wiskobas bulletin

Jaargang 2, nr. 4/5
Mei 1973

Wiskobas-Bulletin, Jaargang 2, nr. 4/5

wiskobas bulletin

– Bulletin ter begeleiding van het eksperiment 'Wiskunde op de Basisschool'
– Verschijnt gedurende de tweede jaargang 6 keer

JAARGANG 2, Nr. 4/5 – MEI 1973

REDAKTIEADRES:
INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS
Tiberdreef 4, Utrecht.
t.a.v. R.A. de Jong.

ABONNEMENTSPRIJS:
f 25,– per jaargang.
Aanmelden aan redaktieadres.
Verzamelabonnementen voor studenten Pedagogische Akademies en kursisten Heroriëntering f 15,– per jaargang (aanmelden via docent).

INHOUD

EEN UITGAVE VAN HET INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS

CW.D

INHOUD

redaktioneel

U kent ze ongetwijfeld, de mensen die altijd maar over zichzelf praten en hooguit op momenten dat ze merken dat het de toehoorders gaat vervelen, het gesprek een wending geven met de vraag 'en wat vinden júllie nou van mij?'
Irritant! Hoe boeiend iemand ook is en over zichzelf kan vertellen, je wilt ook wel eens wat anders (bijvoorbeeld: jezelf) aan de orde gesteld hebben.

In het algemeen is de mens erg geïnteresseerd in 'beelden' die anderen van hem hebben. En onder een beeld verstaan we in dit verband een 'kompleks van voorstellingen'.
Op een nogal ingewikkelde manier kun je onderscheiden:
- het beeld dat je van jezelf hebt (ik ben erg gevoelig),
- het beeld waarvan je denkt dat de ander van je heeft (een keiharde kerel),
- het beeld dat je van de ander hebt (hij is dom),
- het beeld dat je hebt van het zelfbeeld van de ander (hij denkt dat hij intelligent is).

Niet alleen individuen hebben dergelijke 'beelden', maar ook bedrijven, scholen, vakken. Denkt u eens aan beelden die een verkoper omtrent een artikel bij de konsument wil oproepen.
En aan bedrijven die een artikel met verschillende beelden op de markt brengen:
in verpakking 'jong en bruisend' en in verpakking 'degelijk-ouderwets'.
Je staat er soms wat argwanend tegenover, tenminste als je door hebt hoe je met die beelden gemanipuleerd wordt. Duidelijk is dat beeldonderzoek van groot ekonomisch belang is. Hoe kom ik (mijn bedrijf, mijn produkt) over en hoe kan ik er voor zorgen dat ik zodanig 'overkom' – eigenlijk een snertwoord, een vloek uit het vormingswerk – dat ik m'n spullen beter kan slijten?

Gelukkig behoeven wij niet met onze spullen te leuren. Ekonomische motieven spelen geen rol. Toch is het ook voor ons van belang om te weten hoe we overkomen. Tijdens een bijeenkomst van kursusdocenten legden we de vraag voor:
Welk beeld heeft Wiskobas bij de meerderheid van uw studenten en kursisten?
We gaven 40 beelden als 'fris', 'origineel', 'autoritair', 'saai', enz., waaruit gekozen kon worden.
De gegevens die hieruit naar voren kwamen willen we u niet onthouden, temeer daar het gaat om de 'beelden' die docenten hebben omtrent de 'beelden' van hun studenten en kursisten.
Zowel voor studenten als kursisten werd 'vernieuwing' het meest aangekruist.
Is deze perceptie van de docenten wel juist? Wel, enkele kollega's hebben de 'reeks van 40' voorgelegd aan hun kursisten. De resultaten vindt u in onderstaande tabel

vernieuwing	54 x
boeiend	28 x
ingewikkeld	28 x
origineel	27 x
aktie	25 x
fris	23 x
up-to-date	19 x
teoretisch	17 x
demokratisch	16 x
wetenschappelijk	15 x
kritisch	13 x
jong	10 x
open	10 x
risiko	10 x

Natuurlijk kun je hier niet zo veel van zeggen. De cijfers hebben betrekking op een te gering aantal kursisten en zijn te zeer docent-afhankelijk.
De vraag of we deze beelden moeten *bewaken* of tot een *beeldenstorm anno 1973* dienen over te gaan, mag niet relevant zijn. Moge manipulaties met beelden ons vreemd blijven!

Rob de Jong

H. FREUDENTHAL

EERLIJK SPEL

Met een 'eerlijke' munt iets onder twee personen verloten is eerlijk spel. Maar hoe zou je het onder drie personen met een munt moeten doen als je iets te verloten had? Bij voorbeeld: eerst tussen A en B loten met A voor kruis en B voor munt en dan de winnaar met kruis laten loten tegen munt voor C?
Er zijn vier mogelijkheden:

kruis-kruis
kruis-munt
munt-kruis
munt-munt.

In het tweede geval wint C tegen A, in het vierde tegen B; in 't eerste wint A, in 't derde B. Dus C heeft net zo veel kansen als A en B samen en dat is niet eerlijk.
Er zijn heel wat manieren om het anders te doen en hier volgt er één:

Er wordt met een eerlijke munt zolang gegooid tot voor het eerst *twee keer achter elkaar hetzelfde* valt, dus munt-munt of kruis-kruis. Het aantal worpen dat je hiervoor nodig hebt, kan variëren — dit hangt geheel van 't toeval af. Laten we dit aantal n noemen. Het *reglement voor loting* is nu als volgt:
Bij n even en kruis-kruis in de laatste twee worpen, wint A.
Bij n even en munt-munt in de laatste twee worpen, wint C.
Bij n oneven wint in elk geval B.

Is dit spel eerlijk, d.w.z. hebben A, B en C dezelfde kansen?
Als u zelf het antwoord wilt vinden, is dit het punt om het Bulletin dicht te doen en na te denken.

* * *

Inmiddels begin ik met een ander verhaal. U weet, dat onze getallennotatie tientallig is, maar u hebt zeker ook wel eens van andere talstelsels gehoord. Het belangrijkste — in komputers veelvuldig toegepast — is het tweetallige. Men doet het daar alleen met de cijfers 0 en 1 en op de plaats van de eenheden is zo'n 1 dan ook echt één waard. In het tientallig stelsel is een 1 op de volgende plaatsen naar links tien, honderd, duizend, . . . waard, telkens een faktor tien meer. In het tweetallig stelsel zijn de opeenvolgende waarden van zo'n 1 nu twee, vier, acht, . . . telkens een faktor twee meer. Dus:

tientallig	tweetallig
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
.	.
.	.
.	.

Natuurlijk kun je tweetallig ook achter de komma rekenen, de eerste plaats achter de komma telt $\frac{1}{2}$, de tweede $\frac{1}{4}$, de derde $\frac{1}{8}$, enz.

Dus bijvoorbeeld:
11,0110101
is op de gewone manier geschreven

$$2 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128}$$
$$= 3\,\frac{53}{128}.$$

Op die manier krijgen we uiteraard alleen maar breuken met in de noemer een macht van 2. Voor de andere moeten we oneindige slierten van nullen en enen achter de komma toelaten, maar gelukkig kunnen we dan met repeterende volstaan. Bijvoorbeeld:

$\frac{1}{3} = 0{,}010101....$ dat wil zeggen:

repetendum 01

want stel

$0{,}010101.... = x,$

vermenigvuldig dit met 4

$1{,}010101.... = 4x,$

trek af

$4x - x = 1,$

wordt

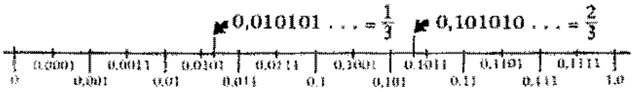
$x = \frac{1}{3}.$

Door van deze ontwikkeling voor $\frac{1}{3}$ het dubbele te nemen, krijgt men ook nog

$\frac{2}{3} = 0{,}101010...$ (10 repetent).

* * *

Ziehier een liniaal, niet tientallig zoals gewoonlijk, maar tweetallig onderverdeeld, maar verbeeld u zich deze verdeling dan ook



onbegrensd voortgezet. Het punt $\frac{1}{3}$ wordt steeds nauwer ingesloten:

$$0{,}01 < \frac{1}{3} < 0{,}011$$

$$0{,}0101 < \frac{1}{3} < 0{,}01011$$

$$0{,}010101 < \frac{1}{3} < 0{,}0101011$$

$$\vdots$$

En net zo vergaat het de $\frac{2}{3}$:

$$0{,}10 < \frac{2}{3} < 0{,}11$$

$$0{,}1010 < \frac{2}{3} < 0{,}1011$$

$$0{,}101010 < \frac{2}{3} < 0{,}101011$$

* * *

Terug naar het kruis-en-munt-spel. Om het wat korter te noteren, zeggen we 0 voor kruis en 1 voor munt. Een worpreeks

kruis munt munt kruis munt kruis

noteren we met nog een komma ervoor en vóór de komma een nul als

0,011010,

of zo u wilt, als $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{13}{32}$.

Iedere worpreeks wordt zodoende door een punt van onze liniaal gerepresenteerd en om nu tussen A, B en C te loten, kijken we naar de liniaal:

A wint het, als de worpreeks op de liniaal tussen 0 en $\frac{1}{3}$ valt,

B wint het, als de worpreeks op de liniaal tussen $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ valt,

C wint het, als de worpreeks op de liniaal tussen $\frac{2}{3}$ en 1 valt.

U zult, dacht ik, toegeven dat dit een eerlijke verdeling is.

* * *

Dus bijvoorbeeld

0,00	→	A	wint
0,0100	→	A	wint
0,011	→	B	wint
0,100	→	B	wint
0,1011	→	C	wint
0,11	→	C	wint

en dat klopt opvallend met het reglement van loting in het begin van het verhaal.

Inderdaad zeggen de twee reglementen precies hetzelfde. Immers:

Eindigt het in een even aantal worpen met 00, dan krijgen we

$0{,}010101...0100 < 0{,}010101...0101... = \frac{1}{3}$, dus is het voor A.

Eindigt het na een even aantal worpen met 11, dan krijgen we

$0{,}101010...1011 > 0{,}101010...1010... = \frac{2}{3}$, dus voor C.

Eindigt het na een oneven aantal worpen, dan is het

0,0101...011

of

0,1010...100

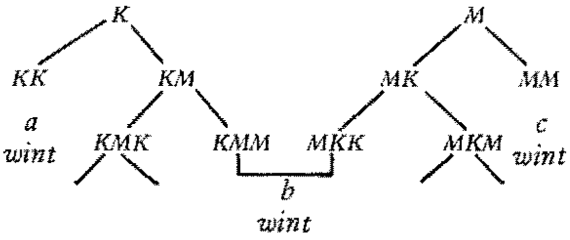
en dat is beide keren tussen

$0{,}0101...0101... = \frac{1}{3}$ en $0{,}1010...1010... = \frac{2}{3}$, dus voor B.

Dus beide reglementen leveren hetzelfde op en aangezien we het tweede als eerlijk erkend hebben, is het eerste het ook.

* * *

Moet het bewijs nu zo? U hebt er misschien zelf over gedacht en als het u gelukt is, hebt u zeker niet deze redenering gevolgd. Het kan inderdaad ook meer elementair, zonder tweetallig stelsel en liniaal.
Bijvoorbeeld:



Dit schema is eigenlijk al voldoende. Na drie keer gooien heeft ieder op een kwart van de kans beslag gelegd (A: $\frac{1}{4}$, C: $\frac{1}{4}$, B: $2 \times \frac{1}{8}$), terwijl met het resterende kwart van de kans (KMK en MKM) de zaak nog onbeslist gebleven is. Maar hiermee zijn we dan ook als het ware naar de situatie van na de eerste worp teruggekeerd, toen alles nog onbeslist was. Het resterende kwart kans wordt dus in het volgende paar worpen weer net zo eerlijk verdeeld en na de vijfde worp herhaalt de beginsituatie zich opnieuw. Er wordt altijd eerlijk gedeeld.

* * *

Wel, deze redenering is meer elementair, maar de eerste – hoewel minder elementair – is inzichtelijker. Dit is een verschijnsel zoals het zich vaak in de wiskunde voordoet. Van een hogere wacht is het laag-bij-de-grondse beter te overzien.

* * *

Als er nu nooit twee keer achter elkaar hetzelfde zou vallen – wat dan? Als de munt blijft doordrammen

kruis munt kruis munt kruis munt . . . .

of

munt kruis munt kruis munt kruis . . . ?

Hoe groot is de kans op nog geen beslissing na – zeg – 50 keer gooien?
Die kans is

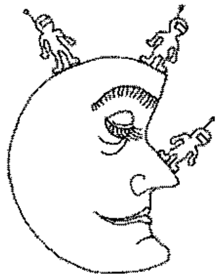
$$2.\left(\frac{1}{2}\right)^{50},$$

en dat is zowat

1 op de duizendbillioen.

Als u rekent dat 50 keer kruis of munt gooien op zijn minst een minuut kost en in een milliard jaren zowat 500 billioen minuten zitten, begrijpt u dat het uiterst onwaarschijnlijk zou zijn, als er na 50 keer gooien nog geen beslissing was gevallen.
Maar hoe lang zal het *gemiddeld* duren voor de beslissing valt?
Hoeveel keer zul je gemiddeld moeten opgooien, opdat twee keer achter elkaar kruis of twee keer achter elkaar munt valt?

Het is gemiddeld drie keer.



'van een hogere wacht is het laag-bij-de-grondse beter te overzien'

F. VAN DER BLIJ

WELLUIDENDE BREUKEN

Met het onderwerp dat ik in dit nummer ga aansnijden loop ik al wat langer rond. Maar iedere keer schrok ik terug voor de gecompliceerdheid en de grote hoeveelheid literatuur over dit tema. Het gaat over muziek. Niet over compositietechnieken, niet over rekenkundige bespiegelingen rond Bach en vele anderen. Ook niet over de wiskundige achtergrond van de zuivere sinussen, de zaagtanden en de bloksinussen uit de elektronische muziek. Ik wilde het eenvoudig hebben over de vraagstelling naar welluidende opvolging van tonen, dus naar konsonant en dissonant en de vraag over de harmonieleer, over het akkoord.

Het snaarinstrument maakt, volgens de traditie al sinds Pythagoras, het verband tussen welluidendheid en verhouding van niet te grote natuurlijke getallen duidelijk. Het is natuurlijk bekend dat bij het *oktaaf* de verhouding van snaarlengten en van trillingsgetallen als 2 : 1 is. Maar met oktaven-sprongen alleen maak je niet veel melodie of harmonie. Er moeten andere verhoudingen bij komen.
Eerst bezien we de *kwint*, de vijfde toon, zoals het oktaaf de achtste toon is. Bij de kwint hoort de verhouding 3 : 2. Met kwint en oktaaf kombinerend krijg je bijvoorbeeld de *kwart*, en wel 4 : 3.
We gaan nu kwinten-sprongen bezien en deze vergelijken met het oktaaf:
twee kwinten 9 : 4 meer dan één, minder dan twee oktaven,
drie kwinten 27 : 8 meer dan één, minder dan twee oktaven,
vier kwinten 81 : 16 meer dan twee, minder dan drie oktaven,
enzovoorts.

Het zal duidelijk zijn dat nimmer $(\frac{3}{2})^m = 2^k$.
Maar zijn er waarden van m en k te vinden, zodat $(\frac{3}{2})^m$ en 2^k weinig schelen? Met 'weinig' zullen we dan wel 'relatief weinig' in een of andere betekenis bedoelen.

We maken een tabel voor $(\frac{3}{2})^m$ en vergelijken met machten van 2:

m	$(\frac{3}{2})^m$
1	1,5
2	2,3
3	3,4
4	5,1
5	7,6
6	11,4
7	17,1
8	25,6
9	38,5
10	57,7
11	86,5
12	129,7
13	194,6
14	291,9
15	437,9

We krijgen een naar verhouding redelijke overeenstemming tussen 5 kwinten (7,6) en 3 oktaven (8,0); een betere nog tussen 12 kwinten (129,7) en 7 oktaven (128,0).
Werken we op onze chromatisch gestemde piano, dan vinden we een halve toon verschil tussen 5 kwinten en 3 oktaven; we hebben immers de sprongen a – e – b – f# – c# – g#. (Ik laat de strepen boven de noten van een hoger oktaaf maar even weg.)
Gaan we op de piano verder dan vinden we
g# = a♭ – e♭ – b♭ – f – c – g – d – a
en we zijn rond op zeven oktaven.
We kunnen er een mooi plaatje van maken door de acht tonen (of liever de twaalf halve tonen) van het chromatisch verdeelde oktaaf op een cirkel te zetten (figuur 1).
Een kwint is dan een sprong naar de vijfde toon, in de chromatische telling is dat de zevende halve toon. Na twaalf kwinten komen we uit op zeven oktaven. (Men verwarre deze figuur niet met de kwinten cirkel.)
Maar in de chromatische stemming, waarbij het oktaaf in 12 halve tonen verdeeld wordt,

die onderling een afstand hebben van ($\sqrt[12]{2}$: 1) zijn de mooie natuurlijke getallen niet meer te vinden.

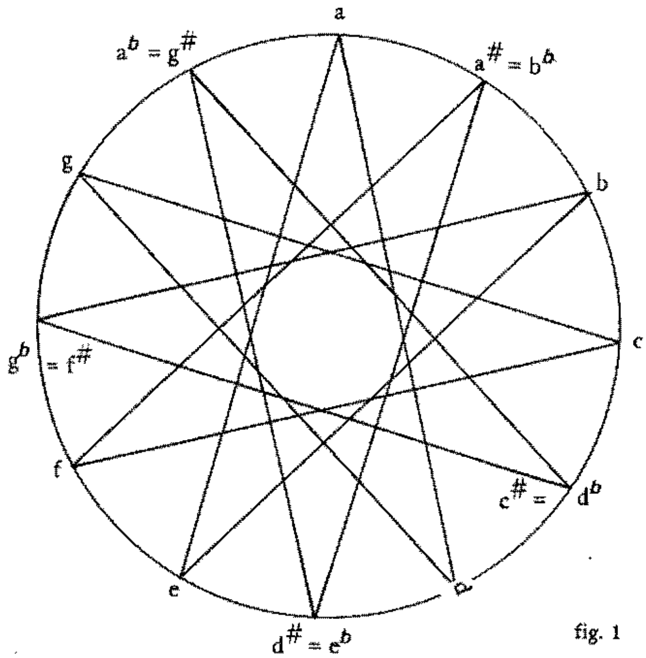


fig. 1

'twaalf kwinten-sprongen zijn (chromatisch) zeven oktaven'

Zijn er nog betere resultaten van kwintensprongen en oktaven te maken? We zagen al

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 2^7, \text{ dus } 3^{12} \approx 2^{19}$$

Er zijn vele benaderingen, sommigen al zeer oud en uit geheel verschillende tradities. We geven een paar voorbeelden:

41 kwinten zijn ongeveer 24 oktaven.
53 kwinten zijn ongeveer 31 oktaven.
306 kwinten zijn ongeveer 179 oktaven.
665 kwinten zijn ongeveer 389 oktaven.

De laatste is erg mooi:

$$^{10}\log\left(\frac{3}{2}\right)^{665} = 117{,}10$$

$$^{10}\log 2^{389} = 117{,}10.$$

Hoe zou men zulke verhoudingen kunnen vinden? We zagen al dat het er om gaat om 2^n en 3^m ongeveer gelijk te maken, dus om n log 2 en m log 3 gelijk te maken. We moeten een rationale benadering $\frac{n}{m}$ vinden voor het niet rationale getal $\frac{\log 3}{\log 2}$.

(U kunt makkelijk bewijzen dat $^2\log 3$ irrationaal is!)

Een eerste benadering moet af te lezen zijn uit

$$\frac{\log 3}{\log 2} \approx \frac{0{,}477121}{0{,}301030}.$$

Ruwweg $\frac{475}{300}$ geeft $\frac{19}{12}$, dus $(\frac{3}{2})^{12} \approx 2^7$, waar we boven mee werkten. De teorie van de kettingbreuken geeft een reeks van goede rationale benaderingen.

* * *

De *terts*, bijvoorbeeld gedefinieerd als 5 : 4, in wezen de derde toon, wordt chromatisch gegeven door $(\sqrt[12]{2})^3 : 1 = 1{,}19 : 1$.
Maar is deze ook in te passen (min of meer) in het systeem van kwinten en oktaven? Er zijn natuurlijk vele kombinaties te maken. Men kan vragen naar gehele getallen n en m en een positief getal k zodat

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^m \approx 2^k.$$

Anders gevraagd: bestaan er twee getallen x en y, beide gebouwd met priemfaktoren 2, 3 en 5, die niet veel verschillen? Niet veel is bijvoorbeeld 1. We vragen dus of er gehele niet negatieve getallen a, b, c en p, q, r bestaan, zodat voor $x = 2^a 3^b 5^c$ en $y = 2^p 3^q 5^r$ geldt:

$$|x - y| = 1.$$

C. Størmer bewees al in 1897 dat er maar eindig veel van zulke getallen x en y bestaan. De volledige lijst is: (2,1); (3,2); (4,3); (5,4); (6,5); (9,8); (10,9); (16,15); (25,24); (81,80).

* * *

Hindemith heeft zich bezig gehouden met nog een ander interval, de tritonus. Voor dit interval zijn verschillende verhoudingen voorgesteld. In de eerste plaats 64 : 45 of 45 : 32, respektievelijk 1,422 en 1,406. Maar ook, en nu komt het priemgetal 7 aan bod: 7 : 5 = 1,4 en 10 : 7 = 1,428.
Duidelijk zijn dit benaderingen van $\sqrt{2}$, muzikaal gezien dus de 'vier-en-een-halfde'. (Tussen kwart en kwint in!)
Men kan opnieuw vragen naar getallen, beide gebouwd met priemfaktoren 2, 3, 5 en 7, die 1 verschillen. Er zijn er weer een eindig aantal. Het grootste voorbeeld is:

$$4374 = 2.3^7 \text{ en } 4375 = 5^4.7.$$

Uit de getalteorie is bekend dat bij een gegeven stel priemgetallen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en een gegeven getal a er maar eindig veel paren x en y van gehele getallen – met de priemfaktoren $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gebouwd – bestaan, zodat $|x - y| = a$.
Maar de muziekteoretici beperken zich als regel tot 2, 3, 5 en 7. We gaan niet meer in op de konstruktie van toonladders op de voorgestelde intervallen. Vanzelfsprekend is grote variatie mogelijk.

* * *

Misschien heeft u in het Teyler Museum te Haarlem wel eens het bekende Fokker-orgel gezien.
De speeltafel (fig. 2) heeft dan ongetwijfeld een wat ongewone indruk op u gemaakt.
De toetsen zijn in diverse rijen gegroepeerd. Op één van de rijen bijvoorbeeld bevinden zich van links naar rechts de toetsen met een afstand van een hele toon (do, re, mi, fa♯, so♯, la♯, ti♯).
Meer naar achteren en iets hoger bevindt zich tussen de mi en de fa♯, de fa-toets, die deel uitmaakt van de horizontale rij bevattend: fa, so, la, ti, do♯ en naar de andere kant: fa, mi♭, re♭, do♭, si♭♭ . . . . .
Meer naar voren en iets lager, ook tussen de mi en de fa bevindt zich de toets mi♯, die weer onderdeel is van de reeks: re♯, do♯, ti, la, so, ..., en naar rechts: fa x, so x, la x.
Voor elke chromatische noot zijn er minstens twee toetsen, en voor sommige zelfs drie. Per

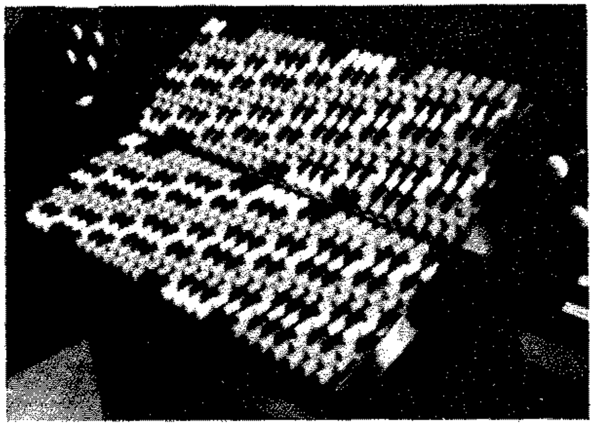


fig. 2

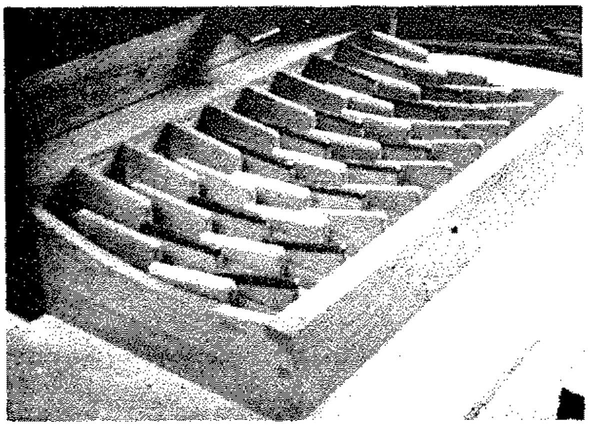


fig. 3

oktaaf: 31 toetsen, in plaats van – zoals gebruikelijk – 12.
Elk klavier bestaat uit 319 toetsen. Ook het voetklavier is voorzien van 31 toetsen per oktaaf. (fig. 3)

Dat de konstruktie van dit orgel bizonder veel inventiviteit met zich meebracht zal u even duidelijk zijn als de verrassende muzikale mogelijkheden ervan.

* * *

Ik kwam tot deze notities door een tweetal artikelen, recentelijk gepubliceerd in het tijdschrift 'American Mathematical Monthly':
L. Leigh Silver – Musimatics or the Nun's Fiddle, (vol. 78 (1971), p. 351-357).
R. Gilmer – More on the Super particular ratio's in music, (vol. 79 (1972), p. 1096-1100).
Belangstellenden zou ik met nadruk willen verwijzen naar de uitvoerige studie:
A.D. Fokker – Rekenkundige bespiegelingen der muziek, Noordduyns Wetenschappelijke Reeks, 21 (1945)).
Hierin staan zeer vele muziekvoorbeelden, zowel van klassieken (Mozart, Wolf) als van meer moderne komponisten (Saint Saens, Debussy, Hindemith). Maar ook vindt u er uitvoerige verwijzingen naar muziekteoretici zoals Zarlino (1517-1590), Rameau (1683-1764) en wiskundige bijdragen zoals van Chr. Huygens en Leonard Euler. Het titelblad van een franse vertaling van een werk van Euler nemen we als illustratie op. (figuur 4)

MUSIQUE MATHÉMATIQUE

LA

MUSIQUE RENDUE FACILE, PAR LE SYSTÈME DE LA NOTATION LETTRÉE,

OU

ESSAI

D'UNE NOUVELLE THÉORIE DE LA MUSIQUE, FONDÉE SUR LES CONNAISSANCES PHYSIQUES ET MÉTAPHYSIQUES APPLIQUÉES AUX VRAIS PRINCIPES DE L'HARMONIE.

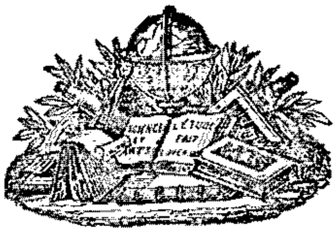
PAR LÉONARD EULER,

TRADUIT

AUGMENTÉ ET MIS AU COURANT DE LA SCIENCE ACTUELLE

PAR

UNE SOCIÉTÉ DE SAVANTS.



PARIS.

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET PHILOSOPHIQUE.

1865

fig. 4

problematika

HUUB JANSEN

1 EEN SIMPEL GANZENBORD

Het variabel blok van dit bulletin is gewijd aan de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek. Een terrein van de wiskunde dat bij uitstek met spelletjes, puzzels en problemen verbonden is.

Ons eerste probleem is niet meer dan een simpele 'binnenkomer'. Meer bedoeld voor uw leerlingen dan voor uzelf.
Ofschoon? Je weet het maar nooit.

We maken een simpel ganzenbord.
Een ganzenbord zonder putten, herbergen of andere struikelblokken.
Bovendien een beetje korter, bijvoorbeeld 40 velden.

1	2	3	4	5	6	7	35	36	37	38	39	40

Speler A tegen speler B én een dobbelsteen.

A gooit met de dobbelsteen en gaat met zijn fiche steeds zoveel stappen voorwaarts als de ogen van de dobbelsteen aangeven.

Speler B doet niets anders, dan ná elke beurt van A met zijn fiche 4 plaatsen vooruit te gaan.

Een wat saai spel zoals u ziet, maar de vraag is:

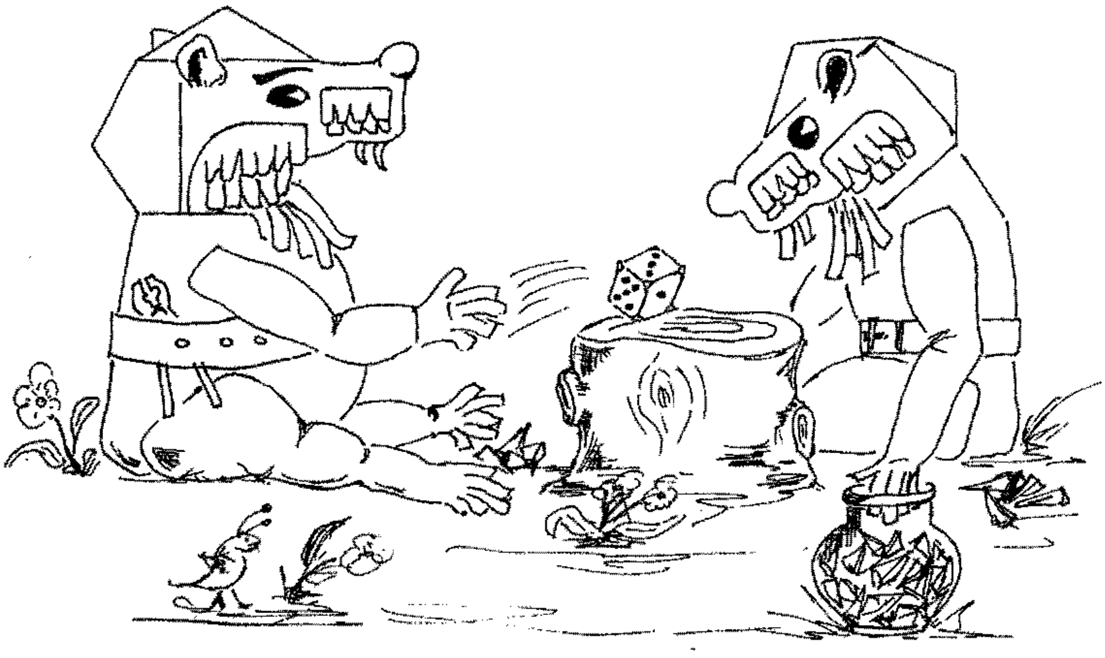
wie zal dit spel meestal winnen, d.w.z. wie zal meestal als eerste op de 40 aankomen.

Sommige leerlingen uit een 5^e of 6^e klas hebben dit direkt door en kunnen ook haarscherp aangeven waarom A òf B meestal zal winnen.
Andere leerlingen moeten het spelletje een aantal keren spelen vóór zij inzien wat er aan de hand is.

2 DE BEUKENOTENPOT VAN ED EN WILLEM BEVER

Een kansrekeningsprobleem voor de hele klas.
Onze 6^e klassers zijn bereid op het volgende probleem hun tanden stuk te bijten.

De broers Ed en Willem Bever spelen een spelletje met als inzet hun spaarpot bevattende 100 beukenootjes.
Er wordt met een dobbelsteen gegooid. Is het resultaat 1, 2 of 3 dan krijgt Ed 1 punt. Valt de dobbelsteen op 4, 5 of 6 dan 1 punt voor Willem.



Wie als eerste 10 punten behaalt, krijgt de beukenotenpot. Op het moment dat de stand 9-8 voor onze Ed is, worden beide broers voor een haastklus weggeroepen. Ed en Willem besluiten nu de beukenotenpot eerlijk te verdelen, dat wil zeggen: rekening houdend met de kansen die Ed en Willem ieder nog hebben indien doorgespeeld zou worden.

De vraag voor u en uw leerlingen is dan natuurlijk *hoe deze verdeling moet gebeuren.*

berichten uit het buitenland

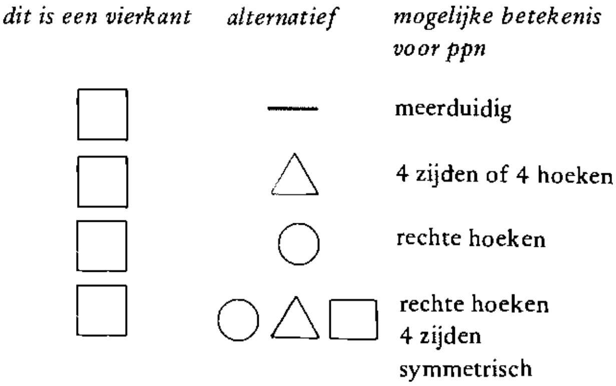
KLAAS KOSTER

TRADITIONELE EN NIEUWE ONDERWIJSVORMEN LOOD OM OUD IJZER

Hoe komt het dat uit veel onderzoek blijkt, dat zeer uiteenlopende onderwijsmetodes toch allemaal tot ongeveer dezelfde leerlingenprestaties leiden?
Over deze vraag heeft David R. Olson onlangs een verhelderend artikel gepubliceerd in het tijdschrift *Interchange*.[1]) Olson is ex-medewerker van de amerikaanse psycholoog Jerome Bruner en werkt nu bij het Ontario Institute for Studies in Education in Toronto, Canada.
Hij publiceerde eerder, bijvoorbeeld in de bundel 'Studies in cognitive growth' (New York, Wiley, 1966), terwijl in 1970 van hem een boek verscheen over de manier waarop kinderen tussen drie en acht jaar het begrip 'diagonaal' leren hanteren.[2])

In zijn artikel onderscheidt Olson drie onderwijsleervormen:
* leren van wat je doet
* leren van wat je ziet
* leren van wat je hoort (bijvoorbeeld van wat iemand je vertelt).

Hij vergelijkt deze leervormen met een indeling van Bruner in 'enactive', 'iconic' en 'symbolic' representatie- of 'voorstellings'-vormen.
'Enactive' representatie kan men vertalen als 'voorstellingen' verkregen via handelingen (bijvoorbeeld weten hoe je een schoenveter vastmaakt: je *doet* het moeiteloos, maar je kunt het niet zo gemakkelijk voortekenen of in woorden uitleggen).
'Iconic' representatievormen ontstaan via het 'aflezen' van begrippen uit dingen die je ziet. Zo kan het begrip vierkant gevormd worden via een van de volgende serie tekeningen:



Symbolische representatievormen: hieronder valt bij Bruner vooral het gebruik van de taal. Met behulp van woorden en symbolen kan men zich immers allerlei abstrakte voorstellingen maken (bijvoorbeeld – groter dan '>').

Zoals blijkt uit het voorbeeld van de 'ikonische representatie' is het niet altijd vanzelfsprekend dat een leerling in een bepaalde situatie de beschikbare informatie ordent overeenkomstig de dimensies, die door een leraar relevant geacht worden. (Vraag: Waarom drijft een boot? Antwoord: Anders verdrinken de mensen.)
Dezelfde soort informatie kan langs verschillende wegen verkregen worden. Dat verklaart volgens Olson waarom tussen op het eerste gezicht uiteenlopende onderwijsvormen geen verschillen gevonden worden, als de effekten op de leerlingenprestaties worden vergeleken. Ongeacht de onderwijsvormen pikken de meeste leerlingen kennelijk dezelfde soort informatie op en leren ze ook grotendeels dezelfde vaardigheden. Alleen de *verpakking van de informatie* is telkens anders. Voor Olson zijn de onderwijsvormen dan ook niet meer dan een verschillende oppervlaktestruk-

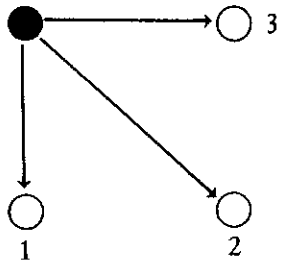
---

[1]) D.R. Olson – On a theory of instruction. Why different forms of instruction result in similar knowledge (Interchange – 1972, 3).

