een schets van de mathematisch-didaktische lijn, zoals deze in het volgende pakket is terug te vinden, is het wenselijk eerst enige kanttekeningen te plaatsen bij de volgende twee vragen:

- *Hoe werden (en worden) decimale breuken veelal geïntroduceerd binnen het traditionele rekenen?*
- *Hoe vindt deze introductie in het volgende pakket plaats en waarom gebeurt het juist zo?*

Het zal voor niemand een geheim zijn, dat in het traditionele rekenen de introductie van decimale breuken plaatsvindt op basis van een vrijwel puur getalsmatige benadering. Wanneer eenmaal de gewone breuken verkend zijn, verschijnen de decimale breuken als notatievormen van 'speciale' gewone breuken in de geest van:

'voor  $\frac{1}{10}$  schrijven we 0,1' en

'voor  $\frac{1}{100}$  schrijven we 0,01', etc.

Het rekenen met geld en de notatie van geldbedragen maakt, dat het geleerde direkt praktisch toegepast (of herkend) kan worden.

In het volgende pakket komen de decimale breuken 'als vanzelf' te voorschijn *vanuit het meten* (van oppervlakte).

Meten we met een zekere standaard, zeg meters, bijvoorbeeld de lengte van het lokaal, dan komt het misschien niet precies uit. We noteren het aantal hele meters, zeg 7, en meten de rest in dm. Wanneer het weer niet precies uitkomt, herhalen we de procedure met centimeters en wanneer nog niet voldaan is aan zekere eisen van nauwkeurigheid, ook nog in millimeters, etc.

Willen we nu het uiteindelijke resultaat van ons meten in de eerstgekozen standaard uitdrukken, dan moet dit met kommagetallen gebeuren, bijvoorbeeld 7,632... m. De stippetjes staan dan voor 'etc.', ten teken dat we (teoretisch althans) de geschetste meetprocedure van het telkens in tienden onderverdelen

van de gekozen standaard (of een afgeleide daarvan) steeds weer kunnen herhalen, waarmee dan tevens tot uitdrukking is gebracht, dat meten een kwestie van benaderen is.

Zoals gezegd, kozen we voor *het meten van oppervlakte*.

Het bezwaar dat hieraan kleeft is, dat de cijfers achter de komma bij verfijning van de gekozen standaardmaat 'met twee tegelijk opduiken'.

Immers, meten we bijvoorbeeld met een meetrooster met vierkante centimeters, dan geeft overschakeling op millimeterpapier als meetrooster meteen een eerste verfijning in honderdsten, dat wil zeggen: direkt twee decimalen achter de komma.

Dat we hieraan toch de voorkeur gaven boven een 'glad verlopende' meetprosedure, waarbij het herhaald onderverdelen van de standaard in tien, de decimalen netjes één voor één te voorschijn tovert, moge blijken uit het volgende pakket.

#### DE GROTE LIJNEN IN 'RALPH, DE ZEEROVER'<sup>1)</sup>

Ralph, de zwarte, een duinkerker-kaper, ziet zich gekonfronteerd met het probleem een schat te zoeken op één van vier bij elkaar gelegen eilandjes in de indische oceaan. Als hij de begeleidende tekst op zijn kaart, een erfstuk van zijn vader van wie hij het 'vak' leerde, mag geloven, zal hij zich op het kleinste van de vier eilanden moeten konsentreren. Geen sinekure, omdat het kleinste niet met het blote oog te bepalen is.

Zie hier de probleemstelling waarmee de leerlingen van klas 5 worden gekonfronteerd.

Vanuit deze probleemstelling geven we puntsgewijze de *grote lijnen* in het pakket, zodat geschetste lessen en werkbladen in het vervolg door u geplaatst kunnen worden binnen het traject dat door de leerlingen wordt afgelegd.

##### 1 *Het eilanden-probleem*

\* De geschetste probleemstelling wordt eerst als open vraag benaderd. De leerlingen wordt gevraagd: hoe zouden jullie, als je Ralph was, het kleinste eiland gaan bepalen?

\* Als gerichte vraag, dat wil zeggen: de oppervlakte van de eilanden wordt gemeten met een meetrooster met vierkante centimeters en wel zó dat een onder- en een bovengrens wordt vastgesteld voor elk van de eilanden, waar-

tussen de oppervlakten respektievelijk zullen moeten liggen.

2 *Visualisering* van de gevonden intervallen op de getallenlijn.

3 *Schatten* op basis van de geschetste insluitingsprosedure, visualisering van de schattingen op de getallenlijn en het onder woorden brengen (door de leerlingen) van de redenering, die ze bij het schatten volgen.

Voorgaande activiteiten leveren wel het vermoeden op, welk eiland het kleinste is, doch met zekerheid is dit niet te stellen. (de intervallen op de getallenlijn 'overlappen' elkaar.)

4 Daarom wordt overgegaan naar een *eerste verfijning*, namelijk *breukrekenen*: de vierkantjes, welke nog gedeeltelijk binnen de grens van een eiland liggen krijgen een 'etiket' — in de vorm van een gewone breuk.

5 Het probleem dat ontstaat bij de bepaling van de som van zoveel breuken met verschillende noemers vormt dan de motivering voor een overschakelen op millimeterpapier: meten in *honderdsten*, waardoor de moeilijkheid met de breuken met verschillende noemers is opgelost.

6 Herhaling van de onder 1 geschetste meetprosedure resulteert in *verfijnde intervallen*, welke weer op de getallenlijn worden geplaatst en gekonfronteerd worden met de eerder gevonden intervallen (1) en de gedane schattingen (3).

7 De verfijnde intervallen geven aanleiding tot een partiële *ordering*, dat wil zeggen: het kleinste eiland kan nu met zekerheid bepaald worden. De punten 5, 6 en 7 zijn tevens aanleiding om tot komma-notatie van de gevonden intervalgrenzen over te gaan.

##### 8 *Op het kleinste eiland*

Na een geheimschrift, dat met behulp van coördinaten moet worden opgelost, de bepaling van wat een amsterdamse roede en het 20-voud daarvan is, wordt uiteindelijk de plaats van de schat op het kleinste eiland bepaald.

9 Een *voorlopige afronding* vindt plaats door alles nog eens netjes op een rijtje te zetten. Vooral ook het aspekt van de benadering bij het meten wordt geplaatst tegenover de eksaktheid van de resultaten van wiskundige activiteiten, die via tellen verkregen kunnen worden.

<sup>1)</sup> De basisidee voor dit onderwijsleerpakket werd eerder neergelegd in pagina 80/1 t/m 80/13 van BAS-boek 'Het Spijkerbord'.

- 10 Een les *ordenen en ordeningsstrategieën* rondt het geheel uiteindelijk af, waarbij enerzijds de gevolgde procedure gerelativeerd wordt ('het had ook heel anders – en sneller – gekund'), terwijl anderzijds daardoor de voordelen van de gevolgde procedure meer in het oog springen ('wat we gedaan hebben leverde meer op').

*Een tweetal opmerkingen.*

- \* *Om teleurstellingen bij de verwerking te voorkomen, is het goed dat u zich realiseert, dat voor de verwerking van dit pakket zeker 11 à 12 lessen nodig zijn.*
- \* *Dat het de moeite waard is met het pakket in zee te gaan, blijkt uit de reacties van de kinderen op de ontwerpschool. Deze reacties zijn in het vervolg beschreven.*

► **Introductieles (werkbladen 1 en 2)**

Bij de aanvang van deze les beschikken de leerlingen over het voorblad en het kaartje van het praktikum 'Ralph, de Zeerover'.

Het verhaaltje (werkblad 1) wordt gelezen en besproken. Het is mogelijk dat enige historische feiten aan de vergetelheid ontruikt moeten worden, bijvoorbeeld de last die de duinkerker-kapers onze oost-indiëvaarders bezorgden.

Daarna wordt het kaartje bekeken en de tekst gelezen.

Wat zou in de laatste regel gestaan hebben?

Vervolgens wordt gevraagd:

- welk probleem moet Ralph met zijn kornuiten oplossen? (de leerlingen formuleren dus zélf vanuit de gegeven tekst nog eens de probleemstelling);
- wat zou met het kleinste eiland bedoeld worden? (het kleinst in oppervlakte);
- hoe zouden jullie dat probleem willen oplossen?

Wanneer de stemmen staken, kan de suggestie gegeven worden, dat het gebruik van een schaar is toegestaan.

Dit brengt de kinderen (mogelijk) op de gedachte de eilanden te gaan uitknippen en dan met elkaar te vergelijken (op elkaar te leggen). Bezwaren van deze methode (onnauwkeurigheid) betrekken we in de bespreking.

Mogelijk komt een van de kinderen op het idee, de uitgeknipte eilanden op tripleks te plakken, ze daarna uit te zagen en met behulp van een balans te vergelijken.

*Als dit niet het geval is, bewaren we deze mogelijkheid tot na het praktikum.*

Wanneer de suggesties van de leerlingen voldoende besproken zijn, vragen we:

als we nu een goede manier hebben om het kleinste eiland te bepalen, kunnen we ze dan ook van klein naar groot op volgorde zetten? (ja, als je in staat bent de kleinste te bepalen, dan ook de op één na kleinste – dat is de kleinste van de resterende drie –, etc.)

We besluiten deze inleiding met: er is een prachtige manier om het kleinste eiland te bepalen; daarover praten we nu verder niet; die manier gaan we zelf gebruiken in het werk, waarmee we nu (of de volgende keer) gaan beginnen.

We zullen eens kijken of we Ralph dan achteraf met zijn probleem hadden kunnen helpen (werkbladen 3 en 4).

*Dat de kinderen niet om een oplossing verlegen zullen zijn, blijkt uit de volgende bloemlezing van oplossingen, welke op de ontwerpschool uit de eerste les resulteerde:*

- *een robijn is een zeldzame steen, dus het zal robijné wel zijn;*
- *op het kaartje vaart het schip naar guldenia, dus dat zal het kleinste eiland zijn;*
- *meet met een kurvimeter de omtrek van elk eiland; de kleinste omtrek geeft het kleinste eiland.*

*Deze laatste suggestie wordt door de onderwijzer 'ontzenuwd'. Hij knipt een vierkant van 10 cm bij 10 cm uit.*

*'Wat is de omtrek van dit vierkant?' (40 cm)*

*Vervolgens wordt het vierkant in 8 even brede stroken geknipt. De stroken worden achter elkaar gelegd.*

*'Wat is de oppervlakte van deze rechthoek?' (die is hetzelfde gebleven, dus 100 cm<sup>2</sup>.)*

*'En de omtrek?' (wel meer dan 160 cm.) 'Dus .....?'*

- *Een met de voorgaande verwante suggestie: laat het schip om elk van de vier eilanden varen en ga dan telkens na hoeveel olie gebruikt wordt.*
- *Ook het uitknippen van de eilanden en dan met elkaar vergelijken wordt geopperd, doch direkt weer door de leerlingen verworpen vanwege de te grote onnauwkeurigheid.*
- *Het gaan gebruiken van meetroosters komt eveneens uit de klas.*

► **Les: verwerking van de werkbladen 3 en 4**

Antwoorden van de werkbladen 3 en 4. Aangezien deze antwoorden kunnen variëren volstaan we met een verwijzing naar de volgende les.

► **Les: naar aanleiding van de werkbladen 3 en 4**

Zonder al te veel op verschillen te letten worden de gegevens van de opdrachten ①, ②, ⑤ en ⑥ eerst geïnventariseerd.

Bijvoorbeeld:

juwelia		diamantia		robijnie		guldenia	
binnen opp.	bedekking	binnen opp.	bedekking	binnen opp.	bedekking	binnen opp.	bedekking
3	23						
4	22						
4	24						etc.
3	23						
3	22						
4	22						

Aan deze inventarisatie koppelen we de vraag: hoe komt het nu, dat we die verschillende antwoorden krijgen? (stand van het transparante meetrooster.)

Ook benadrukken we hierbij, dat de verschillende antwoorden derhalve toch goed kunnen zijn.

Om nu tot een uitspraak over binnenoppervlakte en bedekking van de 4 eilanden te komen, kunnen we gebruik maken van het *rekenkundig gemiddelde*.

Bijvoorbeeld: met elkaar vonden we voor juwelia een binnenoppervlakte van gemiddeld ..... (breuken gaan hierbij een rol spelen, we 'ronden af' naar beneden: het gaat om hele  $\text{cm}^2$ ).

Uiteindelijk krijgen we voor elk eiland een binnenoppervlakte en een bedekking.<sup>1)</sup>

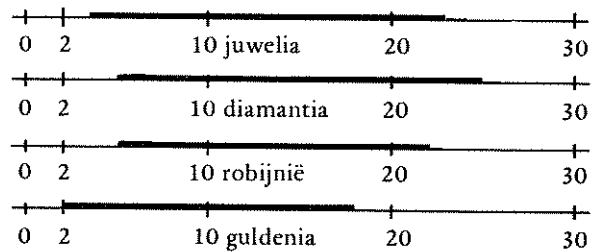
<sup>1)</sup> Tijdens de bespreking beklemtonen we nogmaals (het staat ook al in de werkbladen 3 en 4), dat we moeten proberen een *zo groot mogelijke* binnenoppervlakte en een *zo klein mogelijke* bedekking te krijgen. De intervallen zijn dan zo klein mogelijk.

Wat kunnen we nu zeggen van de oppervlakte van de eilanden? (die 'ligt er telkens tussen'.) We introduceren (of brengen in herinnering) de tekens  $>$  (... groter dan ...) en  $<$  (... kleiner dan ...).

We noemen de eilanden gemakshalve j, d, r, g en krijgen:

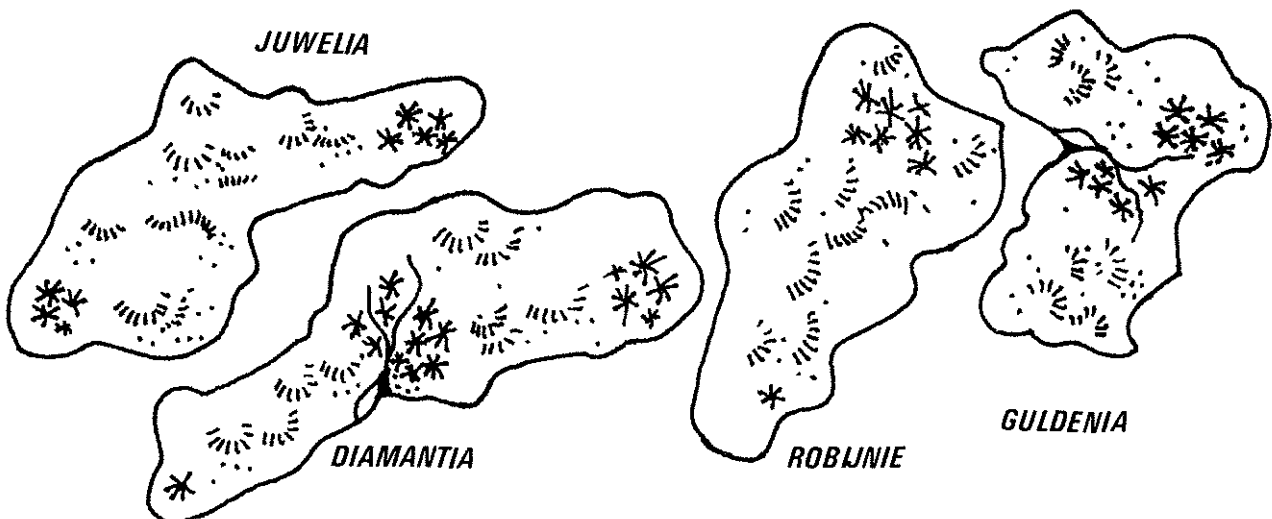
binnenoppervlakte	eiland	bedekking
... $\text{cm}^2$	$<$ j	$<$ ... $\text{cm}^2$
... $\text{cm}^2$	$<$ d	$<$ ... $\text{cm}^2$
... $\text{cm}^2$	$<$ r	$<$ ... $\text{cm}^2$
... $\text{cm}^2$	$<$ g	$<$ ... $\text{cm}^2$

Deze intervallen worden op 4 afzonderlijke getallenlijnen geplaatst:



(De gegevens, die tijdens deze les geproduceerd worden, moeten op werkblad 5 verwerkt worden. Dit kan tijdens of aan het eind van de les. Op dit werkblad komen ook nog gegevens uit de volgende les.)