[2]) D.R. Olson – Cognitive Development, the child's acquisition of diagonality (Academic Press, New York en Londen – 1970).

tuur, waaraan een gemeenschappelijke onderliggende informatiestruktuur valt te herkennen.
In zijn onderzoek naar het leren konstrueren van een diagonaal op een soort dambord is hij nagegaan hoe de relevante informatie overgebracht wordt via:
* een montessoriaanse voorbeeldtechniek
* verbale instruktie
* reinforcement (telkens beloning als een goede handeling wordt verricht)
* een speciaal gekonstrueerd speelleermiddel (an educational toy).

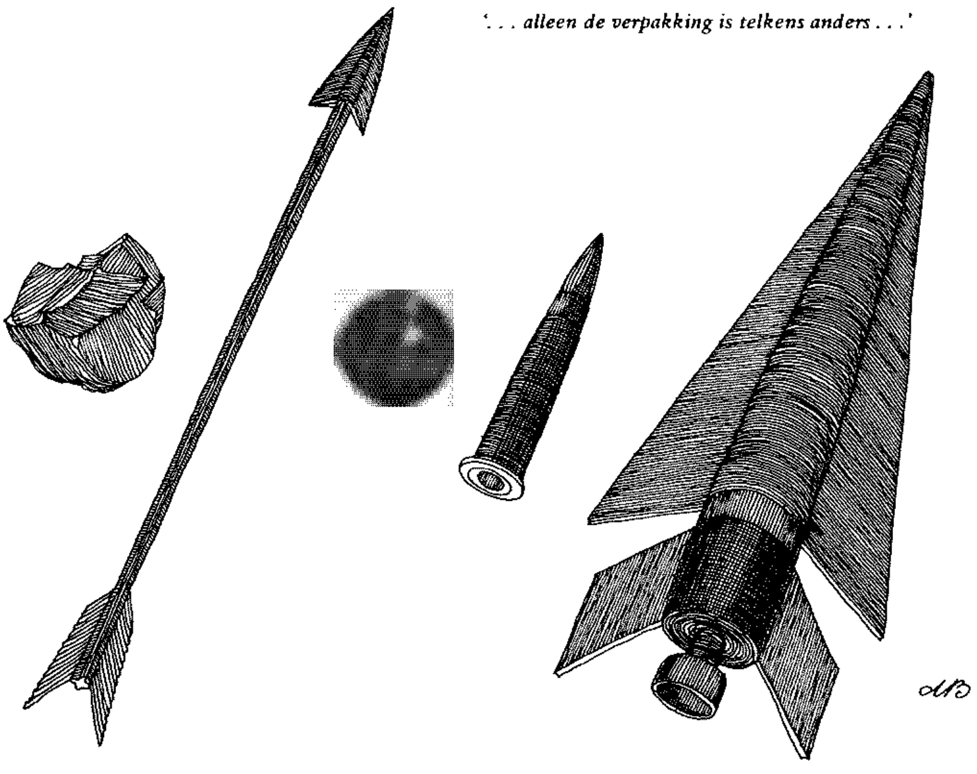
Bij alle vier de onderwijsvormen ging het er volgens Olson om dat de proefpersonen geleerd moest worden een bewuste keuze te maken tussen verschillende alternatieven.
In het geval van de konstruktie van de diagonaal moesten ze leren om te kiezen uit de mogelijkheden 1, 2 en 3:



Door zowel de goede als foute mogelijkheden nadrukkelijk tegen elkaar af te wegen, ontstaat uiteindelijk ook inzicht in de juiste oplossing.
Het probleem in het onderwijs is vervolgens hoe men de verschillende afwegingsprocedures bij de leerlingen zo kan aktualiseren, dat ze op relevant geachte dimensies gaan letten. En of dat nu bijvoorbeeld via ontdekprincipes of verbale instruktie gebeurt, maakt volgens Olson niet uit. Beide procedures leiden uiteindelijk tot een juiste keuze van alternatieven.

Het zal de lezer duidelijk zijn dat de konklusie van Olson gebaseerd is op een laboratoriumonderzoek.
Met generalisering van zijn konklusie naar het *echte onderwijs* dienen we derhalve erg voorzichtig te zijn.

'... alleen de verpakking is telkens anders ...'



start

blokschema's

GUUS VONK

Algoritme

Het blokschema is een van de middelen om een algoritme te beschrijven. Dit zou een redelijke omschrijving zijn, indien het begrip algoritme algemeen bekend zou zijn of in ieder geval gemakkelijk gedefinieerd kon worden. Dit laatste is zeker niet het geval. Daarom eerst maar een voorbeeld ter verduidelijking van het begrip: *de algoritme van Euclides* voor de bepaling van de GGD van twee natuurlijke getallen **m** en **n**.

opdracht 1 – vergelijk **m** en **n**
als ze gelijk zijn, dan is de uitkomst één van hen
zo niet, ga naar opdracht 2

opdracht 2 – trek het kleinste getal van het grootste af
ga naar opdracht 3

opdracht 3 – noem de aftrekker en het verschil uit opdracht 2 weer **m** en **n**
ga naar opdracht 1.

Deze algoritme toegepast op de getallen 24 en 60:

m	n	verschil	opdracht nr.
24	60		1
		36	2
24	36		3,1
		12	2
24	12		3,1
		12	2
12	12		3
uitkomst		12	1

Het woord 'algoritme' betekent, althans oorspronkelijk, zoiets als rekenwijze. In Bagdad leefde omstreeks het jaar 825 Abu Gafar Mohammed ibn Musa. Hij schreef een boek over indische rekenkunst, dat wil zeggen: het tientallig stelsel. Abu Gafar kwam uit de landstreek Hwarizm, daarom werd hij wel genoemd 'al hwarizmi': de man uit Hwarizm. Van 'al hwarizm' stamt het woord algoritme. Het begrip algoritme is van rekenwijze verruimd tot een *eenduidig voorschrift* om een proces uit te voeren met eindig veel welbegrepen en uitvoerbare handelingen.

Zo is een breipatroon een goed voorbeeld van een algoritme. Aangenomen tenminste dat de lezer op de hoogte is met begrippen als recht, averecht, minderen, afkanten, e.d. en in het bezit is van wol en breipennen om ook tot uitvoering van aanwijzingen te komen.

De instrukties in een telefooncel voor het tot stand brengen van een telefoongesprek vormen een ander voorbeeld van wat onder een algoritme verstaan wordt.

Zonder tot een definitie gekomen te zijn, benadruk ik nogmaals een aantal eisen voor de algoritme.

(1) Het beschrijft een proces, dat wil zeggen iets waarin de tijd een rol speelt. De ene opdracht komt ná de andere. Er is een eerste instruktie en, als het goed is, een laatste. Hoeveel tijd elke handeling in beslag neemt laten we gemeenlijk buiten beschouwing.

(2) Het is een eenduidige beschrijving, dat wil zeggen ondubbelzinnig. In de praktijk blijkt maar al te vaak hoe moeilijk het is om dubbelzinnigheden te vermijden.

(3) De algoritme is uitvoerbaar in eindig veel stappen. Men zal zich wel degelijk moeten afvragen of het genoteerde proces ook tot een eind komt. Kunnen we bij de algoritme van Euclides bewijzen dat er voor elke natuurlijke **m** en **n** binnen een eindig aantal bewerkingen een antwoord verschijnt?
Tussen haakjes: we moeten bovendien bewijzen dat het verkregen antwoord ook inderdaad de GGD van de oorspronke-

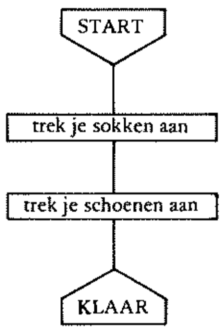
lijke **m** en n is. Om het verhaal niet te zwaarwichtig te maken zien we daarvan af.

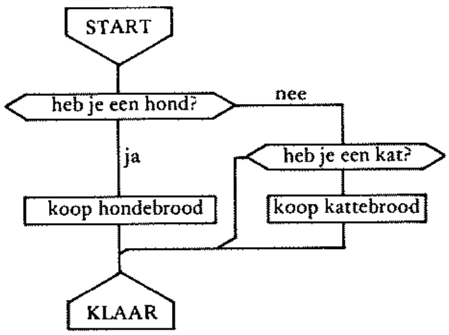
(4) De opdrachten zijn welbegrepen en uitvoerbaar. De opsteller van een algoritme zal inzicht moeten hebben in datgene wat de uitvoerder begrijpt en kan uitvoeren. Hij zal een zekere basiskennis veronderstellen, zoals kennis van minderen en afkanten bij de breister of het juist interpreteren van 'neem hoorn van de haak' door degene in de telefooncel. Zo zal men voor de ene uitvoerder de algoritme minder gedetailleerd uitwerken dan voor de ander. Dat elke handeling ook uitvoerbaar dient te zijn voor een zinvol algoritme is niet verbazingwekkend.

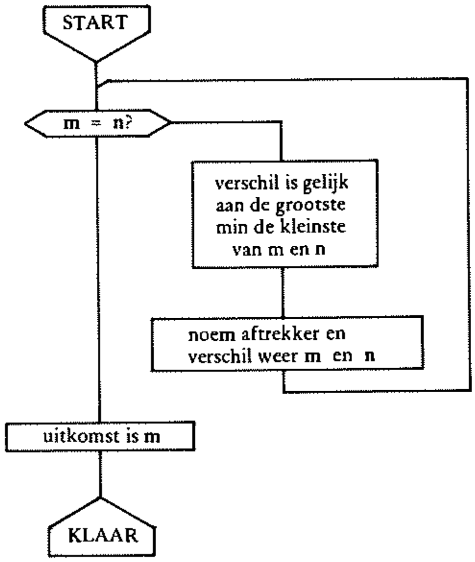
Met opzet is in het voorgaande opdracht, instruktie en handeling afwisselend gebruikt. In het vervolg zal ik elke handeling beschrijven als een opdracht.

Blokschema's

Enkele voorbeelden:







Het eerste voorbeeld toont een *lineair of onvertakt blokschema.*

Er bestaat geen misverstand over de volgorde waarin de blokken gelezen moeten worden, door het aangeven van START en KLAAR. Wil men bij beijzelde straat de sokken over de schoenen aangetrokken hebben, dan zal men de rechthoekige blokken toch moeten verwisselen. We denken nog even aan eis (4) voor een algoritme: we nemen aan dat er geen misverstand kan bestaan over wèlke sokken of wèlke schoenen.

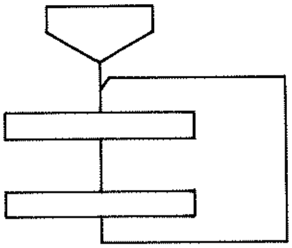
Het tweede voorbeeld vertoont een nieuw element: de *vertakking.*

Het doorlopen van het schema is afhankelijk van de beantwoording van de vragen die in de zeskantige hokjes gesteld worden. Het blokschema voldoet aan de eisen aan een algoritme te stellen, ook al voldoet het misschien niet aan de verwachte oplossing in de konkrete situatie. Men zal volgens dit schema namelijk ook uitsluitend hondebrood kopen in het geval men een hond en een kat in bezit heeft. De kat moet blijkbaar genoegen nemen met hondevoer òf verhongeren.

Het derde voorbeeld is weer de algoritme voor de GGD-bepaling.

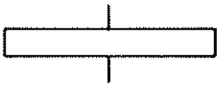
Men onderscheidt hierin gemakkelijk de *cirkelgang of cyklus,* waarbij een aantal opdrachten net zo lang wordt herhaald tot aan een zekere voorwaarde is voldaan. Het afvragen van deze voorwaarde moet in de cyklus worden opgenomen.

Een cyklus als hieronder aangegeven, is zeker in strijd met eis (3) voor de algoritme. Een mens belast met de uitvoering van dit schema zal na zekere tijd wel in slaap vallen, een machine werkend volgens dit schema zal veelal alleen door krachtdadig ingrijpen tot staan gebracht kunnen worden.

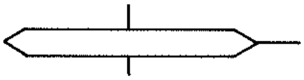


En nu het woord machine gevallen is: de gegevensverwerking per komputer gaat volgens lijnen waarin vele keuzemomenten voorkomen en waarvan de voortgang o.a. afhankelijk is van tussenresultaten.
Bij het voorbereiden voor komputerverwerking wordt intensief van blokschema's gebruik gemaakt. Deze schema's bevatten in het algemeen een grotere verscheidenheid in de vormen van de blokken. In de nederlandse komputerwereld is men overgegaan tot normalisatie van de blokmodellen, een voorstel dat door mij hier niet wordt gevolgd.
Het meest opvallende verschil is het gebruik van het vraagblok.

De ruit is typografisch minder handig voor het omlijnen van een lange zin dan het zeskantige blok.
We zullen daarom de volgende konventie overeenkomen:



rechthoekig blok voor een opdracht, ingang middenboven, uitgang middenonder;

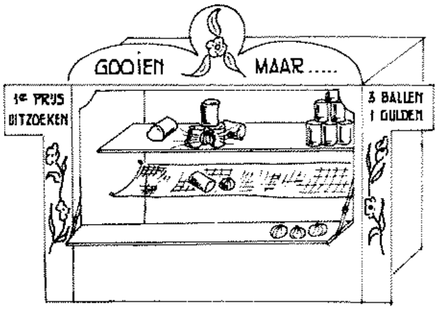


zeskantig blok voor een vraag die met ja of nee beantwoord kan worden; ingang middenboven; ja-uitgang middenonder; nee-uitgang aan één van beide zijkanten;

vijfkantig blok voor START en KLAAR.

Wilt u eens oefenen in het maken van blokschema's? Hier zijn een paar opgaven.

▶ Op de kermis is er een tent waar je voor een kwartje drie keer mag gooien op een stapel blikjes. Als na drie keer gooien of eerder alle blikjes weg zijn, krijg je een prijs.



Maak van deze regeling een blokschema met in de blokken:

neem prijs in ontvangst
gooi
was dit de derde keer?
zijn alle blikjes weg?

▶ Iemand moet weten hoeveel mensen er in een zaaltje zijn. Hij gaat bij de deur zitten (er is maar één deur) en bij het weggaan van de mensen zet hij streepjes op papier. Natuurlijk één streepje per persoon die weggaat. Achteraf telt hij de streepjes.
Maak van zijn bezigheden een blokschema met in de blokken:

is de zaal leeg?
wacht tot iemand passeert
tel de streepjes
zet een streepje.

Als uzelf het blokschema van de vorige opgave zou moeten uitvoeren, dan zoudt u de streepjes waarschijnlijk zó zetten:

het zogenaamde *turven*.

▶ Maak de vorige opgave opnieuw, maar nu aangevuld met de blokken:

staan er 4 losse streepjes?
maak door een schuine streep een turfje.

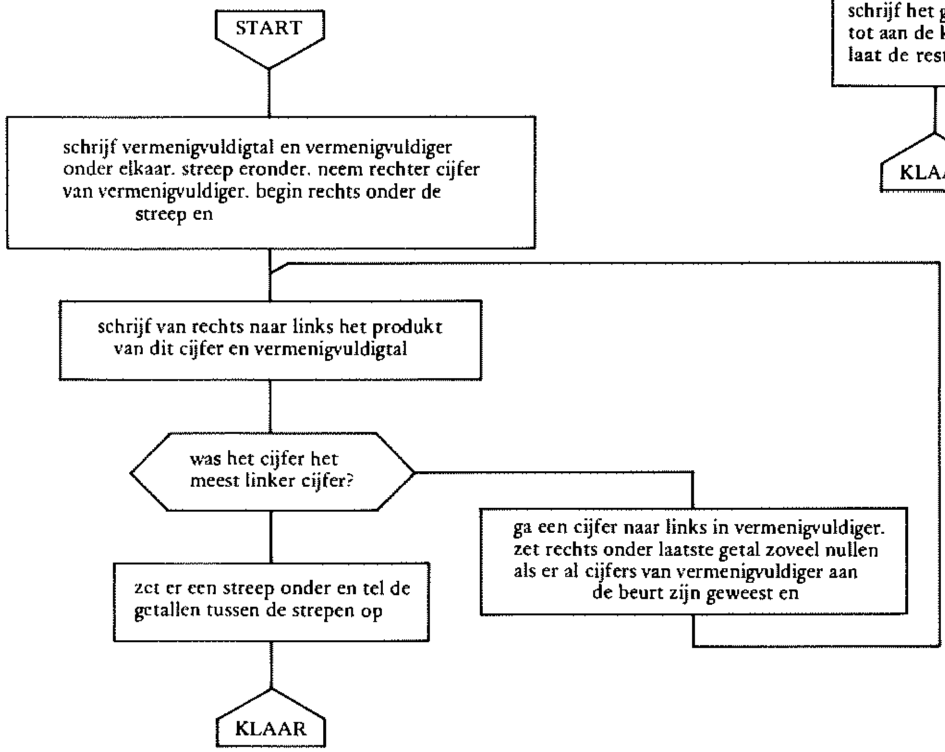
Blokschema's als onderwijskundig hulpmiddel

Het gebruik van blokschema's stamt uit de komputerwereld en het gebruik zal in het onderwijs dan ook bij leerstof als komputerkunde uitdrukkelijk naar voren komen. Daarmee is nog niet verklaard waarom ik u met dit onderwerp lastig val.

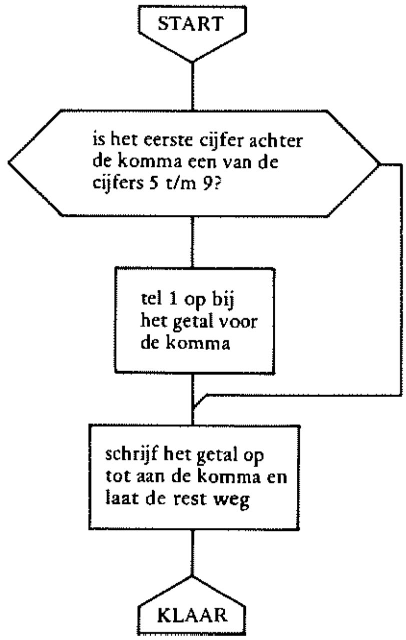
Mijns inziens is het blokschema een ideaal hulpmiddel voor de onderwijzer zodra, in welk leervak ook, zich *routineaspekten* voordoen.

Voorbeelden.

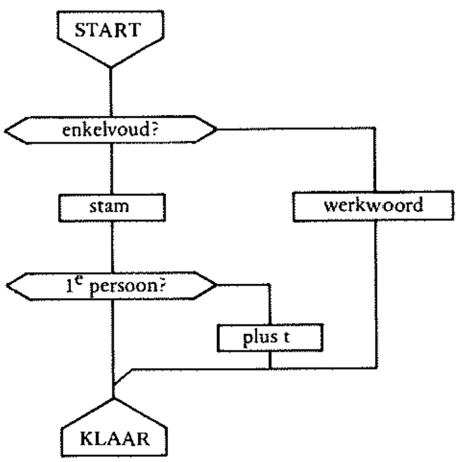
* De staartvermenigvuldiging:

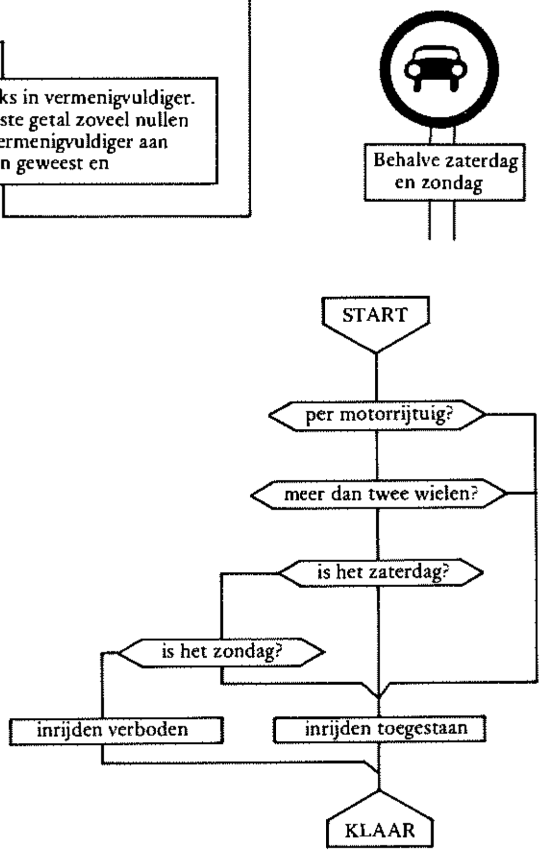


* Afronden op helen:

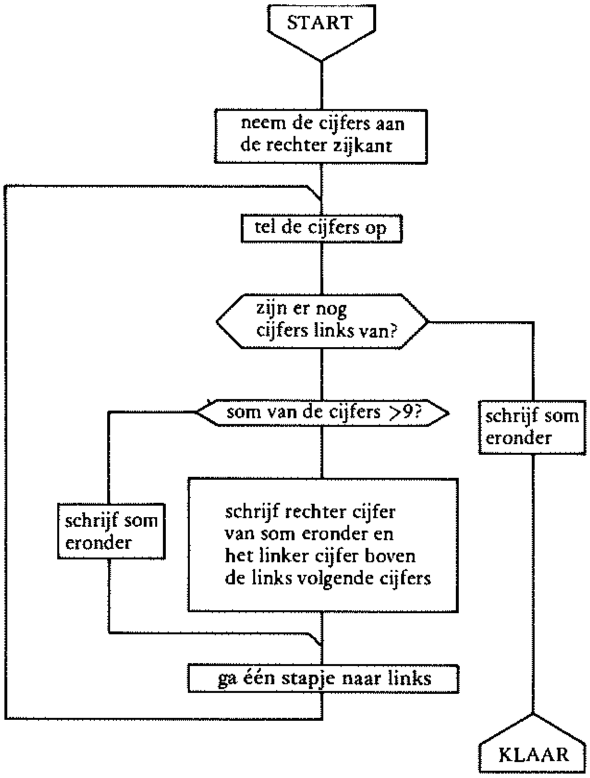


* Schrijfwijze in o.t.t.:

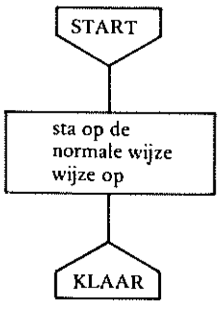




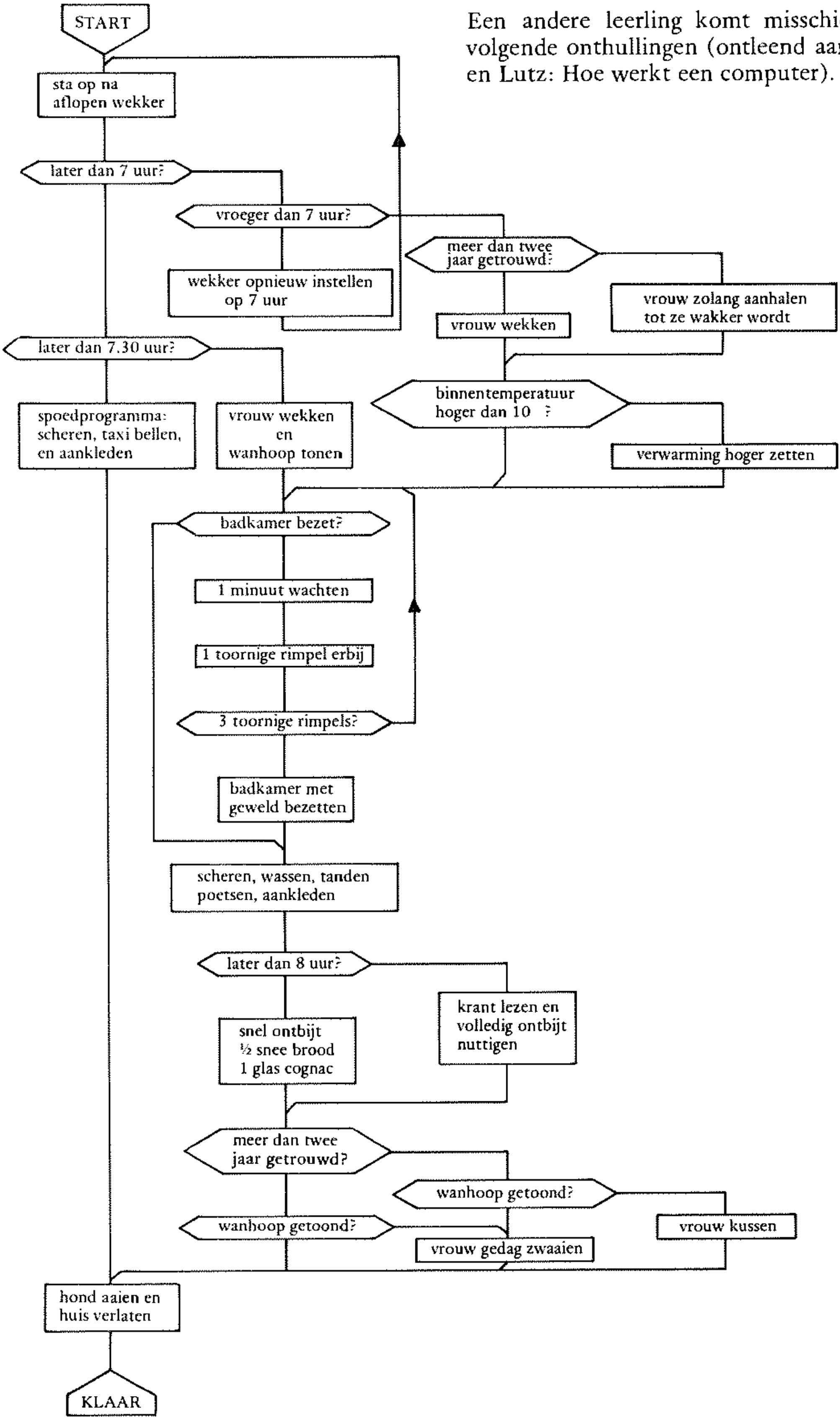
* Optellen van twee onder elkaar staande gehele getallen:



Ik hoop niet dat de nadruk op begrip en kreativiteit in vele vormen van onderwijsvernieuwing u kopschuw hebben gemaakt voor het woord routine. Het onderscheiden van routines en het inkapselen ervan is wezenlijk voor vele leervakken. In het cijferen komen een groot aantal routines voor, gekenschetst door aanduidingen als 'staartdeling', 'gelijknamigmaken', 'GGD bepalen' enz., die als bouwstenen kunnen dienen voor de opbouw van oplossingen van verder reikende problemen. Deze opbouw zou stagneren als men zich voortdurend de 'inhoud' van elke bouwsteen zou realiseren.
Er zijn tal van voorbeelden dat de ontwikkeling van de wetenschap langdurig werd opgehouden, doordat allerlei kennis die al wel vergaard was nog niet tot een goed bruikbaar apparaat was omgesmeed. Denkt u zich maar eens in dat u moest vermenigvuldigen zoals de Romeinen dat deden, of dat u met breuken moest omgaan zoals de Egyptenaren, beide voorbeelden uiteraard rekenkundig bedoeld. De routine moet echter wel *funktioneel* zijn. Er is in het verleden weleens teveel onbruikbare routine en te weinig begrip aan de leerling gepresenteerd.
Het analiseren van een routine is overigens wel degelijk een kreatieve bezigheid. Ervaringen in het voortgezet onderwijs leren ons dat leerlingen die een routine zelf in blokschema hebben gezet geen enkel probleem meer hebben met het hanteren van zo'n routine.
Bij het konstrueren van blokschema's, zoals bijvoorbeeld in het voorgaande het schema voor de staartvermenigvuldiging, wordt de behoefte gevoeld aan een verzameling van korte bondige opdrachten en vragen. Een schema waarin de blokken lange teksten bevatten wordt niet als overzichtelijk aangevoeld. Elke docent zal zijn eigen wijze hebben om lange opdrachten in één of enkele woorden samen te vatten. 'Stam + t' is een ons bekend voorbeeld.
Kortom, er ontstaat een soort vakjargon waaruit blokschema's worden opgebouwd. De bij komputers in gebruik zijnde programmeertalen zijn daarvan de verst doorgevoerde voorbeelden. De vervulling van de eisen (2) en (4) wordt hierbij zo dicht benaderd, dat deze talen ook worden gebruikt voor kommunikatie tussen mensen onderling, in ingewikkelde gevallen waarin men misverstanden wil uitsluiten.
Wanneer men aan leerlingen een opdracht geeft tot het in blokschema brengen van een bepaald proces, zullen de leerlingen over dat vakjargon moeten beschikken (een programmeertaal) óf men zal hun de bouwstenen (primitiva) voor het schema moeten verstrekken.
Een leerling met de opdracht de aankleedroutine van zijn vader in blokschema te brengen, zonder bekend te zijn gemaakt met de inhoud van de blokken, kan er zich terecht van afmaken met:



Een andere leerling komt misschien tot de volgende onthullingen (ontleend aan Lohberg en Lutz: Hoe werkt een computer).



leerplanologie

ADRI TREFFERS
EDU WIJDEVELD

0 INLEIDING

Aan het eind van de vijftiger en het begin van de zestiger jaren rezen in vele landen van de westerse wereld de leerplanprojekten voor de eksakte vakken in ijltempo uit het gemeenschappelijk grondgebied van universiteit en voortgezet onderwijs; soms werd ook het basisonderwijs er bij betrokken.
De initiators waren zowel vakwetenschappers van de universiteit als vertegenwoordigers van de onderwijspraktijk. Samen vormden ze een stuurgroep, die algemene richtlijnen verschafte voor ontwikkelteams en schrijversgroepen. In luttele jaren werden onderwijs-leerstofpakketten ontworpen, uitgeprobeerd, gereviddeerd en verspreid: een ontwikkeling, die zijn weerga niet kende in het onderwijs.
De basisteksten werden veelal in enkele weken ontworpen, soms had men er een lange hete zomer voor nodig. Binnen enkele jaren werden de teksten schoolrijp bevonden. Nadat het totale pakket op de markt was gekomen gingen de stuurgroep, de schrijversgroep en het ontwikkelteam naar huis. De uitgevers namen het totale pakket aan leerlingenteksten, werkkaarten, handboeken over en de revisie was verder aan hen.

Dit beeld van de leerplaneksplosie zien we in vele landen optreden. Soms zijn het lerarenorganisaties, die zich achter het karwei spannen, soms scholen, die het werk aanpakken, maar steeds vertoont zich hetzelfde beeld:

* De nadruk komt te liggen op een vaksgewijze vernieuwing; kompartiment voor kompartiment wordt het nieuwe leerplan opgebouwd. Eerst komen eksakte vakken aan de beurt, vervolgens sociale vakken en tenslotte – in het beste geval – talen en expressievakken.
* Er is een binding met de wetenschappelijke disciplines van de universiteit hetgeen blijkt uit de nadruk die er komt te liggen op de algemene principes, de grondbegrippen en strukturen, die het vakgebied z'n specifieke karakter verlenen.
* In vrijwel alle gevallen is de snelheid van ontwerpen, ontwikkelen en verspreiden groot.[1]

In de loop van de zestiger jaren kwam er op deze gang van zaken kritiek van verschillende kanten:
- van onderwijspraktische en vakdidaktische aard,
- van evaluatieve aard,
- van algemeen onderwijskundige aard.

1 KRITIEK VAN ONDERWIJSPRAKTISCHE EN VAKDIDAKTISCHE AARD

Het onderwijspraktische bezwaar richtte zich tegen het ontbreken van een adekwate heroriëntering en begeleiding.[2]
De onderwijzer van de basisschool moet z'n onderwijs vooral baseren op studieboeken en onderwijzersboeken, waarin de leerlingentekst doorschoten was met wiskundig en onderwijskundig kommentaar.
Voor een vernieuwd rekenprogramma kon een dergelijke begeleiding z'n nut hebben, maar voor een matematisch programma bleek een papieren basis te zwak.[3]
In het algemeen kan men stellen, dat de voorwaarden voor een effektieve verspreiding van het ontwikkelde materiaal beslist onvoldoende waren. Voor een aantal vooraanstaande wiskundigen was dit een reden om de vernieuwing op de basisschool af te wijzen, indien niet eerst de kadervorming en de onderwijzersopleidng, bevredigend zouden funktioneren:

> 'It is to build a better corps of teachers.... These teachers must not only be better informed in mathematics, but they must also acquire a far better idea of why mathematics is important, why particular topics in mathematics are taken up, and

> what values mathematics offers to our civilization and culture'.[4])

Is deze afwijzing terecht?
Wij menen van wel. Het is opvallend dat vrijwel alle leiders van grote wiskunde-projekten uit de V.S. (Davis, Beberman, Rosenbloom, Page, Scott, e.a.) tot dezelfde slotsom komen: de vernieuwing van het wiskundeonderwijs is verschraald tot een leerstofvernieuwing.

> 'It becomes quite apparent through continued analysis that the entire modern mathematics revolution has been a revolution in content, not in pedagogy'.[5])
>
> 'In any event, by the mid sixties there was growing recognition on the part of many mathematicians that content alone would not solve the problem of improving mathematics instruction in the Elementary Schools'.[6])

En deze leerstofvernieuwing op zich bleek in het algemeen niet voldoende te zijn voor een didaktische vernieuwing, enkele uitzonderingen daargelaten. (Dienes, Nuffield)
Kort en goed: de onderwijzer was zowel in matematisch als in didaktisch opzicht onvoldoende toegerust voor een verantwoorde vernieuwing van het rekenonderwijs.
Sterker nog: de onderwijzer kon zich die uitrusting niet verschaffen, omdat de leerplanmakers zèlf de problematiek niet fundamenteel doordacht hadden. Daarvoor waren de ontwerp- en de ontwikkelingsfasen van de projekten in het algemeen te kort geweest.
Wat nu te doen?
Paul Rosenbloom (Minnemastproject) geeft één richting aan:

> 'Although the sixties offered a variety of innovative projects and sometimes unusual and exciting experimental programs for mathematics teaching and learning, the seventies seem still to be faced with the dilemma of defining the most meaningful and efficient objectives of mathematics education. With the creation and the development of several new branches of mathematics as well as new applications of mathematics, the functions of a mathematics curriculum seem to be dependent, more than ever before, on how we organize mathematical learning experiences and on how we perceive the nature of mathematics and its related pedagogy'.[7])

Naast deze programmapunten – bezinning op uitgangspunten, algemene doelstellingen en fundamentele matematisch-didaktische beschouwingen – stellen we nog de hiervoor genoemde voorwaarden (Kline, Adler) van kadervorming en heroriëntering. Zo komen we dan vanuit deze onderwijspraktische en vakdidaktische kritiek tot de volgende programmapunten voor Wiskobas:

- *Kadervorming (opleiders en begeleiders).*
- *(Her)oriëntering (onderwijzers en studenten P.A.).*
- *Formulering van de uitgangspunten (zie 'De Klok').*
- *Formulering van de algemene doelstellingen (zie 'De Kubus').*
- *Fundamenteel matematisch-didaktische beschouwingen over relevante leerstofgebieden.*

En dit waren dan de kritiekpunten van praktische en didaktische aard op de eksplosieve leerplanontwikkeling rond 1960.
Hiermee is echter niet alles gezegd. Meer gedetailleerde kritiek vanuit de nederlandse situatie zou zich ook moeten richten op de diversiteit van de uitwerkingen in verschillende sektoren, te weten de matematisch-empirische, de matematisch-aritmetische en de matematisch-strukturele richting, waardoor het onderwijspraktische bezwaar niet alleen een lokaal maar zelfs een nationaal karakter kreeg. Maar ook als we deze specifiek nederlandse problematiek buiten beschouwing laten, zijn er nog wel enkele kritische noten te kraken.

2 KRITIEK VAN EVALUATIEVE AARD

We spreken hier niet over de kwestie, hoe de evaluator de leerplanontwikkeling, zoals die in de inleiding geschetst is, beoordeelt of veroordeelt.
We willen de relatie eens omkeren en bekijken hoe de evaluatie vanuit de wiskunde-leerplanontwikkeling beoordeeld wordt: *de evaluator geëvalueerd!*
Laten we dan maar meteen met de deur in huis vallen: slecht!
We bedoelen daarmee te zeggen, dat de bijdrage van de evaluator aan de leerplanontwikkeling tot nu toe als 'slecht' gekwalificeerd wordt. In een vorig hoofdstuk bespraken we de kwestie van het formuleren van

konkrete doelstellingen, die nauw verwant is aan de evaluatieproblematiek.
Eén van de belangrijkste argumenten tegen de formulering van konkrete doelstellingen lag in het feit, dat de nadruk teveel op de triviale, laag in de taksonomie geklassificeerde doelen komt te liggen. Zo vindt men bijvoorbeeld in het PLAN-projekt een inventarisatie van doelstellingen, door Robert Mager e.a., die uitsluitend in de eerste twee kategorieën van het Bloom-schema passen (I Knowledge, II Comprehension).
En deze kwestie is voor gezaghebbende wiskundigen van de 'Cambridge Conference on School Mathematics' aanleiding om de evaluators aan te vallen:

> 'We are shocked by the callow empirism which confers honorary validity on whatever measurement techniques it has managed to devise, and confers honorary nonexistence on all aspects of the human psyche that have not yet been explained to an IBM punching machine'.[8])

Ook in de eigen evaluatiekring is men zich bewust van de eenzijdigheden bij het formuleren van doelstellingen in termen van waarneembare gedragingen:

> 'Perhaps the most valid criticism of the behavioral approach is that it narrows the teacher's view of learning. Education is reduced to industrial engineering, with quality control and systems analysis the bases for decision making'.[9])

Pogingen om de evaluatie te verruimen en ook het leerproces aan een onderzoek te onderwerpen, om zodoende verbetering en aanpassing van het leerplan te bewerkstelligen hebben (nog) niet geleid tot een verbeterde verhouding tussen de wiskundige, die een kreatieve ruimte in z'n leerplan wil realiseren, en de evaluator; de evaluator blijft volgens de matemaat teveel in z'n ivoren meettoren.
Parlett raakt de kern van de problematiek als hij er op wijst, dat deze evaluatie te zeer vertrekt van een technologische basis, en hij bepleit een antropologische benadering:

> 'This involves the investigator leaving his office and computer print-out to spend substantial periods in the field'.[10])

Hij meent dat de technologische simplifikatie van de onderwijsrealiteit in het gebruikelijke soort onderzoek oorzaak is van de kloof tussen evaluator en onderwijsman. De antropologische benadering, die Parlett bepleit, dient ertoe om de leerplanontwikkelaar, de praktijkman en de evaluator bij elkaar te brengen:

> 'The evaluator concentrates on 'process' within the learning milieu, rather than on 'outcomes' derived from a specification of the instructional system. Observation, linked with discussion and background inquiry enable him to develop an informed account of the innovation in operation'.[11])

Kortom, de evaluator wordt medewerker, medebetrokkene, supporter in de geschetste onderzoeksopvatting, die wel aangeduid wordt als *illuminatieve evaluatie.* We merken op, dat Parlett niet wars is van empirisch onderzoek, maar dat hij een bepaalde fasering in het onderzoek aanbrengt, die meer lijkt aan te sluiten bij de specifieke behoefte van leerplan-ontwikkelaars. Wellicht wordt op deze wijze de technologische evaluatie verrijkt met de fenomenologische en 'verstehende' metode, en krijgt ze daardoor wat meer nut voor de ontwikkelaars van een kreatief leerplan.
We willen het bij deze zeer algemene punten laten. Er zou nog veel te zeggen zijn over de verschillende opvattingen bij kwesties als:
– kriteria voor leerstofselektie,
– samenhang algemene doelstellingen – konkrete doelstellingen,
– inventarisatie van doelstellingen,
– relatie onderwijsfilosofie – doelstellingen.

Laten we samenvattend stellen, dat de leerplaneksplosie óf niet begeleid is door onderzoek, óf slechts op ondergeschikte punten, terwijl juist de hogere leervormen (toepassingen, inzicht, inventiviteit) waarop in de nieuwe leerplans zoveel nadruk gelegd wordt, systematisch uitgeschakeld werden in het onderzoek.
Er is echter geen reden tot wederzijdse wrok, want – zo bleek uit de vorige paragraaf – ook de matematen en didaktici zelf kunnen hier de evaluator geen handreiking bieden, omdat ze onvoldoende zicht hebben op de meer kreatieve leerprocessen.
Parlett geeft een hoopvol perspektief en dit is dan ook het volgende Wiskobasprogrammapunt:

▸ *Samenwerking van ontwerp- en onderzoeksgroep bij de realisering van een kreatief integratieplan.*

3 KRITIEK VAN ALGEMEEN ONDERWIJSKUNDIGE AARD

In 't voorgaande werd het heil van verbetering gezocht in de verbetering van voorwaarden (begeleiding, kadervorming, heroriëntering), in een meer passende onderzoeksmetode (illuminatieve evaluatie) en in een verdere doordenking van de essentie van de wiskunde en een daarmee gepaard gaande kreatieve gestaltevorming van het onderwijs. Vanuit de algemeen-onderwijskundige hoek wordt de kwestie van de leerplanontwikkeling veel meer vanuit de taak en de plaats van de school als geheel benaderd.

De kritiek op de gevolgde leerplanontwikkeling is bekend:

* Er is sprake van een klakkeloze aanpassing bij het bestaande vakkensysteem van de school.
* Het vak is te veel een afspiegeling van de wetenschappelijke discipline: het psychologische en het logische aspekt zijn niet evenwichtig verdeeld.
  De 'akademische' vakken kunnen niet alle leerplan-inhouden leveren, die belangwekkend zijn voor de vorming van het kind.
  De organisatie van de leerplanontwikkeling is niet bevredigend: het partikulier initiatief – hoezeer toe te juichen – zorgt voor een verbrokkeling van de integrale aanpak. In het algemeen is men voor een grotere participatie van de staat, met name met betrekking tot een organisatorisch-financiële steunverlening.

3.1 Reaktie

3.1.0 De reaktie op deze geïsoleerde vakmatige aanpak bestaat uit een allesomvattende leerplanontwikkelingsprocedure, die zo ingrijpend is, dat we er hier wat meer aandacht aan willen schenken.

Schets van een allesomvattende aanpak

Zien we op dit moment af van nuanceverschillen, dan komt de aangeprezen werkwijze voor leerplanontwikkeling hierop neer:

* Maak een diepgaande analyse van de funktie van het onderwijs in de samenleving. Let daarbij zowel op de feitelijke funktie die het onderwijs heeft, als ook op de wenselijkheid van een andere plaats van het onderwijs in de samenleving.
* Ontleed de toekomstige maatschappij op benodigde funkties (beroepen), bekwaamheden en bijbehorende kwalifikaties. Zeef het resultaat van de analise met behulp van een pedagogisch rooster en voeg er, indien gewenst, enkele ingrediënten aan toe.
* Kom nu vanuit de gegevens der analise, via een bepaalde onderzoeksprocedure tot de formulering van onderwijsdoelen, waarover konsensus bestaat tussen de geraadpleegden, i.c. onderwijsdeskundigen, antropologen, vakwetenschappers, politici en praktici, enz.
* Formuleer na de inventarisatie, die in het algemeen geschiedt binnen een enigszins geordend kader, waarin de doelstellingen reeds enigermate geklassificeerd zijn, de doelstellingen zodanig, dat komponenten van belangrijkheid en bereikbaarheid e.d. tot uitdrukking komen.
* Kom volgens een proces van voortschrijdende konkretisering van de doelstellingen tot een meer nauwkeurige leerstofselektie en -ordening, planning van het onderwijs, uitvoering en evaluatie ervan.

Kortom, men inventariseert de meningen omtrent de benodigde kwalifikaties voor de toekomstige samenleving, gaat na welke bijdrage het onderwijs daaraan kan leveren, formuleert de algemene onderwijsdoelen, ordent deze doelen onder verschillende opzichten, gaat via de konsensusprocedure over tot detaillering van de doelen, selekteert de leerstofinhouden, organiseert de onderwijs-leersituatie, voert het onderwijsproces uit en evalueert tenslotte of aan de kwalifikatie-eisen is voldaan.

Het is niet onmogelijk, dat men het totale onderwijs-systeem op de helling zet en ook de totale organisatie van de leerplanontwikkeling kan daarbij diskutabel gesteld worden: vandaar de term 'allesomvattende aanpak'.

Robinsohn licht de geschetste aanpak op drie punten toe:

– Er moeten kriteria vastgesteld worden om vanuit de doelstellingen tot een selektie van leerstofinhouden te komen. Het maatschappelijk belang, de wetenschappelijke relevantie en de persoonlijke waarde zijn dergelijke maatstaven.
– Er moeten procedures aangegeven worden om af te meten of bepaalde inhouden

Relevantie respondenten (2006 RSTP)

optimaal relevant zijn. Robinsohn merkt op, dat de beschikbare meetinstrumenten en metoden te onvolmaakt zijn om een dergelijke meting te verrichten. Hij adviseert om deskundigen uit de samenleving door middel van interviews te raadplegen over de relevantie van de leerstofinhouden.

– Beoefenaren van de vakwetenschap, mensen die gebruik maken van de wetenschap en vertegenwoordigers van de menswetenschappen moeten een geprefabriceerde lijst bewerken, die samengesteld is door leerplanontwikkelaars. In dit verband zou het van belang zijn, dat de matematische struktuurelementen, de didaktische uitgangspunten en de psychologische feitelijkheden ekspliciet gemaakt worden.[12])

De korte schets, die we maakten van de voorgestane totale aanpak, laat duidelijk het verschil zien met de vakgerichte werkwijze, die we in de inleiding tekenden: men wenst tussen de eisen van de maatschappij, de school, en de verzamelde doelstellingen een moment van kritische bezinning te stellen.

In enkele gevallen leidt dit ertoe, dat het hele schoolsysteem en de opbouw van het leerplan in vakken diskutabel gesteld wordt, in andere gevallen wijst men op de gevaren van een totale leerplanrevolutie en propageert een meer geleidelijke realisering van de geschetste allesomvattende leerplanprocedure vanuit de bestaande schoolvakken.[13])

Hoe groot echter de nuance-verschillen ook mogen zijn, het totaalbeeld is duidelijk en sluit aan bij de demokratische 'ggd-procedure' van Kearney en French. Een nieuw element is zeker ook de grote aandacht voor de organisatie van de leerplanontwikkeling.

3.1.1 Het allesomvattende karakter komt duidelijk tot uitdrukking in de omschrijving van *het doel van opvoeding en onderwijs*, waarmee men de beschouwingen begint.

Bijl gaat uit van Hoogveld's definitie van opvoeden: het kind bekwaam helpen te maken om zelfstandig zijn levenstaak te volbrengen. Vervolgens onderscheidt hij in de levenstaak een aantal komponenten, te weten:

* Het betrokken zijn bij een godsdienst, levensbeschouwing, kerk of overtuigingsgemeenschap.
* Het gezins-partner zijn.
* Het kwijten van zijn medeburgerlijke verantwoordelijkheid als lid van staats- en volksgemeenschap.
* Taak als beroepsbeoefenaar.[14])

Na de levenstaakanalise is een overzicht van vereisten nodig en juist het verkrijgen van dit overzicht is de centrale opgave van het leerplanonderzoek.

De leerplanontwikkelaar gaat nu de meningen van relevante deskundigen inventariseren, maar vooral ook normeren. De pedagoog zal immers in laatste instantie dienen te bepalen wat vormend is: slechts datgene uit de wetenschappen wat de algemeen menselijke vorming tot vervulling van de genoemde taak-komponenten dienstbaar kan zijn, dient gehandhaafd te blijven.

Zo komen we via de komponents-didaktieken tot programma's en leergangen.

Kenmerkend voor de genoemde gedachtengang is de overheersende plaats die de algemeen-onderwijskundige inneemt: niet de vakidioot, maar de opvoedingswijze neemt het heft in handen. Hij normeert, selekteert en deduceert tot er tenslotte een schoolwerkplan uit de bus komt.

3.1.2 Bij *De Corte* (België) vindt men ook een soortgelijke aanpak: men dient eerst de *feitelijke maatschappelijke taak van het onderwijs vast te stellen* om dan via een toetsing aan pedagogische kriteria over te gaan tot formulering van onderwijsdoelen.

De maatschappelijke funktie van het onderwijs wordt door De Corte als volgt omschreven:

> 'Het onderwijs heeft tot taak de kinderen te helpen ingroeien in de werkelijkheid in het algemeen en in de kultuur en de struktuur van de samenleving in het bijzonder, als ook hen bekwaam te maken om op een zelfstandige, produktieve en creatieve manier aan het maatschappelijk leven deel te nemen'.[15])

De belangrijkste pedagogische vraag is nu volgens De Corte:

> 'Welke zijn de eigenschappen en gedragspatronen, die de leerlingen moeten ontwikkelen, opdat ze zich efficiënt kunnen bewegen in de samenleving en participeren in het maatschappelijke leven?'

Welnu, om deze vraag te beantwoorden gaan we weer te werk volgens het principe van de voortschrijdende konkretisering: inventariseren, normeren, selekteren en deduceren tot we een konkreet plan bezitten.

3.1.3 *Hartmut von Hentig* (W. Duitsland) pakt in twee opzichten de kwestie steviger aan:
* hij analiseert de huidige samenleving met het oog op de formulering van leerdoelen;
* hij tracht z'n opvattingen over een allesomvattende aanpak te konkretiseren in een projekt te Bielefeld.

Von Hentig noemt dertien belangrijke verschijnselen van de huidige maatschappij, die van belang zijn voor de school, waaronder drie basisfenomenen:
- het proces van de snelle verandering
- het proces van de verwetenschappelijking
- het proces van de toenemende vermaatschappelijking (tendens tot maatschappelijke regelingen).[16])

In het projekt van Bielefeld wordt deze analise tot uitgangspunt genomen bij de formulering van de doelen. In de nu volgende vaststelling klinkt een zekere machteloosheid ten aanzien van de allesomvattende procedure door:

> 'Es hat sich dabei gezeigt, eine wie ungewohnte, komplizierte, langwierige und notwendige Prozedur schon die vorlaüfige Aufstellung eines Zielkatalog ist. Der Weg, den die Theorie allein von hier aus bis zur systematischen Operationalisierung, etwa in der bekannten Form des Spiralenmodells, für die einzelnen Einheiten gehen musz, ist ungeheuer weit. Dabei musz der Anteil, den die Analyse von Verwendungssituationen einerseits, 'the structure of disciplines' anderseits an der Zielbestimmung haben soll, festgelegt werden, das Verhältnis von Lern- und Institutionszielen geklärt werden usw.
> In Deutschland steht die gesamte Aufgabe, normierte und normierende 'Lehrpläne' auch nur begrifflich in offene und kontrollierbare 'Lernsituationen' umzusetzen, noch ungelöst bevor'. [17])

3.1.4 *Vatten we de kenmerken van de allesomvattende werkwijze eens samen:*
- Men neemt één of meer algemene opvoedings- of onderwijsdoelen tot uitgangspunt.
- Men wenst de meningen van deskundigen omtrent het doel van het onderwijs in de samenleving te inventariseren of men doet zelf een poging de maatschappelijke funktie van het onderwijs vast te stellen.
- De normering van de wenselijkheden zal door de onderwijsdeskundigen i.c. de leerplanontwikkelaars dienen te geschieden.
- Men wil het leerplan ontwikkelen vanuit een totaalplan (onderwijs-leerplan) tot deelplannen per 'vak' per schooltype (schoolwerkplan).
- Bij het selekteren van de leerstof gaat men uit van de analise van de levenstaak of iets dergelijks; het bestaande vakkensysteem wordt diskutabel gesteld.
- De organisatie van de leerplanontwikkeling weerspiegelt het deduktieve karakter in z'n totaalstruktuur.

3.1.5 *Vooronderstellingen*
Door de allesomvattende benaderingswijze dient de funktie van het onderwijs geëkspliciteerd te worden en daarmee stelt zich het onderwijs diskutabel. Leerplanontwikkeling berust volgens deze opvatting op de gedachte van konsensus en samenwerking. Maar... de leerplanontwikkelaar bepaalt in laatste instantie wat wenselijk is voor het kind. In eerste instantie vertoeft de leerplanontwikkeling op de ijle hoogten van de maatschappij-opvattingen.
- Het gewicht aan konsensus zorgt voor de nederdaling (eerste vooronderstelling). De konsensusgedachte bergt volgens deze opvatting geen verschraling in vormend opzicht in zich, en is dan ook niet onverenigbaar met de onderwijskundige basisideeën.
- De onderwijskunde beschikt over het wetenschappelijk apparaat om de voorgestane ontwikkelingsprocedure te voltrekken (tweede vooronderstelling). We zouden eraan toe kunnen voegen dat het organisatorisch-financiële apparaat eveneens ter beschikking staat.
- De afleiding van het lagere (bv. het schoolwerkplan) uit het hogere (bv. het onderwijsleerplan) bevat een aantal keuzemomenten. Er zijn kriteria om het gekozene te rechtvaardigen (derde vooronderstelling). Beter gezegd: er zijn kriteria om te kiezen.

Ten aanzien van de drie genoemde vooronderstellingen merken we op, dat in geen enkel geval de hypotese ondersteund wordt door feiten.

We kunnen nog een reeks diskutabele vooronderstellingen formuleren, die tenslotte allen hun oorsprong vinden in de vooronderstelling,

dat de allesomvattende aanpak nieuwe gezichtspunten naar voren brengt en uiteindelijk leidt tot verbetering van het onderwijs.
En juist dit uitgangspunt maakt het zo merkwaardig, dat de leerplanontwikkelingsprocedure geïsoleerd beschouwd wordt: de lerarenopleiding, de schoolorganisatie en de bestaande onderwijsstruktuur worden niet bij de leerplandenkbeelden ingesloten. Het geheel van de beschouwingen maakt mede daardoor een vrijblijvende indruk.

3.1.6 *De uitersten*
Laten we ons standpunt ten aanzien van de uitersten tenslotte formuleren:
Leerplanontwikkeling kan zich enerzijds verengen tot een onderzoek naar de funktie van het onderwijs in de samenleving, blijven steken in de technisch-financiële problemen van de deduktie uit het naast-hogere of gevaar lopen de onderwijskundige basisideeën te mengen tot een g.g.d.-papje.
Anderzijds is het mogelijk, dat de autonomie van een groep eksperts zou kunnen leiden tot een leerplanontwikkeling, die sporen draagt van vakidiotisme, technokratie, ideologische beïnvloeding e.d., omdat men zich niet verantwoordt en de uitgangspunten evenmin eksplisiteert.
Beide uitersten zijn het gevolg van een beperkte visie: enerzijds vanuit de algemene didaktiek of de onderwijskunde, anderzijds vanuit een bepaald vak. Voegen we daarbij de reeds eerder gesignaleerde overdrijving uit de onderzoekstechnische hoek — aangeduid als operationalisme — dan zien we de ekstremen van drie belangrijke verschijningsvormen van de leerplanontwikkeling in de zestiger jaren:
- de allesomvattende aanpak, gepropageerd door algemene onderwijskundigen, leidend tot een fundering en motivering van de leerplanontwikkeling (op papier);
  vooral Bijl en De Corte zijn in het nederlandse taalgebied propagandisten van deze aanpak;
- de praktische uitwerking, gerealiseerd door de 'kommissies modernisering' voor bepaalde vakken; vooral de C.M.L.W. liep voorop;
- evaluatie en onderzoek; R.I.T.P. en C.I.T.O. hebben bijgedragen tot de toetsontwikkeling.

Uit het voorgaande kunnen we voor Wiskobas de volgende programmapunten afleiden:

- ▸ *Bij de bepaling van de doelstellingen of het leerplan dienen meerdere deskundigen, ook van buiten het vakgebied ingeschakeld te worden.*
- ▸ *Het algemene onderwijsdoel dient mede in de beschouwingen betrokken te worden.*

In één van de volgende hoofdstukken zullen we de demokratische leerplanprocedure, die wij in het Wiskobas-projekt realiseren, uitvoerig beschrijven.

4 SAMENVATTING
We beschouwden de leerplaneksplosie gedurende het begin van de zestiger jaren en de kritische reakties daarop.
We destilleerden daaruit behartenswaardige punten voor het Wiskobas-projekt, te weten:
- ▸ Kadervorming als noodzakelijke voorwaarde.
- ▸ (Her)orientering van onderwijzers en studenten P.A. als tweede noodzakelijke voorwaarde.
- ▸ Het belang van de formulering van de uitgangspunten voor het wiskunde-onderwijs (zie 'De Klok').
- ▸ Het belang van de formulering van de algemene doelstellingen (zie 'De Kubus').
- ▸ De noodzaak van fundamenteel matematisch-didaktische beschouwingen over relevante leerstofgebieden in verband met doelstellingenformulering.
- ▸ De noodzaak van samenwerking tussen ontwerper, ontwikkelaar en onderzoeker.
- ▸ Het belang van een demokratische leerplanprocedure.

Deze opmerkingen kwamen voort uit onderwijspraktische, vakdidaktische, evaluatieve en onderwijskundige overwegingen en ze vormen een goede overgang naar een standpuntbepaling inzake uitgangspunten en doelstellingen van het wiskundeonderwijs waarover we in de laatste aflevering van deze jaargang zullen schrijven.

Noten op pagina 852 ⟶

5 LITERATUUR

[1]) Huhse, K.: – Theorie und Praxis der Curriculum – Entwicklung. Ein Bericht über Wege der Curriculum – Reform in den U.S.A. mit Ausblicken auf Schweden und England,
Berlin, 1968

[2]) Perel, W.M. en Vair, P.D.: – New Mathematics and Old Teachers in the Elementary School,
in 'the Education Forum' 31
pag 344-349

[3]) Hutin, R.: – Mathématique. Notes méthodologiques pour la deuxième et la troisième année primaire, Geneve, 1970
Hierin wordt beschreven, dat de leerkrachten van de eksperimenteerscholen hun achtergrondkennis – ondanks begeleiding – onvoldoende achten.

[4]) Kline, M.: – Math Teaching assailed as peril to U.S. Scientific Progress,
pagina 3
New York University Alumni News, 1961

[5]) Scott, L.F.: – Increasing Mathematics Learning through Improving Instructional Organization,
in Lamon, W.E. (ed): 'Learning and the nature of mathematics'
pagina 22
Chicago, 1972

[6]) Vere De Vault, M. en Weaver, F.J.: – Forces, and issues related to curriculum and instruction K – 6,
in 'A History of Mathematics Education in the United States and Canada' (the National Council of Teachers of Mathematics),
pagina 143
Washington, 1970

[7]) Rosenbloom, P.C.: – Some aspects of learning and teaching modern mathematics,
in Lamon, W.E. (ed): 'Learning and the nature of mathematics'
pagina 86
Chicago, 1972

[8]) Cambridge Conference on School Mathematics: – Goals for School Mathematics,
pagina 29
Boston, 1963

[9]) Sund, R.B. en Picard, A.J.: – Behavioral Objectives and evaluational Measures: Science and Mathematics,
pagina 8
Ohio, 1972

[10]) Parlett, M. en Hamilton, D.: – Evaluation as illumination: a new approach to the study of innovatory Programs,
pagina 31
Edinburgh, 1972

[11]) ibid

[12]) Robinsohn, S.B.: – Bildungsreform als Revision des Curriculums,
Berlin, 1970_2

[13]) Nölker, H. en Schoenfeldr, E.: – Phasen der Curriculumentwicklung,
pagina 459-466

[14]) Bijl, J.: – Over Leerplanonderzoek,
Groningen, 1966

[15]) Corte, E. de: – Naar een model voor inventarisatie van didaktisch wenselijke onderwijsdoelstellingen,
in 'Pedagogische Studiën' 48/1 (1971)
pagina 26

[16]) Hentig, H. von: – Allgemeine Lernziele der Gesamtschule,
in 'Gutachten und Studien der Bildungskommission' 12
pagina 13-44
Stuttgart, 1971/2

[17]) Hentig, H. von: – Curriculum-Reform als Gegenstand der Schule
in 'Paedagogica Europaea' 1970/71
pagina 126
Den Bosch, 1971.

Wiskobas Bulletin

Deze eerste aflevering wordt gratis, in een geringe oplage, verspreid. Uit de inhoud kunt u opmaken dat WISKOBAS-BULLETIN in eerste instantie bestemd is voor onderwijzers die een Heroriënteringskursus volgen en voor studenten aan de Pedagogische Akademies die werken met de blokkenserie 'Wiskunde Didaktiek voor de Pedagogische Akademie'.

De abonnementsprijs bedraagt voor deze kategorieën f 15,–, per jaargang. Aan één voorwaarde dient dan te zijn voldaan, nl. dat zij zich via de docenten H.O. en P.A. aanmelden. Dezen ontvangen een verzamellijst, waarop zij de namen en adressen van de abonnees invullen. Zij maken tevens het verschuldigde bedrag (. . . . x f 15,–.) over.

De abonnees krijgen de resterende nummers (2 t/m 5) thuisgestuurd.

De abonnementsprijs voor diegenen die zich niet via de H.O. of de P.A. als abonnee aanmelden, bedraagt f 25,–.

Zij kunnen zich abonneren door dit bedrag over te maken op:

girorekening 50 01 67 van Vlaer en Kol te IJsselstein t.n.v. V.V.C., rek. nr. 2 18 40 14 50, onder vermelding van WISKOBAS-BULLETIN.

wiskunde werkhoeken

HANS TER HEEGE

In hoeverre meetkunde-onderwijs op de basisschool thuis hoort, is op dit moment nog niet helemaal duidelijk. Het is echter zeer goed denkbaar dat tangrampuzzels een plaats zullen vinden in de wiskundewerkhoek.
Een van de meest in het oog springende aspekten van de tangrampuzzel is de in het materiaal verankerde *variatie van moeilijkheidsgraad.*
Wat is een tangrampuzzel?
Het is een puzzel die uit zeven eenvoudige meetkundige figuren bestaat. De tekening laat dat zien. (fig. 1)

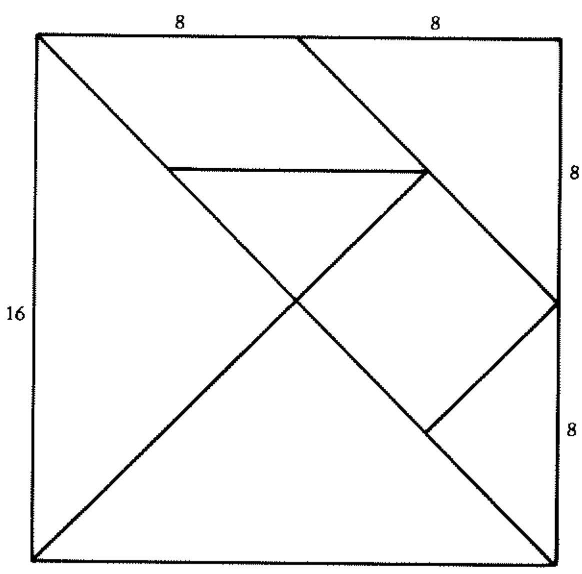


fig. 1

Diverse firma's brengen tangrampuzzels op de markt, onder andere Vermande en Malmberg. Het is overigens vrij eenvoudig om zelf een tangrampuzzel te maken. Men kan de figuren met een kartonneermesje snijden uit een stukje stevig karton.

De bij de tekening vermelde maten zijn in centimeters. Ze zijn zo gekozen dat de vormen voor de leerling prettig te gebruiken zijn. Het is wel belangrijk dat u een vast, handig formaat kiest en daar ook rekening mee houdt bij het samenstellen van de opdrachten.

Met de zeven vormen kunt u een groot aantal figuren maken. De figuren in de onderstaande tekst zijn gebaseerd op een tangramvierkant met zijden van $2\frac{1}{2}$ cm. Opdat u de opdrachten kunt uitvoeren hebben we een uitknipbare tangram van die afmetingen voor u afgedrukt. (fig. 2)

U ziet hier (fig. 3) een parallelogram dat te verkrijgen is door in de oorspronkelijke figuur – het vierkant – slechts twee stukken te verleggen.

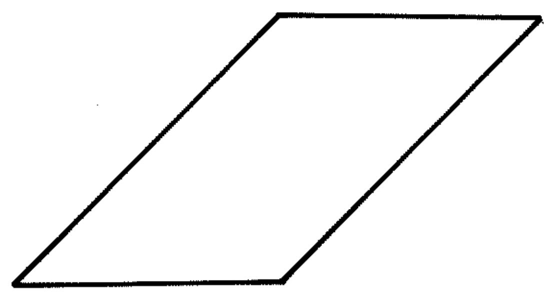


fig. 3

Voor kinderen kunnen we gebruik maken van figuren uit de dieren- of sprookjeswereld. Ook hier zijn zeer moeilijke figuren te bedenken. Op dit gebied kunnen kinderen kreatief bezig zijn op zeer verschillende handelingsnivo's.

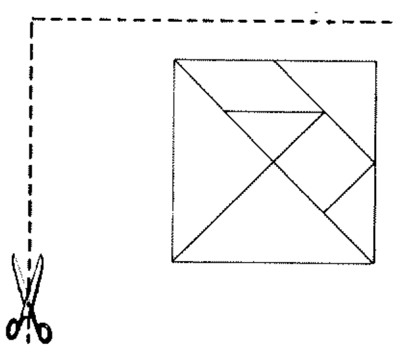


fig. 2

Een poes. (fig. 4)

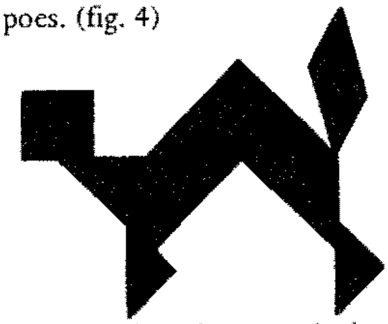


fig. 4

En hier ziet u hoe de poes uit de zeven delen is samengesteld. (fig. 5)

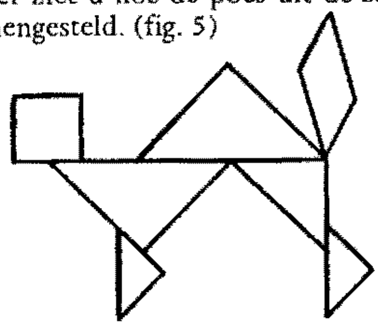


fig. 5

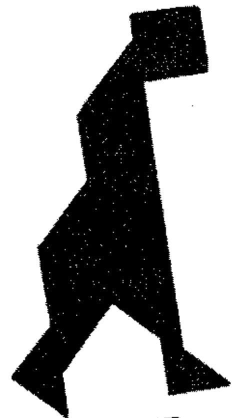
Dit soort opdrachten zijn al op te nemen in de wiskunde-werkhoek van een 3^{e} of 4^{e} klas.
In de hogere klassen kunnen we wat moeilijker opdrachten geven. We nemen hier een praktikum op, waarin naar onze inzichten suggesties voor opdrachtkaarten zitten. Het nivo van het gehele praktikum is klas 5 of 6 van de basisschool.
Het is mogelijk dat leerlingen van een 4^{e} klas dit praktikum, na oefening met de tangrampuzzel, kunnen maken.
Bij eerste kennismaking is het naar onze mening vrij pittig.

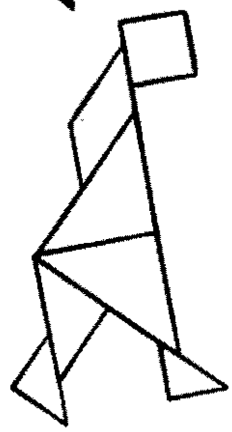
PRAKTIKUM

'NAAR DE DIERENTUIN'

doe dit werk alleen **gebruik een tangrampuzzel**

Ik ben zondag met mijn tante en oom naar de dierentuin geweest. Tante en oom kwamen mij al vroeg halen. In de haast om maar so snel mogelijk in de dierentuin te zijn vergat ik bijna mijn speciale foto-toestel: mijn tangram-toestel.
Ik nam een foto van mijn oom:



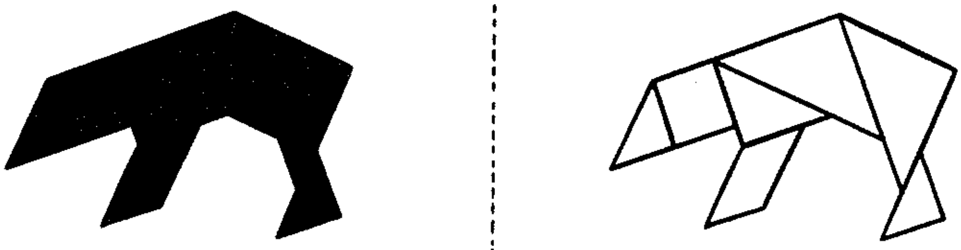


▸ Opdracht: Hier zie je hoe de foto van oom gemaakt is. Leg de vormen van je puzzel op deze 'foto'. Kijk goed naar het voorbeeld.

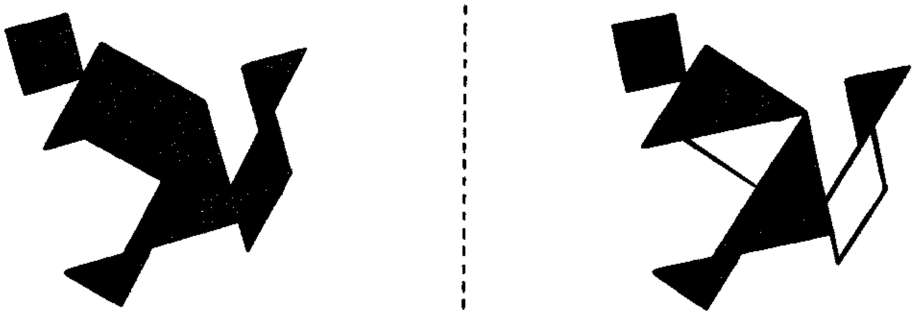
Tijdens onze wandeling langs hokken en kooien maakte ik vele foto's. Zo fotografeerde ik een flamingo, een gier, een steenbok, een zeehond, een ijsbeer en een giraffe.

We ontmoetten ook onze buurjongen Frits met zijn hond Kasper. Frits en ik speelden met Kasper. Oom heeft van ons foto's gemaakt.

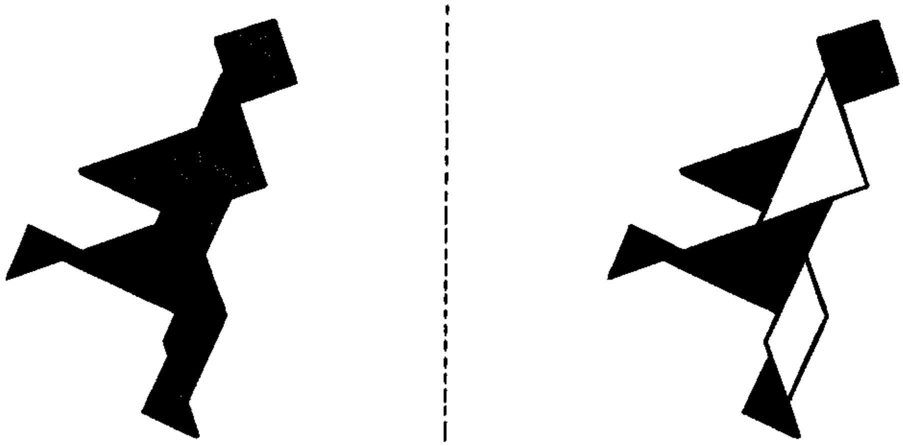
▸ Opdracht: Hiernaast zie je de serie foto's. In de linkerkolom de 'echte' foto's. In de rechterkolom de voorbeelden. Leg je tangramvormen op de rechterfiguren en/of maak ze af.