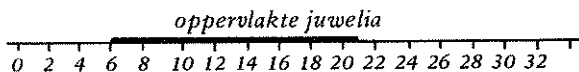
Kun je nu al zeggen welk eiland het kleinste is? (neen, de intervallen overlappen elkaar.) Hoe zat het met ons vermoeden? (opdracht ④)



Blijkt dat vermoeden ook al uit het bovenstaande overzicht van de gevonden intervallen op de getallenlijnen? (ja, de binnenoppervlakte en de bedekking van guldenia zijn het kleinste.)

*De inventarisatie van de meetresultaten leverde zeer geanimeerde lessen op. Eén moment willen we eruit lichten.*

*Bij het leggen van de relatie tussen het interval op de getallenlijn*



en de ongelijkheden ' $6 < j < 21$ ', werd de onderwijzer even weggeroepen.

*De les werd onder mijn leiding voortgezet:*

$$8 \text{ cm}^2 < d < 22 \text{ cm}^2.$$

*Toen de onderwijzer weer terug was, had de klas plezier in de situatie, te meer daar dit (aksent op  $\text{cm}^2$ ) gepresenteerd was als een 'terechtwijzing' aan zijn adres. ('zou bij het merken?', gniffelde de klas.)*

*Hij had de situatie echter direkt door en stelde toen*

$$8 \text{ km}^2 < d < 22 \text{ km}^2$$

*onder het motto: 'meneer s. maakt jullie maar wat wijs'.*

*Onmiddellijk was daar de reactie van een jongen:*

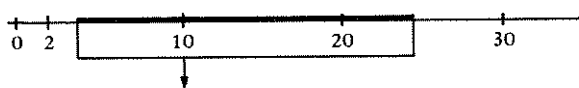
*'Meneer, dat kunt u niet zeggen, want u weet de schaal van de kaart niet!'*

*De klas begreep het. Grote hilariteit!*

*Overigens verliep de bepaling van de intervallen op de getallenlijn en de bijbehorende ongelijkheden goed, temeer daar van tevoren aan het rekenkundig gemiddelde en de tekens ' $>$ ' en ' $<$ ' aandacht was besteed.*

#### ► Les: schatten (en breuken) (werkblad 5)

We beginnen met het getallenlijn-overzicht, zoals dat de vorige les aan de orde geweest is. Bijvoorbeeld:



De oppervlakte van juwelia ligt tussen 3 en 23  $\text{cm}^2$ .

Nu weten we eigenlijk nog maar erg weinig. Wie durft een schatting te maken?

Een punt wordt aangewezen:

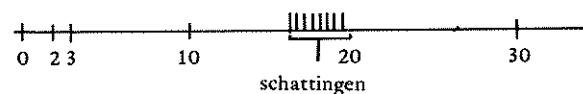


Dichterbij 23 .... Waarom?

We kunnen voor het schatten het transparant van de 4 eilanden (en overheadprojektor) gebruiken; noodzakelijk is dit echter niet. Tel-

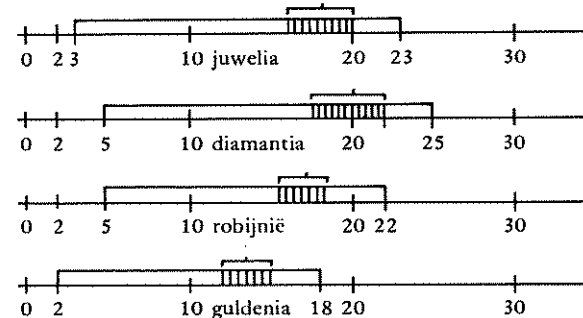
kens laten we de leerlingen *motiveren* hoe ze aan hun schatting komen. (bijvoorbeeld: gedeelten van vierkantjes bij elkaar die samen 1  $\text{cm}^2$  zijn; dat geeft *ongeveer* zóveel bij de binnenoppervlakte).

Uiteindelijk ontstaat na een aantal schattingen het volgende beeld:



We aksentueren nu het feit, dat de schattingen samen ook weer binnen een bepaald interval liggen. (opnieuw moet dus met een zekere mate van onnauwkeurigheid genoeg genomen worden.)

Schattingen worden ook verricht voor de overige drie eilanden. (laat de kinderen weer motiveren hoe ze aan hun antwoord komen.) Uiteindelijk resulteren deze activiteiten weer in een overzicht met de 4 getallenlijnen, waarop behalve de grenzen voor binnenoppervlakte en bedekking, nu ook de schatintervallen zijn aangegeven:



- Welk eiland is het kleinste?
- Kunnen we dat nu ook *zeker* zeggen?
- Waarom wél/niet?

We besluiten de les met de opmerking: denk bij de bepaling van de oppervlakte van de eilanden eens aan breuken. (voorzover de kinderen daarvan bij hun schattingen al geen gebruik gemaakt hebben.)

Dat de schatting wat ruim aandacht krijgt, spruit voort uit het feit dat zo'n schatting voor een kind vaak iets absoluuts heeft. Door meerdere kinderen te laten schatten, waaruit we (hopelijk) verschillende antwoorden krijgen, willen we die schatintervallen zichtbaar maken, mede om de relativiteit van een schatting (het benaderen ervan) te onderstrepen.

*In één vijfde klas leverde het schatten resultaten op, die dichterbij de binnenoppervlakte dan bij de bedekking lagen. De kinderen motiveerden dit met: 'Van de randbokjes telt steeds maar een klein stukje mee. Er komt dus*

niet zo veel meer bij de binnenoppervlakte.' Uit deze reactie blijkt al de noodzakelijkheid om de kinderen bij het schatten hun redenering eksplisiet te laten maken, zodat in de klassediskussie eventuele denk- of redeneerfouten rechtgezet kunnen worden.

Ook bleek, zoals overigens reeds in gesprekken met kinderen vooraf tot uitdrukking was gekomen, dat het bijeen nemen van gedeelten van vierkantjes, die samen op 't oog ongeveer één heel vierkantje zijn, bij de schatting een rol speelde.

#### ► Les: werkblad 6

We bieden dit werkblad ter groepswijze verwerking aan.

Nadat de leerlingen even aan het probleem, gesteld in opdracht ⑧, 'geroken hebben', onderbreken we de activiteiten een ogenblik, om na te gaan, of iedereen de bedoeling begrepen heeft en om met elkaar vast te stellen, dat het maar om een benadering gaat. In verband daarmee 'mikken' we op breuken met 'plezierige' noemers (bijvoorbeeld: 2, 3, 4, 5 en 8). Daarna werken de leerlingen weer verder.

In de bespreking zijn een aantal zaken van belang:

- de resultaten van het werk;
- de handikap, die deze procedure oplevert, doordat zoveel breuken met verschillende noemers moeten worden opgeteld; *dit punt gebruiken we om te komen tot breuken met dezelfde noemer (honderdsten); hoe kunnen we daaraan komen? (het rooster verfijnen en van vierkante centimeters overgaan op vierkante millimeters);*
- het plaatsen van het uiteindelijke breukenantwoord op de getallenlijn (komt het antwoord binnen het schatinterval terecht? — werkblad 5.)

#### Antwoorden werkblad 6

De antwoorden kunnen variëren afhankelijk van de door de kinderen gedane schattingen.

De ervaring leerde, dat bij de bepaling van de uiteindelijke oppervlakte van een eiland met behulp van breuken, veel kinderen handig te werk gaan.

*Ze namen eerst breuken bij elkaar met gelijke noemers. Bleef uiteindelijk het probleem dat diverse breuken met verschillende noemers moesten worden opgeteld. Van hieruit kon de introductie van een eenheidsnoemer (honderdsten) gemotiveerd worden. Voor heel veel leerlingen was het samennemen van de breuken met verschillende noemers dan ook écht een probleem.*

*In één van de vijfde klassen werd bij het*

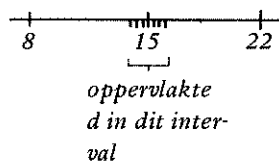
*schatten — en naar de eerste verfijning met breuken toewerkend — de volgende werkwijze gevolgd:*

- schatten;
- gemiddelde nemen van binnenoppervlakte en bedekking en vaststellen, dat de schatting daar wel 'ergens omheen zal liggen':

$$\begin{array}{c} \text{+-----+} \\ 8 \quad d \quad 22 \end{array} \rightarrow \frac{8+22}{2} = 15,$$

$$\begin{array}{c} \text{+-----+} \\ 8 \quad d_{15} \quad 22 \end{array}$$

*dus de oppervlakte van diamantia zal wel in een interval om 15 liggen:*



- gedeelten van randvierkantjes samennemen, zodat er steeds hele vierkantjes ontstaan;
- schatten met breuken bij elk randvierkantje afzonderlijk.

*De laatste manier vonden bijna alle leerlingen van de tot nu toe toegepaste benaderingen het meest precies, hoewel één meisje opmerkte: 'Bij het schatten met breuken hoeft het nog niet precies te zijn.' (volgens de redenering: elke breuk is weer een schatting; er kan dus nog een behoorlijke afwijking komen.)*

#### ► Les: introductie van de decimale notatie van breuken (werkbladen 7, 8 en 9)

In opdracht ⑩ gaan we de oppervlakte van de vier eilanden insluiten op basis van meting met vierkante millimeters. De werkzaamheden worden verdeeld, dat wil zeggen: één of meer groepen me(e)t(en) juwelia, (een) andere groep(en) diamantia, enzovoorts.

Na opdracht ⑩, worden de gegevens uitgewisseld, waarmee iedereen weer verder gaat werken. De onderwijzer dient bij opdracht ⑩ dus duidelijk van te voren met iedere groep (van 3 leerlingen) af te spreken, welk eiland zij moeten meten. Om de leerlingen (ekstra) te motiveren, kan op hun verantwoordelijkheid gewezen worden goed werk te leveren; de hele klas moet met die gegevens verder werken. Er mogen dus géén vergissingen gemaakt worden.

De te volgen procedure is eerder aan de orde geweest, zodat we ons bij de bespreking hier kunnen beperken tot een inventarisatie van de resultaten. We introduceren de notatie in kommagetallen.

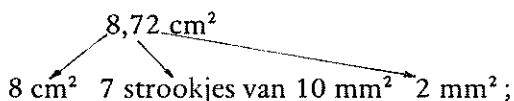
Deze komen in een overzichtje op het bord en worden overgenomen op werkblad 9.

Bijvoorbeeld:

$$8,72 \text{ cm}^2 < \text{oppervlakte juwelia} < 10,13 \text{ cm}^2, \text{ etc.}$$

We benadrukken

- de betekenis van de cijfers achter de komma, wat betekenen die nu?



- de *andere* schrijfwijze voor

$$8 \frac{72}{100} \text{ cm}^2 < \dots < 10 \frac{13}{100} \text{ cm}^2.$$

Vervolgens worden de opdrachten ⑬ en ⑭ van werkblad 9 verwerkt.

Bij nabespreking van deze opdrachten gebruiken we nog eens de gegevens van werkblad 5.

We gaan na:

- hoe kun je zien, welk eiland het kleinste is?
- liggen de gevonden intervallen nu binnen de schatintervallen, zoals ze op werkblad 5 staan aangegeven? waren onze schattingen goed?

Aan deze bespreking koppelen we tevens de vraag: wat zouden we nu kunnen doen om de grenzen, waarbinnen de oppervlakten van de vier eilanden liggen, nog *fijner* te bepalen? Ter sprake komt, dat het rooster opnieuw verfijnd zou moeten worden. (1 mm<sup>2</sup> opnieuw onderverdelen in 100 stukjes.) Gezien het feit, dat de procedure om praktische redenen niet voortgezet kan worden, zien we er vanaf.

Wél benadrukken we nog even, dat de gevolgde werkwijze een *benaderingsprocedure* is, waardoor *niet precies* gezegd kan worden: 'de oppervlakte is zoveel .....

Voordat op de hele aanpak en de geïntroduceerde nieuwe getallen nog eens uitvoerig teruggekeken wordt, moet nu eerst de schat gevonden worden. We gaan dus over tot de verwerking van het laatste gedeelte van het praktikum.

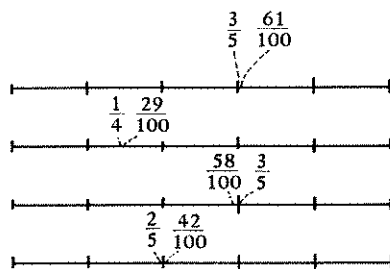
Opmerking:

om enige training te geven, zijn voorafgaande aan opdracht ⑪, de opdrachten ⑨ en ⑩ als inleiding toegevoegd.

Antwoorden werkblad 7, 8 en 9

⑨  $\frac{100}{25}$

⑩  $\frac{3}{5}, \frac{61}{100}$   
 $\frac{1}{4}, \frac{29}{100}$   
 $\frac{3}{5}, \frac{58}{100}$   
 $\frac{2}{5}, \frac{42}{100}$



Bovenstaande antwoorden zullen afwijken van de antwoorden in de klassesituatie, omdat ook dit benaderingen zijn.

$$\frac{190}{100}, 1, \frac{90}{100}$$

⑪ De antwoorden kunnen variëren. Een tweetal opmerkingen is op zijn plaats:

- \* we hebben hier uit praktische overwegingen gekozen voor overtrekken van de eilanden op millimeterpapier, omdat het gebruik van een transparant rooster met zulke kleine vakjes de toch al lastige telactiviteiten ekstra zou bemoeilijken;
- \* het is aan te bevelen telkens twee groepjes van 3 leerlingen hetzelfde eiland te laten doen, zodat bij de bespreking enig vergelijkingsmateriaal beschikbaar is.

⑫ en ⑬ Zie ⑪.

⑭ Guldenia is het kleinste eiland. Dit blijkt uit vergelijking van de verfijnde intervallen op de getallenlijn. Het bij guldenia behorende interval heeft een lege doorsnede met elk van de overige drie eilanden.

*Enkele kanttekeningen vanuit de ervaringen op de ontwerpschool, met name met betrekking tot de decimale breuken en de vertaling daarin van de meetresultaten met het meetrooster met mm<sup>2</sup>, zijn vermeldenswaard.*

*Geteld werd met vierkante centimeters en millimeters.*

*Op het bord verscheen:*  $1 \text{ cm}^2 = \dots \text{ mm}^2$   
en:  $\dots \text{ cm}^2 = 1 \text{ mm}^2$ .

*'Wie kan dit anders schrijven?'*

*'Eén procent', zei een leerling.*

*'Nog anders?'*

*Drie leerlingen kregen achtereenvolgens een beurt en 'produseerden':*

$$1,00$$

$$1,100$$

$$0,01.$$

*Er werd nu, ter verduidelijking voor de rest van de klas, een relatie gelegd met geld: f 1,-.*

*De meetresultaten in vierkante millimeters werden nu omgezet in vierkante centimeters.*

*Gevonden was: binnenoppervlakte bedekking juwelia : 1122 mm<sup>2</sup> 1334 mm<sup>2</sup>  
dit wordt: .... cm<sup>2</sup> .... cm<sup>2</sup>*

*Aan de groepen werd één minuut tijd gegeven voor intern overleg.*

*Een leerling kreeg de beurt en zei: 'elf cm<sup>2</sup>'.*

*'Nu die 22 mm<sup>2</sup> nog!'*

*Een andere leerling: '11,22 cm<sup>2</sup>'.*

*Er was nu verder geen vuiltje meer aan de lucht. Alles verliep verder prima en het opvallende was, dat de leerlingen bij dit (en ook*

andere) vrij technische gedeelte(n) erg entoesiast meededen.

Tenslotte merken we nog op, dat de verwerking van de resultaten uit deze inventariserende les op werkblad 9 het best onder vrij strakke begeleiding van de onderwijzer(es) kan plaatsvinden.

'Nu het kleinste eiland bepaald is, zijn we allemaal erg benieuwd waar de schat eigenlijk wel ligt.'

Groepsgewijze gaan we met de werkbladen 10 en 11 en een gedeelte van 12 aan de slag. Wanneer de dekoderingsactiviteiten min of meer ten einde lopen is het raadzaam – met de klas als eenheid – de draad op te pakken en onder begeleiding van de onderwijzer(es) de resterende geheimen te onthullen. Een gelijktijdig met elkaar bereiken van het tweede hoogtepunt in dit pakket beneemt al te snelle en inventieve leerlingen de kans het aan anderen voor te zeggen.

### Les(sen?): En nu ..... de schat! (werkbladen 10 tot en met 13)

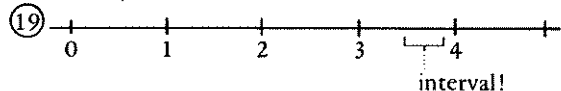
#### Antwoorden

- ⑮ 2 cm  
100 m  
0,1 km  
0,5 km (500 m)

⑯ De baaij in 't noorden op zes-zes vormt het begin vandaar een twintig roeden (d'amstelredam) naar 't zuid-wes' ende brengt u bij 't gewin.

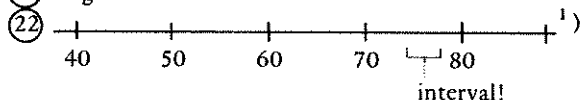
⑰ De antwoorden kunnen variëren. Bijvoorbeeld: 'De baai waar het schip in getekend is'.

⑱ Een amsterdamse roede is een lengtemaat: ongeveer 3,75 m.



⑳ 75 cm

㉑ ongeveer 75 m



㉓ 1 : 5000

㉔ 1 cm op de kaart is in werkelijkheid 5000 cm

㉕ 50 m

㉖ zuid-westen

㉗ ongeveer 75 m

㉘  $1\frac{1}{2}$  cm.

► **Les: afsluiting** (alles nog eens netjes op een rijtje)

1 Bespreking van het laatste gedeelte van het praktikum 'Ralph, de zeerover' (zie begeleiding en antwoorden bij dit gedeelte van het praktikum).

2 Terugblik op de *benaderings*-prosedure bij de oppervlaktebepaling van de eilanden, dat wil zeggen:

- uitgaan van gegeven eenheid ( $\text{cm}^2$ ),
- oppervlakte insluiten tussen twee (groe) grenzen,
- benadering via breuken,
- eenheidsmaat verfijnen (millimeterpapier),
- opnieuw oppervlakte insluiten tussen twee grenzen,
- de nieuwe grenzen uitdrukken in de eerste eenheid (helen en honderdsten; decimale getallen).

De benadering is preciezer geworden. Daarbij het besprokene over kommagetallen opnieuw aan de orde stellen:

- inwisselen,
- plaatswaarde (de betekenis van de eerste en tweede decimaal),
- aansluiten bij datgene, wat in verband met natuurlijke getallen aan de orde geweest is:

HTE, th

|||, ||

Eenheden fikseren, populair gezegd: vanaf de eenheden naar links 'steeds met 10 vermenigvuldigen', naar rechts 'steeds door 10 delen'.

Tenslotte, wat dit punt betreft, nog de kwestie van het voortzetten van de verfijningsprosedure ( $1 \text{ mm}^2$  onderverdelen in 100 gelijke nieuwe eenheidsvierkantjes) en de praktische bezwaren, waarop dit zou stuiten.

Nu hieraan (eventueel) de vraag koppelen naar de betekenis van het (de) volgende cijfer(s) in het decimale getal, als we de voorgestelde verfijning van de  $\text{mm}^2$  toch uitgevoerd denken en daarmee opnieuw zouden gaan meten (duizendsten en – eventueel – tienduizendsten komen aan de orde)

3 Het naast elkaar plaatsen van activiteiten, waarbij gevraagde antwoorden *eksakt* bepaald kunnen worden door *tellen* én activiteiten (in verband met meten) waarbij we moeten volstaan met een *benaderende* beantwoording.

We kunnen daarbij de volgende problemen gebruiken:

op welke manier kunnen we onderstaande opdrachten uitvoeren (door tellen of meten) en wat kun je zeggen van het antwoord (precies of benadering)?

<sup>1</sup>) Denk bij de bespreking aan de fout, die bij het vermenigvuldigen 20 x vergroot wordt; deze is bepalend voor de grootte van het interval!

- Het vinden van het aantal leerlingen op school.
- Het vinden van de afstand tussen school en je huis.
- Het bepalen van je eigen gewicht.
- Het vinden van het aantal traptreden in de toren van de St. Eusebiuskerk.
- Het bepalen van de temperatuur van een pannetje melk.
- Het vinden van het aantal erwten in een blik.
- Het bepalen van het gewicht van die hoeveelheid erwten.
- Het vinden van de tijd, die je nodig hebt voor het lopen van een afstand van 1 km. (waarom is er bij deze opdracht sprake van een 'dubbele' benadering?)
- Het bepalen van het aantal woorden op een bladzijde van een boek.
- Het bepalen van je leeftijd op de middag van 1 januari 1974.

*Bij de verwerking van de voorgaande 10 activiteiten bleek, dat naar de mening van de meeste leerlingen alleen bij lengtemeting sprake is van meten. We adviseren derhalve om genoemde activiteiten te koppelen aan concrete opdrachten in de sfeer van wegen, tijdmeten, e.d. om deze 'enge visie' op meten te verruimen.*

► **Les: ordenen en strategieën bij het ordenen (werkblad 14)**

*Inleiding*

We zijn lange tijd bezig geweest met het meten van de eilanden juwelia, diamantia, robijn en guldenia. Met meetroosters moesten we de oppervlakte bepalen. Het ging om het kleinste! We hadden echter veel sneller klaar kunnen zijn.

Bij deze laatste opmerking laten we de klas de vier eilanden zien: opgeplakt op tripleks en uitgezaagd.

*Probleem*

Hoe zouden we hiermee handig en snel de kleinste kunnen bepalen?

Wanneer de leerlingen niet tot de gewenste oplossing (vergelijken met behulp van de balans, dus wegen) komen, plaatsen we achteloos een balans voor de klas.

Wanneer de oplossing eenmaal ter sprake is, trekken we eerst een vergelijking met de gevolgde procedure bij het Ralph-probleem:

- deze methode werkte veel sneller;
- bij het meten met roosters wisten we meer; bij benadering konden we zeggen hoe groot elk van de eilanden was; bij het vergelijken met de balans konden we de eilanden alleen maar op volgorde plaatsen.

Eventueel zou het probleem aangesneden kun-

nen worden of door middel van wegen de oppervlakte ook benaderd zou kunnen worden, namelijk: 1 cm<sup>2</sup> tripleks precies uitzagen, wegen en dit gewicht vergelijken met het gewicht van de eilanden.

We geven nog enkele voorbeelden, waarbij oppervlaktemeting geschiedt via *met-oppervlaktematen*:

- in babylonië werd de oppervlakte van een akker vaak gemeten met behulp van de hoeveelheid zaaigraan die men nodig had om die akker helemaal in te zaaien;
- een 'morgen' is een oppervlakte-maat, namelijk een stuk land dat zo groot is, dat een boer één morgen nodig heeft om het te ploegen;
- de oppervlakte van de wanden van een kamer die geschilderd moeten worden, wordt uitgedrukt in het aantal liters verf, dat men nodig heeft.

N.B.: We stellen in het kort ook even de 'hardheid' van deze maten ter discussie.

Daarna richten we ons op de ordenings-strategie; hoe vaak moet je op z'n hoogst de balans gebruiken om die 4 eilanden op volgorde te kunnen zetten? hoe is dat, als we werken met een ander aantal eilanden? zit er een zekere regelmaat in?

We laten telkens enkele kinderen met behulp van de balans voor de klas één van de gestelde problemen behandelen:

- |            |             |
|------------|-------------|
| 4 eilanden | 5 eilanden? |
| 3 eilanden | regelmaat?  |
| 2 eilanden |             |

We introduceren de *ordeningsmachine* en geven één of twee ordeningsproblemen op een werkblad (werkblad 14).<sup>1)</sup>

*Antwoorden werkblad 14*

- ②9 3 maal
- ③0 bij 3: 2 maal  
bij 5: 4 maal  
bij 6: 5 maal
- ③1 9 maal
- ③2 6 maal
- ③3 3 maal  
10 maal  
15 maal
- ③4 regel:  $\frac{1}{2}n(n-1)$

*In één van beide vijfde klassen werd het idee om de eilanden met een balans te gaan vergelijken snel geboren. Het had een verrassend effect voor de kinderen.*

<sup>1)</sup> Zie voor nadere informatie over ordeningsmachines: KOboek 'In Orde', pag. 30 en v. (IOWO, Utrecht).

De waardering die ze hadden voor de activiteiten in het voorgaande Ralph-pakket werd er echter niet door aangetast, omdat – naar de leerlingen meenden – hieruit veel meer (en ook bruikbare) informatie was vrijgekomen. De opdrachten 32, 33 en 34 op werkblad 14 bleken erg moeilijk.

Misschien dat het attent maken op een combinatie van opdrachten (bijvoorbeeld 30 en 32) ze op het idee van de volgende redenering kan brengen:

bij het op volgorde plaatsen van bijvoorbeeld 4 eilanden, is de ordeningsmachine 3 maal nodig om de grootste te bepalen, voor de resterende 3 eilanden nog 2 maal en voor de laatste twee eilanden nog 1 maal; bij 4 eilanden krijg je dus:  $3 + 2 + 1$ , enzovoorts.

#### TOT SLOT

Het voorgaande pakket moet beschouwd worden als een eerste kennismaking met decimale breuken zoals ze te voorschijn komen wanneer we een eenmaal gekozen standaardmaat

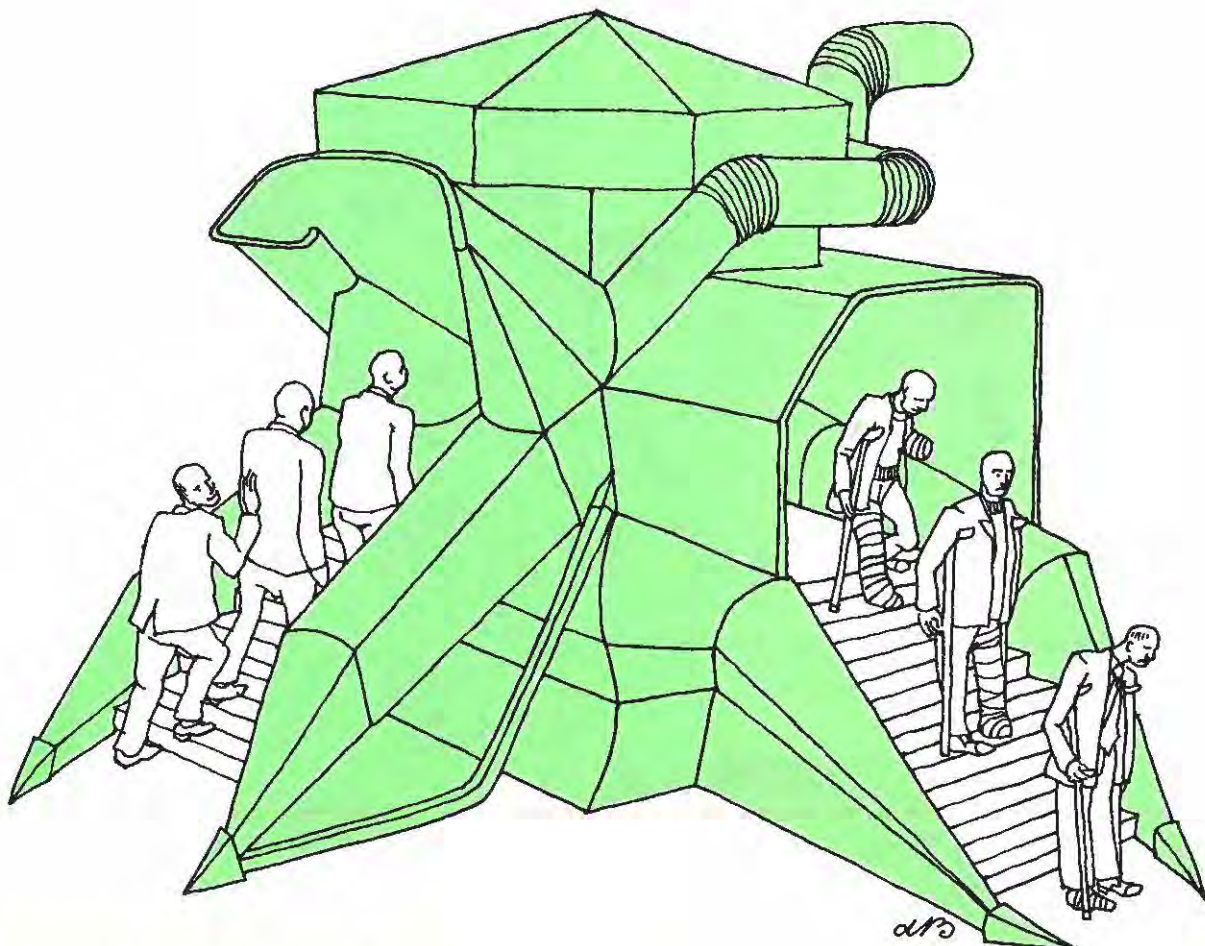
– waarmee we gaan meten – moeten onderverdelen in tienden, honderdsten, etc.