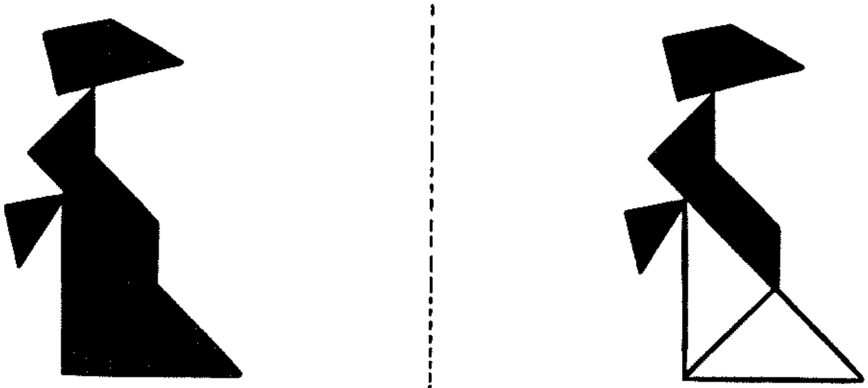
de ijsbeer



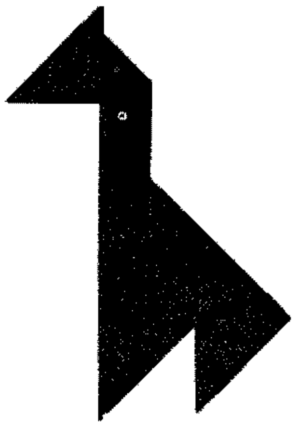
dit ben ik zelf

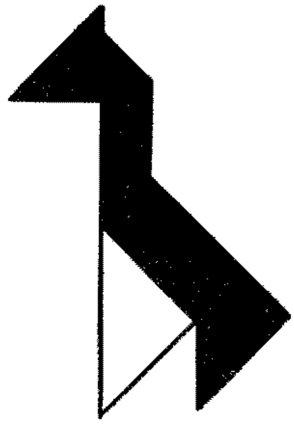


Frits

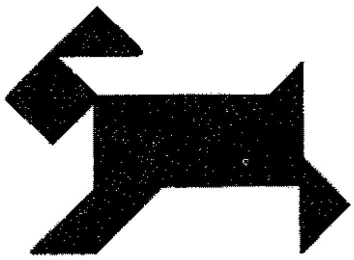


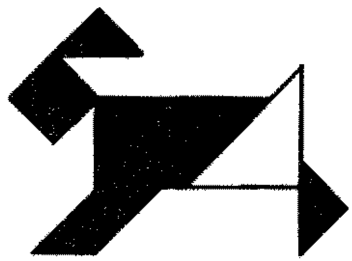
tante



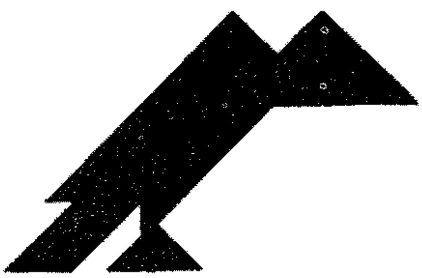


giraffe

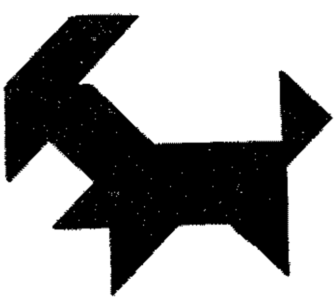


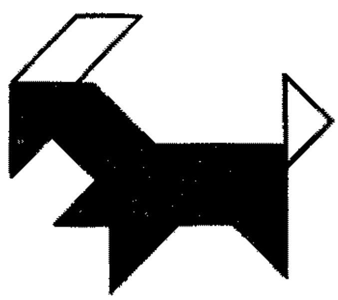


Kasper



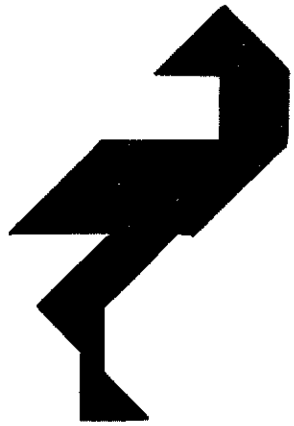
gier





steenbok

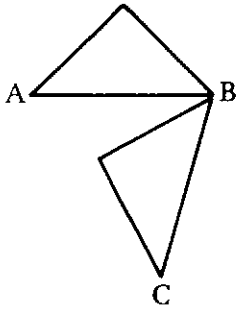
flamingo



▶ Opdracht: Probeer zelf een zeehond te maken.

In het bovenstaande praktikum zijn enkele praktijkervaringen verwerkt.
In de ontwerpschool bleek dat de flamingofase — dus: geen aanwijzingen — in klas 2, 3 en 4 niet haalbaar was.
Uit een observatie bleek dat er al spoedig enig inzicht kan ontstaan in de figuren.
Twee voorbeelden:

* Een leerlinge — 5^{e} klas — ontdekte dat rotatie over 180° van een driehoek op hetzelfde neerkomt als het 'omklappen' van de driehoek.
  Dit meisje ontdekte tevens dat 'het dropje' een moeilijke vorm is omdat daarbij door rotatie niet kan worden verkregen wat uit het omklappen van het dropje ontstaat.
* Zij had aanvankelijk geen idee van wat 'haaks' is; ze legde de twee grote driehoeken van de foto 'dit ben ik zelf' zò neer:



en begreep niet dat deze driehoek  er tussen hoorde, waardoor AB en BC haaks op elkaar zouden komen; zonder hulp lukte het niet.

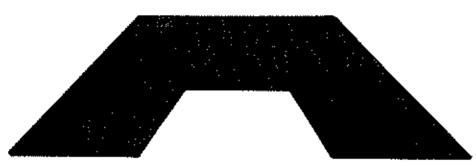
Uit de observaties dringt de gedachte zich op dat

— een tangrampuzzel de leerlingen de gelegenheid biedt de eigenschappen van diverse vormen te ontdekken;
— leerlingen met een tangrampuzzel als vanzelfsprekend rotaties en spiegelingen van vormen uitvoeren;
— het analiseren en komponeren van uit meerdere vormen bestaande figuren de grootste problemen oplevert.

Het is de vraag of het laatste voldoende aanknopingspunten biedt om de tangrampuzzel een plaats in het meetkunde-onderwijs van de basisschool te geven.

Wat het komponeren betreft nog een opgave voor de lezer:

Kunt u deze brug leggen met behulp van de tangramstukjes?



3 DE KINDEREN VAN DE BUURVROUWEN

Hier het verhaal van de twee koffiedrinkende buurvrouwen. Ze kennen elkaar pas kort, aangezien ze een week geleden in een kersverse nieuwbouwflat zijn komen wonen.
Al koffiedrinkend en pratend wordt er door beide dames ook naar buiten gekeken.
Op een zeker moment fietsen er 2 meisjes voorbij.
'Daar gaat een dochter van mij', zegt de ene buurvrouw.
'Hé, ze fietst met mijn oudste kind', merkt de ander op.

Ziedaar een brokje simpele konversatie waar wij het mee moeten doen.
Wel weten wij ook nog dat beide moeders een gezin met 2 kinderen bestieren.
En ook nemen we maar aan dat de kans op de geboorte van een jongen gelijk is aan de kans op de geboorte van een meisje.

Als we dit allemaal weten, dan stellen wij de vraag:
Hoe groot is de kans dat de ene buurvrouw een zoon heeft en hoe groot is de kans dat ook de andere buurvrouw een zoon heeft?

Buurvrouwen zijn geen marmotten, maar mocht u dit een vreemd probleem vinden, dan moet u zich eens afvragen wat de kans is op het krijgen van jonge marmotjes als u 2 marmotten, waarvan u – door onvoldoende voorlichting – het geslacht niet kent, bij elkaar in een hok stopt.
Houdt u niet van jonge marmotjes dan moet u maar eens met 2 geldstukken gaan gooien.

nieuw op de markt

ED DE MOOR

'Suggesties voor verlevendiging van het wiskunde-onderwijs op de basisschool' heet één van de wiskunde-paperbacks, die door de uitgeverij Malmberg op de markt gebracht worden. (prijs: *f* 25,–)
Het is een vertaling van 'Notes on Mathematics in Primary Schools', verzorgd door de rekendidaktikus P. Woestenenk. Het is een leuk boek, dat een aantal opstellen bevat, geschreven door leden van de engelse 'Association of Teachers of Mathematics' en waarnaar reeds in enkele wiskobaspublikaties verwezen werd.
Je zou het een groot KO-BAS-boek kunnen noemen, waarin degenen, die onze heroriënteringsblokken kennen veel zullen herkennen en waaruit zij ook nog nieuwe ideeën kunnen putten.
Vooral binnen het gebied van het manueel handelen (spijkerbord, vlakvullingen, meten, spelletjes, Cuisenaire-staafjes) worden allerlei wiskunde-aktiviteiten beschreven. Weinig komt voor over ordenen, open beweringen, waarschijnlijkheid en statistiek. Telproblemen komen door het gehele boek voor. Door de vorm (een verzameling opstellen) kan het boek geen geheel vormen. Van grote waarde acht ik *de ondertoon over de didaktiek van de wiskunde,* waarin de zelfontdekkende werkwijze centraal staat.
Niet zonder reden schreven wij in het voorwoord van het Stadsplan:
'......in nederland willen we aanvankelijk ('71-'75) de engelse toer op .....'. Wat dat betekent kunt u aan dit boekwerk ervaren. Het gaat dus over verlevendiging van het rekenonderwijs .....
Waar hoorde ik dat toch eerder?

* * *

'ma-TEMA-tika' gaat het reeds lang in het vooruitzicht gestelde handboek voor de geheroriënteerde onderwijzer heten. Deze uitgave van het IOWO (wiskobas) is bedoeld als afsluiting van de tweejarige HO-kursus en zal alle kursisten, die de kursus in zijn geheel gevolgd hebben, toegezonden worden.
Het boek bevat vier hoofdstukken:
De klok
De bron
Het vak
Enkele tema's.

'De klok' is een fundamentele beschouwing over wiskunde-onderwijs van Adri Treffers. In dit hoofdstuk worden vijf richtingen van modern wiskunde-onderwijs in verband met het wiskobas-projekt onderscheiden, geheten: het traditionele rekenen, het vernieuwde rekenonderwijs, de matematisch-empirische richting, de matematisch-aritmetische richting en de matematisch-strukturele richting.
Duidelijk worden de 8 uitgangspunten van matematiseh-didaktische aard, die voor de leerplanontwikkeling van belang zijn, uiteengezet.
De acht uitgangspunten, waarop in een latere publikatie ('De Kubus') nader ingegaan zal worden, zijn:
- het aktiviteitsprincipe van het onderwijs
- het differentiatieprincipe van het onderwijs
- de vertikale planning van het onderwijs
- het struktuurkarakter van de wiskunde
- het taalaspekt van de wiskunde
- de toepasbaarheid van de wiskunde
- de dinamiek van de wiskunde
- de typische benaderingswijze van de wiskunde

(De acht hoekpunten van de zogeheten doelstellingenkubus).

'De Bron' (hoofdstuk 2) is een opsomming van die nieuwe elementen uit de zes leerstofvlakken (van de doelstellingenkubus) – het rekensysteem, meten, meetkunde, waarschijn-

lijkheid en statistiek, relaties en funkties, taal en logika — die aan een leerstofprogramma zouden kunnen worden toegevoegd, met verwijzingen naar de daarop betrekking hebbende publikaties.

Hoofdstuk 3 (*'Het vak'*) bevat een samenvatting van de wiskundestof, behandeld in de negen KO-boeken.

'Enkele tema's' (hoofdstuk 4) voor wiskundeonderwijs in de verschillende klassen van de basisschool demonstreren datgene wat teoretisch in de hoofdstukken 1 en 2 beschreven werd en hoe de beschreven uitgangspunten gerealiseerd kunnen worden. Vanuit deze tema's: Dierendag (klas 1), Doornroosje (klas 1/2), De Supermarkt (klas 2), Naar Oma (klas 3), De Klok (klas 4), Het Spoorboekje (klas 5), Het Schaakbord (klas 5/6) en De Voetbaltabel (klas 6), kan een grote reeks wiskundeaktiviteiten ontstaan. Helaas zijn nog niet alle tema's voldoende uitgeprobeerd, maar dat zal zeker gebeuren op de ontwerpschool, waar wij in de komende twee jaar aan het integratieplan gaan werken.
Het boek komt niet in de handel. Degenen, die belangstelling voor de uitgave hebben, kunnen deze bestellen bij het IOWO. De prijs is op het moment dat ik dit schrijf nog niet bekend.

* * *

Vers van de pers: *'Mathematics as an educational task'* van Hans Freudenthal. (680 pagina's)
Uitgeverij: D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, prijs: *f* 62,40. (paperback)

wat wiskunde over kokosnoten

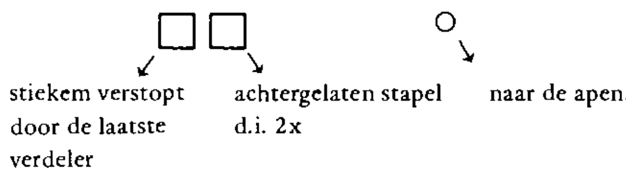
HUUB JANSEN

In het eerste nummer van jaargang 2 van het Wiskobas-Bulletin bent u in de rubriek 'Problematika' lastig gevallen met kokosnoten, apen en een 5-tal schipbreukelingen, die stiekem zorgden, dat zij niets tekort kwamen.
In het volgende nummer moesten wij op dit probleem terugkomen, want een belangrijke alinea was uit de boot gevallen, waardoor het probleem er niet beter op werd.
Daarom eerst het vraagstuk nogmaals beknopt herhaald, voordat we wat dieper ingaan op de wiskunde, die er achter schuilt.

> Op een onbewoond eiland hebben 5 schipbreukelingen een stapel kokosnoten verzameld.
> 's Nachts sluipen zij achtereenvolgens stiekem naar de stapel, delen de partij noten in 5 gelijke porties, waarbij 1 kokosnoot overschiet, die naar de hongerig toekijkende apen gaat. Zij verstoppen hun eigen portie en laten de rest liggen.
> Omdat de schipbreukelingen deze aktiviteit steeds ná elkaar verrichten, wordt de overblijvende stapel steeds kleiner, maar altijd is een verdeling in 5 gelijke delen, plus 1 overblijvende noot, mogelijk.
> De volgende ochtend blijkt het dan nog mogelijk te zijn de resterende stapel in 5 gelijke delen te verdelen, waarbij voor de apen niets overschiet.
> De vraag luidde: Uit hoeveel noten heeft de oorspronkelijke stapel minstens bestaan?

Bij nader inzien blijkt dit probleem minder eenvoudig te zijn dan het er uit ziet.
Een oplossingsmetode, die in de wiskunde – en daar niet alleen! – dikwijls tot resultaat leidt, is om het eerst te proberen met vereenvoudigde gegevens.
We brengen het aantal schipbreukelingen terug van 5 tot 2, veranderen de rest van het verhaal door steeds 2 te lezen in plaats van 5 en gaan vervolgens van achteren naar voren redeneren. Ook dit is een oplossingstaktiek, die vaak tot sukses voert.
Stel het ontbrekend aantal kokosnoten, dat ieder van de 2 schipbreukelingen bij de laatste verdeling ontvangt gelijk aan: x.

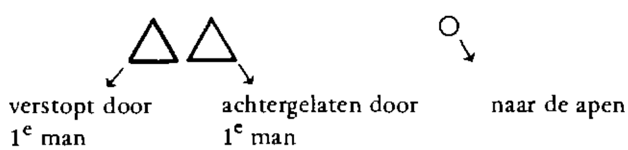
Vóór deze verdeling bestond de stapel dan uit een aantal noten, dat aan te duiden is met: 2x.
Iets moeilijker is het vervolgens om het aantal noten te bepalen, dat aanwezig was vóór de laatste man 's nachts stiekem zijn verdeling uitvoerde.
Deze man verdeelde de stapel in 2 gelijke delen, gooide daarbij 1 overblijvende noot naar de apen, nam zijn portie eraf en liet dus '2x' liggen.
Een plaatje kan de gang van zaken verduidelijken:



Duidelijk is nu, dat de stapel, die onze laatste man aantrof, aangegeven kan worden met:

$$2x + 2x + 1 = 4x + 1.$$

Deze laatste hoeveelheid stelt dan het aantal kokosnoten voor dat de 1^e man achterliet en we kunnen het aantal noten dat vóór deze verdeler aanwezig was, afleiden uit een nieuw plaatje:



Hieruit is weer af te leiden, dat elk driehoekje de hoeveelheid '$4x + 1$' voorstelt, en dat het aantal dat deze 1^e man aantrof gelijk was aan:

$$(4x + 1) + (4x + 1) + 1 = 8x + 3.$$

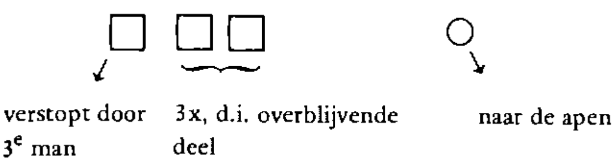
Wanneer we nu voor x respektievelijk de natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4,... invullen, krijgen we de aantallen waaruit de oorspronkelijke stapel in het – vereenvoudigde – probleem kan hebben bestaan:

x	stapel: '8x + 3'
1	11
2	19
3	27
4	35
....	....
....	....

Bij ieder van deze getallen is een verdeling, als aangegeven, mogelijk. Gaat u maar na! Wat er gebeurt, wanneer we voor x het getal 0 substitueren, en welke verdeling dan mogelijk is, kunt u zelf onderzoeken.

* * *

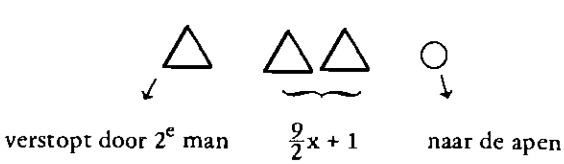
We nemen de moeite de gang van zaken nogmaals te herhalen, maar stellen nu het aantal schipbreukelingen op 3. We maken weer een wandeling door het probleem van achter naar voren.
Na laatste verdeling ontvangt ieder aan kokosnoten: x.
Vóór de laatste verdeling was aanwezig: 3x.
Deze '3x' is het overblijvende deel als de 3^e man de stapel in 3 porties heeft verdeeld, 1 noot naar de apen heeft gegooid en zijn eigen portie heeft verstopt.
Een plaatje:



Elk vierkant stelt nu $\frac{3}{2}x$ voor en de stapel bevatte dus:

$$3.\frac{3}{2}x + 1 = \frac{9}{2}x + 1.$$

$\frac{9}{2}x + 1$ is dan weer het aantal noten dat de 2e man op zijn beurt achterliet:



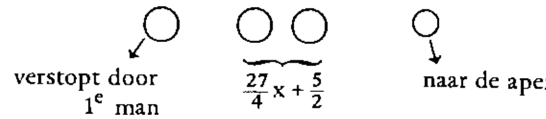
Elk driehoekje stelt voor:

$$\frac{\frac{9}{2}x + 1}{2} = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}.$$

En de stapel bevatte dus vóór de 2^e man stiekem aan het verdelen ging:

$$3.(\frac{9}{4}x + \frac{1}{2}) + 1 = \frac{27}{4}x + \frac{3}{2} + 1 = \frac{27}{4}x + \frac{5}{2}.$$

De 1^e man heeft dus $\frac{27}{4}x + \frac{5}{2}$ achtergelaten en het volgende plaatje laat zien hoe zijn verdeling er uitzag:



Elke cirkel stelt voor: $\dfrac{\frac{27}{4}x + \frac{5}{2}}{2} = \frac{27}{8}x + \frac{5}{4}.$

Aanwezig, vóór 1^e man arriveerde:

$$3.(\frac{27}{8}x + \frac{5}{4}) + 1 = \frac{81}{8}x + \frac{15}{4} + 1 = \frac{81}{8}x + \frac{19}{4}.$$

Gemakshalve schrijven we:

$$\frac{81}{8}x + \frac{19}{4} \text{ als: } \frac{81x + 38}{8}.$$

Nu stelt $\frac{81x+38}{8}$ het aantal kokosnoten voor, waaruit de oorspronkelijke stapel bestond op het eiland met 3 schipbreukelingen.
Wat valt ons nu op?
In de eerste plaats dat wij eigenlijk te maken hebben met *2 onbekenden*. En wel, het aantal dat ieder ontvangt bij de allerlaatste verdeling: x, èn het aantal waaruit de oorspronkelijke stapel bestond. Deze laatste onbekende stellen we gemakshalve op y.
Er geldt dus de betrekking:

$$\frac{81x + 38}{8} = y.$$

In de tweede plaats bemerken we, dat de onbekenden 'x' en 'y' in deze laatste vergelijking alleen maar gehele, of beter, *natuurlijke getallen* voorstellen. We praten immers over aantallen kokosnoten en daar komen geen negatieve of gebroken getallen aan te pas.
In de derde plaats zien we dat we te maken hebben met een wat ingewikkelde *'open bewering'*.
De betrekking:

$$\frac{81x + 38}{8} = y$$

is immers te schrijven als:

$$\frac{81.\square + 38}{8} = \Delta,$$

waarbij in de 'frames' $\square$ en Δ de juiste getallen moeten worden geplaatst.
Lezers, die het H.O.O.-blok 'Open Beweringen' hebben bestudeerd zullen dit beamen,

ook al worden in dit blok eenvoudiger vormen gepresenteerd.
Vervolgens merken we op, dat vergelijkingen zoals:

$$\frac{81x + 38}{8} = y,$$

vele oplossingen toelaten.
In de eenvoudigste versie, 2 schipbreukelingen op het eiland, zijn we eigenlijk terecht gekomen bij de vergelijking:

$$8x + 3 = y,$$

en we hebben gezien, dat onbeperkt veel waarden van x gesubstitueerd kunnen worden en dat bij iedere x een waarde voor y wordt gevonden.
In de wiskunde staan dit soort vergelijkingen daarom te boek als *onbepaalde* vergelijkingen en omdat we te maken hebben met onbepaalde vergelijkingen waarbij x en y natuurlijke getallen moeten zijn, spreekt men ook wel over *Diophantische vergelijkingen*.
Diophantus was een groot grieks wiskundige, die leefde in Alexandrië in de 3e eeuw na Christus. Hij hield zich o.a. bezig met het ontwikkelen van algebraïsche technieken om allerlei rekenkundige problemen op te lossen. Tot op vandaag de dag oefent hij zijn invloed nog uit op ons 'nederlandse schoolwezen', wat o.a. blijkt uit een van de problemen, waar hij zich mee bezig hield:

'Verdeel een gegeven getal in twee getallen, die een gegeven verschil hebben.'

Onze rekenmetodeschrijvers hebben hiervan gemaakt:

'Mijnheer A en mijnheer B hebben samen 100 gulden. Mijnheer A heeft 20 gulden meer dan mijnheer B. Hoeveel heeft elk?'

We zullen ons hier maar niet afvragen, waar je tegenwoordig een mijnheer A en een mijnheer B kunt tegenkomen, die met dit probleem worstelen.
Inmiddels wordt het tijd ons af te vragen, hoe je de onbepaalde of Diophantische vergelijking:

$$\frac{81x + 38}{8} = y$$

kunt oplossen.
Door voor x zomaar wat natuurlijke getallen te proberen, komt u een heel eind, maar wij passen hier een meer algemene metode toe.
We splitsen de teller van de breuk in

$$(80x + 1x) + (32 + 6)$$

en schrijven:

$$y = \frac{81x + 38}{8} = \frac{(80x + x) + (32 + 6)}{8} =$$

$$= \frac{80x + 32}{8} + \frac{x + 6}{8} = 10x + 4 + \frac{x + 6}{8}.$$

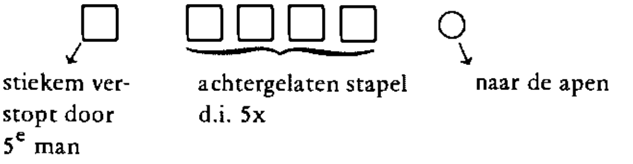
Kortweg: $y = 10x + 4 + \frac{x + 6}{8}$.
Omdat 'y' en '10x + 4' gehele getallen voorstellen, dient ook $\frac{x+6}{8}$ geheel te zijn.
Voor x komen dan in aanmerking de getallen: 2, 10, 18, 26, 34, ...
We maken de verdere gang van zaken duidelijk met behulp van een tabel:

x	$\frac{x + 6}{8}$	10x + 4	$y = 10x + 4 + \frac{x + 6}{8}$
2	1	24	25
10	2	104	106
18	3	184	187
26	4	264	268
34	55	344	349
..	.	...	...
..	.	...	...

Uit deze tabel blijkt, dat het kleinste aantal noten, waaruit de stapel van de 3 schipbreukelingen kan hebben bestaan, gelijk is aan 25. Hoe bij dit aantal de gehele verdeling verloopt, is nu gemakkelijk na te gaan.

* * *

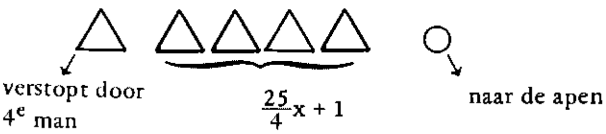
Na al deze voorbereidende aktiviteiten is het oorspronkelijke probleem van de 5 schipbreukelingen stormrijp gemaakt.
We beginnen weer achteraan.
Bij de allerlaatste verdeling kreeg ieder x noten.
Dit betekent, dat de 5^e man na zijn stiekeme verdeling 5x liet liggen.
Een plaatje geeft weer aan hoe de toestand was toen deze 5^e man voor zichzelf ging verdelen:



Duidelijk is, dat elke portie (= vierkantje) gelijk is aan $\frac{5}{4}x$ en dat de stapel die onze laatste man aantrof, aangeduid kan worden met:

$$5.\frac{5}{4}x + 1 = \frac{25}{4}x + 1.$$

Deze laatste hoeveelheid stelt dan het aantal kokosnoten voor dat de 4^e man achterliet en vervolgens kunnen we het aantal noten dat vóór deze verdeler aanwezig was afleiden uit weer een nieuw plaatje:



Hieruit is weer af te leiden, dat elke portie (= driehoekje) gelijk is aan:

$$\frac{1}{4}.(\frac{25}{4}x + 1) = \frac{25}{16}x + \frac{1}{4}$$

en dat het aantal dat onze 4^e man aantrof, gelijk is aan:

$$5.(\frac{25}{16}x + \frac{1}{4}) + 1 = \frac{125}{16}x + \frac{9}{4}.$$

We doen het verder zonder plaatjes, omdat deze gang van zaken zich steeds herhaalt, nl. de laatst vastgestelde hoeveelheid delen door 4, het resultaat vermenigvuldigen met 5 en er 1 bij optellen.

Zo vinden we dat de 3^e man aantrof:

$$5.(\frac{125}{64}x + \frac{9}{16}) + 1 = \frac{625}{64}x + \frac{61}{16}.$$

De 2^e man zag liggen:

$$5.(\frac{625}{256}x + \frac{61}{64}) + 1 = \frac{3125}{256}x + \frac{369}{64}.$$

En schipbreukeling no 1 begon te graaien in een stapel, die we kunnen voorstellen met:

$$5.(\frac{3125}{1024}x + \frac{369}{256}) + 1 = \frac{15625}{1024}x + \frac{2101}{256}.$$

Wanneer u inmiddels niet bent geschrokken van de grote getallen en zich nog realiseert wat de letter 'x' voorstelt en bedenkt dat uit:

$$\frac{15625}{1024}x + \frac{2101}{256}$$

een natuurlijk getal moet komen – het *aantal* kokosnoten dat de schipbreukelingen oorspronkelijk verzameld hadden! – dan gaan we nog een stapje verder.

Als we de vorm

$$\frac{15625}{1024}x + \frac{2101}{256}$$

herleiden tot:

$$\frac{15625}{1024}x + \frac{8404}{1024} = \frac{15625x + 8404}{1024} = y,$$

waarbij y dus het totale aantal is, dan ziet u dat er weer een Diophantische vergelijking is gekomen.

We gaan weer afsplitsen:

$$\frac{15625x+8404}{1024} = \frac{(15.1024 + 265)x + (8.1024 + 212)}{1024}$$

ofwel:

$$y = 15x + 8 + \frac{265x + 212}{1024}$$

De vorm $\frac{265x + 212}{1024}$ moet weer een geheel getal voorstellen en dit getal geven we aan met de letter z, dus

$$\frac{265x + 212}{1024} = z, \text{ dit geeft}$$

$$265x + 212 = 1024z.$$
$$265x = 1024z - 212$$
$$x = \frac{1024z - 212}{265}.$$

We rekenen wat sneller door:

$$x = 3z + \frac{229z - 212}{265}.$$

De breuk stelt weer een geheel getal voor dat 'p' gesteld wordt:

$$\frac{229z - 212}{265} = p,$$
$$229z - 212 = 265p,$$
$$229z = 265p + 212,$$
$$z = \frac{265p + 212}{229} = p + \frac{36p + 212}{229}.$$

De procedure wordt steeds herhaald (voorlopig heeft ons alfabet letters genoeg!).

$$\frac{36p + 212}{229} = q,$$
$$p = \frac{229q - 212}{36},$$
$$p = 6q - 6 + \frac{13q + 4}{36},$$

en weer:

$$\frac{139 + 4}{36} = r$$
$$q = \frac{36r - 4}{13},$$
$$q = 2r + \frac{10r - 4}{13},$$

en tot slot:

$$\frac{10r - 4}{13} = s$$
$$r = \frac{13s + 4}{10},$$
$$r = s + \frac{3s + 4}{10}.$$

Verder gaan is niet meer nodig, want eenvoudig is nu in te zien, dat voor s in aanmerking komen: 2, 12, 22, ...
Met behulp van deze kennis zijn we in staat bij de verschillende waarden van s de bijbehorende waarden van respektievelijk r, q, p, z, x en y te berekenen.
We hebben dit voor u gedaan en in onderstaand schema staat het resultaat:

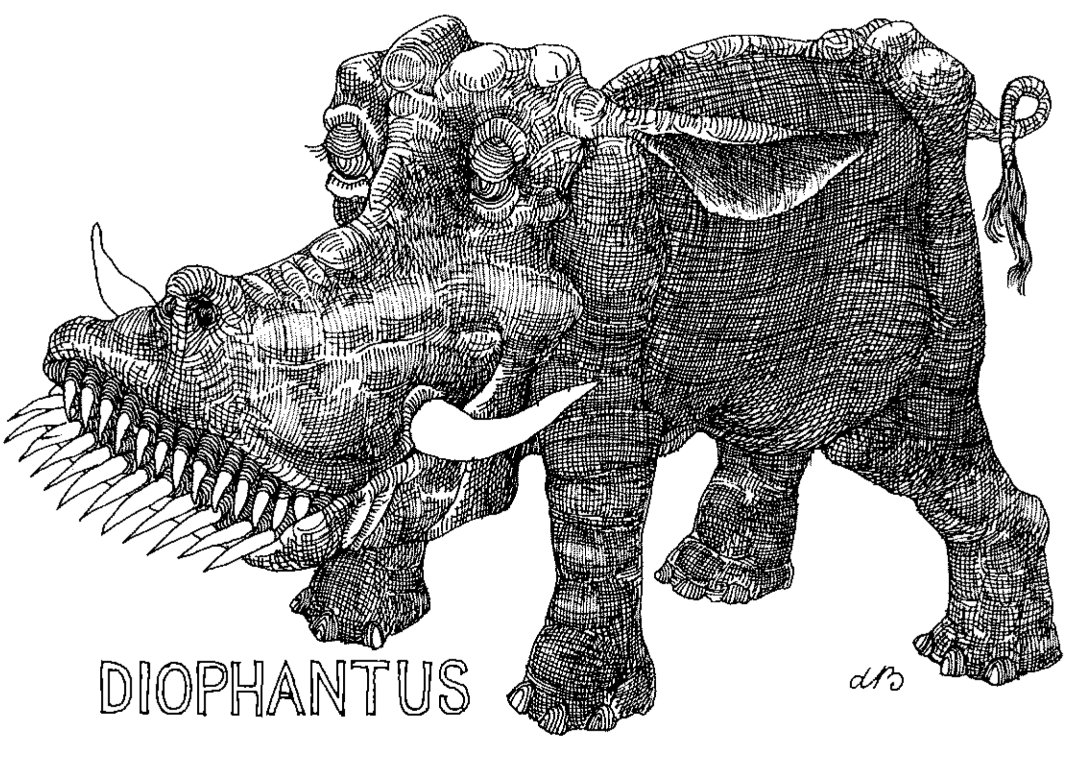
s :	2	12	22
$r = s + \frac{3s+4}{10}$	3	16	29
$q = 2r + \frac{10r-4}{13}$	8	44	–
$p = 69 - 6 + \frac{13q+4}{36}$	45	274	–
$z = p + \frac{36p+212}{229}$	53	318	–
$x = 3z + \frac{229z-212}{265}$	204	1228	–
$y = 15x + 8 + \frac{265x+212}{1024}$	3021	18746	–

We hebben onze berekeningen maar niet al te ver doorgezet, want het was ons te doen om het kleinste aantal noten waaruit de oorspronkelijke stapel bestond.

Dit aantal blijkt 3021 te zijn.

Al met al een lange weg en u begrijpt dat elektronische rekenmachines ons wel wat rekenwerk hadden kunnen besparen, terwijl u ook wel wilt aannemen dat er – weliswaar ingewikkelder – technieken zijn, die sneller tot een oplossing voeren.
Mocht u inmiddels nog fit genoeg zijn, dan willen wij u tot slot lastig vallen met een oud probleem over onze reeds genoemde vriend Diophantus, van wiens persoonlijke leven niet veel bekend is.
Een, hem overlevende, tijdgenoot vertelde, dat een 6^e deel van Diophantus' leeftijd in jeugdigheid werd doorgebracht, dat na nog een 12^e deel zijn baard begon te groeien, dat na nog een 7^e deel Diophantus in het huwelijksbootje stapte, dat 5 jaar later zijn zoon geboren werd, dat deze zoon half zo oud werd als zijn vader en dat Diophantus 4 jaar na de dood van zijn zoon stierf.

Wij wensen u veel sterkte met het berekenen van de leeftijd waarop Diophantus stierf.



skriptoteek

JOHAN VAN BRUGGEN
HENK MEYER

We willen dit keer aandacht besteden aan een skriptie uit 1971 van drie P.A.3-studenten, waarin één faset van het skriptie-maken zeer veel aandacht krijgt, nl. de oriëntatie in 'wat er al ligt' (aan leerplans, metoden, didaktiek- en metodiek-boeken, blokken voor P.A. en heroriëntering).
De skriptie handelt over *'Grafieken op de basisschool'* en is ingedeeld in drie gedeelten, namelijk:
* onderzoek van bestaande metoden,
* ontwerp-uitvoeren-revideren van een lessencyklus,
* een vergelijkend onderzoekje naar verschillende aanpakken van onderdelen bij verschillende groepen leerlingen en de resultaten daarvan.