Aan operaties met decimale getallen zijn de kinderen nog (lang) niet toe.

We willen de procedure in een diversiteit van situaties en experimenten herhalen, zodat het begrip decimale breuk 'goed gaat zitten'. Pas daarna komt het rekenen er mee of beter gezegd: zo langzaam maar zeker 'sluip' dit rekenen met decimale breuken 'binnen' de vervolgtactiviteiten, maar niet voordat ook een relatie gelegd is met gewone breuken. (in feite gebeurde dit in het voorgaande pakket ook al impliciet – zie bijvoorbeeld werkblad 7 –).

Ervaringen, buiten de ontwerpschool opgedaan, maken dat we dit pakket kunnen aanbevelen, in alle bescheidenheid overigens.

Tenslotte danken we degenen, die mede aan de tot standkoming bijgedragen hebben: de kinderen van de beide vijfde klassen van de Dr. W. Dreesschool, hun onderwijzers Ben Nijdeken en Fred Broekhuys, de medewerkers van de l/mbo groep binnen het IOWO en Fred Goffree.



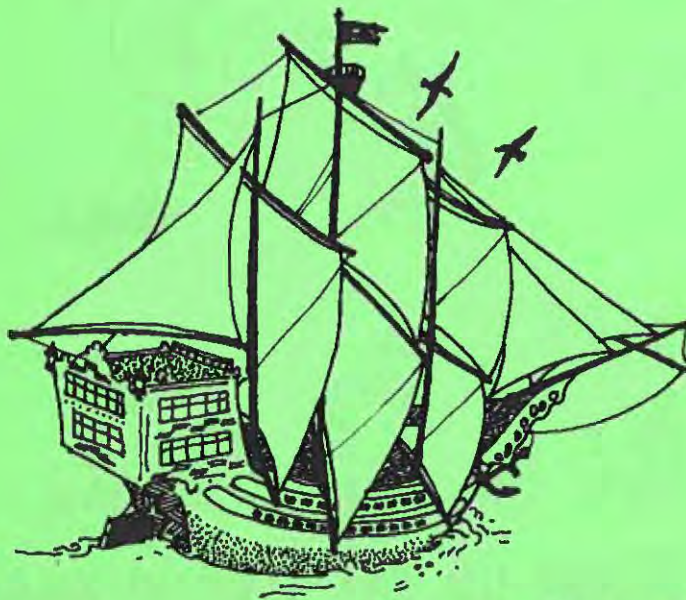


"de adelaar"

## RALPH, DE ZEEROVER



Kapitein Ralph, de zwarte, een kaper uit duinkerken, voer in het jaar 1623 met zijn schip, de Adelaar, op de indische oceaan. Ralph stamde uit een beruchte kapersfamilie.



"de adelaar"

Zijn vader, die in een bloedig gevecht om het leven was gekomen, had hem een geheimzinnige kaart op perkament nagelaten. Van deze kaart vind je een afdruk op de volgende bladzijde.



Deez' kaarte toont U hier,  
Kleen eilanden wel vier,  
In d' Indies Oceaen  
Heel verre hier vandaan.

Zoekt uit het kleinst ende gaat  
Daarheen zo snel g' U spoeden laet  
D' aanhouder vindt gewis,  
Daar enen schat lang niet mist

Deze tekst stond op het kaartje:

*Deez' kaarte toont U hier,  
Kleen eilanden wel vier,  
In d' Indies Oceaen  
Heel verre hier vandaan.*

*Zoekt uit het kleinst ende gaat  
Daarheen zo snel g'U spoeden laat  
D'aanhouder vindt gewis,  
Daar enen schat lang niet mis.*

Ralph en zijn makkers waren dus op zoek naar de schat.  
Zij moesten hetzelfde probleem oplossen waarvoor jullie nu staan.  
Zullen we 't eens proberen?  
't Is wel lastig, maar het lukt zeker.

*Veel sukses en plezier met de schatgraverij!*

#### Afspraak

We zullen *de oppervlakte* van de eilanden op de kaart gaan meten met *vierkantjes* van 1 vierkante cm.

De eenheid, waarmee we meten is dus 1 cm<sup>2</sup>.

- ① ▶ Neem de oude kaart voor je.  
▶ Leg het doorzichtige rooster over de kaart.  
▶ Tel *alle vierkantjes*, die *belemaal binnen* het eiland juwelia liggen.  
Zorg wel, dat het rooster niet verschuift!  
▶ Hoeveel cm<sup>2</sup> binnen de grens van het eiland?

cm<sup>2</sup>

- ▶ Probeer het doorzichtige rooster *zó* te draaien of te schuiven, dat er *zoveel mogelijk bele* vierkantjes binnen het eiland liggen.  
Hoeveel cm<sup>2</sup> vind je?

cm<sup>2</sup>

#### Afspraak

We zullen dit aantal vierkantjes binnen het eiland de *binnenoppervlakte* noemen.

- ▶ Welke binnenoppervlakte vind jij voor het eiland juwelia?

cm<sup>2</sup>

- ② Zoek ook uit welke binnenoppervlakte de drie andere eilanden hebben.  
Denk erom: het doorzichtig rooster weer handig neerleggen, net als in opdracht ①.

Binnenoppervlakte eiland diamantia:	<input type="text"/>	cm <sup>2</sup>
Binnenoppervlakte eiland robijnë :	<input type="text"/>	cm <sup>2</sup>
Binnenoppervlakte eiland guldenia :	<input type="text"/>	cm <sup>2</sup>

- ③ Is een eiland groter of kleiner dan zijn binnenoppervlakte?

- ④ Kijk eens naar de binnenoppervlakte van de vier eilanden.  
Durf je al een voorspelling te doen welke het kleinste is?  
Vul maar in:

Ik denk dat het eiland  het kleinste is.  
(invullen: juwelia, diamantia, robijnë of guldenia)

- ⑤ ▶ Leg het doorzichtige rooster weer op de kaart.  
▶ Let weer op het eiland juwelia.  
▶ Zoek eens uit hoeveel vierkantjes nodig zijn om het hele eiland te bedekken.  
Denk erom: ook de vierkantjes meetellen, die maar voor een deel een stukje van het eiland bedekken.  
Hoeveel cm<sup>2</sup> vind je?

 cm<sup>2</sup>

- ▶ Probeer het doorzichtige rooster zó te draaien of te schuiven, dat je met zó *weinig mogelijk* hokjes tóch het hele eiland kunt bedekken.  
Hoeveel cm<sup>2</sup> vind je nu?

 cm<sup>2</sup>

- ⑥ Zoek dit ook voor de drie andere eilanden uit.  
Denk erom: je doorzichtige rooster weer handig gebruiken.  
Wat vind je?

Het eiland diamantia kan bedekt worden met  cm<sup>2</sup>,  
het eiland robijnë met  cm<sup>2</sup>, en  
het eiland guldenia met  cm<sup>2</sup>.

- ⑦ Is de oppervlakte van een eiland groter of kleiner dan het aantal vierkante cm, waarmee het bedekt kan worden?

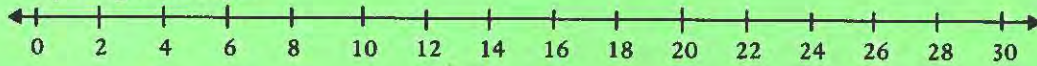
Ziezo, dat hebben we gehad.

Nu eerst eens met elkaar erover praten, voordat we verder gaan graven.

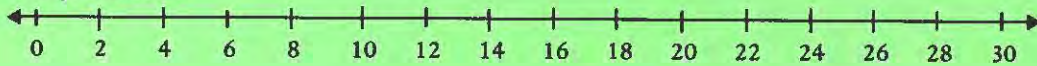
► De oppervlakte van **juwelia** ligt tussen  cm<sup>2</sup> en  cm<sup>2</sup>.

We schrijven:  cm<sup>2</sup> < j <  cm<sup>2</sup>.

Op de getallenlijn:



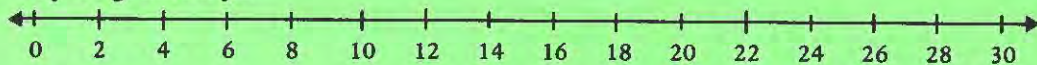
Wij schatten:



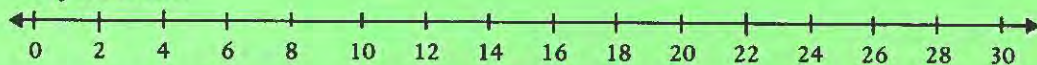
► De oppervlakte van **diamantia** ligt tussen  cm<sup>2</sup> en  cm<sup>2</sup>.

We schrijven:  cm<sup>2</sup> < d <  cm<sup>2</sup>.

Op de getallenlijn:



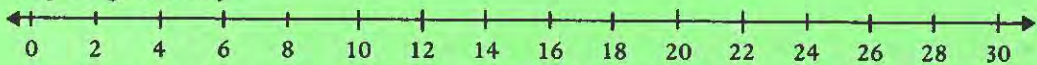
Wij schatten:



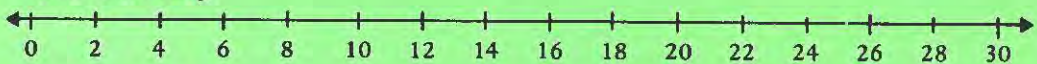
► **Robijnië**: tussen  cm<sup>2</sup> en  cm<sup>2</sup>,

of  cm<sup>2</sup> < r <  cm<sup>2</sup>.

Op de getallenlijn:



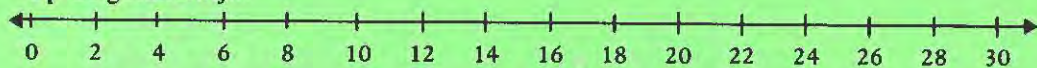
Onze schatting:



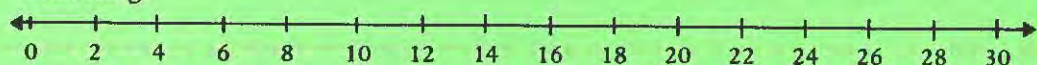
► **Guldenia**: tussen  cm<sup>2</sup> en  cm<sup>2</sup>,

of  cm<sup>2</sup> < g <  cm<sup>2</sup>.

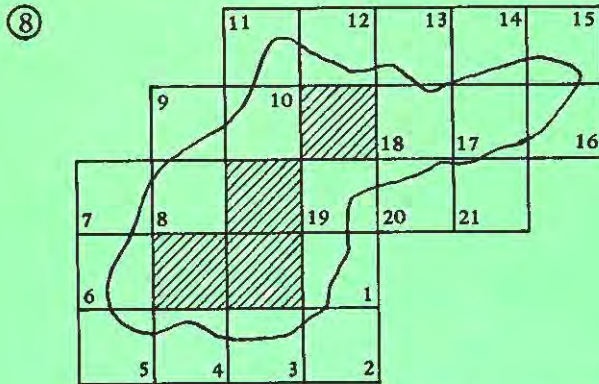
Op de getallenlijn:



Schatting:



In de laatste les is een opmerking gemaakt over breuken. Die kon je gebruiken om de oppervlakte van de eilanden nauwkeuriger te bepalen. We zullen eens kijken of dat zo is:



► Hoe groot is de binnenoppervlakte van het eiland juwelia hier?

cm<sup>2</sup>.

- Kijk naar het vierkantje met nummer 1.
- Kleur het gedeelte van vierkantje 1 binnen de grens van het eiland.
- Welk deel van dit vierkantje ligt *ongeveer* binnen de grens van het eiland?

Ongeveer de , of als breuk: .

- Zoek nu met elkaar ook eens uit, welk deel van de vierkantjes met de nummers 2 t/m 21 telkens binnen de grens van het eiland ligt. Kleur van ieder vierkantje eerst het gedeelte dat binnen de grens van het eiland ligt.
- Schrijf je antwoord telkens in de goede vierkantjes van de tekening! Denk erom: het gaat om *ongeveer*.
- Hoe kun je nu uit de vorige antwoorden *ongeveer* de oppervlakte van het eiland vinden?

► Waarom is dit niet zo gemakkelijk?

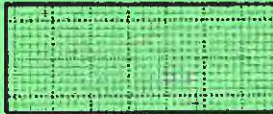
- Probeer toch de oppervlakte van het eiland met behulp van de breuken, die jullie vonden, ongeveer te bepalen.

De oppervlakte van juwelia is ongeveer  cm<sup>2</sup>.

In de les spraken we het volgende af:

omdat de breuken met verschillende noemers moeilijk op te tellen waren, gaan we *uitsluitend* met *honderdsten* werken; we gebruiken dan geen meetrooster met vierkantjes van  $1\text{ cm}^2$ , maar met vierkantjes van  $1\text{ mm}^2$ .

Hier zie je een stukje van zo'n meetrooster:



9 ▶ Hoeveel vierkantjes van  $1\text{ mm}^2$  gaan in  $1\text{ cm}^2$

▶ Hoeveel vierkantjes van  $1\text{ mm}^2$  gaan in  $\frac{1}{4}\text{ cm}^2$ ?

Van deze twee antwoorden kun je handig gebruik maken bij de volgende opdrachten!

10



Je ziet hier een in vieren geknipt eilandje.

Zo zag het er eerst uit:



▶ Schat van elk stukje eerst de oppervlakte.

Geef je antwoord in een breuk.

Zoek daarna uit hoeveel honderdsten dit ongeveer is.

Vul je antwoorden op het volgende overzichtje in.

<b>Stukje 1</b>	Ik schat <input type="text"/> deel van $1\text{ cm}^2$ , dat is ongeveer <input type="text"/> $\frac{\quad}{100}$ .
Zet deze antwoorden ook op de volgende getallenlijn:	
<b>Stukje 2</b>	Ik schat <input type="text"/> deel van $1\text{ cm}^2$ , dat is ongeveer <input type="text"/> $\frac{\quad}{100}$ .
Op de getallenlijn:	
<b>Stukje 3</b>	Schatting <input type="text"/> deel van $1\text{ cm}^2$ , dat is ongeveer <input type="text"/> $\frac{\quad}{100}$ .
Op de getallenlijn:	
<b>Stukje 4</b>	Schatting <input type="text"/> deel van $1\text{ cm}^2$ , dat is ongeveer <input type="text"/> $\frac{\quad}{100}$ .
Op de getallenlijn:	

▶ Hoe groot is de oppervlakte van dit eilandje nu ongeveer?

Geef je antwoord in honderdsten:   $\frac{\quad}{100}$   $\text{cm}^2$ .

▶ Hoeveel hele vierkantjes van  $1\text{ cm}^2$  bevat dit laatste antwoord?

vierkantje(s) van  $1\text{ cm}^2$ .

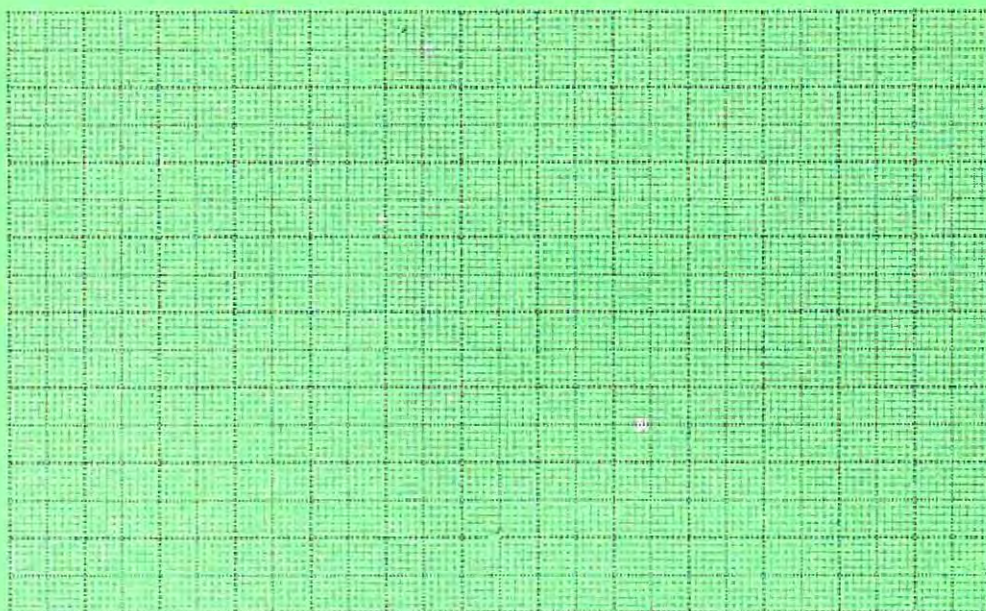
▶ Hoeveel honderdsten blijven er nog over?   $\frac{\quad}{100}$

① *En dan nu het grote werk!*

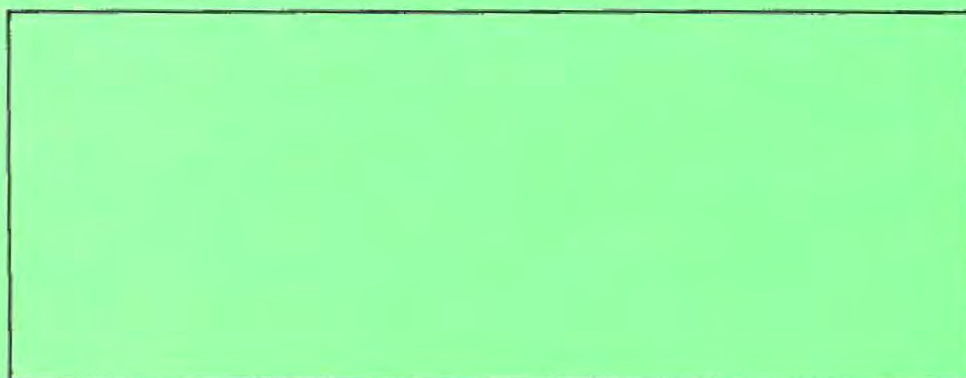
Lees eerst deze opdracht met elkaar nauwkeurig *belemaal* door.

- ▶ Van je onderwijzer kreeg je de opdracht één van de vier eilanden *in honderd-*, *sten* te gaan meten.

Doe dat zó: trek (met karbonpapier) het eiland dat jullie moeten doen over op dit millimeter papier.



- ▶ Zoek uit, wat de *binnenoppervlakte* is in *bele* vierkantjes van  $1 \text{ cm}^2$  en honderdsten.
- ▶ Zoek uit hoeveel hele vierkantjes van  $1 \text{ cm}^2$  en honderdsten je nodig hebt om het hele eiland te bedekken.
- ▶ Doe het vooral handig! (kijk nog eens naar je antwoorden bij opdracht 9 )
- ▶ Werk zo veel mogelijk samen. Verdeel het werk. Doe het nauwkeurig! De anderen moeten jullie antwoorden gebruiken.  
Maak dus *geen vergissingen!*
- ▶ Schrijf een verslagje van jullie vondsten.



- ⑫ Neem de antwoorden van opdracht ⑪ in het volgende overzicht over: (denk erom: nu ook *kommagetallen* gebruiken!)

$$\boxed{\quad}, \boxed{\quad} \text{ cm}^2 < j < \boxed{\quad}, \boxed{\quad} \text{ cm}^2$$

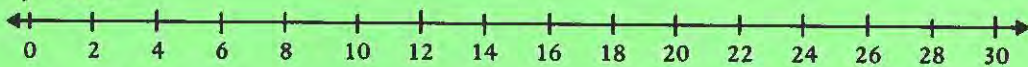
$$\boxed{\quad}, \boxed{\quad} \text{ cm}^2 < d < \boxed{\quad}, \boxed{\quad} \text{ cm}^2$$

$$\boxed{\quad}, \boxed{\quad} \text{ cm}^2 < r < \boxed{\quad}, \boxed{\quad} \text{ cm}^2$$

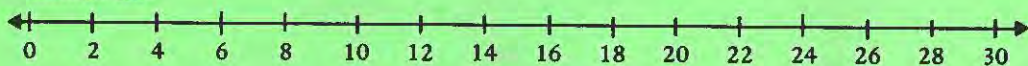
$$\boxed{\quad}, \boxed{\quad} \text{ cm}^2 < g < \boxed{\quad}, \boxed{\quad} \text{ cm}^2$$

- ⑬ Kleur bovenstaande antwoorden op de getallenlijn hieronder.

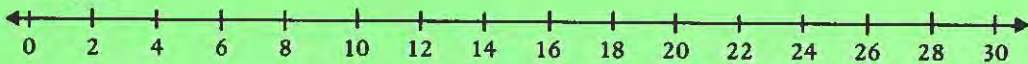
juwelia:



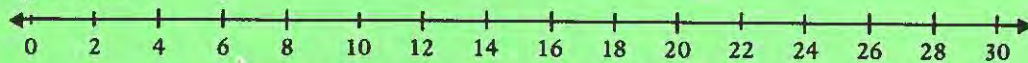
diamantia:



robijnë:



guldenia:



- ⑭ Welk eiland is het kleinste.

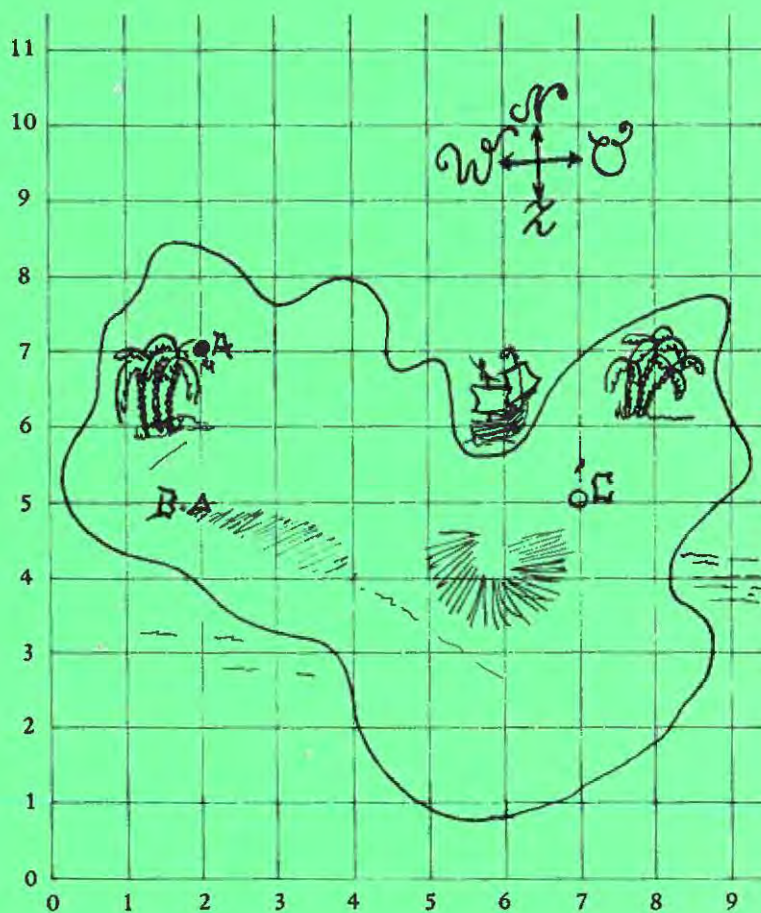
Schrijf er ook bij, waarom jullie dit antwoord kozen.

EN NU ..... DE SCHAT!

15 Lees goed

Kapitein Ralph, de zwarte, zag samen met zijn eerste 'stuur' (Manke Pierre) kans, het kleinste eiland van de vier te bepalen.

Hier zie je een kaartje van het kleinste eiland. (op een andere schaal)



Het kleinste eiland (schaal 1 : 5.000)

► Hoe groot is de afstand van A naar B op het kaartje?

cm.

► Welke afstand is dat op het echte eiland?



'Manke Pierre'

- Kun je dat ook met een kommagetal schrijven?

.....

(vergeet niet dat er nog iets achter het antwoord moet!)

- Hoe groot is nu de afstand van B naar C op het echte eiland?

.....

Het speuren naar de schat was voor Ralph en zijn kornuiten nog niet afgelopen. Bij de perkamenten kaart had Ralph nóg een heel geheimzinnig dokument. Dat zag er zó uit:

Als gij deez' raadselen onthult  
Vindet gij silver ense guls' :

$[(4,5)(5,5)][(2,5)(1,5)(1,5)(2,3)][(5,1)(1,2)][(4,4)][(1,2)(1,3)(1,3)$   
 $(2,4)(4,5)(5,5)(1,2)]$

$[(1,3)(1,4)][(3,3)(5,5)(3,4)][(3,3)(5,5)(3,4)]$

$[(4,2)(1,3)(2,4)(1,1)(4,4)][(5,2)(5,5)(4,4)][(2,5)(5,5)(5,3)(5,1)(1,2)]$

$[(4,2)(1,5)(1,2)(4,5)(1,5)(1,5)(2,4)][(5,5)(5,5)(1,2)][(4,4)(3,2)$   
 $(5,1)(1,2)(4,4)(5,1)(5,3)]$

$[(2,4)(1,3)(5,5)(4,5)(5,5)(1,2)][(4,5)][(1,5)(1,1)(3,4)(4,4)(5,5)$   
 $(2,1)(2,4)(5,5)(4,5)(1,5)(1,1)]$

$[(1,2)(1,5)(5,5)(2,4)][(4,4)][(3,4)(4,3)(2,3)(4,5)]$

$[(3,2)(5,5)(3,4)]$

$[(5,5)(1,2)(4,5)(5,5)][(2,5)(2,4)(5,5)(1,2)(5,3)(4,4)]$

$[(4,3)][(2,5)(2,3)]$

$[(4,4)][(5,3)(5,5)(3,2)(5,1)(1,2)]$

Het bleek niet eenvoudig deze geheimzinnige kode te ontcijferen. Daarom zullen we jullie de sleutel tot de oplossing van de kode maar geven.

'Sleutel tot de oplossing van de kode' 

5	a	b	c	d	e	
4	p	r	s	t	f	
3	o	y	z	u	g	
2	n	x	w	v	h	
1	m	l	k	j	i	
	0	1	2	3	4	5

- 16 Ontcijfer met elkaar deze kode en noteer de tekst, die jullie vinden:

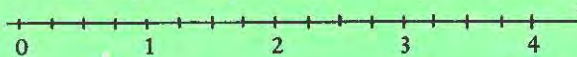
- 17 Zoek het punt (6,6) op het kaartje (van het kleinste eiland).  
Kun je omschrijven, waar (6,6) ligt?  
Probeer maar:

- 18 Probeer uit te zoeken wat een amsterdamse roede is en noteer dat:

Een amsterdamse roede is

Hoelang is een amsterdamse roede ongeveer?

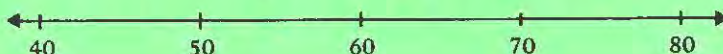
- 19 In het woordenboek vond je:  
1 amsterdamse roede is *ongeveer* 3,75 m.  
Geef dit op de volgende getallenlijn aan. (denk ook aan *ongeveer*!)



- 20 Wat betekenen de cijfers achter de komma?

- 21 Welke afstand is nu 20 amsterdamse roeden ongeveer?  
Schrijf ook op hoe jullie dit berekenden.  
't Kan heel handig. Ik ben benieuwd.

- 22 Teken ook het vorige antwoord op de getallenlijn:



- 23 Wat was de schaal van het kaartje van het kleinste eiland?

1 :

- 24 Wat betekent dit ook alweer?

1 cm op de kaart is ....

- 25 Hoeveel m is 1 cm op dat kaartje in de werkelijkheid?

m

- 26 In welke richting moest Ralph met zijn mannen gaan zoeken?

- 27 Welke afstand moest hij in die richting gaan?

m.

(zie antwoord 22)

- 28 Hoeveel cm is dit op het kaartje van het kleinste eiland?

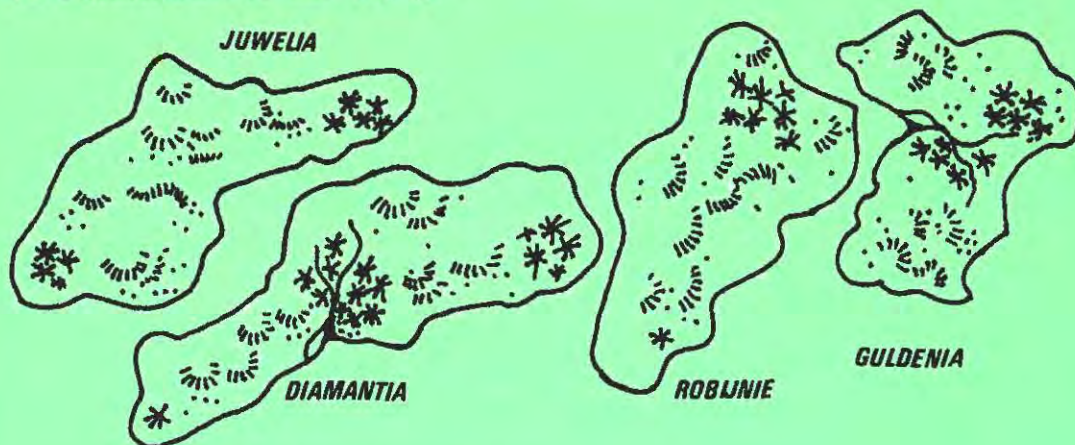
cm.

Teken op die kaart met een kruisje de plaats aan, waar volgens jullie de schat ligt.



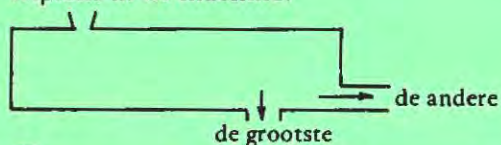
ZIE ZO, HET KARWEI IS GEKLAARD!

DE 4 EILANDEN OP EEN RIJTJE



Je ziet hier onze eilanden nog eens een keer.

Stel, je hebt een ordeningsmachine. Je gooit twee eilanden (meer kan niet) op tripleks in de machine:



- 29) Hoe vaak zou je de machine moeten gebruiken om te weten: dit eiland is het op één na grootste.

- 30) Zoek dat ook uit voor 3, 5 en 6 eilanden.

- 31) Zou je het nu dan ook van 10 eilanden kunnen zeggen?