Over het eerste deel willen we een aantal opmerkingen maken. Op grond van een suggestie van de docent verdiepte men zich in het onderwerp 'grafische verwerking'. Al snel vermoedde men dat dit onderwerp in de huidige basisschool te weinig aandacht krijgt in verhouding tot de maatschappelijke en wiskundige waarde ervan. Men kwam ook al snel tot een bepaalde opbouw in dit leerstofgebied, die in hoofdzaak gelijk is aan de opbouw, zoals geschetst in het blok 'Grafische Verwerking' voor de heroriënteringskursus, dus:

H.O.O.-blok		*Skriptie*
piktogram	⟷	beeldgrafiek
staafdiagram		blokgrafiek
staafjesdiagram		kolomgrafiek
frekwentiepolygoon	⟷	lijngrafiek
sektordiagram		

Met deze opbouw in het achterhoofd werd nu een analise gemaakt van een aantal basisschoolmetoden, namelijk:
- Elementary School Mathematics,
  R.E. Eicholz e.a.,
  Addison-Wesley Pub. Comp. Inc.
- Oxford Junior Mathematics,
  E.M. Williams e.a.,
  Oxford University Press.
- Mathematics Begin I
  Pictorial Representation,
  Beiden: Nuffield Mathematics Project,
  (Chambers and Murray).
- Mathematik I,
  Volk und Wissen Volkseigner Verlag,
  Berlin.
- Mathematik in der Grundschule,
  A. Fricke e.a.,
  Klett Verlag, Stuttgart.

- Rekenen voor de basisschool,
  J.C. van Gerven,
  Malmberg, Den Bosch.
- Ik reken,
  A.P. Bosdijk,
  Wolters-Noordhoff, Groningen.
- Boeiend rekenen,
  W.E. Wanders e.a.,
  Malmberg, Den Bosch.
- Funktioneel rekenen,
  J.H. Reynders e.a.,
  Versluys N.V., Amsterdam.
- Naar zelfstandig rekenen,
  R.H. Zandvoort e.a.,
  Wolters-Noordhoff, Groningen.
- Naar aanleg en tempo,
  H.J. Lugtmeyer e.a.,
  Thieme en Cie, Zutphen.

Bij deze analise werd gelet op drie kriteria:
* Welke opbouw hanteren de auteurs voor dit onderwerp?
* Welke verhouding bestaat er tussen het

lezen en het maken van grafieken en hoe verloopt deze verhouding in de verschillende deeltjes? (hiermee is uiteraard meteen onderzocht hoeveel aandacht aan dit onderwerp wordt besteed).

* Sluiten de voorbeelden en oefeningen aan bij de belevingswereld van het kind?

Van elke metode werden de belangrijkste opdrachten en oefeningen overgenomen, zodat in de skriptie voor elk van de metoden een overzicht ontstaat, dat wordt besloten met een toetsing aan de drie kriteria. Het geheel is op stencil gezet (ook de overzichten), zodat tevens mede-studenten erover kunnen beschikken.

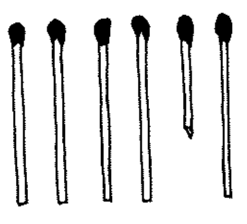
Kortom: een voorbeeld van een goed uitgewerkte metoden-analise voor een beperkt onderdeel; bij de eigen produktie blijkt men er ook duidelijk van te profiteren.

We zouden een dergelijke werkwijze willen aanbevelen aan ieder die een skriptie maakt waarin een stuk eigen ontwerp en produktie is opgenomen (en dat is bijna altijd zo). Voorwaarde is, dat de P.A. beschikt over een behoorlijke metoden-verzameling.

4 ZES LUCIFERS EN ZES HEREN

U kent het wel: lucifers trekken om uit te maken, wie de gelukkige of de pechvogel is.
In de film 'The Ladykillers' moesten de boeven lucifers trekken om uit te maken wie de eer te beurt viel het lieve, oude dametje te mogen vermoorden. Een moordpartij die in de film dit keer eens niet doorging.

Wij zijn iets vreedzamer: zes heren hebben genoten van een goed diner en trekken een lucifer uit de hand van de ober, die vijf gehele en één afgebroken lucifer in zijn hand verstopt houdt.



Degene, die de kortste lucifer trekt, moet betalen. Een eerlijk spelletje vindt ieder, want iedereen heeft een gelijke kans. Een gelijke kans van $16\frac{2}{3}\%$ of wel $\frac{1}{6}$.

De eerste heer trekt een lange lucifer en kan dus zijn portefeuille gesloten houden. Ook de tweede, derde en vierde heer vindt het geluk aan zijn zijde.
De twee laatste heren, die nu aan de beurt zijn, protesteren echter op dit moment omdat zij vinden dat zij een veel grotere kans hebben om te moeten betalen.

Hoe zit dit eigenlijk?

Hebben deze twee laatste heren gelijk en is het spelletje niet eerlijk of. . . . . ?

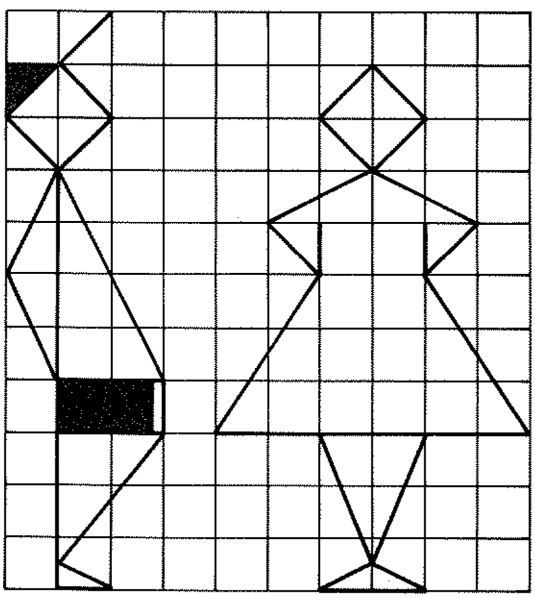
! Wim Wiedes !

HANS TER HEEGE

Als Wim Wiedes vakantie heeft gaat hij altijd een dagje uit met zijn vrouw Wies.
Vorige week kwamen ze in een speeltuin terecht. Ze namen eerst een kopje soep bij het restaurant. Toen gingen ze in de speeltuin kijken. Ze keken even bij de schommel en bij de wip. Ze zagen een meisje van de glijbaan glijden. En ze bleven even staan bij de lachspiegels.
Als je een dagje uit gaat wil je ook foto's nemen. Zo ook Wim en Wies.
Wat zouden jullie doen?
Je vraagt aan iemand die er ook staat of hij even een foto wil maken. Je geeft hem je fototoestel en hij drukt af.
Nou, dat doen Wies en Wim ook.

Er loopt een jongeman bij de lachspiegels. Als hij in de spiegels kijkt, moet hij steeds weer hard lachen.
Wim vraagt of de jongeman een foto wil maken van hem en Wies. Dat wil de jongeman wel. Wim geeft hem zijn fototoestel. Deze knipt af. 'Erg bedankt meneer', zegt Wim.

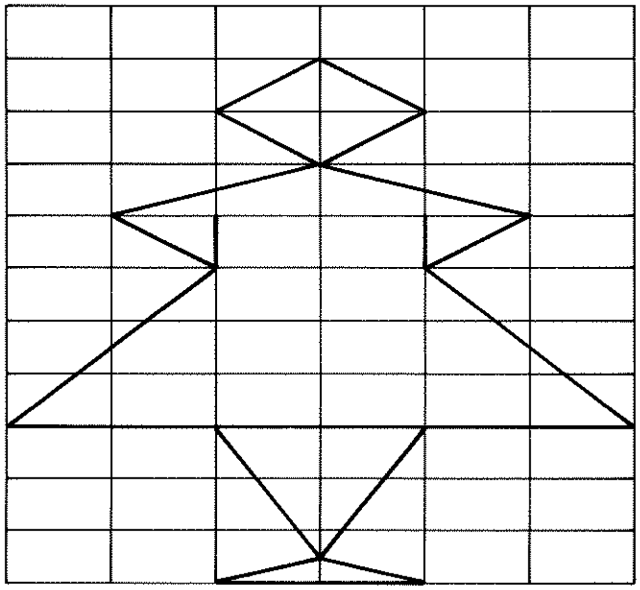
Veertien dagen later krijgt Wim de foto's van de fotograaf. Kijk zelf maar. Wim en Wies zien drie foto's uit de speeltuin. En het zijn wel erg gekke hoor.



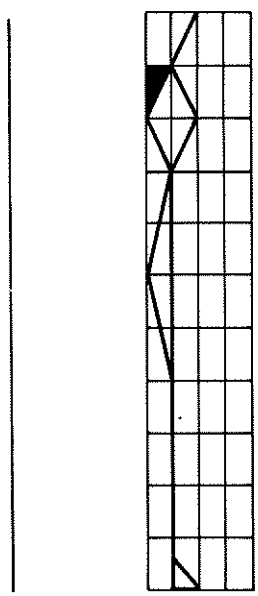
Hier zie je een foto met Wim en Wies.

WIM EN WIES NAAR DE SPEELTUIN

Hieronder zie je een foto van Wies. Je begrijpt dat die op haar neus kijkt. Wie wil er nou zo dik zijn?



Jullie begrijpen het natuurlijk al! De vrolijke jongeman heeft stiekum foto's in de lachspiegels genomen!
Hier zie je een foto van Wim. Dat is gek! Maak de foto eens af. Kijk maar goed naar de eerste foto.



kleuters en wiskunde

JES MELIS
HENNEKE DE LORME-BAKKER

HET VERDELEN VAN HOEVEELHEDEN EN NOG WAT

Bij een groepje kinderen werden ter verdeling 4 blokjes neergelegd. De kinderen speelden dat het snoepjes waren en heel eerlijk werd de stand: 2-2.
Met knikkers was dat heel anders. Die kun je immers winnen of verliezen.
De kleuters kwamen zèlf met allerlei verdelingen.

We wilden de kinderen deze verdelingen met potlood op papier laten maken.
Dat werd echter erg onoverzichtelijk, want de knikkers werden of erg groot of nauwelijks zichtbare stipjes.
Om een duidelijker resultaat te krijgen hebben we toen gebruik gemaakt van plakfiguurtjes. Opvallend was bij het verdelen van 4, dat vrijwel alle kleuters begonnen met '2-2', en dan verder zochten. (fig. 1)

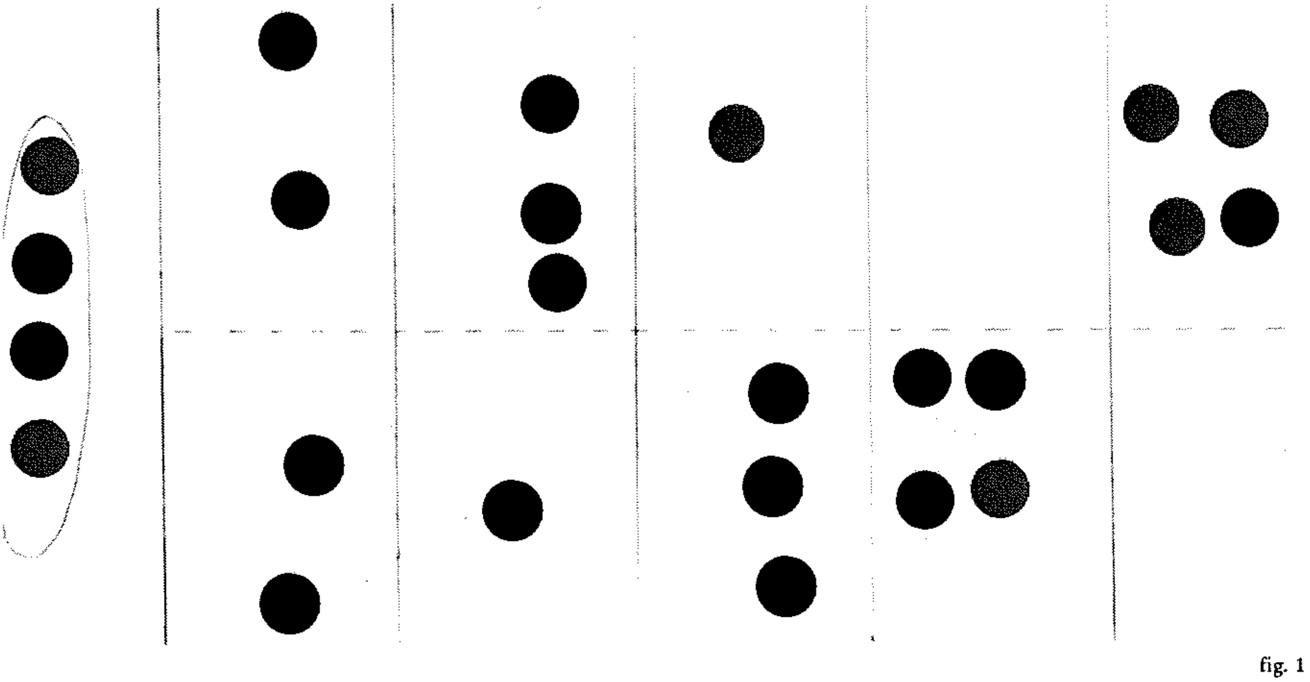


fig. 1

Na een paar keer 'n 4-verdeling te hebben gemaakt, mochten ze ook 'vijf' eens proberen te verdelen. Hier startten de meesten met: 2-3.
Enkele kinderen wisten al gauw te vertellen dat ze 'het steeds omkeerden en er dan meteen twee goed hadden'; dus: 2.3.; 3.2; 1.4; 4.1; 5.0; 0.5.(fig. 2)

Zelfs zijn er kleuters die ook nu proberen om 'mooie figuren' te maken.
Hierdoor ontstaat een ekstra moeilijkheid omdat een eventueel begonnen figuurtje niet altijd kan worden afgemaakt.
De opdracht gaat dan voor hen zwaarder wegen dan de voltooiïng van de spontaan begonnen figuur.

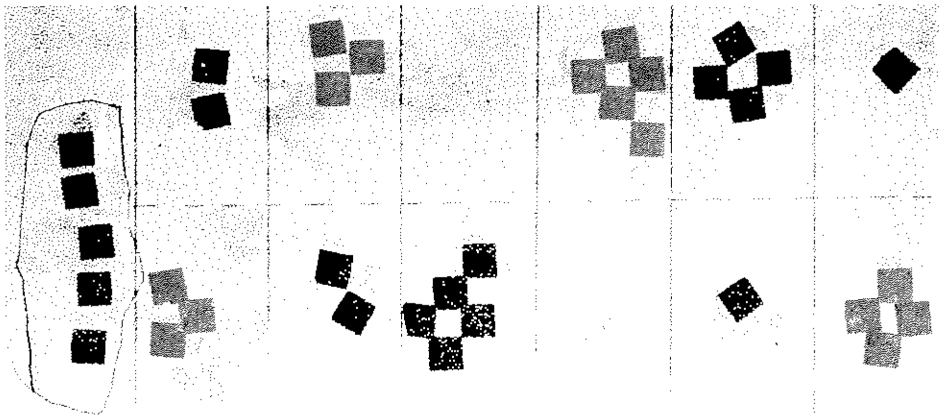


fig. 2

Nog even terug naar het muizenspel
In aflevering 2 van deze jaargang (pagina 649) schreven we dat *het noteren* van afgelegde wegen een moeilijkheid is. Wat vindt u van de volgende oplossing? We geven gewoon elke muis een hele lange staart van een smalle reep krèpepapier of een dikke wollen draad, in verschillende kleuren, en de afgelegde weg is bekend.

Poppetjes maken
Misschien herinnert u zich dat we de kleuters poppetjes hebben laten plakken. Ze konden kiezen uit twee hoofden en drie lichamen. De opdracht was om na te gaan hoeveel verschillende poppetjes te plakken waren.
Zo af en toe herhalen we bepaalde opdrachten nog eens in een andere vorm. De kleuters moesten nu uit twee kleuren broeken en drie kleuren truien zoveel mogelijk kombinaties maken. (fig. 3)
Onnodig te zeggen, dat de kledingstukken vrij geknipt en opgeplakt werden.
Meteen wisten ze te vertellen dat het aantal mogelijke kombinaties 6 was.
De volgende keer gaan we met 2 X 4 kombinaties werken.

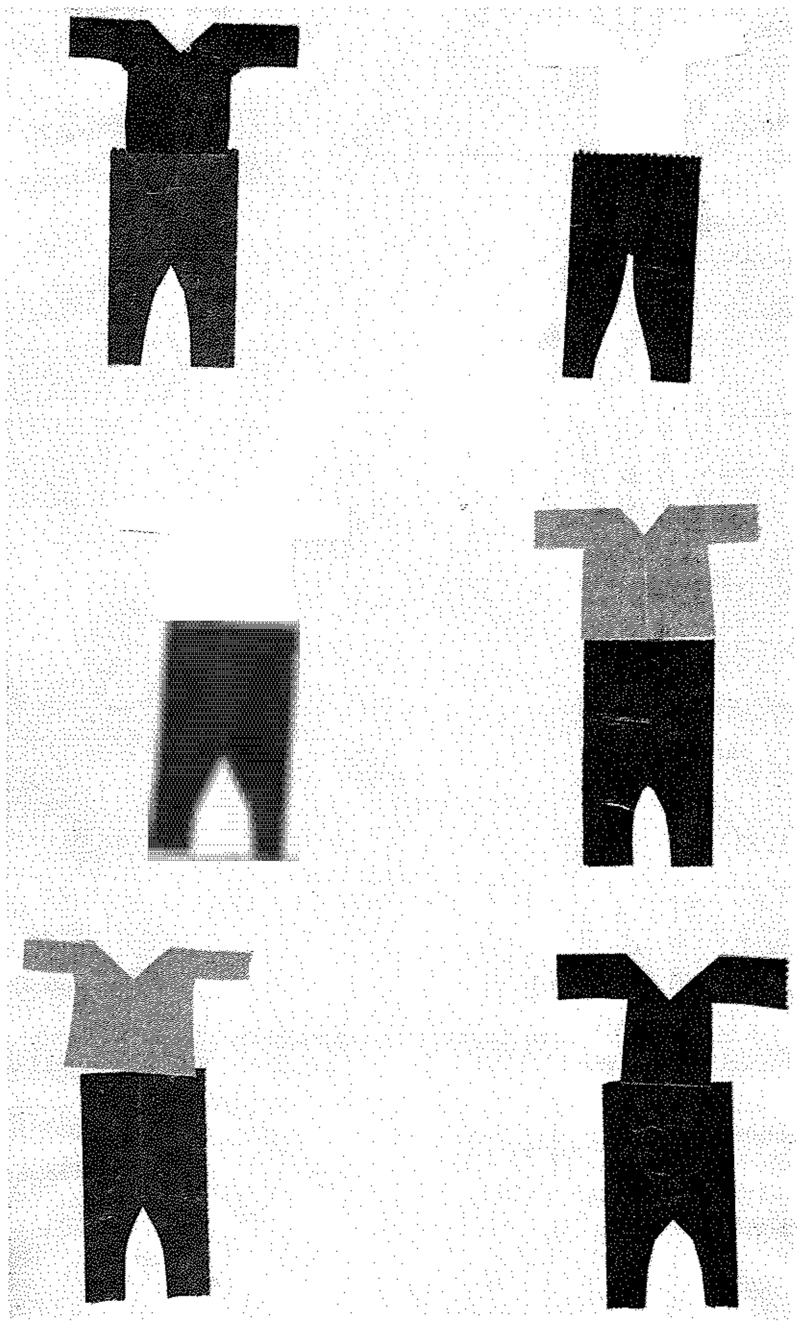


fig. 3

een jonge onder basje zoeker

DIK OORT

Vader : Ik hoor net dat de nieuwe buren volgende week komen.

Basje : Ik hoop dat er jongens meekomen; dan kan ik met ze spelen.

Vader : Ze hebben twee kinderen van jouw leeftijd.

Basje : Als er maar een jongen bij is; misschien zijn 't allebei wel jongens.

Vader : Misschien zijn 't wel twee meisjes; dat vind je toch ook wel leuk?

Basje : Er zal wel een jongen bij zijn.

Vader : Je moet nog even geduld hebben. Over een paar dagen weet je het.

Basje : Ik zou het al best willen weten.

Vader : Je kunt nú alleen maar praten of de kans dat er een jongen bij is groot of klein is.

Basje : Volgens mij is 't fifty-fifty.

Vader : Je bedoelt dus dat de kans dat er wèl minstens een jongen bij is net zo groot is als dat het niet zo is.

Basje : Ja, dat denk ik wel.

Vader : En waarom denk je dat?

Basje : Nou er is wél een jongen bij of niet.

Vader : Maar dat betekent nog niet dat de kans op 't één net zo groot is als de kans op 't andere.

Basje : Waarom dan niet?

Vader : Als de buren twaalf kinderen zouden hebben zou je ook kunnen zeggen: er is wél minstens een jongen bij of niet.

Basje : O ja, maar dan is de kans op een jongen natuurlijk veel groter.

Vader : Dat zou ik menen.

Basje : Toch zou ik wel iets willen weten van de kans op minstens een buurjongen.

Vader : Daar is wel iets aan te doen. Hoe groot is de kans dat een kind een jongen is?

Basje : De kans dat 't een jongen is, is net zo groot als dat 't een meisje is.

Vader : Goed, we nemen aan dat die kansen gelijk zijn. We zeggen dan dat de kans dat een kind een jongen is $\frac{1}{2}$ is. De kans dat een kind een meisje is ....?

Basje : Is ook $\frac{1}{2}$.

Vader : Juist. En nu pak ik een kwartje. Op de ene kant staat 25 cent; dat noemen we 'munt', de andere kant noemen we 'kop' of 'kruis'. Wat is de kans dat bij het gooien 'kruis' boven komt?

Basje : Die kans is $\frac{1}{2}$, net als de kans op een jongen.

Vader : Goed zo, en nu neem ik een kwartje en een stuiver. Die gooien we beide omhoog.

Basje : Wat wil je daarmee doen?

Vader : Het kwartje zegt ons wat van het oudste kind, de stuiver van het jongste kind.

Basje : O, dan spreken we af: 'kruis' is een jongen, 'munt' betekent een meisje.

Vader : Gooi de beide munten maar eens omhoog.

Basje doet dat; het kwartje valt 'munt', de stuiver 'kruis'.

Basje : Dus de oudste is een meisje en de jongste een jongen.

Vader : Ja, we hebben gespeeld dat er buren komen met een meisje en een jongen; de eerste is de oudste.

Basje : Maar je wilt toch niet beweren dat de buren volgende week komen met een dochter en een jongere zoon.

Vader : Nee, maar we proberen iets van de kans op minstens een jongen aan de weet te komen. Je hebt dit nu één keer gedaan; doe het nu totaal twintig keer en noteer het resultaat.

Basje gooit nog negentien keer en krijgt de volgende lijst:

	kwartje	stuiver	oudste	jongste
1	munt	kruis	meisje	jongen
2	kruis	munt	jongen	meisje
3	kruis	munt	jongen	meisje
4	munt	kruis	meisje	jongen
5	kruis	kruis	jongen	jongen
6	munt	munt	meisje	meisje
7	kruis	munt	jongen	meisje
8	munt	munt	meisje	meisje
9	munt	kruis	meisje	jongen
10	munt	munt	meisje	meisje
11	kruis	munt	jongen	meisje
12	munt	munt	meisje	meisje
13	munt	kruis	meisje	jongen
14	kruis	munt	jongen	meisje
15	kruis	munt	jongen	meisje
16	kruis	kruis	jongen	jongen
17	munt	kruis	meisje	jongen
18	kruis	munt	jongen	meisje
19	kruis	kruis	jongen	jongen
20	kruis	munt	jongen	meisje

Vader : Mooi zo, nu hebben we twintig keer 't komen van twee buurkinderen nagebootst.

Basje : 't Ziet er goed uit. Van de twintig keer is er zestien keer minstens een jongen bij en maar vier keer zijn 't allebei meisjes.

Vader : Zo te zien maak je een goede kans dat er volgende week tenminste één buurvriendje bijkomt. Had je dat verwacht?

Basje : Nee, ik dacht dat de kans op een jongen kleiner was.

Vader : Heb je nu ook gezien welke mogelijkheden er zijn?

Basje : Ja: twee meisjes,
twee jongens of
een meisje en een jongen.

Vader : Als je 't zo bekijkt is de kans op een meisje dus?

Basje : $\frac{1}{3}$ en de kans op minstens één jongen $\frac{2}{3}$.

Vader : Ja maar je doet 't niet goed, je hebt 't in je lijstje beter genoteerd. Denk eraan, dat we de oudste voorop noteren.

Basje : Ik had moeten zeggen:

meisje	meisje
jongen	jongen
jongen	meisje
meisje	jongen.

Vader : Precies, er zijn dus vier mogelijkheden. En wat denk je van de kansen van elke mogelijke gebeurtenis?

Basje : Ik denk dat die gelijk zijn.

Vader : Juist, wat is dus de kans dat het beiden meisjes zijn?

Basje : Dat komt 1 keer op de 4 keer voor, dus de kans is $\frac{1}{4}$.

Vader : En de kans dat er minstens een jongen bij is.

Basje : Die kans is dan $\frac{3}{4}$.
Van de twintig keer had ik dus vijf keer twee meisjes moeten krijgen en 't was maar vier keer.

Vader : Je ziet, dat de werkelijkheid zich niet geheel volgens de kans gedraagt.

Basje : Maar 't zat toch wel aardig in de buurt.

Vader : Precies, en als je nog vaker met de munten gooit, klopt 't steeds beter.

Basje : Maar ik heb een goede kans op een buurjongen.

Vader : Zo is 't, toch kan het best zijn dat de buren met twee dochters komen.
Weet je, vorige week was de nieuwe buurvrouw hier even samen met een meisje. Laten we eens aannemen dat dat een dochtertje van haar was.

Basje : Dan is de andere een jongen of een meisje. Dus de kans op een jongen is nu $\frac{1}{2}$.

Vader : 't Ligt voor de hand om dat zo te zeggen. Maar 't is niet goed. Je kans op een jongen ziet er beter uit. Welke mogelijkheden had je ook al weer?

Basje :

meisje	meisje
jongen	jongen
jongen	meisje
meisje	jongen.

Vader : En welke valt er uit?

Basje : Alleen: jongen jongen.

Vader : Dus?

Basje : Ik houd over:

meisje meisje
jongen meisje
meisje jongen.

In 2 van de 3 gevallen is er een jongen bij. Dus de kans op een jongen is $\frac{2}{3}$.

Vader : Goed zo!

Moeder is inmiddels binnengekomen en heeft 't laatste aangehoord.

Moeder: Inderdaad is dat meisje een dochter en de nieuwe buurvrouw vertelde dat 't haar oudste is.

Vader : Zo Bas, dat verandert de zaak; wat is nu de kans op een jongen?

Basje : Van de gevallen:

meisje meisje
jongen meisje
meisje jongen

houd ik nu alleen maar over:

meisje meisje
meisje jongen

Dus de kans op een jongen is $\frac{1}{2}$.

Vader : Heel goed!

Basje : Ik had natuurlijk ook kunnen zeggen: de jongste is een meisje of een jongen. Kans op een jongen: $\frac{1}{2}$.
Maar moeder, weet u óf het een jongen is?

Moeder: Ik weet het, maar ik weet nog meer; behalve de oudste hebben de buren nog een tweeling. Ze hebben drie kinderen. Reken jij nou eerst nog eens de kans uit dat er bij de drie kinderen minstens een jongen is.

Basje : Dat is gemakkelijk. De oudste is een meisje; ik bekijk dus alleen de tweede en de derde. Dat zijn twee kinderen. De kans dat er minstens een jongen bij is is $\frac{3}{4}$, dat heb ik straks al uitgerekend.

Moeder: Goed zo, en nu weet ik nog dat de tweeling een paar jongens is.

Basje : Dat is geweldig.

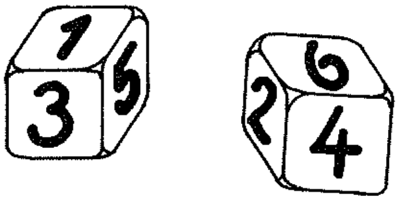
Vader : Wat is dus nu de kans dat er minstens een jongen bij is?

Basje : Dat weet je toch: $\frac{3}{4}$.

Vader : Nee nou heb je 't mis. Je weet nu zéker dat het zo is; de kans is 1.

5 TELPROBLEMEN

Op een dobbelsteen staan punten en geen getallen, maar met een weinig fantasie bent u wel bereid om in plaats van '5' te lezen en dit ook te doen met de andere voorstellingen op de dobbelsteen.
Of, beter gezegd: op de twee dobbelstenen, die we nodig hebben voor het volgend *telprobleem* met dubbele bodem.



Het bepalen van het aantal verschillende getallen van twee cijfers dat u met twee dobbelstenen kunt leggen, is niet zo moeilijk, zeker niet wanneer u bedenkt dat 66 het grootste getal uit deze verzameling voorstelt.

Lastiger wordt het al wanneer geeist wordt dat getallen met twee dezelfde cijfers niet mee mogen doen en het wordt zelfs een serieus probleem wanneer we met 4 dobbelstenen (waarop de cijfers 1 tot en met 6) gaan werken en daarbij niet alleen vragen naar het aantal verschillende getallen van 4 cijfers dat gevormd kan worden, maar tevens naar de som van al die getallen, waarbij we de eis handhaven, dat in één getal **niet** dezelfde cijfers mogen voorkomen.

Mocht u erg entoesiast zijn over de wiskunde, Wiskobas en dit tijdschrift, dan kunt u alle mogelijkheden uitschrijven en de getallen daarna netjes optellen.
Bedenk dan echter dat ons leven kort is en een beetje inzicht in de wiskunde ons helpt tijd te sparen voor andere, minstens zo plezierige, zaken.

INHOUD

variabel blok

4.1 STATISTIEK EN WAARSCHIJNLIJKHEID

INLEIDING EN LEESWIJZER

Deze keer een onderwerp dat wat verder van huis ligt en waar we met elkaar misschien nog enigszins vreemd tegen aankijken, nl. *Statistiek en Waarschijnlijkheid.*

In de laatste jaren zijn reeds enkele publikaties van het IOWO over dit onderwerp verschenen:

- speciaalnummer van 'Euclides' (47^e^ jaargang, no. 7/8),
- 'Waarschijnlijkheid en Statistiek' (blok 9 voor de herorienteringskursus),
- 'De Teerling is geworpen' (eksperimenteel blok voor de pedagogische akademie).

Het presenteren van iets nieuws is zowel *aantrekkelijk* als *moeilijk.*

Aantrekkelijk, omdat de kreativiteit van de ontwerper alle kansen krijgt en niet belemmerd wordt door een stuk onderwijstraditie.

Het overbrengen van ideeën op een zodanige wijze dat de ontvanger ze kan plaatsen en er direkt profijt van kan trekken voor zijn dagelijkse werk, is moeilijk.

Om aan dit probleem tegemoet te komen is het blok samengesteld uit bijdragen van min of meer teoretische aard (4.2, 4.3, 4.4), een reeks ervaringen met een konkreet onderwijsleerpakket (4.5, 4.6, 4.7, 4.8) en twee artikelen met direkte toepassingsmogelijkheden in de klas (4.9, 4.10).

Omtrent het onderwijs in Statistiek en Waarschijnlijkheid zijn in het buitenland al heel wat ervaringen opgedaan. Het artikel van Johan van Bruggen en Leen Streefland **(4.4)** bevat een overzicht van deze ervaringen, alsmede bouwstenen voor een mogelijk onderwijstrajekt door dit leerstofgebied. Bij beslissingen omtrent de invoering van een nieuw stuk onderwijs dienen echter – zo stellen de auteurs – naast de mogelijkheden ook de wenselijkheden in ogenschouw te worden genomen. Wat *willen* we er mee?

Bij de opinievorming omtrent het al dan niet 'wenselijke' moet de maatschappelijke relevantie mede in overweging worden genomen. Jan van den Brink laat zien hoe het statistisch denken in problemen van alle dag funktioneert/zou kunnen funktioneren. (**4.2**)

H. Freudenthal werkt één van de problemen uit en toont aan dat het onderwerp ook vanuit de wiskunde de moeite waard is. (**4.3**)

Een belangrijk gedeelte van dit blok bevat ervaringen met de try-out van de IOWO-NOT-TELEAC-produktie *'Kijk op Kans'.*

Bert van de Vegt en Benno Goosen van de John F. Kennedyschool in Hengelo beschrijven hun ervaringen met de diverse lessen. (**4.5**)

De essentie van het artikel van Huub Jansen – die één van de scholen begeleidde – is: hoe wordt een probleem hanteerbaar gemaakt? (simulatie) (**4.6**)

Een repetitie oude stijl is wel makkelijker, maar een proefwerk nieuwe stijl – waarvan Fred Goffree een fotoreportage geeft – zegt meer over de effekten van het gegeven onderwijs en de vorderingen van de leerlingen. (**4.7**)

Ook ouders hebben intensief en met entoesiasme aan het projekt deelgenomen. Rob de Jong geeft enkele impressies van een ouderavond. (**4.8**)

Op enkele plaatsen hebben we in dit blok reakties van hengelose leerlingen opgenomen.

Een leuk stukje kansrekening waaraan op diverse nivo's door de leerlingen kan worden gewerkt, treft u aan in 'Kris-Kras door Nederland' – een door Hans ter Heege ontwikkeld spel –. (**4.9**)

Het empirisch kansbegrip komt tot uitdrukking in een probleem waarmee inspekteur Zozoekie op een gegeven dag gekonfronteerd wordt. Gegevens van de KNMI in De Bilt spelen een belangrijke rol bij de oplossing van het door Leen Streefland beschreven probleem. (**4.10**)

De foto's bij de artikelenserie 'Kijk op Kans' zijn beschikbaar gesteld door de NOS en TELEAC, de overige foto's zijn afkomstig uit het fotoarchief van het Utrechts Nieuwsblad.

4.2 OP LEVEN EN DOOD

JAN VAN DEN BRINK

STATISTIEK EN WAARSCHIJNLIJKHEID IN HET DAGELIJKS LEVEN

In vele gevallen wijkt de gedachtengang van de statistiek nogal af van de dagelijkse denkgewoonten. Deze uitspraak willen we illustreren aan een aantal voorbeelden.
Hieronder vier problemen, die (min of meer) uit het dagelijks leven gekozen zijn en tot doel hebben uw kritische zin te scherpen.
In een daarop volgende analyse van de vier problemen worden enige aspekten van het statistisch denken belicht en zal aan voorbeelden (de bevolkingsdichtheid en het Deltaplan) worden duidelijk gemaakt dat deze vorm van denken een levenskwestie kan zijn.

Vier problemen

1 In 1938 schreef een krant:
'Inenting beschermt niet tegen pokken, want er sterven volgens de statistieken meer kinderen ten gevolge van inenting dan door de pokken'.

Wat is er fout in deze redenering?

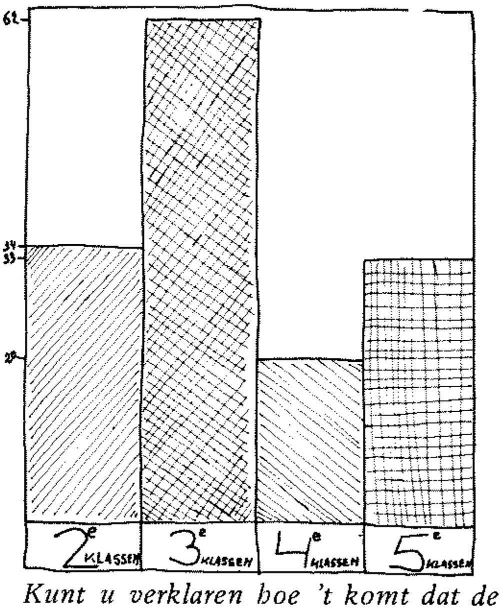
2 De volgende cijfers komen uit de v.s. (1955).
Bekijkt u ze eens:

52000 manlijke bestuurders waren betrokken bij ernstige ongevallen;
4000 vrouwelijke bestuurders waren betrokken bij ernstige ongevallen.

Kunt u uit deze cijfers konkluderen dat vrouwelijke bestuurders in verhouding voorzichtiger zijn dan manlijke?

3 In een 'schoolonderzoek' uitgevoerd door leerlingen van een zesde klas ontwierp een groepje kinderen dit diagram:

Hoeveel kinderen per klas gaan er naar de W.C.?