- 32) Hoe vaak heb je de machine nodig om alle 4 de eilanden in de juiste volgorde te plaatsen?

- 33) Zoek dat ook uit voor 3, 5 en 6 eilanden.

- 34) Ontdekte je een regel? Schrijf maar op.

# suonopres

## INHOUD

2.1 <i>Inleiding</i> .....	192
2.2 <i>Zestien oplossingen</i> .....	193
2.3 <i>Ordenend tellen</i> .....	196
2.4 <i>Ordenend tellen</i> .....	199
2.5 <i>Metten voor 4-6 jarigen</i> .....	200
2.6 <i>Eén-éénduidigheid bij muzieknotatie</i>	202
2.7 <i>Ouder-werkavonden in bennekom</i> .	203

## MEDEWERKERS AAN DIT BLOK:

Deelnemers heroriënteringskursus amsterdam, Chris Boekkooi, teams van de Beatrixschool (lunteren) en de School '40-'45 (oss), N. Kors, A. van de Oest, R. Reitsma, E.G.J.M. van der Ven, Daan Karman, Rob de Jong.

# blok

# 2.1 inleiding

## VARIETEIT EN RAFFINEMENT

*Het is iedere keer weer en deze keer in het bijzonder een voorrecht om het respons blok te redigeren.*

*De inhoud van deze blokken kan immers gekenschetst worden met termen die ook op de meest uitgelezen maaltijden van toepassing zijn: variëteit en raffinement.*

De variëteit van het voor u liggende blok is bij vluchtig doorbladeren al vast te stellen. Niet alleen een grote afwisseling in onderwerpen (muzieknotatie, meten, tellen), maar ook in categorieën van onderwijs-ontvangers waarvoor de bijdragen geschreven zijn. (ouders, kleuters, basisschoolleerlingen, onderwijzers) Het raffinement zit deze keer — dachten we — vooral in de bijdrage uit amsterdam: 'Zestien oplossingen'. (2.2) Een (schijnbaar) eenvoudig telprobleem uit het blok 'Tel-op-tal' was voor de heroriënteringskursisten dermate inspirerend dat ze met elkaar een ongelooflijke prestatie leverden. In een begeleidende brief schrijft Ger Blauw — één der docenten —: 'U ziet maar weer eens wat een entoesiasté groep (weliswaar groot: 53 kursisten) aan verborgen talenten herbergt.'

Verdere verslaggeving van ervaringen met de problemen op het gebied van het 'ordenend tellen' is in het voorgaande bulletin toegezegd. De reacties van de Beatrixschool (lunteren) en de School '40-'45 (oss) nemen we graag op (2.3), terwijl we in 2.4 de tot nog toe binnengekomen respons voorlopig samenvatten. Voor de ontwikkeling van het onderwijs op dit (nieuwe) gebied is de ingekomen informatie van onschatbare waarde.

Er zijn nogal wat leerkrachten bij het kleuteronderwijs die de wiskobas-kursussen volgen. In het algemeen hebben ze — naar de kursusedocenten ons herhaaldelijk meedelen — een belangrijke (kreatieve) inbreng tijdens de bijeenkomsten. Dat de kursussen op deze wijze ook effecten hebben voor het werk op de kleuterschool blijkt o.m. uit een bijdrage van drie leerkrachten uit den haag die voor hun kleuters een opzet hebben gemaakt voor 'meten'. Om een gesprek hierover op gang te brengen hebben we een bepaald gedeelte uit deze opzet — een serie activiteiten over lengtemeting — in 2.5 opgenomen.

Een artikel van Prof. van der Blij doet Chris Boekkooi, docent wiskunde en didaktiek in middelburg, verzuchten: 'was er maar één — éénduidigheid in de muzieknotatie!' (2.6)

Deze 'zucht op glad ijs' — zoals de auteur het typeert — vraagt om verdere reacties. Een unieke gelegenheid voor muzikale en/of muziektheoretisch geschoolde kollega's om 'in te stappen'.

Bij belangrijke onderwijsveranderingen mogen de ouders niet aan de zijlijn blijven staan. De St. Alexanderschool te bennekom betreft de ouders door middel van werkavonden in het spel. Uit het zeer uitvoerige verslag kunnen we slechts enkele fragmenten opnemen. (2.7)

# 2.2 zestien oplossingen

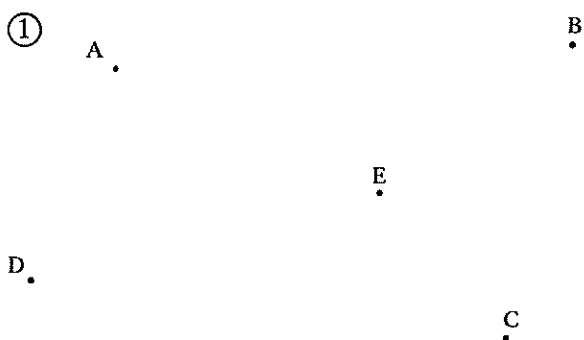
De deelnemers aan de in augustus 1973 gestarte nieuwe heroriënteringskursus te amsterdam<sup>1)</sup> vonden nevenstaande oplossingen van het probleem:

*In een plat vlak zijn 5 punten gelegen, zo dat geen 3 punten op één rechte lijn liggen.*

*Hoeveel driehoeken zijn er te tekenen, zodat de gegeven punten steeds hoekpunten zijn?<sup>2)</sup>*

<sup>1)</sup> Docenten: Ger Blaauw (pedagoog) en Dik Oort (wiskundige).

<sup>2)</sup> Opgave 17 uit 'Tel-op-tal' (pag. 11).



Verbind A met B, B met C, C met D en D met A.

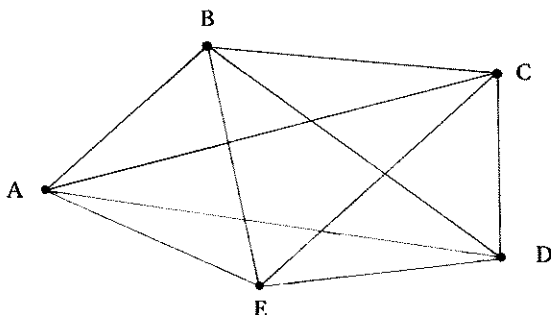
Beschouw nu ABCD als grondvlak van een piramide met E als top ('Til E uit het vlak ABCD').

Er zijn dan 4 zijvlakken: EAB, EBC, EDC, EAD. Het grondvlak levert 4 driehoeken: ABC, ACD, ABD en BDC. Tenslotte zijn er nog 2 vlakken, die de piramide verdelen in kleinere piramides: EAC en EBD.

Totaal:  $4 + 4 + 2 = 10$  driehoeken.

②

Er zijn 6 driehoeken vanuit een vast hoekpunt A te trekken: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE.



Dat kan met 5 hoekpunten geschieden. Er zijn dus  $5 \times 6 = 30$  driehoeken. Elke driehoek telt echter 3 keer mee. Zo is bijvoorbeeld ABE meegeteld bij hoekpunt A, bij hoekpunt B en bij hoekpunt E.

Het juiste aantal wordt verkregen door 30 te delen door 3. Dus: 10 driehoeken.

③

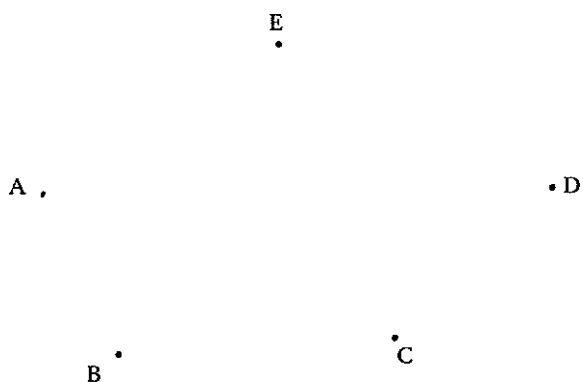
Als ik steeds 3 punten moet gebruiken uit een gegeven aantal van 5 punten, kan ik ook stellen dat bij het tekenen van driehoeken steeds 2 punten *niet* gebruikt worden.

Het aantal mogelijkheden daarvoor is 10.

(Niet gebruikt: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE. Ergo: 10 driehoeken).

④

Eerst nagaan hoeveel driehoeken er zijn, die bijvoorbeeld AB als basis hebben; dat zijn er 3. (ABE, ABD, ABC)



Er zijn nog 4 andere bases. (BC, DC, DE en AE)

Totaal krijgen we dan  $5 \times 3 = 15$  driehoeken. In dit aantal zitten enkele driehoeken die dubbel geteld zijn.

ABC telt zowel bij AB als bij BC als basis mee. Bij 5 bases is er dubbel geteld.

Het juiste aantal is dus:  $15 - 5 = 10$  driehoeken.

⑤

Er zijn 5 driehoeken, die ieder bestaan uit een basis (op de vijfhoek ABCDE) en het niet-aangrenzende hoekpunt. (ABD, BCE, CDA, DEB, EAC)

Dan zijn er driehoeken die elk samengesteld zijn uit 2 zijden van de vijfhoek ABCDE, bijvoorbeeld ABC. Zo'n driehoek echter telt zowel mee bij de basis AB als bij de basis BC. Het aantal bedraagt  $\frac{5 \times 2}{2} = 5$ .

Totaal:  $5 + 5 = 10$  driehoeken.

⑥

Bij het samenstellen van driehoeken uit 5 punten, die een konvekse vijfhoek vormen, is er altijd minstens één diagonaal nodig.

Met een bepaalde diagonaal zijn er 3 driehoeken; één van die driehoeken bevat verder nog twee zijden van de vijfhoek; de twee andere driehoeken bevatten elk nog een diagonaal.

Er zijn 5 diagonalen. Zo komen we op:  $5 \times (1 + 2) = 15$  driehoeken. De driehoeken met twee diagonalen zijn echter dubbel geteld. Dus zijn er:  $5 \times 1 + \frac{5 \times 2}{2} = 10$  driehoeken.

⑦

Als we 3 punten van de gegeven 5 punten als hoekpunten van een driehoek beschouwen — bijvoorbeeld ABC — is er precies één verbindingslijnstuk tussen twee hoekpunten, waarvan elk der eindpunten geen hoekpunt van de beschouwde driehoek is (in dit geval DE). Er zijn 10 verbindingslijnstukken (namelijk 5 zijden en 5 diagonalen), dus zijn er ook 10 driehoeken.

⑧

Er zijn 5 gegeven punten. Voor een driehoek moeten we hieruit 3 punten kiezen. Voor 't eerste punt hebben we de keus uit 5 punten, voor 't volgende punt een keus uit 4 en voor 't derde punt van de driehoek een keus uit 3 punten.

We kunnen dus uit 5 punten op  $5 \times 4 \times 3 = 60$  manieren, drie punten in volgorde kiezen.

De driehoek ABC komt hierbij op 6 manieren voor, namelijk: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB en CBA.

Dit geldt voor alle andere driehoeken ook, dus het aantal driehoeken is:  $\frac{60}{6} = 10$ .

⑨

Als we bij 5 gegeven punten 3 punten (bijvoorbeeld A, B en C) gekozen hebben, kunnen we aan deze 3 punten op twee manieren een 4<sup>e</sup> punt toevoegen (òf D òf E). Dat wil dus zeggen dat driehoek ABC zowel een driehoek is van vierhoek ABCD als van vierhoek ABCE. (we bedoelen met 'is een driehoek van de vierhoek' dat de hoekpunten van de driehoek ook hoekpunten zijn van de vierhoek). Elke driehoek, bepaald door 3 van de 5 gegeven punten, is dus driehoek van twee vierhoeken, bepaald door 4 van de 5 gegeven punten. Hoeveel vierhoeken kunnen we bij 5 gegeven punten vormen?

Wel, evenveel als we van 5 punten er 1 kunnen weglaten, dus 5.

Hoeveel driehoeken zijn driehoek van een gegeven vierhoek, bijvoorbeeld ABCD?

Dit zijn er 4, namelijk: ABC, ABD, ACD en BCD.

Zo tellen we:  $5 \times 4 = 20$  driehoeken.

Elk paar vierhoeken heeft één gemeenschappelijke driehoek. We hebben dus dubbel geteld.

Het aantal driehoeken is:  $\frac{20}{2} = 10$ .

⑩

Het aantal driehoeken bij 5 gegeven punten is het aantal combinaties van 3 punten (dus niet lettend op volgorde) die we bij 5 punten kunnen vormen.

Dit aantal is:  $\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ .

⑪

Een driehoek is al bepaald door 2 lijnstukken die in één punt samenkomen (lijnstukken zijn de zijden en diagonalen van de gegeven vijfhoek). In 1 punt van de vijfhoek komen 4 lijnen samen.

Daaruit kiezen we er 2.

Op hoeveel manieren kan dat?

Voor het eerste lijnstuk hebben we een keus uit 4 mogelijkheden; voor de tweede een keus

uit 3. Dat geeft  $4 \times 3$  mogelijkheden. Nu hebben we de combinaties dubbel geteld;  $AB - AD$  is dezelfde als  $AD - AB$ .

Dus hebben we bij één punt  $\frac{4 \times 3}{2} = 6$  combinaties van 2 lijnen, dus ook  $\frac{6}{2}$  driehoeken met dat punt als hoekpunt.

Totaal tellen we zo:  $5 \times 6 = 30$  driehoeken. We hebben een driehoek op deze manier bij elk hoekpunt één keer geteld.

Er zijn dus:  $\frac{30}{3} = 10$  driehoeken.

(12)

In een vijfhoek zijn 6 driehoeken die een bepaald punt tot hoekpunt hebben. In een vierhoek zijn 3 driehoeken die een bepaald punt tot hoekpunt hebben.

Gegeven de punten: A, B, C, D en E.

Haal punt E weg. Alle driehoeken met E als hoekpunt zijn nu ook weg. Dat zijn er 6. Haal ook nog punt D weg. Alle driehoeken bij de punten A, B, C en D die D als hoekpunt hebben verdwijnen nu ook. Dat zijn er 3.

We hebben nu overgehouden de punten A, B en C. En dat is 1 driehoek.

We hadden in 't begin, bij de 5 punten A, B, C, D en E, dus  $1 + 3 + 6 = 10$  driehoeken.

(13)

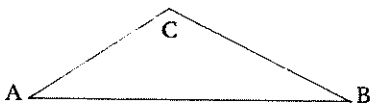
Gegeven: 5 punten.

De vraag hoeveel driehoeken er gevormd kunnen worden betekent: op hoeveel manieren kan ik 3 punten kiezen uit 5? (zonder te letten op volgorde.) Dit is gelijk aan het aantal manieren waarop ik uit 5 punten er 2 kan weglaten.

Dus  $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$  driehoeken.

(14)

Begin met 1 driehoek ABC.

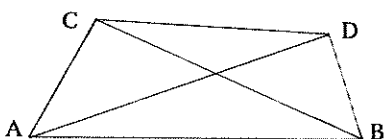


Kies er nog een vierde punt D bij.

Hoeveel driehoeken komen er nu bij?

Dat zijn alle driehoeken met D als top en een lijnstuk van  $\Delta ABC$  als basis. Dus komen er 3 driehoeken bij.

We hebben nu  $1 + 3 = 4$  driehoeken.