Kunt u verklaren hoe 't komt dat de betreffende groep, tot verbazing van de hele klas, meedeelde dat de vijfde klas het meest naar de w.c. was geweest en niet de derde?

4 In een land bleek bij telling per distrikt een positieve korrelatie te bestaan tussen het aantal ooievaars en het geboortecijfer, dat wil zeggen: in distrikten met veel ooievaars was het geboortecijfer hoog en in distrikten met weinig ooievaars was het geboortecijfer laag.

Geef een mogelijke verklaring voor dit verschijnsel!

Bespreking van de vier problemen

In deze bespreking zullen we enkele aspekten van statistisch denken belichten.

1 Bij deze bewering wordt een belangrijk deel van de informatie achterwege gelaten.
De konklusie dat inenting niet tegen pokken beschermt wordt getrokken op grond van de groep mensen die, hetzij door ziekte hetzij door inenting, zijn overleden.
Hoe ligt echter de verhouding tussen kinderen die niet zijn overleden en wel zijn ingeënt en kinderen die niet zijn overleden en niet zijn ingeënt?
Over deze groep wordt geen mededeling gedaan terwijl ze toch voor de konklusie van groot belang is.
Slechts een specifiek en onjuist gekozen *gedeelte* van de totale populatie is bekeken — een typisch niet-statistische gedachtengang —.

2 Ook in deze opgave zijn er te weinig gegevens bekend om de konklusie 'vrouwen rijden voorzichtiger dan mannen' te wettigen.
Het aantal manlijke bestuurders dat *nooit* bij een ongeluk betrokken is geweest zou misschien het aantal vrouwelijke chauffeurs ver kunnen overtreffen zodat men op grond van *deze* gegevens de tegengestelde konklusie kan trekken.
Net als bij opgave 1 is hier sprake van een te beperkte informatie.

3 In eerste instantie is men geneigd om de leerlingen uit de derde klassen aan te wijzen als degenen die het meest naar de w.c. zijn gegaan.
Er waren echter 3 derde klassen en slechts 1 vijfde!
Het lijkt misschien een flauwe grap, maar het zal u duidelijk zijn, dat de *indeling* van de populatie belangrijk is voor het trekken van konklusies.

4 Een mogelijke verklaring voor de positieve korrelatie tussen het aantal ooievaars en het geboortecijfer per distrikt is, dat het land zodanig in distrikten is ingedeeld, dat men een positieve korrelatie vindt.
Net als bij opgave 3 speelt het indelen van de populatie ons parten.

Deze indelingsproblematiek komt niet uitsluitend voor in 'flauwe' opgaven, die niets met het dagelijks leven te maken hebben.
Dit moge uit het volgende blijken:

Twee 'harde' voorbeelden

* *Hoe dicht bevolkt?*
Per 1 januari 1969 was het bevolkingsdichtheidscijfer voor elke provincie:

Groningen	223
Friesland	153
Drente	136
Overijssel	238
Gelderland	295
Utrecht	590
Noord-Holland	832
Zuid-Holland	1037
Zeeland	173
Noord-Brabant	356
Limburg	456

Welke informatie leveren deze gegevens ons?
Is het zinvol om — gezien de vraagstelling — nederland in te delen volgens provincies?
De huidige provincie-grenzen zijn immers in de late middeleeuwen uit geheel andere overwegingen ontstaan dan om de bevolkingsdichtheid te bepalen.
Neem bijvoorbeeld Noord-Holland: hierin liggen grote bevolkingskoncentraties zoals Amsterdam, de Zaanstreek, Haarlem. Mar ten noorden van de lijn 'Alkmaar-Medemblik' is Noord-Holland dùn bevolkt.
Door andere indelingen te gebruiken (bijvoorbeeld in gewesten of agglomeraties) tracht men een beter idee te krijgen van de bevolkingsdichtheid in nederland.

* *Op leven en dood*
Een ander aspekt van het statistisch denken — dat we reeds in de 4 beginproblemen hebben ontmoet — is dat men zich niet blindstaart op één bepaald verschijnsel of groep van fenomenen, maar dat men tracht zicht te krijgen op het kollektief.

Eén van de oorzaken van de watersnoodramp in februari 1953 is te wijten geweest aan een vergissing.

Vòòr de ramp is nooit een statistisch onderzoek ondernomen. De dijkhoogte werd bepaald naar de maksimale hoogwaterstand die ooit in het verleden was voorgekomen, alsof deze hoogte in de toekomst niet meer zou kunnen worden overtroffen.
Uit een statistische analyse die het Mathematisch Centrum in Amsterdam in opdracht van de Deltakommissie verrichtte, blijkt echter dat de kans op overschrijding van het peil in 1953 (3,85 boven N.A.P.) per jaar gelijk is aan $\frac{1}{200}$.
Een gevaarlijk grote kans!

Hoe komt het Mathematisch Centrum aan deze wetenschap?
Na de ramp werd de kollektie hoogwaterstanden, geregistreerd in Hoek van Holland gedurende de periode 1888-1956, onderzocht.
Men plaatste deze standen tegenover het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van *elke* hoogwaterstand.
Door de 'lijn' door te trekken (door te ekstrapoleren) was men in staat de overschrijdingskans te berekenen voor 'elke' waterhoogte.

En wat waren de gevolgen?
Vòòr de ramp was de hoogte van de dijken op 4 meter gesteld omdat in het verleden geen hoogwaterstanden waren aan te wijzen die gevaar zouden opleveren. Nà het onderzoek van het aantal overschrijdingen per jaar voor *elke hoogwaterstand (en niet alleen de hoogste)* bleek een dijkhoogte van 5 meter boven N.A.P. eerst veilig te zijn.

Het statistisch denken achter dit onderzoek is van levensbelang geweest.

– EMPIRISCH –

'Je gooit met de meester om het hoogst met een dobbelsteen.
Wie heeft de meeste kans om een zes te gooien?'

'..... de meester, want die heeft het al veel vaker gedaan!'

4.3 GING HET ALLE PEIL TE BOVEN?

H. FREUDENTHAL

In de vroege ochtenduren van 1 februari 1953 werd het zuid-westen van nederland door de grootste stormramp in de nederlandse geschiedenis getroffen. 150 000 ha werden overstroomd, 9000 gebouwen vernield en 38 000 beschadigd, op 67 plaatsen braken dijken, de materiële schade bedroeg ongeveer 2 milliard van de hardere guldens van toen; en als het verlies aan mensenlevens tot 1800 mocht blijven beperkt – vergeleken met de wellicht 100 000-en van middeleeuwse stormrampen – dan was dit aan de moderne reddingsmiddelen te danken.
Is er kans op dat zulk een ramp zich herhaalt? Wel zeker, maar hoe groot is die kans?
Stormvloeden worden door diepe depressies veroorzaakt, maar het is pas echt goed raak als de storm samenvalt met een hoog getij waarbij zon en maan samenwerken om een springvloed te veroorzaken, dus bij nieuwe of volle maan. Dit was ook op 1 februari 1953 het geval; doordat de maksima van het astronomische getij en van de storm enkele uren uit elkaar lagen, 'viel het nog mee' – het had nog een tikkeltje erger kunnen zijn.

En nu *de kans op herhaling.* Die hangt van heel wat faktoren af. Als we de dijken goed bijhouden, zal die kleiner zijn; als we ze verwaarlozen, kan het gauw weer gebeuren. Nederland is gedurende de laatste 10 000 jaren 100 m gezakt, omdat de grond nodig voor het rijzen van skandinavië na het afsmelten van de ijslaag uit de omgeving werd weggetrokken, en als de berekeningen van Vening Meinesz kloppen, zal die daling zich nog enkele eeuwen voortzetten. De zeespiegel is door het wegsmelten van de groenlandse ijskap aan het stijgen en ook hiermee moeten de dijkenbouwers rekening houden.
Aangezien ze de hoogste toekomstige waterstand niet kennen, moeten ze lering trekken uit de hoogste die er geweest zijn. Over de laatste eeuw en nog wat langer zijn er statistieken van de waterstanden bij zulke markante punten als – zeg maar – Hoek van Holland. Hoe verwerkt men zulke statistieken?
Het ligt voor de hand de gegevens in een grafiek uit te zetten. Hoe zal zo'n grafiek eruit zien? Laten we eerst even gissen. Hoge waterstanden zullen hoe hoger hoe zeldzamer zijn. Laten we met twee meter boven het nulmerk beginnen. (fig. 1)
Ik zet de kans op een waterstand tussen 200 en 210 cm als een rechthoekig staafje op het lijnstuk van 200 tot 210, de kans op een waterstand tussen 210 en 220 cm op het lijnstukje van 210 tot 220 enz.

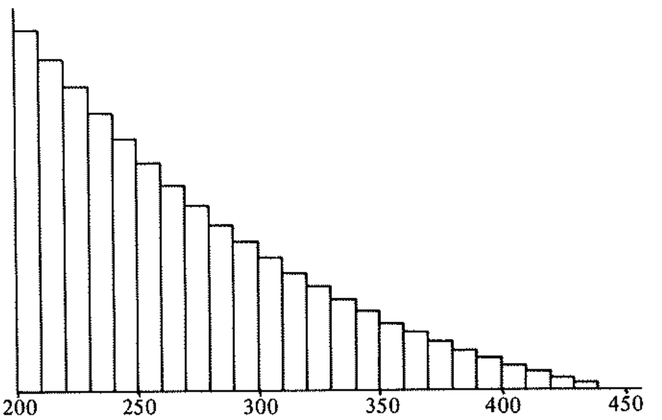


fig. 1

Wat dan ontstaat, noemt men een staafjesdiagram of histogram.
Waar haalt men de gegevens ervoor vandaan?

Laten we eerst een ander voorbeeld behandelen. Ik maak een staafjesdiagram van de leeftijdsopbouw van de nederlandse bevolking. (fig. 2) Zoveel tussen de 0 en 5 jaar, zoveel tussen de 5 en 10 jaar enz.; elke leeftijdsklasse door een rechthoekig staafje aangegeven, dat wat oppervlakte aangaat aan die respektieve aantallen beantwoordt.

Het wordt een diagram van hetzelfde karakter als fig. 1 — over het algemeen met stijgende leeftijd een lager staafje.

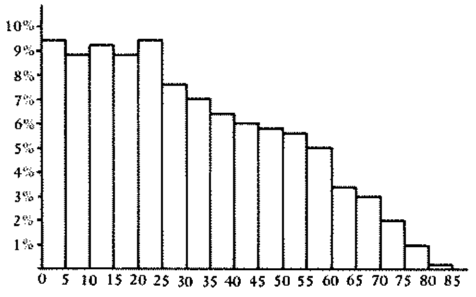


fig. 2

Wat heeft dit met kansen te maken?
Wel, als de 9-10 jarigen een fraktie 2% van de bevolking vormen, is de kans om uit het kaartsysteem van de nederlandse bevolking net de kaart van een 9-10 jarige te trekken 2%.
Om de kans op een waterstand tussen de 200 en 210 cm te bepalen bekijk je alle hoogwaterstanden (2 per etmaal) en haal je er die van tussen 200 en 210 cm uit. Het percentage geeft je een idee van de kans op zo'n waterstand.

Je kunt dergelijke grafieken ook nog anders opzetten. Niet uitzetten, hoeveel er *van* een bepaalde leeftijd, maar hoeveel er *beneden* een bepaalde leeftijd zijn. Dit wordt dan een oplopende in plaats van een aflopende grafiek. (fig. 3) Er zijn bepaalde dingen die je in fig. 3 duidelijker ziet dan in fig. 2. Bijvoorbeeld zie je met één oogopslag dat de ene helft van alle mensen in nederland jonger dan 30 jaar en de andere ouder dan 30 jaar is.

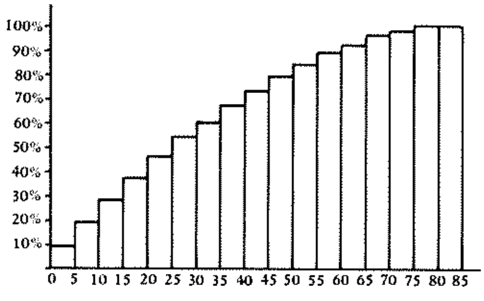


fig. 3

Je kunt het nog anders doen. Je zet uit hoeveel mensen *ouder* dan een bepaalde leeftijd zijn. (fig. 4) Dit wordt dan weer een aflopende grafiek, die een beetje op die van fig. 2 lijkt.

Bij de stormvloeden doe je het ook op deze manier, want wat je interesseert, is juist de kans op een waterstand die een gegeven peil te boven gaat.

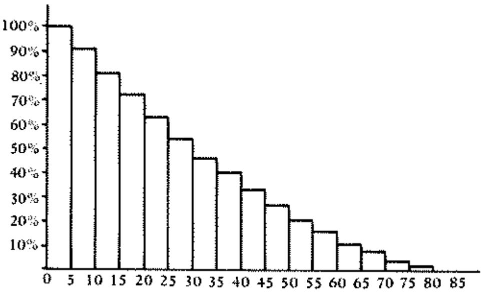


fig. 4

Zoiets is in fig. 5 uitgezet en dat is nu geen verzonnen diagram; het bevat de gegevens waarover men beschikte toen men na de stormramp van 1953 het Deltaplan ging opzetten.
De stippeltjes in fig. 5 geven de frekwenties van waterstanden weer boven de zoveel meter en wel per winter, geteld over 60 winters in 't verleden. De waterstanden zijn langs de horizontale lijn vermeld, de frekwenties langs de vertikale. De getallen, die daar staan lijken wat vreemd: op gelijke afstand ziet u daar 0,001; 0,01; 0,1; 1; 10 — het is een zogenaamde logaritmische schaal, net als op een rekenliniaal. Een eenheid afzakken langs de vertikale as betekent dat de frekwentie door 10 wordt gedeeld.

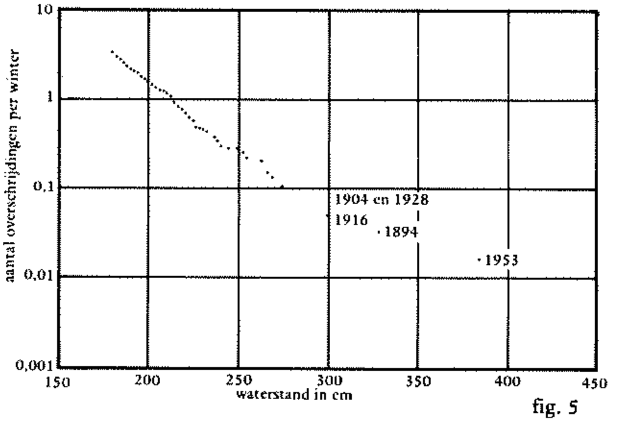


fig. 5

Een waterstand van 150 cm of hoger komt dus zowat 3 keer per winter voor, en van 200 cm of hoger ruim 1 keer per winter, en van 250 cm of hoger ongeveer 0,2 keer per winter, dus 1 keer per 5 winters enz. Hoe hoger de waterstanden, des te schaarser worden uiteraard de gegevens, maar desniettemin is de rechtlijnige afval van deze puntenreeks duidelijk te onderkennen.
Let wel, rechtlijnig op de logaritmische schaal.

Aan een rekenkundige rij bij de waterstanden beantwoordt een meetkundige bij de kansen. Anders gezegd:
Als de kans om peil **x** te overschrijden, p is, krijgt men voor de overschrijding van peil

x	x + 60	x + 120	x + 180	...
p	$\frac{1}{10}$p	$\frac{1}{100}$p	$\frac{1}{1000}$p	...

Althans in 't begin van de puntenrij klopt dit heel aardig.
Maar dan grijpt men tot iets dat in de wiskunde ook ekstrapoleren wordt genoemd. Men gist, dat het wel volgens dezelfde wet door zal gaan. En dit zou betekenen: een waterstand bij Hoek van Holland minstens zo erg als in 1953 één keer per eeuw, een waterstand van nog 60 cm hoger één keer per millenium, en een van liefst 120 cm hoger één keer in de 10 000 jaar.

Hoe hoog moeten onze dijken zijn?
Elke decimeter hoger kost milliarden. Moeten we die voor groter veiligheid of voor andere nuttige zaken bestemmen? Er zit iets van een kansspel in – een kansspel waarbij je de kansen moet gissen op grond van de gegevens die je hebt. Maar bij de dijkbouw komt nog meer te pas dan alleen kansrekening, ook meer wiskunde – *harde wiskunde*.

foto: utrechts nieuwsblad

– KRITISCH –
'Mies Bouwman laat Johan Cruyff door de telefoon beslissen welke mensen in *Een van de Acht* tegen elkaar moeten spelen.
Vind je dat eerlijk?'
'.... nee, dat is niet eerlijk. Ze had ook wel een gewone arbeider kunnen vragen

4.4 ORIENTATIETOCHT IN ONTWERP EN PSYCHOLOGIE

JOHAN VAN BRUGGEN
LEEN STREEFLAND

INLEIDING

Wanneer u in een willekeurige moderne buitenlandse basisschoolmetode op zoek zou gaan naar het onderwerp *Waarschijnlijkheid en Statistiek* bent u snel klaar.

Het is veelal zo, dat in het laatste deel van een dergelijke metode een klein hoofdstuk gewijd is aan enkele statistische eksperimenten met munten en dobbelstenen; verder ontbreekt het onderwerp geheel.

Aktiviteiten in de sfeer van de beschrijvende statistiek (grafische verwerking) komen veelvuldiger en ook in de delen voor de lagere leerjaren aan de orde.[1])

Op zichzelf hoeft deze vaststelling weinig verwondering te wekken, omdat pas in de laatste jaren stemmen in het buitenland – en sinds kort ook in eigen land – opgaan, die gewag maken van eksperimenten in dit gebied van de wiskunde, zowel op basisschoolnivo als ten behoeve van het voortgezet onderwijs. Deze eksperimenten strekken zich niet alleen uit tot vragen naar leerstofkeuze en didaktische vormgeving, doch behelzen eveneens onderzoek op leer- en ontwikkelingspsychologisch terrein, waarbij met betrekking tot de ontwikkelingspsychologie nog vermeld kan worden dat Piaget hiertoe de eerste aanzet gegeven heeft.

Het voorgaande impliseert, dat deze oriëntatietocht een ander karakter zal dienen te dragen dan de in dit Bulletin tot nu toe gebruikelijke.

We willen proberen om vanuit een inventarisatie van ervaringen betreffende zowel de keuze van inhoud en didaktische vormgeving in dit deelgebied van de wiskunde, als de leerpsychologie een aantal vraagpunten te formuleren. Hierover zal – mede op grond van eigen ervaringen – een (voorlopig) standpunt geformuleerd worden.

[1]) Zie: Wiskobas-Bulletin jaargang 1 no. 2/3, pag. 159-164.

HET ONDERWIJS IN WAARSCHIJNLIJKHEID EN STATISTIEK OP BASISSCHOOLNIVO

In hun artikel *'Introduction des Probabilités à l'Elémentaire'* gaan Daniel Gilis en Bernhard Héraud in op het onderwijs in waarschijnlijkheids(rekening) en statistiek op de basisschool. Zij onderscheiden een zestal stadia volgens welke dit onderwijs dient te verlopen. Deze stadia willen we in het kort beschrijven om de aanpak van anderen er tegen te projekteren.

Stadium 1

Te karakteriseren door *vrij spel*.

De leerlingen maken kennis met materiaal voor statistische eksperimenten zoals tollen, wieltjes, bord van Galton en mogen daarmee vrij spelen.

(leeftijd 6-8 jaar)

Stadium 2

Meer *gestruktureerde spelen,* waarbij bepaalde spelregels in acht genomen dienen te worden. De leerlingen proberen, louter intuïtief, om bepaalde gebeurtenissen te voorspellen of om een regel waaraan het spel voldoet te raden. Bovendien wordt een begin gemaakt met de introduktie van kombinatorische (tel)problemen.

(leeftijd 8-9 jaar)

Stadium 3

Isomorfe spelen komen in dit stadium aan de orde.

Begrippen als 'mogelijke uitkomsten', 'gebeurtenissen', 'waarschijnlijker dan', 'even waarschijnlijk als', 'minder waarschijnlijker dan' passeren de revu.

(leeftijd 9-10 jaar)

Ter toelichting van het voorgaande geven we, voordat we met de volgende stadia verder gaan eerst enige voorbeelden. De voorbeelden hebben ten doel bij de leerlingen een intuïtief begrip bij te brengen van de ***binomiale kansverdeling***. De voorbeelden afzonderlijk representeren de stadia 1 en 2 al naar gelang ze met of zonder speciale opdracht worden aangeboden. Samen karakteriseren de voorbeelden stadium 3, omdat kansteoretisch van isomorfe problemen gesproken kan worden.

Spel 1 – 'De grote prijs van Zandvoort'

* Materiaal
Een bord(je) van Galton (fig. 1) en een racebaan (fig. 2).

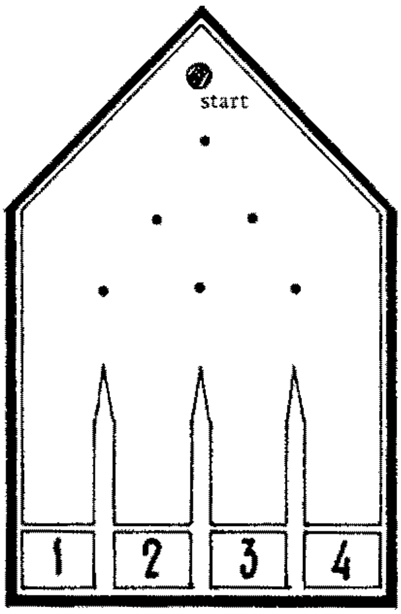


fig. 1

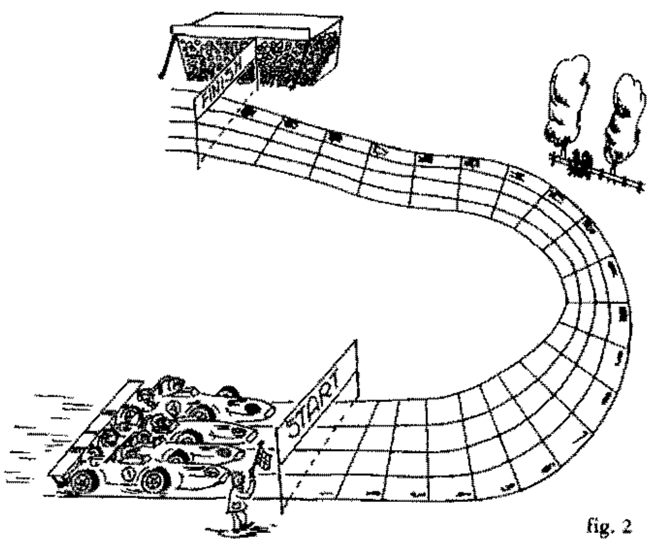


fig. 2

* Spelregels
4 koereurs krijgen de racewagens genummerd van 1 t/m 4 tot hun beschikking en stellen die op aan het begin van het parkoers. De 'wedstrijdleider' legt een knikker op het schuin opgestelde bord(je) van Galton. Al naar gelang de knikker in één van de met 1 t/m 4 genummerde vakjes terechtkomt, mag de koereur van de wagen met hetzelfde nummer een vakje vooruit op de baan.
Degene die het eerste de finish bereikt, heeft gewonnen.
De uiteindelijke uitslag wordt vergeleken met het aantal knikkers in elk vakje van het bord van Galton.

* Teoretische achtergrond
De knikker heeft steeds een kans van $\frac{1}{2}$ (teoretisch) om in het bord van Galton links- of rechtsaf te gaan.
Laat men nu 56 maal een knikker rollen dan mag men op grond van de volgende redenering een verwachting hebben omtrent de hoeveelheid knikkers die in elk vakje terechtkomt:

Op het bord van Galton wordt een knikker driemaal voor de keuze gesteld linksdan wel rechtsaf te gaan, telkens met een kans van een half.
Naar vakje 1 leidt slechts één weg, de kans dat de knikker die weg volgt is:
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
We mogen nu $\frac{1}{8} \times 56 = 7$ knikkers in vakje 1 verwachten.
Naar vakje 2 leiden 3 wegen. Elke weg heeft een kans van $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ om door de knikker gevolgd te worden. In vakje 2 mogen we dus $\frac{3}{8} \times 56 = 21$ knikkers verwachten.
Voor vakje 3 geldt dezelfde uitkomst als voor 2 en voor vakje 4 dezelfde als voor 1.

We kunnen het voorgaande ook visualiseren in een 'boom met gewogen takken'.
(fig. 3)

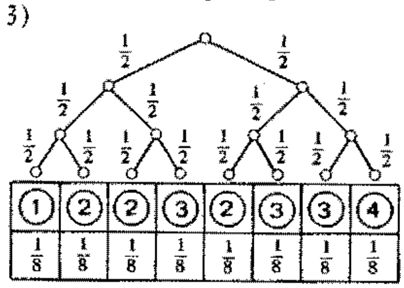


fig. 3

Voorgaande redenering is ook van toepassing op de teoretische achtergrond van de volgende spelen, zodat we deze daar achterwege laten (isomorfe problemen).

Spel 2 – 'Wat trek ik aan?'
Aan de kinderen wordt een verhaaltje verteld. In een stad moeten de mensen zich van de koning als volgt kleden: zij dragen een jasje, broek en hoed, waarbij ze voor elk kledingstuk mogen kiezen uit de kleuren rood en blauw.
De kledingstukken hangen per soort aan draaibare kapstokken.
Iedere inwoner draait 's morgens de drie kapstokken en neemt telkens het voor hem hangende kledingstuk van de kapstok als deze weer stilstaat.

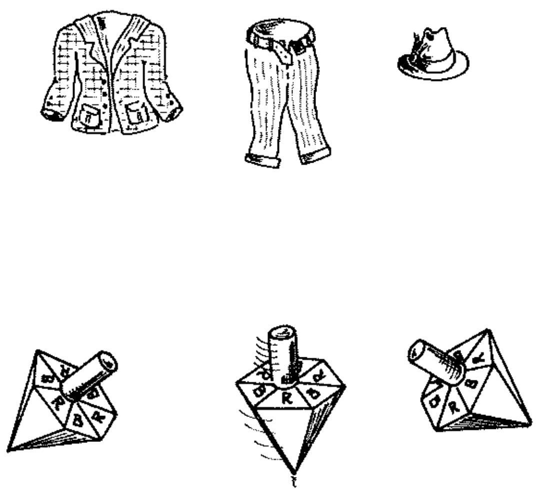


fig. 4

De koning wil nu weten hoe zijn onderdanen uitgedost zijn en wat het meeste voorkomt:
– inwoners die helemaal in het rood zijn,
– inwoners die helemaal in het blauw zijn,
– inwoners die meer blauw dan rood dragen,
– inwoners die meer rood dan blauw dragen.
Voor de kapstokken worden tollen gebruikt. (fig. 4)
De kinderen draaien met de tollen en registreren de antwoorden om aan de weetgierigheid van de koning tegemoet te kunnen komen.

Spel 3 – 'Viskonkoers'
In een bak, die onderverdeeld is in 4 bij 4 vakjes liggen vissen. (de helft van de vakken bevat een vis)

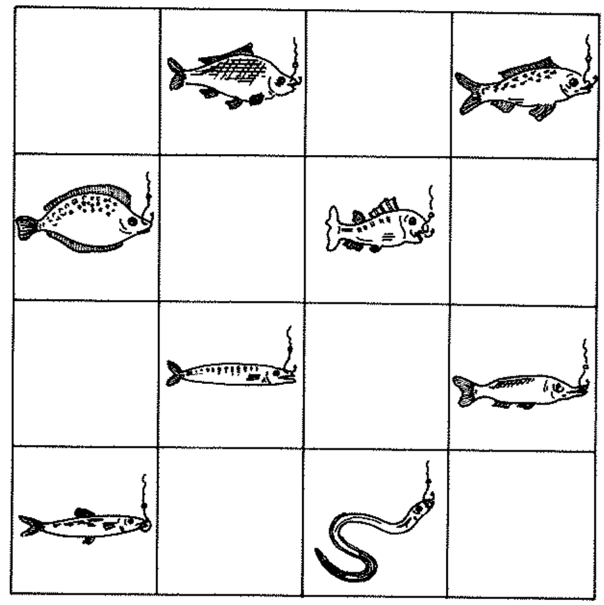


fig. 5

Iedere leerling mag nu met een hengel 3 maal in deze visvijver een lijntje uitwerpen, zonder dat in de bak gekeken wordt. Komt de 'haak' in de vak met een vis, dan is de vis gevangen. Deze blijft echter in het vak, omdat anders de kans op een vis bij de volgende inworp beïnvloed zou worden.
Nagegaan wordt hoe het met de uitslag zit:
– kinderen zonder vis,
– kinderen met drie vissen,
– kinderen met twee vissen,
– kinderen met één vis.
Wat komt 't vaakst voor? Zijn er overeenkomsten?

Stadium 4
Geschematiseerd voorstellen van fundamentele begrippen.
De bedoeling is om een teoretisch model voor de spelen te konstrueren.
(leeftijd 9-11 jaar)

Stadium 5
Symbolisering
Systematisch worden verschillende voorstellingen van alle mogelijke resultaten bij bepaalde eksperimenten bestudeerd. Er wordt onderscheid gemaakt tussen absolute en relatieve frekwentie.

Een aanvang wordt gemaakt met het meten van kansen. (breuken bij het teoretische kansbegrip, frakties bij het empirische kansbegrip).

Stadium 6
Formalisering en aksiomatisering
Kansen worden gemeten, som- en produktregel voor kansen eksplisiet gemaakt.
(leeftijd 11-13 jaar)

Deze drie stadia zullen we verder niet toelichten, omdat in andere artikelen van dit Bulletin de stadia in konkrete stukken onderwijs beschreven zijn.
Binnen de voorgaande stadia komt het funktionele gebruik van begrippen uit de verzamelingentaal aan bod, terwijl bovendien aspekten van de logika meespelen.
Een voorbeeld:
De leerlingen beschikken over een vaas met 24 ping-pong balletjes, waarop de grote logiblokken zijn afgebeeld. De bij bepaalde gebeurtenissen behorende uitkomstenverzamelingen worden tussen akkolades genoteerd.

A : 'Ik trek een balletje met een rood blok'

$A = \{ \boxed{r}, \boxed{\ r\ }, \textcircled{r}, \textcircled{r}, \triangle_r, \triangle_r, \boxed{\ r\ }, \boxed{r} \}.$

B : 'Ik trek een balletje met een dun blok'

$B = \{ \boxed{r}, \boxed{b}, \boxed{g}, \textcircled{r}, \textcircled{b}, \textcircled{g}, \boxed{\ r\ }, \boxed{\ b\ }, \boxed{\ g\ }, \triangle_r, \triangle_b, \triangle_g \}$

C : 'Ik trek een balletje met een dun rood blok'

$C = \{ \boxed{r}, \triangle_r, \textcircled{r}, \boxed{\ r\ } \} = A \cap B.$

De logika speelt een rol bij de kwalifikatie van door de kinderen opgestelde uitspraken (zinnen).
Bijvoorbeeld: bewering A is 'waar' (kan voorkomen).
Deze uitspraak wordt geverifieerd door de balletjes met de rode blokken te tonen (verzameling A).

* * *

Reeds eerder werd een idee van de hongaar *Varga* (Dobbelstenenloop) konkreet uitgewerkt.[1])

[1]) Wiskobas-Bulletin jaargang 2 no. 1, pag. 521-524.

We volstaan met een verwijzing en signaleren, dat het in 4 fasen beschreven spel duidelijk past in de hiervoor genoemde stadia 2 en 3, terwijl de in de suggesties voor het vervolg van het betrokken spel aangegeven aktiviteiten overeenstemmen met de volgende stadia.
Een duidelijk verschil komt tot uitdrukking in de wijze waarop kansen kwalitatief benaderd worden. In het derde stadium bij Gilis en Héraud worden termen als 'meer waarschijnlijk', 'gelijk waarschijnlijk' en 'minder waarschijnlijk' gehanteerd. Varga begint met een driedeling en onderscheidt 'zekere', 'onmogelijke' en 'mogelijke' gebeurtenissen, waarbij het de bedoeling is, dat op den duur gebeurtenissen naar *gradaties van mogelijk* gekwalificeerd gaan worden.
Een handig visualiseringsmiddel is de kansladder:

Heeft de leerling te doen met een zekere gebeurtenis, dan wordt het bovenste balletje op de ladder gekleurd.
'Er worden elke dag meer dan 10 babies geboren'

Is de gebeurtenis onmogelijk, dan wordt het onderste balletje ingevuld.
'Hij gooit 7 ogen met één dobbelsteen'

Is een gebeurtenis mogelijk, dan kleurt de leerling een balletje in het midden.
'Die ouders zijn samen 62 jaar'

Varga benadert de waarschijnlijkheid vanuit de tweewaardige logika: 'waar' en 'niet-waar' komt tot uitdrukking in de onderscheiding van 'zekere' en 'onmogelijke' gebeurtenissen. Van daaruit wordt het terrein van de waarschijnlijkheden geëksploreerd.

* * *

In de aanpak van Varga kunnen duidelijke overeenkomsten gesignaleerd worden met die van de *Dienes-groep*. (Sherbrooke Universiteit) In publikaties komt de relatie tussen Varga en betrokken groep tot uitdrukking.[1])

* * *

[1]) Tamas Varga – Combinatorials and probability for young children I. (Sherbrooke Mathematics Project, University of Sherbrooke, Canada)

Ook *Frédérique Papy* (belgië) eksperimenteerde met basisschoolleerlingen op het gebied van de waarschijnlijkheid.
Haar aanpak wordt gekarakteriseerd door:

* *Een start in stadium 4.*
  De gehele spelfase wordt overgeslagen. In de eerste les berekenen de kinderen bijvoorbeeld al de kans op 6 ogen bij het werpen met 2 dobbelstenen.($\frac{5}{36}$)
* *Een sterk geformaliseerde aanpak,*
  waarbij verzamelingen en afbeeldingen van de ene verzameling in of op de andere of van de ene verzameling in of op zichzelf een rol spelen. Ter toelichting een kombinatorisch probleem, zoals de leerlingen van Frédérique het leren op te lossen.

  In een kamer staan 8 stoelen.
  Op hoeveel verschillende manieren kunnen 5 kinderen hierop plaatsnemen?
  Stap 1.
  Het probleem wordt vertaald in een 'graphen visualisering':

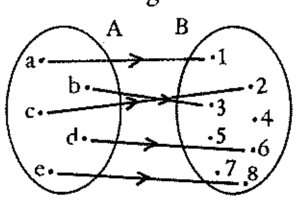


fig. 6

Het gaat er nu om, dat het aantal injekties (een injektie is een afbeelding van een verzameling in een verzameling of van een verzameling in zichzelf) van verzameling A in verzameling B geteld wordt, met andere woorden dat alle mogelijke verschillende pijlen, die een paar (kind, stoel) representeren, geteld worden. Dit leidt tot onoverzichtelijk geknoei, daarom wordt het probleem vertaald in een roosterdiagram. (stap 2)

	1	2	3	4	5	6	7	8
a		X						
b				X				
c								
d								
e								

fig. 7

Kind a kiest bijvoorbeeld stoel 2 en kind b stoel 4 etc.
Vervolgens wordt de vraag gesteld: hoeveel keuzemogelijkheden heeft kind a, hoeveel mogelijkheden blijven er dan nog voor b over?

Het aantal injekties van verzameling A in verzameling B is dus 8 x 7 x 6 x 5 x 4, dat wil zeggen de kinderen kunnen op zoveel verschillende manieren gaan zitten.

* Met de eerste lessen wordt pas *begonnen in het vierde leerjaar,* omdat Frédérique van mening is, dat kennis van breuken een noodzakelijke voorwaarde is.
* Het onderwijsproces wordt sterk gestuurd in tegenstelling tot de beide in het voorgaande gesignaleerde 'richtingen'.
  Men ontkomt niet aan de indruk dat de kinderen maniertjes leren.