Kies er een vijfde punt E bij. Het aantal driehoeken dat er bij komt, is gelijk aan het aantal lijnstukken in een vierhoek (zijden en diagonalen). Elk van deze lijnstukken kunnen we

als basis gebruiken en daarbij E als top nemen. ABCD heeft 6 verbindingslijnstukken.

Er zijn dus  $1 + 3 + 6 = 10$  driehoeken.

(15)

Noem de punten 1, 2, 3, 4, 5.

Omdat driehoek 1,2,3 dezelfde is als 1,3,2 of 3,2,1 is de vraag:

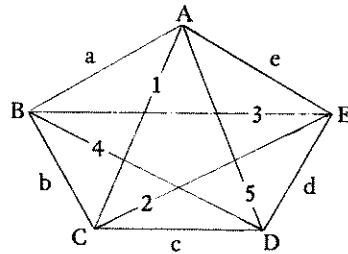
hoeveel getallen van drie van de cijfers 1, 2, 3, 4 en 5 bestaan er, waarbij voor elk tweetal cijfers van het getal geldt dat het grootste cijfer rechts van het kleinste staat?

Die getallen laten zich gemakkelijk opschrijven:

1 2 3  
1 2 4  
1 2 5  
1 3 4  
1 3 5  
1 4 5  
2 3 4  
2 3 5  
2 4 5  
3 4 5

Er zijn dus 10 driehoeken.

(16)



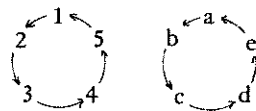
We nemen de punten A, B, C, D en E zó, dat vijfhoek ABCDE konvex is.

De vijf zijden vormen een gesloten gebroken lijn (a, b, c, d, e).

De vijf diagonalen vormen ook een gesloten gebroken lijn (1, 2, 3, 4, 5).

Een driehoek bevat twee opeenvolgende zijden en een diagonaal, of twee opeenvolgende diagonalen en een zijde.

Een driehoek met twee zijden benoemen we door de eerste zijde te noemen; een driehoek met twee diagonalen benoemen we door de eerste diagonaal te noemen. Bij het bepalen van de eerste hanteren we de cyclische volgorde:



Driehoek ACD (c, 5, 1) noemen we dus 5 en de driehoek BCD (b, c, 4) noemen we b.

We vinden aldus de driehoeken 1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d en e.

Dus: 10 driehoeken.\*)

\*) Oplossing 16 is afkomstig van één der docenten.

## 2.3 ordenend tellen

### ERVARINGEN IN LUNTEREN EN OSS

*In de voorgaande respons blokken beloofden we om zoveel mogelijk de ervaringen die opgedaan zijn met de problemen op het gebied van het 'ordenend tellen' weer te geven.<sup>1)</sup>*

*Gezien de nieuwe elementen in de rapportage uit de Beatrixschool te lunteren en de School '40-'45 te oss, is de redactie van mening dat integrale opname der verslagen verantwoord is.*

<sup>1)</sup> Zie: Wiskobas-Bulletin jaargang 2, no. 6  
Wiskobas-Bulletin jaargang 3, no. 1.

### LUNTEREN

In de **eerste klas** werden twee lessen besteed aan de problemen van de torens en van de bloesjes en rokjes.

Bij de torens (elk kind had de 5 blokjes voor zich) kwamen zeer weinig kinderen tot een systematische aanpak. Door de onderwijzer werd in 't geheel niet gestuurd of iets gesugereerd.

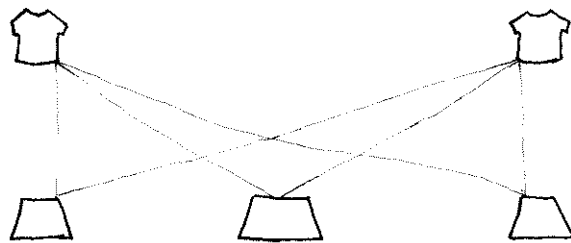
Een dag later werd het probleem van de rokjes en bloesjes aangepakt. Alle kinderen kregen (na het inleidende verhaal) een stencil met poppetjes (omkaderd, in verband met het uitknippen) en 2 bloesjes en 3 rokken. De bloesjes en rokken werden gekleurd, waarna het probleem gesteld werd.

Ook nu kwamen slechts weinig kinderen spontaan tot een systematische aanpak. Nadat de kinderen hun werkwijze hadden geformuleerd, liet de onderwijzer de rokken en bloesjes op een stuk papier plakken (boven- en onderaan) en 'vertaalde' de aanpak van de kinderen die systematisch gewerkt hadden in het trekken van lijnen. Enkele lijnen werden gezamenlijk getrokken, waarna de klas 'losgelaten' werd.

Nu waren er heel wat meer kinderen die ontdekten hoe het zat. Nieuwe verwoording bracht ook bij de kinderen die het tot nu toe niet gezien hadden een soort Aha-Erlebnis te weeg.

Niet is gebleken of de kinderen de isomorfie van de beide problemen gezien hebben.

De *onderwijzeres konkludeert*: ik heb er veel werk aan gehad en het resultaat (aantal 'geslaagde' kinderen) is zeer gering.



Ook in **klas 3** werd geen isomorfie ontdekt tussen de achtereenvolgens aangeboden problemen. Aan de orde werden gesteld:

- de rokken en bloesjes (verliep erg moeizaam);
- de wegen die Roodkapje kon lopen



dit werd aanmerkelijk beter aangepakt; ongeveer de helft van de kinderen ging direct systematisch te werk (met kleurpotlood systematisch de mogelijkheden langs);

— de kubuskruiper; het 'demonstratieve nivo' moest hier verlaten worden, waardoor bijna alle kinderen vastliepen.

In de **vijfde klas** kwamen alle problemen aan bod.

Bij het wegeprobleem ontstonden moeilijkheden rond het begrip 'roete'. Toen de interpretatie duidelijk was, zeiden de meeste kinderen direkt:  $2 \times 3 = 6$ . Hun uitleg leerde dat ze in feite het boomdiagram hanteerden.

Het bruggenprobleem leverde geen moeilijkheden op. Bijna alle kinderen zeiden spontaan: 'dat is hetzelfde'.

Het toto-probleem bleef onduidelijk. Enkele kinderen gingen wel systematisch noteren en kwamen tot 27, maar ook bij hen werd het probleem niet volledig helder.

Het tellen van de appels aan de boom ging daarentegen gemakkelijk. De helft van de klas zei meteen: 27. (ter controle gingen ze overigens toch nog tekenen)

Bij de cijferkaartjes was wel een systematische aanpak te constateren. Toch kwam slechts een kwart van de kinderen er uit en was er ook zeker van de juiste oplossing te hebben gevonden. Eén meisje zei direkt: '1 x 2 x 3 x 4 = 24 manieren'. (onduidelijk bleef waarom ze niet '4 x 3 x 2 x 1' zei!)

De ervaringen in klas 5/6 waren ongeveer identiek.

**In het algemeen** kan gesteld worden dat de kinderen het werk leuk vonden. Ze waren ook gemotiveerd om 'er uit' te komen. Voor de leerkrachten was het moeilijker:

- je kunt het niet zo maar integreren in je rekenlessen;
- je hebt geen duidelijk beeld van het doel van deze activiteiten en wat de relatie is met de algemene doelstellingen van het rekenonderwijs.

\* \* \*

#### OSS

De gesprekken in de **eerste klas**, betreffende het bouwen van torens en het combineren van kledingstukken, heb ik gehouden met twee middelmatige leerlingen, een jongen en een meisje. Het was mijn bedoeling om de problemen eerst met een klein groepje door te nemen — zowel om er zelf inzicht in te krijgen als ook om de reacties van de kinderen te leren kennen — en vervolgens in klassikaal verband. De kleine groep had echter al zoveel extra aanwijzingen nodig dat het me beter leek om de problemen niet aan de hele klas voor te leggen.

#### *Torens bouwen en afbreken (1)*

De twee leerlingen hadden samen vijf blokjes

van vijf verschillende kleuren. Op de tafel lag — duidelijk zichtbaar — potlood en papier.

De opdracht leverde al direkt moeilijkheden op:

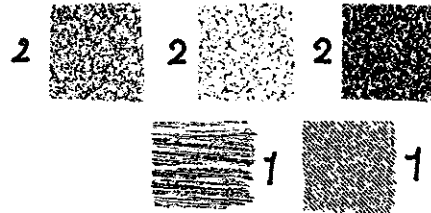
- de leerlingen verwisselden de voorgeschreven kleuren voor de eerste verdieping met die voor de tweede verdieping;
- de leerlingen hielden zich niet aan het aantal; zo stapelden ze bijvoorbeeld het gele en groene blokje op elkaar, waarop dan een van de kleuren voor de tweede verdieping werd geplaatst.

Laatstgenoemde moeilijkheid wijt ik aan een niet volledig beheersen van het woord 'verdieping'.

De leerlingen kwamen in een stadium dat ze reeds gemaakte combinaties opnieuw samenstelden. Na vergelijking werden ze weer afgebroken.

Door te vragen naar nog een combinatie werden ze in de war gebracht; ze dachten dat alle torens verkeerd waren. De jongen vroeg nu of hij de kleuren mocht tekenen.

Hij deed dit als volgt:



#### *Torens bouwen en niet afbreken (2)*

Elke leerling had vijf groepen blokjes van vijf verschillende kleuren. Ze bouwden onafhankelijk van elkaar. In beide groepen torens zaten duplikaten, die ze ook bij elkaar ontdekten.

Vervolgens werden de torens bij elkaar geschoven en weer werden de duplikaten er uitgehaald, maar ook de torens die kwa kleur niet goed gebouwd waren.

De leerlingen kwamen niet tot een 'ordering'. Zelfs na aandringen om te zoeken naar een nieuwe combinatie, bleven ze vergelijkenderwijs bouwen en kwamen tot de konklusie: 'er zijn er geen meer'.

Het vergelijkend bouwen werd dus niet gevolgd door een totale ordering.

#### *Aankleden (3)*

De leerlingen vonden de combinaties vlotter dan bij de eerste opdracht. De moeilijkheden betreffende de vraagstelling vielen nu weg, omdat de kledingstukken gebonden waren aan hun plaats. De leerlingen trokken geen vergelijking met de blokken en gingen niet uit van het schema. Ze hadden daar geen behoefte

aan, omdat ze de combinaties konden onthouden.

Het lijkt me dan ook logischer om dit probleem het eerst aan te bieden. Er ontstaat dan een opklimming in moeilijkheid. Het schema dat de kinderen maakten was niet aan een opzet gebonden.

Het *muizenprobleem* staat los van de andere problemen, omdat ik dit aan de hele klas heb voorgelegd, in de vorm van een verhaal. Het spel werd entoesiast gespeeld. Heen en weer werden adviezen gegeven. De leerlingen korrigerden en stimuleerden elkaar.

Ik kan me voorstellen dat een opgave als het muizenprobleem gemakkelijk te hanteren is; zowel klassikaal als groepsgewijs. Je kunt de opdracht duidelijk stellen en er een groep mee aan het werk zetten.

De eerste twee problemen zijn veelomvattend en vereisen de nodige uitleg en hulp. Het lijkt me niet uitvoerbaar in klassikaal verband. De vorm waarin het derde probleem gegoten is, spreekt mij het meeste aan.

Zelf ben ik er van overtuigd dat dit soort problemen een plaats moet innemen in het rekenonderwijs.

De vraagstukjes voor de **derde klas** heb ik doorgenomen met een zeer goede leerling (A), een zwakke leerling (B) en twee middelmatige leerlingen (C, D). De vier kinderen hebben in twee groepjes gewerkt: A en B; C en D.

#### *Over wegen (1)*

De vraagstelling bij de tweede opdracht bleek weinig moeilijkheden te geven. C en D vonden direkt de goede oplossing; ze tekenden er wel bij, trokken de wegen, etc. A stelde mij eerst een aantal vragen, die er reeds op wezen dat hij direkt in de goede richting zocht. B vond twaalf wegen (de 'terugwegen' erbij). Ook zij tekende de wegen na. 'Zes en ook nog terug, dat zijn er twaalf'.

#### *Heen en terug (2)*

Zowel A als B vonden maar drie wegen. Na er samen over te hebben gepraat, waren ze nog niets verder. Ik hielp ze door één heenweg en de terugwegen aan te wijzen. A begreep het en kwam tot de oplossing. Hij legde B de oplossing uit. B begreep het niet, waarop A de hele situatie al tekenend nóg eens uitlegde. B begreep het nu.

C en D hadden er meer moeite mee. C zag snel dat er drie mogelijkheden waren. 'De eerste heenweg en dan kan ze over drie wegen terug.' D was het daar zonder kommentaar mee eens. Deze opgave was voor haar moeilijker dan de voorafgaande; ze nam nauwelijks de moeite

zich in te spannen. Ook bij hen gaf ik dezelfde uitleg, maar ze begrepen het niet. Met veel hulp kwamen ze moeizaam tot de oplossing.

#### *Uitbreiding (3)*

Deze opgave gaf weinig moeilijkheden. Alle vier kwamen ze direkt tot de goede oplossing. Het was wel opvallend dat A en B bij hun uitleg bleven tekenen, terwijl juist C en D de oplossing verklaarden met ' $3 \times 4 = 12$ '.

#### *Kaartjes (4)*

A doorzag de moeilijkheid meteen.

B probeerde de kaartjes in het wilde weg te rangschikken, waarbij ze problemen kreeg; ze vergat welke manier ze wel en niet had gehad. C kon er slechts drie vinden, maar met wat hulp werd de oplossing (door middel van uitproberen) gevonden.

D vond er vijf. Na uitproberen kwam zij toch ook tot de goede oplossing.

#### *Kubuskruiper (5)*

Dit probleem was voor alle leerlingen te moeilijk. Met geen mogelijkheid kwamen ze er uit.

### **Klas 5**

Het regelmatig opgeven van problemen betreffende het 'ordenend tellen' bevordert ongetwijfeld het kritisch denken van de kinderen. Het komt immers vooral aan op inzicht. Dit is een pluspunt in vergelijking met de klassieke rekenmethoden, waar het mechanische rekenen en het foefjes-kennen een zwaarder aksent krijgen.

De moeilijkheidsgraad was niet te hoog gesteld. Het merendeel van de kinderen kon de vraagstukjes aan.

Het wegenprobleem en het bruggenprobleem werd door 30 van de 31 kinderen moeiteloos opgelost. De ene leerling die er niet uit kwam was uiteraard een zwakke rekenaar. (geen inzicht, denkluïheid)

Het toto-vraagstuk ging minder vlot. Vooral het logisch en handig oplossen werd door vele leerlingen niet gezien. De nodige duwtjes in de rug waren nodig. Na bespreking van de verschillende oplossingsmethoden, konden vrij veel leerlingen de opgaven 4 en 5 toch al naar analogie op de snelle manier vinden. Een deel ging ook toen echter nog alle kombinatiemogelijkheden noteren.

Ik dacht dat het aanbeveling verdiende deze probleempjes meer in de rekenmethoden op te nemen om de eerdergenoemde reden.

Bij het klassikale stelsel en in grote klassen is rekenen-op-deze-manier wel moeilijk realiseerbaar.