* * *

Tenslotte vermelden we, wat deze oriëntatie betreft, nog het werk van *CEMREL* (Central Midwestern Regional Educational Laboratory) welke groep een eksperimenteel programma voor Waarschijnlijkheid en Statistiek ontwikkelt, zowel voor de basisschool als voor het voortgezet onderwijs.
De eerder gesignaleerde stadia zijn vanaf het tweede in dit werk terug te vinden, zij het dat de aanpak een formeler karakter draagt dan die van bijvoorbeeld Varga.
Op de basisschool wordt gestart in het tweede leerjaar met eksperimentjes in de spelsfeer.
Voorbeeld:
Twee kinderen hebben elk een pion. Deze worden tegenover elkaar geplaatst. (fig. 8)

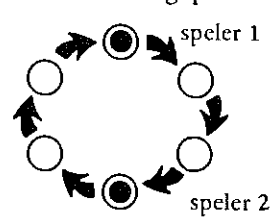


fig. 8

Ze trekken — met terugleggen — een balletje uit een vaas.
Is het balletje rood, dan mag speler 1 een stapje vooruit in de richting van de pijl, bij blauw geldt dit voor speler 2. De kansen op een rood of blauw balletje zijn gelijk. Degene, die de ander inhaalt heeft gewonnen. Het spelletje wordt gevarieerd, door bijvoorbeeld met een tol te draaien om te bepalen wie verder mag.
De kansen zijn hierbij niet eerlijk verdeeld. (fig. 9)

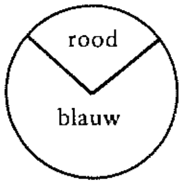


fig. 9

Een boek voor het voortgezet onderwijs start met de uiteenzetting van problemen op het nivo van stadium 6.
In dit boek wordt in feite ieder probleem opgelost met behulp van een 'boom met gewogen takken', zoals eerder in dit artikel gebruikt. (zie fig. 3) Deze aanpak is van de duitser Engel.

* * *
* * *
* * *

ONDERZOEK VANUIT DE PSYCHOLOGIE

De vraag kan gesteld worden of er ook ontwikkelingspsychologisch en/of leerpsychologisch onderzoek gedaan is, dat enige steun kan bieden bij het uitzetten van een onderwijstrajekt door dit gebied.
Er is inderdaad zulk onderzoek. Een uitvoerige studie is die van *J. Piaget,* neergelegd in: *'La génèse de l'idée de hasard chez l'enfant'* (Paris, 1951).
Op de achtergrond van het boek speelt sterk de algemene teorie van Piaget over de ontwikkeling van de intelligentie mee. Daaruit volgt namelijk dat die begrippen en redeneringen, waarbij het formeel bezig-zijn met logische operaties noodzakelijk is, pas omstreeks het 11^{e} of 12^{e} levensjaar kunnen worden verwacht. Piaget heeft een groot aantal eksperimenten, waarin begrippen uit de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek een rol spelen, bedacht en met kinderen uitgevoerd, waarbij de nadruk valt op het gesprek tussen proefleider en kind. Het gaat om begrippen als: toevallige mengeling van kralen, wet van de grote aantallen, de kans op een bepaalde gebeurtenis, steekproef met of zonder teruglegging van de getrokken elementen, somregel, produktregel.
Het blijkt dat er bij kinderen tussen 7 en 11 jaar een toenemend begrip van 'toevalligheid', 'kans', 'steekproef', 'wet van grote aantallen' valt waar te nemen, maar dat het redeneren over de eksperimenten, het duidelijk onderscheiden van het toevallige en het wetmatige, het systematisch toetsen van hypotesen pas na het 11^{e} jaar mogelijk is. Volgens Piaget zou men met de ontwikkeling van het (echte) kansbegrip dan ook moeten wachten op het tot stand komen van de formeel-logische operaties.
Uit de beschrijvingen blijkt echter dat Piaget het oog heeft op het *a-priori kansbegrip* en het rekenen daarmee. De vraag kan gesteld worden of we in het onderwijs niet toch aandacht zouden moeten besteden aan de ontwikkeling van *min of meer intuïtieve begrippen* over kans, mogelijkheid, gebeurtenis, steekproef, e.d.
Blijkens zijn eigen eksperimenten zijn in dit gebied wel intuïties bij de jongere kinderen aanwezig.

Het is vooral de roemeen *Fischbein* geweest, die in diverse artikelen – vooral in het blad *'Educational Studies in Mathematics'*[1]) – erop gewezen heeft, dat het in de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek om iets méér gaat dan een aantal rekentechnieken en formeel-logische operaties; het gaat óók om een speciale manier van denken (statistisch denken). Anderen hebben hier eveneens op gewezen (zie het artikel van H. Freudenthal in dit Bulletin).
Fischbein voert dan ook een pleidooi voor het al vroeg beginnen met de ontwikkeling van een 'corps d'intuitions et d'habitudes mentales' waarin – in een spiraalsgewijze opbouw – kinderen ervaringen kunnen opdoen met statistische begrippen als: voorspelling, steekproef, eksperiment, uitkomst, verifikatie, toeval, zekerheid, mogelijkheid, wet, statistische wet, teruglegging.
Uit zijn eksperimenten met kinderen van 8, 9 en 10 jaar trekt hij de konklusie

– dat het onderwijs in waarschijnlijkheidsrekening en statistiek bij kinderen in deze leeftijd als doel kan hebben 'former les structures intuitives et les habitudes mentales fondamentales',
– dat dit doel bereikt kan worden door met de kinderen allerlei eksperimenten uit te voeren waarin statistiek en waarschijnlijkheidsrekening nauw samengaan en

---

[1]) Uitgave: Reidel, Dordrecht.

– dat vanuit het inventariseren van mogelijkheden de kombinatoriek kan worden verkend.

Pas later mondt dit uit in abstrakte redeneringen.

Ook de amerikaan *W. Leffin* komt in een vrij uitvoerige studie tot een scherpe onderscheiding van drie soorten kansdefinities, die samenhangen met verschillende kansbegrippen:
– de a-priori definitie (de kans op een 4 bii een dobbelsteenworp is 1 op 6),
– de intuïtieve (taal)definitie (je hebt grote kans dat hij niet thuis is),
– de a-posteriori (empirie) definitie (je hebt een kans van. 5 op 8 dat deze operatie gelukt, gezien de ervaringen van dit ziekenhuis in het verleden).

Volgens Leffin is begrip van deze drie kansdefinities, vooral van de a-priori-definitie, noodzakelijk, 'before a systematic study of the more complex notions of probability can be attempted'.[1])

Met de 'more complex notions' bedoelt hij dan bijvoorbeeld de somregel, de produktregel, de steekproeftrekking, de normale verdeling, e.d.

Zijn eigen onderzoek beperkt zich tot drie begrippen, die alle drie met de a-priori kansdefinitie te maken hebben. Hij komt tot de konklusie dat kinderen van 9 à 10 jaar een aantal basisbegrippen (uitkomstenverzameling, gebeurtenis, steekproef) kennen, maar dat grote moeilijkheden worden veroorzaakt door het onvermogen tot systematisch tellen van de mogelijkheden, wat bij de a-priori definitie noodzakelijk is. Hij kan tevens aantonen dat 'steekproeftrekking zonder teruglegging' ook voor 13 à 14-jarigen nog een moeilijk begrip is.

Kortom: onderzoek als het zijne kan er toe bijdragen de begrippen uit dit leerstofgebied te ordenen naar moeilijkheid op psychologische kriteria (afgezien van logische ordening).

* * *
* * *
* * *

KONKLUSIES EN VRAGEN

Samenvattend kunnen we stellen dat er weinig twijfel over bestaat *dat* er bij kinderen vanaf 6 à 7 jaar intuïtieve begrippen over kans en toeval aanwezig zijn. Ook bestaat er weinig twijfel over dat het kwantificeren van kansen en het redeneren daarover pas omstreeks het 10^e à 11^e levensjaar zin heeft.

Maar: *of* en *hoe* de intuïtie verscherpt kan worden, zodat er een zinvolle voorbereiding op een vervolg plaatsvindt en of dat – onderwijskundig gezien – de moeite waard is, daarover biedt het psychologisch onderzoek weinig uitsluitsel. Daartoe kunnen we beter te rade gaan bij de ontwerpers.

Uiteindelijk zullen we een keus moeten maken tegen de achtergrond van wat we nu *willen* met het wiskunde-onderwijs in de basisschool – ook in het leerstofgebied van de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek –.

Er *kan* van alles, zoals zowel psychologen als ontwerpers aantonen.

Ruwweg kunnen we de volgende mogelijkheden onderscheiden:

A Doe tot 10 à 11 jaar niets aan waarschijnlijkheidsrekening, statistiek of kombinatoriek; begin in klas 4 à 5 met problemen uit de waarschijnlijkheidsrekening en werk van daaruit aan de kombinatoriek en de statistiek (Frédérique Papy).

B Als A, maar in de vijfde klas startend met kombinatoriek; pas als daarin wat bereikt is, kan men de kinderen konfronteren met waarschijnlijkheidsrekening en statistiek (....?)

C Geef op intuïtieve wijze een inleiding in de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek via spelletjes en eksperimentjes voor leerlingen vanaf 6 à 7 jaar; werk rond het 11^e à 12^e jaar veel aan kombinatorische problemen en ga daarna op hoog nivo waarschijnlijkheidsproblemen en statistische eksperimenten doen (Gilis en Héraud, Dienes, CEMREL).

D Als C, maar verbind de kombinatoriek en de meer formeel-logische benadering van de waarschijnlijkheidsrekening met elkaar in het onderwijs aan 12-jarigen en ouderen (Varga, Fischbein).

---

[1]) A study of three concepts of probability possessed by children in the fourth, fifth, sixth and seventh grades; University of Wisconsin, 1969, pagina 16.

E Begin bij kinderen van 8 à 9 jaar met eenvoudige kombinatorische problemen, waardoor langzamerhand op 11 à 12 jaar een behoorlijk inzicht in kombinatorische problemen kan zijn ontstaan, waardoor dán kan worden begonnen met waarschijnlijkheidsrekening en statistiek op formeel-logisch nivo (Engel).[1])

F Kombineer de aanpak van Engel met een intuïtieve inleiding in waarschijnlijkheidsrekening en statistiek à la Varga (Dienes) waarna vanaf 10 à 11 jaar een meer formele benadering van de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek kan plaatsvinden. Vanuit de kombinatoriek kunnen tevens verbindingen gelegd worden met het aanleren van de operaties (benadering van het IOWO).

Met deze ruwe indeling zijn de problemen natuurlijk niet opgelost:

– welke kombinatorische problemen, strukturen en isomorfieën en op welke leeftijden?
– welke begrippen kunnen intuïtief worden verkend via spel en eksperiment en hoe moet die intuïtieve verkenning plaatsvinden?
– welke rol kan het simuleren hierbij hebben?
– welke verbindingen – eventueel startpunten – kunnen hier liggen voor het onderwijs in de breuken?
– .....

Op een aantal van dit soort vragen wordt implisiet antwoord gegeven in de heroriënteringsblokken *'Tel op Tal'* (blok VIII) en *'Waarschijnlijkheid en Statistiek'* (blok IX) en in de NOT-serie *'Kijk op Kans'*.
Veel vragen zullen pas na langduriger en uitgebreider ervaring kunnen worden beantwoord; daarin kan dan ook meer op details toegespitst psychologisch onderzoek een funktie hebben.

[1]) Dezelfde Engel is tevens hoofdauteur van CEMREL voor het voortgezet onderwijs.

4.5 KIJK OP KANS

ERVARINGEN MET DE 'TRY-OUT'

BERT VAN DE VEGT
BENNO GOOSSEN

Inleiding
In een vorig nummer stond vermeld dat aan de t.v. serie 'Kijk op kans' geen try-out was voorafgegaan.
In een later stadium is alsnog besloten dit toch te doen en wel aan een drietal scholen in Hengelo (O).
Hieronder volgt dan een verslag van de try-out zoals die plaatsvond in klas 5 en 6 van de John F. Kennedy-school.

De serie 'Kijk op kans' die in mei via school-t.v. lessen en begeleidingslessen van Teleac in de 5^{e} en 6^{e} klassen van de basisscholen te volgen is, handelt over statistiek en kansrekening. Er wordt gewerkt aan en een beroep gedaan op inzicht en vaardigheid op elementair statistisch gebied.
We maken veelvoudig gebruik van tabellen en grafieken. De leerlingen komen tot het bepalen van verhoudingen en percentages. Ook moeten er berekeningen worden uitgevoerd. Omdat er waarschijnlijk voor veel leerlingen onbekende zaken worden gebruikt, beginnen we met een zogenaamde voorbereidingsweek. In deze week staat het aanleren van technieken voorop. Dit houdt in dat klassikale lessen het meest efficient zijn.
Ons verslag begint bij die voorbereidingsweek.

Voorbereidingsweek
Hieraan ging geen t.v. les vooraf. Er werd in het leerlingenboek gewerkt. De leerkracht had de steun van een onderwijzersboek.
In deze week kwamen begrippen als turventabellen - staafdiagrammen - sektordiagrammen e.d. aan de orde.

Welk t.v. programma vind jij het leukst?		
Zeskamp	Sterreklame	Stuif-es-in
Swiebertje	Pipo	Een van de acht

fig. 1

Heel belangrijk was het eigen onderzoek. De klas werd verdeeld in groepjes. Elke groep ging in de klas een onderzoek houden. Zo werd van elke leerling de lengte gemeten en het gewicht bepaald.
Ook onderzoekjes naar de leukste sport of het meest geliefde t.v. programma.
Alle gegevens werden verzameld. (fig. 1) Elke binnengekomen antwoordstrook werd door de groep verwerkt. De gekozen programma's werden eerst *geturfd.* (fig. 2)

t.v.	meisjes	jo
Een van de acht	~~||||~~ ||	
	|||	
Swiebertje	~~||||~~ ||||	

fig. 2

Toen alle gegevens in de turftabel verwerkt waren werd een *sektordiagram* ingevuld. (fig. 3)

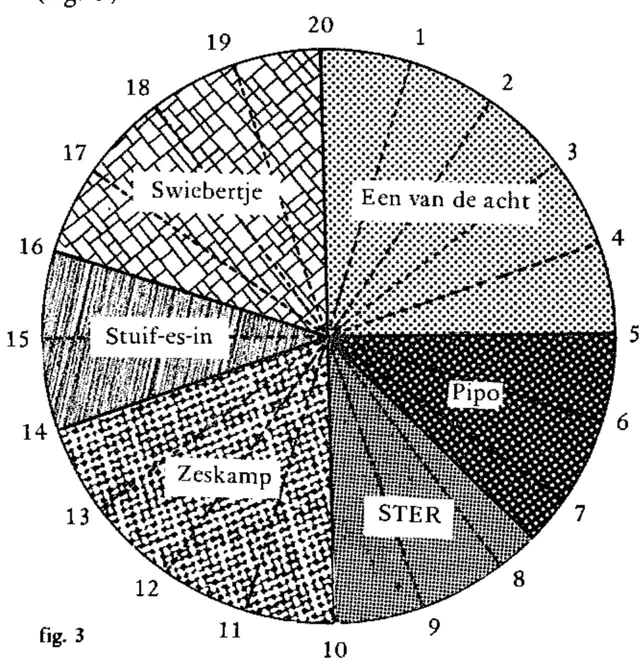


fig. 3

De uitslagen van het onderzoek werden aldus duidelijk in beeld gebracht.
Ook werden er *staafdiagrammen* gemaakt. (fig. 4)
Aan de hand van deze uitkomsten zijn er uitstekende gesprekken denkbaar over verhoudingen en percentages. Dat gebeurde bij ons ook.

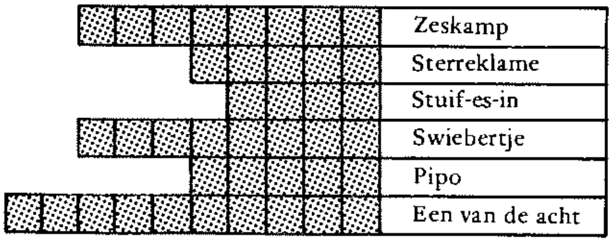


fig. 4

Daarbij bleek het voor enkele 5^{e} klas leerlingen soms nogal moeilijk. Vandaar dat in het definitieve werkboek ruimte is geschapen voor ekstra rekenmogelijkheden met procenten.
De leerlingen werkten er in het algemeen prettig mee.

Vanaf les één wordt de t.v. les ingeschakeld. Zo'n week ziet er dan als volgt uit:

- *T.V. les*
- *De '20 minuten'* (aansluitend)
  Dit is een door de leerkracht geleid klassegesprek. De bedoeling is dat de kinderen de gelegenheid krijgen nog eens te verwoorden wat er tijdens de uitzending naar voren is gebracht. Volstaan kan worden met korte reakties. Voor een uitputtende behandeling is ook geen tijd.
  Het werkboek is bij dat klassegesprek een hulpmiddel. Het bevat namelijk foto's van beelden uit de t.v. uitzending.
- *De verwerking*
  De rest van de week wordt gebruikt om met de leerlingen de opdrachten uit het werkboek te maken.
  Dit kan gebeuren op een wijze die men zelf het meest geschikt vindt; het kan dus klassikaal, groepsgewijs of individueel.

Les 1 — 'Uit 't leven gegrepen'
Via de t.v. hadden de leerlingen beelden gekregen over doodgewone dagelijkse zaken waarbij 'kans' een rol speelde, zoals:

* Is de kans om '6' met een dobbelsteen te gooien groter of kleiner dan de kans om een '2' te gooien?
* Welke aftelversjes zijn eerlijk? Welke oneerlijk?
* Je gaat als spel auto's tellen. De een telt de Volkswagens; de ander telt de Fords. Heb je beiden evenveel kans om te winnen?

In de '20 minuten' werd dit verder uitgediept. Eén leerling vond dat je een eerlijk spel altijd wel oneerlijk kunt maken. Er kwamen voorbeelden genoeg. Eerlijke spelletjes waren in de minderheid!
(Je staat als opvoeder wel even te kijken..........!)

Nieuw voor de kinderen was het *simuleren van waarnemingen.*
We hadden de beschikking over onderstaande gegevens:

Gemiddeld aantal auto's per uur op de genoemde dagen over de drie maanden juli, augustus en september 1972.

	zo	ma	di	wo	do	vrij	za
bus	80	50	40	60	30	20	90
vrachtauto	10	70	90	110	70	60	20

fig. 5

Zonder naar het punt te gaan waar deze verkeerstelling werd gehouden, konden de kinderen de werkelijkheid nabootsen.
Ze maakten een sektordiagram van bijvoorbeeld de dinsdag:

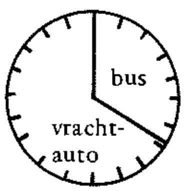


fig. 6 dinsdag

Dit sektordiagram geeft de werkelijkheid weer. Dat wil niet zeggen dat als ik *nu* op dat verkeerspunt ga staan er in een uur precies 40 bussen en 90 vrachtauto's voorbij komen. Het is een *gemiddelde.*
Het *toeval* speelt een belangrijke rol, zodat er op dat moment wel een heel andere verdeling

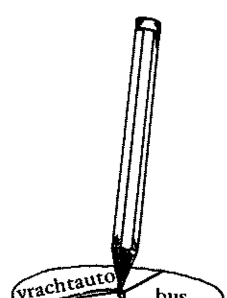


fig. 7

uit kan komen. Maar na heel veel waarnemingen moet het wel in de búurt van het gemiddelde komen.
Dat hebben de kinderen ervaren. Zij gingen de werkelijkheid simuleren door het sektordiagram nu als een 'kanstol' te gaan gebruiken.
Een potlood en een paperklip en ze waren klaar. (fig. 7)

In het werkboek stond onderstaande opdracht:

Vraag je onderwijzer ook een paperklip en laat maar eens 20 voertuigen passeren.
Turf het resultaat om te zien wie van beide wint.

	vrachtauto	bus
op zondag		
op dinsdag		

Wie wint?

fig. 8

Mijn klas bestaat uit 36 leerlingen. Toen elke leerling 20 voertuigen had laten 'passeren' werden de resultaten bij elkaar genomen. Er werd een sektordiagram gemaakt en deze werd vergeleken met het eerste sektordiagram. Uiteraard werd er naderhand over gediskussieerd. Dit ging in de geest van:
- hadden we deze uitslag ook verwacht?
- had het toch andersom kunnen zijn?
- waarom hebben enkele leerlingen een heel andere uitslag?

Les 2 – 'Een, twee, drie.... plof'
In de tweede week gingen we al veel duidelijker naar de *kwantitatieve benadering* van kans.
Uitdrukkingen als 'de kans is 1 op 3', kwamen vaker voor.
In de t.v. les was dit ook al naar voren gekomen. Daar had men gesproken over de kans in een loterij, de kans op een '6' bij een dobbelsteen (nu in beeld gebracht in een sektordiagram).
Die dobbelstenen speelden vaker een rol. Zo kwamen de volgende opdrachten – die we ingekleurd weergeven – voor:

Kleur de kansen in op deze dobbelsteentollen:

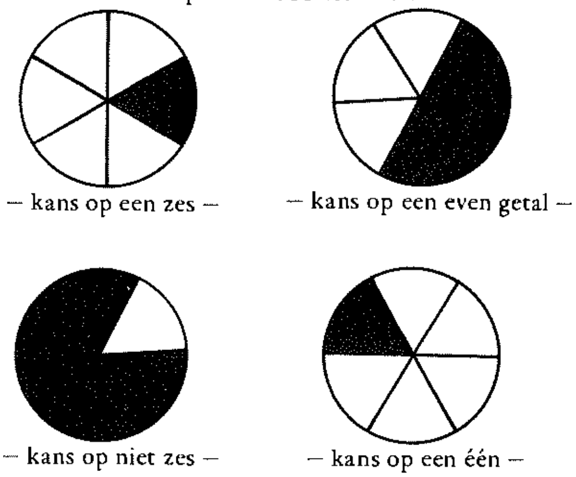


fig. 9

Een interessant probleem was het *'spoorweg-overgang-probleem'*.
Bij een bepaalde spoorwegovergang was de kans op een gesloten overweg gegeven. (1 op 3)
Een jongen was, volgens het verhaal, 5 van de 8 keer dat hij die spoorweg passeren moest, voor gesloten spoorbomen komen te staan.
De vraag kwam op: 'Was dat een toppunt van pech?'
De leerlingen maakten een kanstol. Ze gingen weer met paperklips aan het simuleren. Telkens gingen ze 'via de tol' de overweg acht keer passeren.
Alle passages werden door de gehele klas bij elkaar genomen. En daarna werden de slotkonklusies getrokken.

Les 3 — 'Kans bekeken — kans berekend'
Zoals de titel al aangeeft, was de bedoeling dat de leerlingen deze week met kansen gingen *rekenen*. In het aangeven van kansen waren er voor de leerlingen drie mogelijkheden:
* je raadt wat de kans ongeveer is; intuïtief;
* je probeert het een en ander uit; ook wel in de lessen 'zweetkans' genoemd;
* je gaat de kans berekenen; de zogenaamde 'weetkans'.

Die mogelijkheden zijn misschien het beste aan te tonen aan de hand van een opgave, zoals de kinderen die voor zich kregen.

> We gooien drie munten op.
> Voor elke munt is er de kans op 'kop' of 'munt'.
> Hoe groot is nu de kans dat *alle drie* munten op 'kop' vallen?

fig. 10

* Eerst mochten de kinderen de kans schatten.
* Daarna gingen de kinderen het een groot aantal malen proberen. Al die pogingen van elk kind afzonderlijk werden in de klas getotaliseerd en wel aldus:
  Elk kind (van de 36) heeft 10 keer met drie munten getost. Van die 36 pogingen (totaal), waren de munten 47 keer alle drie op 'kop' terecht gekomen.
  Een kans dus van '47 op 360' of (ongeveer) 1 op 8.
  Deze pogingen om achter de kansverhouding te komen hadden nogal wat moeite gekost. Daarom is de naam *'zweetkans'* nog niet zo gek.
* Was het ook te berekenen?
  Ja, we schreven alle mogelijkheden op:

k — kop
m — munt

k	k	k	één van de acht
k	k	m	mogelijkheden;
k	m	k	dus '1 op 8'
k	m	m	
m	k	k	
m	k	m	
m	m	k	
m	m	m	

fig. 11

De kinderen kwamen er al gauw achter dat je bij het opschrijven van de mogelijkheden het beste een bepaald systeem kon gaan hanteren.

Les 4 — 'Tol en toeval'
De leerlingen kregen beelden te zien van:
* *Drie tollen.*

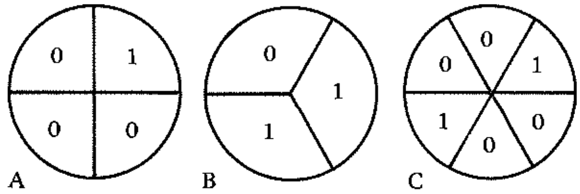


fig. 12

Met één ervan werd achter een scherm getold.
De resultaten werden opgeschreven en aan de leerlingen voorgelegd:
1-0-0-0-0-1-1-0-1-0-0-0
De leerlingen moesten nu met behulp van deze gegevens nagaan met welke tol gespeeld was.

* *Een babykamer in een ziekenhuis, waarin 8 bedjes stonden.*
Er werd van uitgegaan dat in ieder bed een jongen of een meisje kon liggen en dat de kans op een jongen of meisje even groot was. Aan de hand van de gegevens van de hoofdzuster en de gegevens die twee kinderen door simulatie hadden verkregen werd een staafdiagram opgezet.

In het hierop volgende klassegesprek werd nader ingegaan op hetgeen de leerlingen gezien hadden. Zo werd de vraag gesteld of je wel voor 100% zeker kunt zeggen, dat wanneer je over een aantal 'tolgegevens' beschikt, het 'die' tol wel moet zijn. Het moest de leerlingen duidelijk worden dat het *toeval* een rol blijft spelen.
Aan de hand van het leerlingenboek, waarin foto's stonden van onder andere een drukke winkelstraat, toeschouwers bij een voetbalwedstrijd, werd nader ingegaan op de vraag of er inderdaad evenveel vrouwen als mannen op de wereld zijn.
De *kernvraag* van dit klassegesprek was, dat wanneer je iets wilt onderzoeken je 'eerlijk' te werk moet gaan en dat dan toch het toeval een rol kan blijven spelen.
Bij de 8 bedjes in de babykamer was de kans dat er een jongen of meisje in zou liggen even groot. Dat wil echter geenszins zeggen dat er altijd 4 jongens en 4 meisjes zullen liggen. Het kan best zijn dat er 5 jongens en 3 meisjes liggen of ....

Zo kregen de leerlingen de gegevens van 256 babykamers en hiervan moesten ze onder andere uitrekenen hoe groot het percentage was, waarbij meer dan 6 jongens in de bedjes lagen.

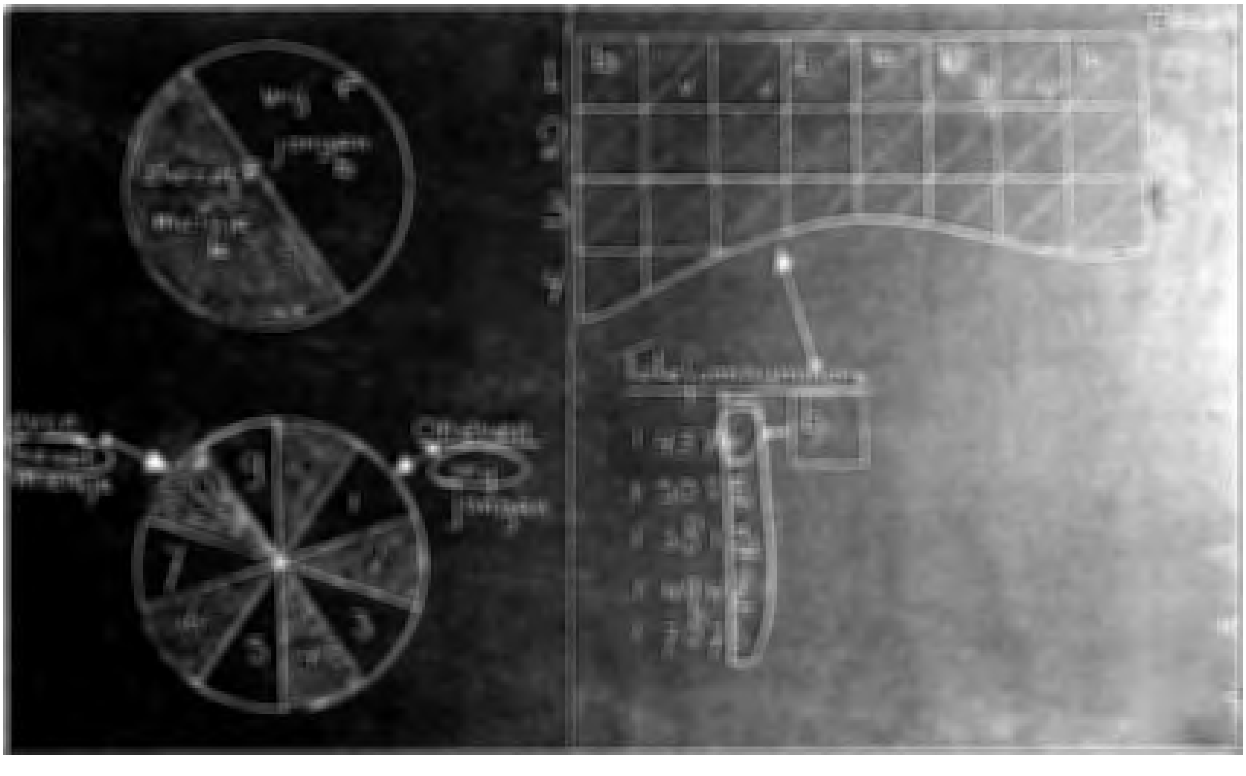
De verdere uitwerking in de loop van de week handelde over twee stewards. Deze wilden tijdens een vlucht niet te veel en niet te weinig drank meenemen. Ze hadden daarom van de laatste 10 vluchten die ze gemaakt hadden precies bijgehouden hoeveel koffie, thee en fris ze aan 100 passagiers hadden verkocht.

vlucht	koffie	thee	fris	niets
1e	52	17	26	5
2e	48	21	29	2
3e	46	19	29	6
4e	59	16	24	1
5e	44	24	25	7
6e	51	19	23	7
7e	45	22	28	5
8e	49	20	22	9
9e	54	18	24	4
10e	52	24	20	4
Totaal	500	200	250	50

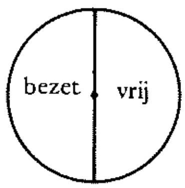
fig. 13

Aan de hand van deze gegevens moesten de leerlingen uitrekenen hoeveel kopjes koffie en thee en hoeveel flesjes fris er *gemiddeld* per vlucht verkocht waren.
Op één sektordiagram werden vervolgens de percentages koffie, thee, fris en niets weergegeven. Dit sektordiagram ging bij het simuleren van een aantal vluchten dienst doen als kanstol.
Ook werd weer nader ingegaan op de babykamer en ter diskussie werd gesteld wanneer we te maken hadden met een *uitschieter*.

Les 5 — 'Wie is er bang voor uitschieters?'
In de eerste 20 minuten ging het over de politie en met name de surveillancewagens die bij de politie in dienst zijn. Er is een gemeente waar men 8 surveillancewagens heeft. Aan de



hand van dagrapporten van de surveillancewagens werd bekeken hoe groot de kans was dat alle 8 wagens bezet zouden zijn en hoe groot het risiko zou zijn dat bij een bankoverval geen wagen meer ter beschikking zou zijn.
Tijdens het klassegesprek werd nader ingegaan op het werk van de politie (ook weer aan de hand van foto's, die in het werkboek stonden).
De leerlingen moesten tevens met behulp van dagrapporten bepalen hoe groot de kans was dat een wagen bezet was. Dit bleek vijftig procent te zijn. De leerlingen maakten hier weer een tol van en konden vervolgens simuleren of een wagen bezet of vrij was.



		wagen							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1e keer	bezet	x			x	x		x	x
	vrij		x	x			x		
2e keer	bezet								
	vrij								
3e keer	bezet								
	vrij								
4e keer	bezet								
	vrij								

fig. 14

In plaats van een tol te gebruiken werd de leerlingen onder ogen gebracht dat ze ook een telefoongids konden raadplegen.
Ze moesten dan kijken naar het laatste cijfer van een telefoonnummer. Was dit laatste cijfer even dan was de wagen bezet, was het laatste cijfer oneven dan was de wagen vrij.
We kregen dus weer hetzelfde als bij de 8 bedjes in de babykamer. De leerlingen moesten een aantal keren simuleren hoeveel van de 8 wagens er bezet waren en hoeveel vrij. De resultaten werden weer in een staafdiagram verwerkt en naar aanleiding van het staafdiagram moesten de leerlingen iets kunnen zeggen over uitschieters.

Gedurende de rest van de week kwam nog het volgende probleem aan de orde. Het ging hierbij om een klub van mannen boven de 40 jaar die voor hun plezier volleybalden. Er werd bij de probleemstelling van uitgegaan, dat bij minder dan 6 en meer dan 14 personen niet plezierig gevolleybald kon worden. De volleybalklub telde 16 leden en in de loop van het seizoen waren er vier nieuwe leden bijgekomen. Aan de hand van een presentielijst moesten de leerlingen vaststellen of men nog meer leden aan moest werven, of dat men er een zaaltje bij moest huren.
De leerlingen voerden *achtereenvolgens* de volgende opdrachten uit:

- Hoe vaak is iedereen op de speelavond geweest?
- Hoe groot is de kans dat een speler aanwezig is?
- Welke verwachtingen kun je uitspreken over het aantal spelers dat in de eerstvolgende weken aanwezig zal zijn. (Met behulp van het telefoonboek moest gesimuleerd worden)
- Vermeld de gegevens in een staafdiagram.
- Hoe groot is de kans dat er meer dan 14 en minder dan 6 spelers aanwezig zijn?
- Moet ekstra zaalruimte gehuurd worden, moeten er nog meer spelers bijkomen, of zijn er voldoende spelers?

Les 6 — 'Naar de schat'
Deze les werd niet zoals de vorige lessen voorafgegaan door t.v. beelden.
Het was een soort 'evaluatieles', waarin problemen die de leerlingen in de vorige lessen waren tegengekomen in een andere kontekst herhaald werden.
Om de leerlingen nog meer te stimuleren werd les 6 gegeven in de vorm van een verhaal, waarbij de 'helden' van het verhaal voor moeilijke problemen kwamen te staan. Onze helden waren op zoek naar een schat en wanneer een probleem niet opgelost kon worden betekende dit dat men niet verder mocht met het volgende probleem. De leerlingen voelden zich sterk betrokken bij het verhaal, omdat zij de schatzoekers mochten helpen en ..... wanneer ze alle problemen goed hadden opgelost lag er inderdaad een schat gereed. Als de leerlingen een probleem niet konden oplossen, mochten ze de oplossing kopen tegen betaling van 25%

van de schat. Het ging er bij ieder probleem om, dat *de klas* als geheel tot een oplossing kwam.

Konklusies

Wij hebben getracht een overzicht te geven van 7 weken werken aan een wiskunde-projekt.
Welke voorzichtige konklusies kunnen we nu trekken?

Voor de leerkracht:

* We zijn er behoorlijk druk mee geweest. Je bent deze manier van rekenonderwijs niet gewend.
* De stof was vreemd voor ons; daarom was een zeer goede voorbereiding noodzakelijk. (wanneer niet trouwens?)
* Het gaf voldoening te bemerken dat leerlingen, die anders niet zo gemotiveerd werkten, het nu vaak met plezier deden.
* Omdat we deze try-out met nog twee kollega-scholen deden, was het kontakt en het doorpraten met de kollega's een fijne gebeurtenis.
  Daarom zouden wij dit leerkrachten van verschillende scholen, die de kans hebben samen te werken, zeker willen aanbevelen.