## 2.4 ordenend tellen

### VOORLOPIGE SAMENVATTING

We willen de ervaringen die tot nu toe in de verschillende scholen (soest, hoevelaken, arnhem 1 en 2, amersfoort, oss, lunteren) met de problemen op het gebied van het ordenend tellen zijn opgedaan, kort samenvatten.

Van de problemen voor het *eerste leerjaar* wordt de opdracht 'torens bouwen en afbreken' als het moeilijkst ervaren. Slechts sporadisch wordt een systematische werkwijze gesignaleerd. De er op volgende opdracht 'torens bouwen en niet afbreken' nodigt meer uit tot een systematische aanpak. Sommige leerkrachten stimuleren dit door bijvoorbeeld alle gemaakte torens bijeen te laten voegen, zodat de leerlingen duplicaten en lakunes ontdekken. Tevens is een enkele keer gevraagd om de gemaakte torens te sorteren (op onder- en bovenkleuren). De opdrachten met de poppetjes (aankleden; lijnen trekken) zijn makkelijker. De meeste leerlingen komen – systematisch – tot goede oplossingen. Het verband met de voorgaande problemen wordt nauwelijks herkend. Slechts één keer worden de blokjes gebruikt bij de oplossing van de opdracht 'aankleden'. Het muizenprobleem is veelal klassikaal aan de orde gesteld. Veel goede oplossingen.

In de beschrijvingen van het leerlinggedrag aan de problemen voor het *derde leerjaar* worden in het algemeen meerdere nivo's gesignaleerd. Naast een systematische werkwijze wordt bij elke opdracht ook een meer 'proberende benadering' vastgesteld. Het meest duidelijk manifesteert zich dit in de aanpak van de problemen 2, 3 en 4 (heen en terug; uitbreiding; kaartjes). De kubuskruiper is voor vrijwel alle leerlingen te moeilijk.

Eerst in het *vijfde leerjaar* worden door leerlingen opmerkingen gemaakt, waaruit afgeleid kan worden dat er sprake is van een ontdekte isomorfie ('dat is hetzelfde probleem als...'). Het bruggenprobleem wordt als gemakkelijk ervaren, in tegenstelling tot de toto. Het probleem met de cijferkaartjes blijkt – afhankelijk van de presentatiewijze – oplosbaar (vergelijk de aanpak in soest en hoevelaken).

#### *Slotopmerkingen*

\* De isomorfie tussen de problemen wordt vrijwel niet herkend. Soms heeft de leerkracht de situatie zodanig georganiseerd dat de leerlingen de relaties tussen de achterenvolgende problemen haast niet kunnen 'missen'. In andere gevallen geeft de formulering van de vraagstelling al een duidelijke hint.

- \* De ervaringen in de verschillende scholen lopen nogal uiteen. Waar leerlingen van de ene school met een bepaald probleem geen enkele moeite hebben, komen leerlingen van een andere school er met geen mogelijkheid uit. Het is moeilijk te achterhalen waar dit aan ligt. Wellicht spelen verschillen in presentatiewijze een rol.
- \* Met betrekking tot de moeilijkheidsgraad der problemen zijn toch wel wat algemene tendenzen te signaleren. Een opgavenkontekst 'waarbij de leerlingen zich iets kunnen voorstellen' (soest) werkt stimulerend.
- \* Alle leerkrachten zijn van mening dat het zinvol is om dit soort problemen in het onderwijs op te nemen.  
Hoofdbezwaren:
  - het is moeilijk uitvoerbaar in klassikaal verband;
  - onduidelijk is hoe het geïntegreerd moet worden in het vigerende rekenprogramma.
- \* Bij de verdere uitwerking kunnen de ontwerpers profiteren van de grote hoeveelheid binnengekomen informatie.

## 2.5 meten voor 4-6 jarigen

EEN SERIE AKTIVITEITEN OVER  
'LENGTE' VOOR DE KLEUTERSCHOOL

*Van de dames N. Kors, A. v.d. Oest en R. Reitsma<sup>1</sup>) — allen werkzaam bij het kleuteronderwijs — ontvingen wij een opzet voor 'meten op de kleuterschool'. We willen de lezers graag laten kennismaken met een serie activiteiten die we uit deze opbouw hebben gelicht. Zowel de samenstellers van deze serie als de redactie van het bulletin zijn bijzonder benieuwd naar ervaringen die andere collega's bij het kleuteronderwijs hebben opgedaan.*

N. KORS  
A. VAN DE OEST  
R. REITSMA

- \* Opdracht aan een kleuter om bijvoorbeeld iets uit de kast te halen. Kleuter kan er niet bij. Wie wel? Dat gaan we uitproberen.  
Gesprek: hoe komt het dat het ene kind er wel bij kan en het andere niet? Niet iedereen is even lang, nu gaan we vergelijken en tevens ordenen. Een spiegel in de klas kan helpen om verschillen zichtbaar te maken. We kunnen een meter maken waarop we de lengten van alle kleuters aangeven.
- \* We meten de handen. Je kunt proberen met duim en pink een bepaald voorwerp te omvatten. Handen met die van je buurvrouw/man vergelijken. Handen omtrekken op papier. Als juf meedoet blijken hier wel duidelijk grote verschillen. Hoe komt dat?
- \* Welke maat schoen heb je? (ca. 28-32) We gaan meten door omtrekken. Ook voet zonder schoen omtrekken. Wat blijkt nu en hoe komt dat? Bestaat er ook verband tussen groot kind – grote voet? (meter) 'Voetafdrukken' uitknippen en dan sorteren naar grootte. Lengte van de voet kunnen we ook met bijvoorbeeld blokken samenstellen.
- \* We meten met de armen de lengte van bijvoorbeeld drie tafeltjes. Wie kan dat en wie haalt het nog niet? Ook met de voeten meten. Zoveel passen in het lokaal, hoeveel heb je in de gang nodig? Is dat (veel) meer, minder of evenveel? (grote en kleine passen)
- \* We geven een voorwerp en vragen: zoek iets in de klas dat even lang is, langer, korter! Dit kunnen we met alle mogelijke materialen doen. Uitbreiden: klein, beetje korter, veel langer, enz.
- \* We maken met (fröbel)blokken een straat. Een korte straat, een lange straat, twee die even lang zijn. Maak de ene langer en de andere korter. Nu andersom. Maak de ene straat twee blokken langer. Afhankelijk van de mogelijkheden van de kinderen kunnen we dit laatste uitbreiden.
- \* We gebruiken de blokkenkast van prof. Bladergroen. De blokken gaan, wat lengte-afmeting betreft, van één tot tien. Maak een trapje, alle sprongetjes moeten even hoog zijn. Eventueel kan de opdracht later luiden: twee, vier, zes, enz.  
Werkend met een groepje van bijvoorbeeld vier kleuters kunnen we een aantal blokken

ongezien verwijderen en daarna laten inpas-  
sen.

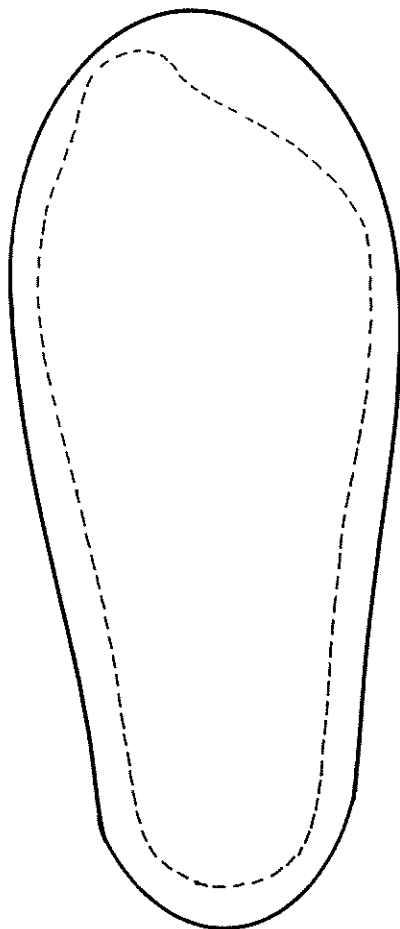
Rekenend dat intussen de vormen 'vierkant' en 'rechthoek' voldoende zijn aangeboden en besproken, kunnen we gaan vergelijken. Waarom is dit een vierkant en dat een rechthoek? Door te vergelijken meten we. Soms is het nodig hiervoor een 'maat' te gebruiken. Bijvoorbeeld: kleuters maakten een verzameling van dingen die vierkant zijn; één legde een bijna vierkant boekje neer; om nu aan te tonen waar het om ging werd een lintje gebruikt waar we de lengte en breedte mee konden 'meten'.

Dit kunnen we met de hele groep doen.

In de kleuterschool zijn voldoende materialen aanwezig waarmee we kunnen laten vergelijken, ordenen en samenstellen.

Intussen houden we ook de 'meter' in het oog en meten na verloop van tijd de kinderen nogmaals. Zijn er nu verschillen en hoe komt dat?

Tenslotte willen we er nogmaals op wijzen dat al deze activiteiten spelend met de kleuters gedaan worden.



*schoenomtrek en voetomtrek van jolanda (verkleind)*

<sup>1)</sup> Deelnemers aan de heroriënteringskursus te 's-gravenhage; docenten: Fred Klingeman (wiskundige) en Jan Postema (pedagoog).

## 2.6 één-éénduidigheid bij muziek- notatie

CHRIS BOEKKOOI

In het artikel van prof. F. van der Blij in dit bulletin<sup>1)</sup> is duidelijk gebleken, dat 'reine' muziek maken voor ons stervelingen een vrijwel onmogelijke zaak is.

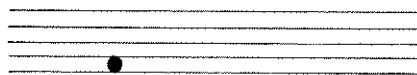
Ten tijde van Bach heeft men dan ook de knoop doorgehakt met het ons zo bekende 'Wohltemperiertes Klavier'.

Begenadigde musici, zoals de enkelen, die kans zien het Huygensorgel (van Fokker in het Teyler Museum te haarlem) te bespelen, vinden het een verarming.

Anderen beschouwen het als een realistische noodzakelijkheid, dat bijvoorbeeld de *fis* en de *ges*, zij het in wezen verschillend, door één en dezelfde toets op klavierinstrumenten worden vertegenwoordigd.

Hoeveel vioolspelers zouden het verschil kunnen laten horen?

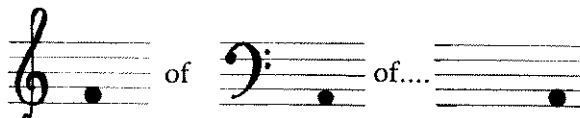
En de *notatie*, is die nu ook dezelfde?



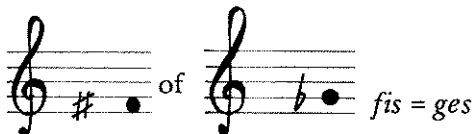
Wat stelt dit voor?

De *f*?

Dat hangt af van de voortekening:



and what about.....?



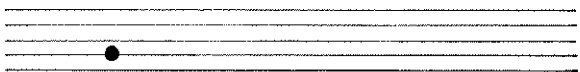
Toch geldt, wat trillingsgetallen betreft:

$$\left. \begin{array}{l} c - es - g = 6 : 7 : 9 \\ c - dis - g = 6 : 7 : 9 \end{array} \right\} \Rightarrow es = dis?$$

Wéér anders wordt het met dubbelkruis, dubbelmol of eventuele herstellingstekens.

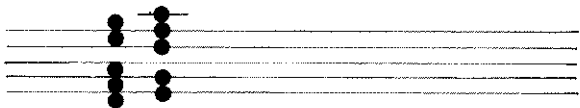
*Was er nu maar één – éénduidigheid!*

Hoeveel tonen kan deze stip voorstellen, als u zelf allerlei voortekeningen (inklusief sleutels) mag bepalen?



(*f, g, a, b, c* met *fis, gis, ais, cis*)

En omgekeerd: waar ligt de *g* op de balk, als u zelf alle mogelijke voortekeningen mag bedenken?



Ik heb me als leek op glad ijs begeven!

Wat zullen de deskundigen wel zeggen?

<sup>1)</sup> Jaargang 2, no. 4/5, pag. 831 e.v.

## 2.7 ouderwerk- avonden in bennekom

*Van de heer E.G.J.M. van der Ven – hoofd van de St. Alexanderschool te bennekom – ontvingen we een uitvoerig verslag van één der reken- werkavonden die ten behoeve van de ouders gehouden worden.*

*We willen de lezer graag laten kennismaken met dat gedeelte van het verslag waarin de nadruk ligt op de achtergrond en werkwijze van deze avonden.*

E.G.J.M. VAN DER VEN

Op maandag 12 november werd op de St. Alexanderschool te bennekom een reken-werkavond gehouden voor de ouders van de kinderen uit de leerjaren 1, 2, 3 en 4.

De opzet van deze avonden is geheel anders dan die van de vorige jaren.

Was het in het verleden zo, dat per klas per jaar één werkavond werd gehouden, nu komen er 4 werkavonden per jaar, elk over één van de volgende onderwerpen:

- \* machientjes (de avond hierover werd gehouden op 11 september 1973);
- \* getallen en hun voorstelling;
- \* onderzoek van de ruimte;
- \* verzamelingen en plaatjes.

Deze reken-werkavonden hebben tot doel de ouders op de hoogte te stellen van de gang van zaken bij het wiskundig rekenen, en hen enig inzicht te verschaffen in de aard van de stof. Elk van deze avonden is bestemd voor alle ouders van de leerlingen die volgens deze moderne methode onderwijs krijgen (dit jaar de klassen 1 tot en met 4, volgend jaar de klassen 1 tot en met 5, enz.).

De voordelen van de huidige werkwijze zijn onder andere:

- van ieder onderdeel wordt een globaal overzicht gegeven van de in de (vier) klassen behandelde stof; de ouder die bijvoorbeeld een kind in klas 3 heeft, krijgt zodoende nog eens een herhaling van klas 1 en 2, alsmede een uitbreiding voor klas 3 en 4;
- er komt een voor de ouders duidelijker structuur in de methode;
- ook ouders van kinderen uit de lagere klassen krijgen een inzicht in de methode als geheel, en dus een blik op de toekomst van hun kinderen;
- voor onszelf (teamleden) is het een zinvolle rekapitulatie van de stof en een evaluatie van de gevolgde werkwijze.

Dit laatste is zeker niet het minst belangrijk. Door deze opzet zijn ook wij gedwongen de structuur van de methode 'Denken en Rekenen' door te lichten, en ons te bezinnen op de wijze van 'kennisoverdracht' die voor de methode het meest geschikt is.

De opzet van de rekenavonden is als volgt:

- inleiding met globaal overzicht van hetgeen we zullen gaan doen;
- werken in groepen in verschillende lokalen, waarbij de ouders zelf met materiaal bezig zijn en ook schriftelijke opdrachten uitvoeren: hiertoe stellen wij werkboekjes samen

waarbij we zeer in het kort een zo goed mogelijk overzicht van de stof van de betreffende leerjaren proberen te geven. Voor deze werkavonden zijn tevens uitgeno-

digd: teams van scholen uit de omgeving die met dezelfde methode werken, en de wiskunde-  
sekties van twee middelbare scholen waarvan de St. Alexanderschool 'toeleveringsschool' is.