Voor de leerlingen:

* Niet alle leerlingen vonden het leuk. Vooral onder de goede rekenaars van klas 6 kwam je leerlingen tegen, die zeiden: 'Geef ons toch een rekenboek, dan kunnen we tenminste verder gaan!'
  De meeste kinderen vonden het wel prettig. Vooral les 6!
* Er was een inzinking merkbaar bij les 5. (vermoeidheid?)
* Leerlingen van de 5^{e} klas kwamen, vooral met procenten, nog wel eens in rekenkundige problemen verzeild. Daarom verloren sommige 5^{e} klassers (dit waren meestal de slechtste rekenaars) nog wel eens de moed om zich in de opgaven te verdiepen.
* Het sociale element was in deze serie sterk vertegenwoordigd: er moest veel samengewerkt worden.
* Typisch was het te merken dat er geen problemen waren bij het rekenen met kansen. Zo gauw echter geredeneerd moest worden en de kansen via simulaties moesten worden bepaald, vielen sommige kinderen duidelijk af. Het leek dan op bekende situaties bij het rekenen. Zo'n kind komt dan bij je met de vraag wat hij moet doen om een probleem op te lossen.
  Moet hij optellen of vermenigvuldigen of delen?
  De rest doet hij dan wel..........!

– TOEVAL EN KANS –

'Je speelt met je broertje in de auto van vader het volgende spelletje. Van alle auto's die je tegenkomt noteer jij de 'lelijke eendjes' en je broertje de 'kevers'. Na twintig auto's samen kijk je wie de meeste heeft. Wie denk je dat gaat winnen?'
'..... dat is toeval!'

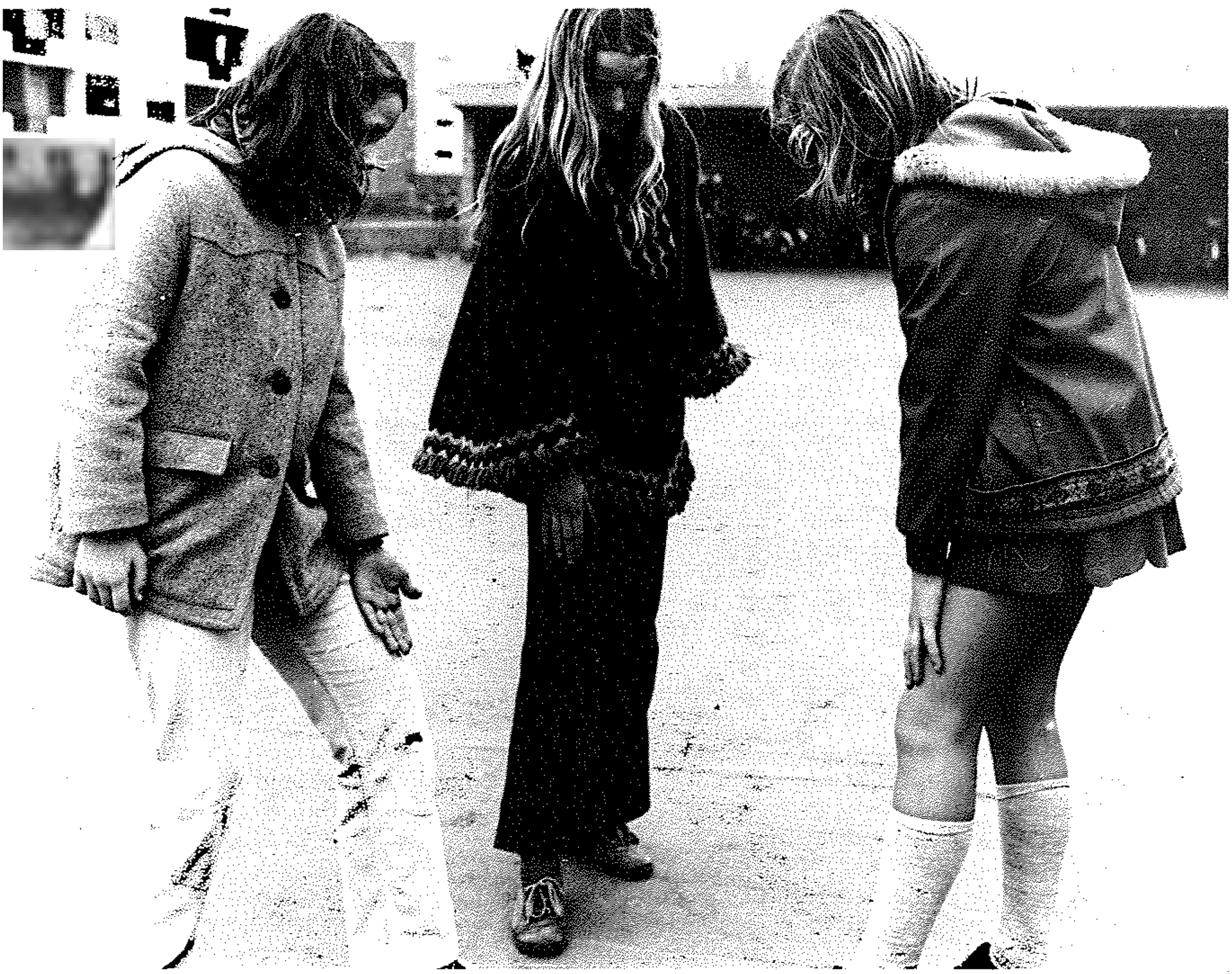
'En als je het spelletje nu de hele vakantietocht door frankrijk speelt. Wie zal dan aan het eind de meeste hebben?'
'..... dan wint die auto waarvan ze er in dat land de meeste hebben verkocht!'

4.6 KIJK OP KANS

STIMULEREN DOOR SIMULEREN

HUUB JANSEN

Ieder kent de aftelversjes, die kinderen gebruiken om op ekspressieve wijze te bepalen, wie een spelletje mag beginnen.[1])
Behalve met dergelijke rijmpjes zijn er nog vele andere manieren om uit te maken wie met spelen mag beginnen. Denk maar aan het gooien van het hoogste aantal ogen met een dobbelsteen, het 'oppoten' met de voeten tegen elkaar, het tossen bij een voetbalwedstrijd, het trekken van de kortste lucifer, het kiezen van een gesloten hand met daarin een wit of een zwart schaakstuk.
Kinderen hebben een feilloos gevoel om daarbij een juiste metode te gebruiken.
Bijvoorbeeld het voor vele volwassenen en onbekenden 'floepen' of 'ploffen', waarbij uitgemaakt wordt wie van drie meisjes met hinkelen mag beginnen.



[1]) Zie: Wiskobas-Bulletin jaargang 2 no. 1, pag. 548 en verder.

Ploffen is wel eerlijk

De gang van zaken is simpel: ieder kind steekt één hand naar voren en na het gezamenlijk uitspreken van de woorden:

'Een, twee, drie, plof!',

laten zij de hand op de dij vallen, waarbij de palm van de hand naar boven of naar beneden kan wijzen. Hebben twee kinderen hun handpalmen naar boven en de derde naar beneden, dan heeft de laatste gewonnen. Hebben alle handen dezelfde stand dan herhaalt de gang van zaken zich, totdat één winnaar uit de bus komt.

Kinderen vinden dit een *eerlijke* manier om uit te maken wie een spelletje beginnen mag. Eerlijk staat tegenover vals, oneerlijk.

Vals spelen wordt door kinderen niet geaksepteerd. Bijvoorbeeld: 'handig' gooien met een dobbelsteen om een 6 te krijgen, twee zwarte schaakstukken in je hand verstoppen, met ploffen even aarzelen om te zien wat de anderen doen.

Gelijke kansen bij hardlopen?

In een klassegesprek deden we de volgende suggestie: om uit te maken wie een spel mag beginnen, lopen we om het hardst naar de lantaarnpaal op de hoek van de straat. Wie het eerst de lantaarnpaal aanraakt mag beginnen. Erg omslachtig natuurlijk, maar het werd door de kinderen afgekeurd omdat je 'vals' kon doen. Bijvoorbeeld te vroeg starten, anderen hinderen enz. en bovendien was misschien de afstand niet voor ieder gelijk.

We hebben toen voorgesteld om er een echte hardloopwedstrijd van te maken, op een heuse sintelbaan. Ieder loopt in een aparte baan, de afstand is voor elk kind gelijk en een echte starter met pistool zorgt dat ieder gelijk begint.

Is het nu eerlijk?

Na verhitte diskussie kwam het oordeel. Het gebeurt dan wel eerlijk, maar het is toch geen goede manier om uit te maken wie beginnen mag met het eigenlijke spelletje.

Waarom niet?

Ook nu weer een uitgebreide diskussie, maar het antwoord werd geformuleerd:

Bij het hardlopen heeft niet iedereen een *gelijke kans*. Je weet immers van te voren wie hard kan lopen en wie niet.

Nagegaan werd of bij alle manieren om te bepalen wie beginnen mag iedereen *gelijke kansen* had.

Gooien met een – goede – dobbelsteen gaf geen probleem, tossen met een gewone gulden ook niet, aftelversjes evenmin, als ze maar niet te kort waren zodat het van te voren uit te rekenen was.

Punaises

Gooien met een punaise gaf wel problemen.

poot omhoog

poot omlaag

Twee jongens gaan spelen. Eerst uitzoeken wie mag beginnen: de één kiest punaisepoot omhoog, de ander poot omlaag; in een echte pokerbeker wordt de punaise op tafel gegooid.

Iedereen is overtuigd dat alles eerlijk is gebeurd, maar had ieder een gelijke kans?

Munten

Een andere manier.

Drie kinderen tossen nu met twee geldstukken.

Het eerste kind wint bij dubbel kop: KK.

Het tweede kind wint bij dubbel munt: MM.

Het derde kind wint als de munten verschillend vallen.

Er wordt weer op een goede d.i. eerlijke manier gegooid.

zoeksresultaten op een lijn of met een sektor-

Nog anders.

Spoorbomen

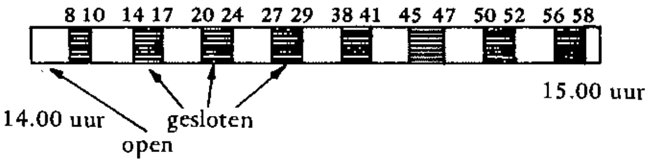
Jan en Piet willen hun vrije woensdagmiddag nuttig in elkaars gezelschap besteden. Jan wil graag voetballen, maar Piet is een liefhebber van de zwemsport. Goede raad is duur.

De kansrekening brengt de oplossing.

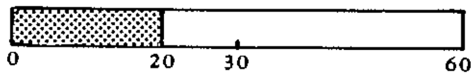
Ze fietsen naar de hoek van de straat. Zijn de spoorbomen die dan in zicht komen gesloten, dan krijgt Jan zijn zin, zo niet dan gaan ze zwemmen. Dit laatste geval geeft de minste problemen. Van gelijke kans is geen sprake.

Spoorbomen zullen wel niet even lang open als niet open zijn.

Nader onderzoek levert een tijdlijn die de spoorboomsituatie in een bepaald uur (niet spits!) voorstelt:

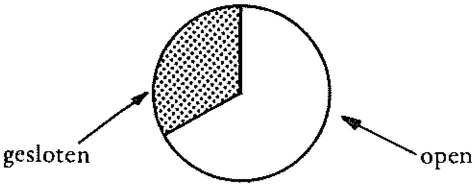


Zo is nog niet erg duidelijk hoe de situatie nu precies is.
Wanneer we de 'openings'- en 'sluitingstijden' op twee afzonderlijke hopen schuiven, wordt het al beter:



Uit dit laatste plaatje is goed af te lezen dat

Piet een twee keer zo grote kans heeft om zijn zin te krijgen dan Jan.
Een voorstelling van dezelfde situatie met een sektordiagram geeft bovendien zicht op de grootte van de verschillende kansen:



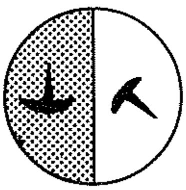
We zien dat de kansen van Jan en Piet in een getal zijn uit te drukken:

kans op voetballen (Jan wint) : $\frac{1}{3}$
kans op zwemmen (Piet wint) : $\frac{2}{3}$.

Het onderzoek naar de sluitingstijden van de spoorbomen en de voorstelling van de onderzoekresultaten op een lijn of met een sektordiagram heeft ons – en de leerlingen! – inzicht in de grootte van de kansen gegeven.

Nog een keer de punaises
Hoe komen we vervolgens aan de oplossing van ons punaise-probleem? De punaisefabrikant levert de juiste kansverdeling er niet bij!
Er is weer onderzoek nodig. Met wat goede wil en enig organisatievermogen zijn we in staat in korte tijd 4200 resultaten te vergaren. Ieder kind gooit 100 of 200 keer, waarbij hij steeds 10 punaises tegelijk gooit en de resultaten noteert. Het totale resultaat komt op het bord:

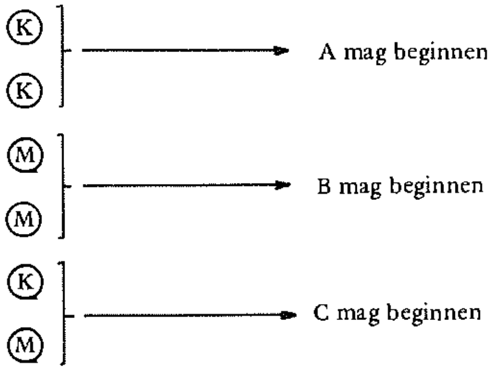
Na gezamenlijk overleg besluit de klas op grond van dit resultaat de kansen op en gelijk te stellen.
Een sektordiagram geeft dit resultaat weer:



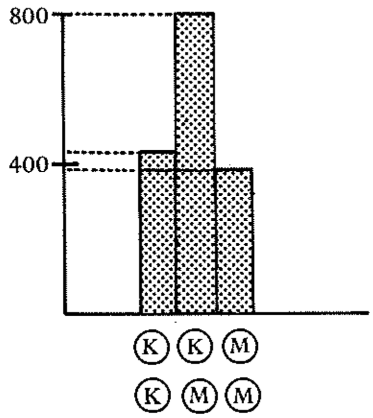
Ook hier kunnen de kansen weer in een getal worden uitgedrukt:

kans op : $\frac{1}{2}$ en
kans op : $\frac{1}{2}$.

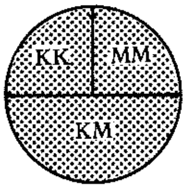
Drie man en twee munten
Vooralsnog rest nog minstens één probleem, namelijk met zijn drieën uitmaken wie mag beginnen en daarbij gebruik maken van twee munten.



Zijn de kansen gelijk?
Onderzoek is weer nodig.
In groepjes van 2 wordt met munten gegooid, de resultaten worden per groep genoteerd en alle resultaten tesamen worden in een grafiek op het bord weergegeven.



Uit de resultaten blijkt dat de kansen op KK of MM wel gelijk zullen zijn en het lijkt erop dat de kans op kop én munt twee maal zo groot is.
Al onderzoekend – op empirische wijze dus – komen we tot de volgende voorstelling van deze kansverdeling:



Genoteerd:

kans op KK : $\frac{1}{4}$

kans op MM : $\frac{1}{4}$

kans op munten verschillend: $\frac{1}{2}$.

Dit laatste resultaat kunnen we ook op andere wijze vinden.
Stel dat we nu met twee munten gooien en we gebruiken daarbij een kwartje en een gulden, zodat we de munten van elkaar kunnen onderscheiden.
Er kan gegooid worden:

k K

k M

M k

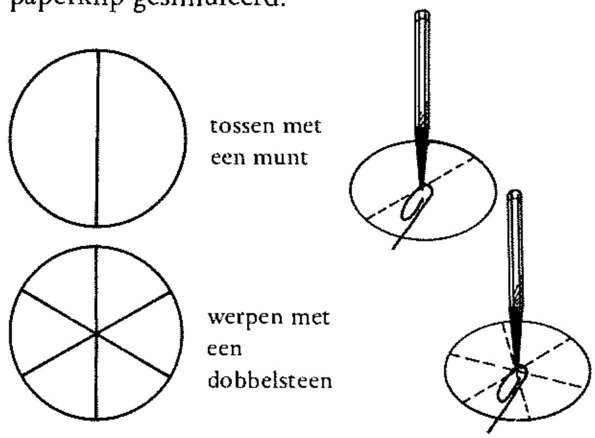
m M

Zoals u ziet, zijn er vier verschillende mogelijkheden.
KK is één van de vier mogelijkheden.
MM is ook één van de vier mogelijkheden.
En duidelijk is dat het resultaat KM op twee manieren bereikt kan worden.
Hier hebben we door het beschouwen van de mogelijkheden de kansen vastgesteld.

Een 'zes' met de dobbelsteen
Iets dergelijks gebeurt wanneer we de kans om met een dobbelsteen een 'zes' te gooien gelijk stellen aan $\frac{1}{6}$.
We weten immers dat het gooien met een dobbelsteen zes verschillende resultaten kan opleveren en we nemen aan dat elk resultaat even waarschijnlijk is.
Een sektordiagram toont weer de verdeling van de kansen:

Zo'n sektordiagram toont niet alleen de grootte van de kans, maar stelt ons èn onze leerlingen in staat om het toeval zijn rol te laten spelen.
Bij het dobbelen is het gooien zelf het middel om het toeval in te schakelen.

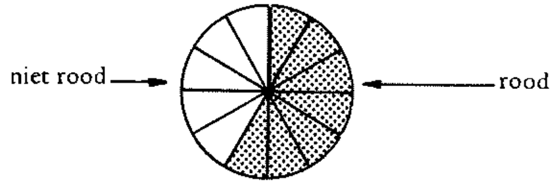
Simulatie met de tol
Met een sektordiagram, een potlood en een uitgebogen paperklip, die door een tikkende vinger in beweging wordt gebracht, wordt het toeval op eenvoudige wijze ingeschakeld.
Het tossen met een geldstuk, het werpen met een dobbelsteen wordt door de ronddraaiende paperklip gesimuleerd.



Met behulp van een dergelijke 'tol' worden als het ware de grootte van de kans èn het toeval zichtbaar, waarbij als belangrijke bijkomstigheid geldt dat deze tolaktiviteiten voor onze leerlingen erg stimulerend zijn: *stimulatie door simulatie.*

Het toppunt van pech
Met deze tol kunnen bepaalde toevalsproblemen nader onderzocht worden.
Zoals de uitspraak van één van de leerlingen: *'Vandaag ben ik 4 keer over dat kruispunt gefietst. Elke keer was het stoplicht rood. Dat is toch het toppunt van pech!'*

Een onderzoekje leert dat de tijdsindeling waarop het bedoelde stoplicht is afgesteld als volgt kan worden weergegeven:



In kansen uitgedrukt:

kans op rood: $\frac{7}{12}$,
kans op niet rood (groen en oranje): $\frac{5}{12}$.

In groepjes van 2 gaan de kinderen aan het werk. Het toeval wordt ingeschakeld met paperklip en tikkende vinger.
De kansverdeling wordt aangegeven door het sektordiagram. Steeds wordt 4 keer het kruispunt overgefietst dat wil zeggen 4 keer de paperklip rondgetikt. De resultaten worden genoteerd door elke groep afzonderlijk:

	x : rood				aantal x rood
1^e keer				x	1
2^e keer	x	x	x		3
3^e keer	x		x	x	3
4^e keer		x	x		2
5^e keer					0
6^e keer	x	x	x	x	4
7^e keer	x	x			
8^e keer		x	x		
9^e keer					

Iedere groep simuleert het vier-maal oversteken van het kruispunt op één dag in totaal 100 keer en de resultaten van alle groepen worden op het bord genoteerd:

		totaal
● ● ● ●	4 x rood	227
● ● ● ○	3 x rood	661
● ● ○ ○	2 x rood	702
● ○ ○ ○	1 x rood	264
○ ○ ○ ○	0 x rood	46
aantal simulaties		1900

In korte tijd wordt het probleem 1900 keer door de hele klas gesimuleerd.
227 keer bleek het stoplicht steeds op rood te staan, d.i. ongeveer 12%.
In de diskussie die volgde kwamen de leerlingen tot de uitspraak dat 12% niet zo veel is, dat wil zeggen dat iemand die per dag 4 x over dat kruispunt fietst wel pech heeft als steeds de lichten rood zijn, maar dat hier geen sprake is van 'toppunt van pech'. Zijn er immers in een jaar ruim 200 schooldagen, dan zal op ongeveer 24 dagen deze situatie zich voordoen.

Bovenstaande voorbeelden zijn ontleend aan 'uitprobeer'-aktiviteiten rond het NOT-programma 'Kijk op Kans', die op een aantal scholen in Hengelo hebben plaatsgevonden.
Wellicht dat uw leerlingen bij de uitvoering van enkele aktiviteiten de opmerking van een hengeloos kind zullen herhalen: 'wiskunde is gemakkelijker en leuker dan rekenen'.

– MATEMATISCHE VERWACHTING –

'Je hebt een baan van 34 velden en je gaat met je vriend een race beginnen. Hij werpt met één dobbelsteen en zet zijn fiche zoveel velden verder vooruit als de ogen aangeven. Jij mag op je beurt steeds 4 velden vooruit. Is dat eerlijk?'
'..... dat is niet eerlijk, met een dobbelsteen gooi je gemiddeld $3\frac{1}{2}$!'

4.7 KIJK OP KANS

PROEFWERK NIEUWE STIJL

FRED GOFFREE

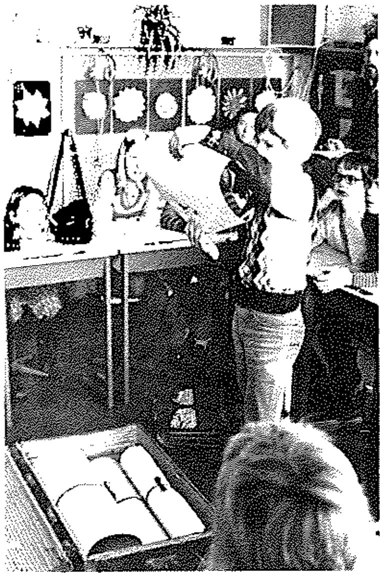
Zes weken lang heb je alle lesuren voor rekenen besteed – en nog wel enige tijd daarbuiten – aan een onderwijsleerpakket uit het gebied van de statistiek en waarschijnlijkheidsrekening.
Om eerlijk te zijn moet je toegeven dat je pas langzamerhand de werkelijke problematiek zelf in de gaten hebt gekregen. De tijd die je buiten de lesuren in de voorbereiding stopte – zowel ten aanzien van de inhoud als de vorm van de les – was onevenredig groot.
Hoe het komt dat je tot op dit moment entoesiast bent gebleven..... waren het de verrassende reakties van enkele leerlingen, was het de leerstof of was het de variëteit van werkvormen, was het de met zorg voorbereide begeleiding..... je weet 't niet. Maar een feit is het dat je nu de zevende en laatste week van het projekt ingaat. Een aantal niet eenvoudige problemen ligt klaar. Je hebt de opdracht om zo weinig mogelijk 'te doceren', het gaat er om dat de leerlingen met elkaar tot oplossingen komen.
In het observeren van dit klassegebeuren zou je dan een mogelijkheid hebben om je eigen onderwijs en de vorderingen van de kinderen te evalueren, enz. Enfin, laten we de knoop maar doorhakken.....

Nog één week wiskunde over toeval en kans.
Eerst vond je het wel interessant, het leek helemaal niet op het sommen maken van altijd. Later kwamen er wel problemen die veel tijd kostten. Toch vond je het gek dat sommige kinderen in de klas liever gewoon uit het boek rekenden. Maar ja, er waren ook kinderen die nooit iets zeiden als er een diskussie was. Mijnheer heeft verschrikkelijk zijn best gedaan om de hele klas mee te laten doen.
Ik ben benieuwd hoe het deze week gaat. Mijnheer zei iets van een spel met moeilijke problemen voor de hele klas. Het had iets te maken met een schateiland.

○ ○ ○ ○ ○

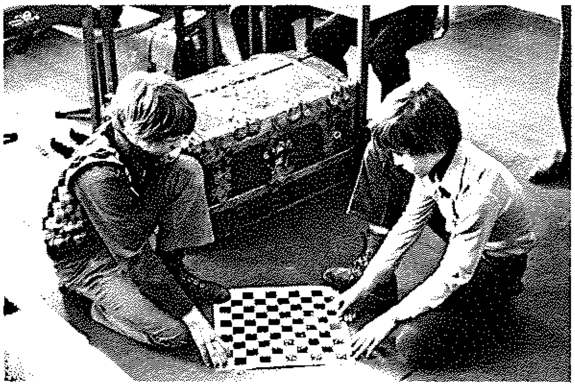
'Het is al weer enige tijd geleden dat dit verhaal zich in werkelijkheid afspeelde.
Het zoeken van de schat op dat geheimzinnige eiland bleek zo interessant en boeiend dat het de moeite waard is om de gebeurtenissen na te spelen. En dat 'naspelen' kan op verschillende manieren. In elk geval is het niet onmogelijk dat we aan het eind van ons spel ook een echte schat kunnen opgraven. Hoeveel kans we hebben..... ik geef jullie wel 75%!'

Mijnheer zit op een kist. De schat zal daar wel niet inzitten. Hij heeft het over een spel, een schatgraversspel. Er waren een stel jongens die een oude kist kochten en daarin kaarten vonden. Ze moesten toen eerst uitzoeken welk eiland het schateiland was. Hoe zouden ze dat gedaan hebben?
En op dat eiland beleefden ze vreemde avonturen. Ik denk niet dat we echt naar een eiland gaan.... het zou trouwens best leuk zijn! Ik hoop nu maar dat we het deze keer met elkaar wel eens kunnen worden. De hele klas moet dezelfde oplossing inleveren, en als-ie fout is dan zijn we al meteen een stuk van de schat kwijt. Het is trouwens wel fijn dat niet alleen de goede rekenaars die oplossing mogen geven, iedereen doet mee. Zo zei mijnheer 't: 'Samen uit, samen thuis'.
En dat vind ik eerlijk.

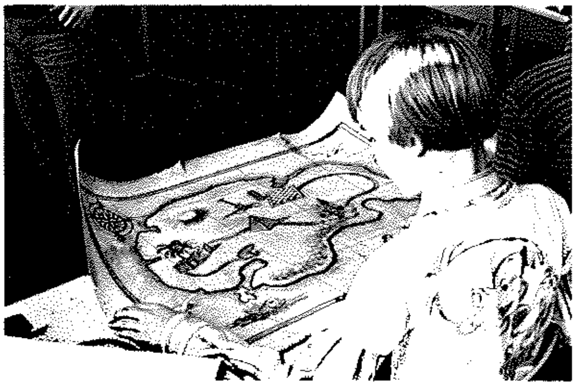


Het verhaal en de kist zijn aangeboden. Laat nu Mark net dat onbelangrijke gedicht uit de kist halen. Hij gaat het nog helemaal voorlezen ook... Hij kan ook niet weten dat dit stuk pas op het eind van de reis belangrijk wordt. Waarom denkt nu niemand aan mijn verhaal? Ze moesten toch eerst het eiland uitzoeken, en de kist is nog lang niet uitgepakt..... Ze denken zeker dat ze nu al de schat kunnen opgraven; in dat gedicht staat iets over een schat en zo. Hoe kon ik zo stom zijn om dat ding boven op te leggen in de kist. Zal ik maar niet ingrijpen ...?

Vreemd, een gedicht over het gooien met een munt en stappen nemen naar noord of naar oost. En dan dat dambord, dat heeft er ook iets mee te maken. Niemand begrijpt er ook maar iets van.
Waarom zegt mijnheer nu toch niets....?

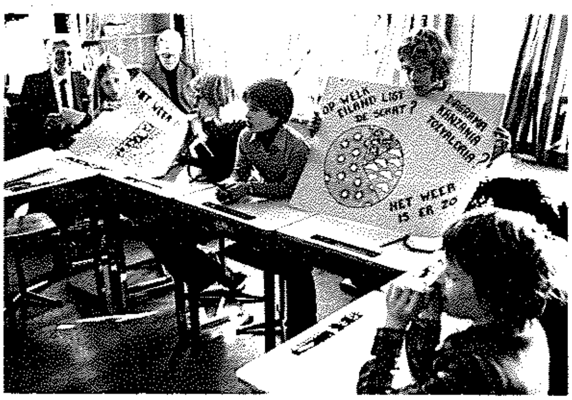


Kijk nu toch eens aan, ze hebben de kist zelfs dicht gedaan. Zo komen we geen steek verder. Joost zou toch beter moeten weten. Ik zal ze dan toch maar een beetje op weg helpen.....

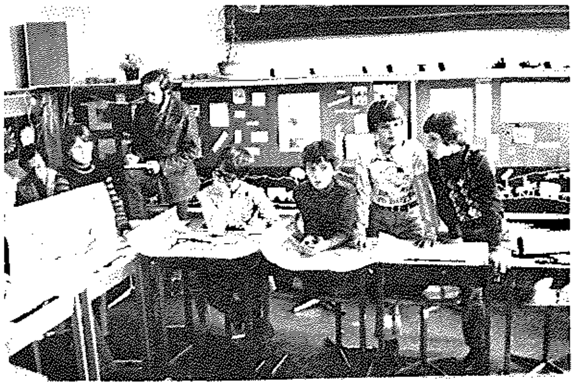


Gelukkig, mijnheer heeft gezegd dat we aan het verhaal moesten denken. Natuurlijk moesten we eerst weten naar welk eiland we gaan. Er zijn drie kaarten van eilanden. Ze hebben er wel leuke namen voor bedacht: Toevaldria, Diagramia en Kanzania. Ik denk dat het Diagramia is, want we hebben de laatste tijd zoveel sektordiagrammen gemaakt.

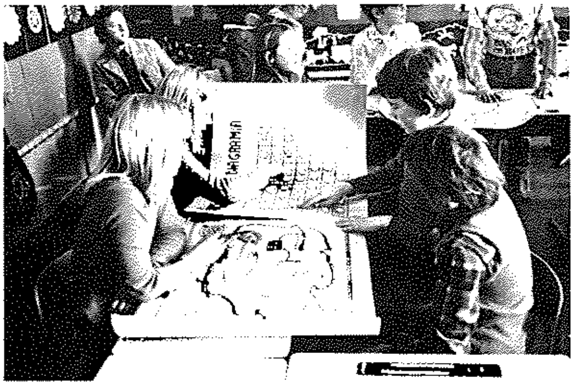
Ja hoor, ze gaan nu eindelijk op onderzoek. Wie had gedacht dat dat zo lang zou duren. Dominique heeft het al een beetje door. Ze legt een weeroverzicht aan de anderen uit. Nu eens zien of ze iets gaan organiseren. Het belangrijkste stuk, dat met het sektordiagram van het schateiland, is nog niet voldoende onder de aandacht gekomen. O kijk, Gerrit-Jan — leuk dat hij het juist doet — doet een voorstel.....



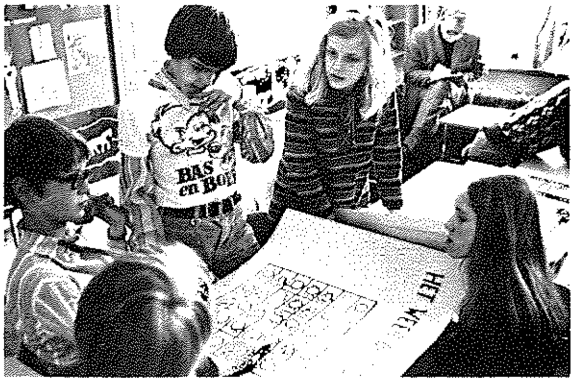
Dat is het! Bij welk weeroverzicht — wie van de drie! — hoort dit sektordiagram? We moeten vast de zonnetjes gaan tellen op alle kaarten.....



Ik geloof dat ze de goede aanpak in de gaten hebben. En ik dacht nog wel dat dit een eenvoudig probleempje was. Dat verhaal met al die geheimzinnigheid heeft ons allemaal parten gespeeld. Eens even zien hoe ze de zaak in het vat gaan gieten. Frans wil een voorstel doen. Prachtig dat ze allemaal naar hem willen luisteren. Hij wil drie groepen maken. Ach, dat geeft weer problemen. Wat geeft dat nou dat die ene groep groter is dan de andere. En of daar meer jongens in zitten dan in die groep. Het lijkt wel of ze niet verder willen komen. Oh, gelukkig, Brenda hakt de knoop door.....



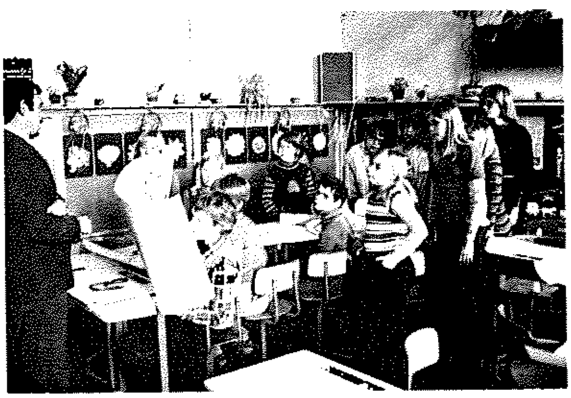
Nu zijn we allemaal bezig. Ik heb het gevoel dat we het eiland wel zullen vinden. Onze groep heeft vast niet 't schateiland. Er zijn veel minder zonnetjes dan wolken. En het schateiland heeft meer dan 50% zon. Wie zou het goede eiland hebben? Ik wou dat ze maar wat zeiden......



Hoe is het toch mogelijk? Dat groepje had de juiste aanpak. Ze konden precies zeggen waarom hun eiland – Toevaldria – niet het schateiland was. En daar begint Menno warempel weer over dat gedicht en dambord. Zijn hele groep gaat nog met hem mee ook. Ik ben benieuwd hoe ze zich door deze moeilijkheid heen zullen slaan. Ik zal voorlopig in elk geval niet ingrijpen!

Mijnheer kijkt een beetje ontevreden. Ik denk dat we het nog niet zo goed doen. Toch ben ik er zeker van — nou ja, bijna zeker — dat het Toevaldria niet kan zijn. O, in de andere groep hebben ze ook iets gevonden. Joost heeft het woord, en onze mijnheer luistert oplettend toe...

Ze hebben de oplossing: Kanzania is het schateiland. Dat is goed, maar ik laat ze niet zomaar door.
'Weten jullie het zeker? Hoe kom je daarbij, als je naar het verkeerde eiland gaat heb je kans dat je opgevreten wordt door de kannibalen.....'
Hé, ze trekken zich toch nog terug.....



Ik weet zeker dat het Kanzania moet zijn. Toevaldria valt af. Op dat eiland is het percentage zonneschijn kleiner dan 50%. En op Diagramia klopt het wel met de zon (meer dan 50%) maar het regent er anders. Dat kun je zo zien. Tenslotte hebben we ook Kanzania nog precies berekend, om helemaal zeker te zijn. Precies 25% bewolkt, en dat klopt met het diagram van 't schateiland.
'We reizen naar Kanzania.'
Gelukkig, mijnheer kijkt weer wat gelukkiger.....

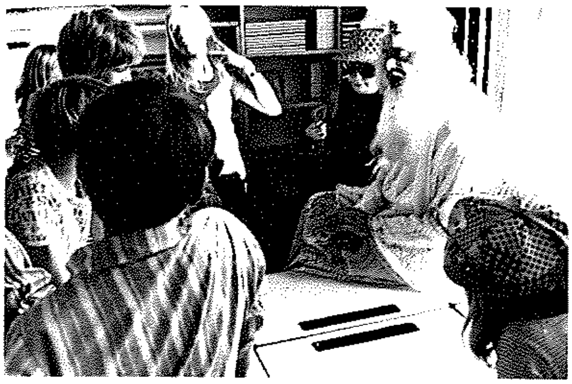
'Akkoord, jullie hebben goed gewerkt. Deze laatste toelichting stelt me tevreden. En wat meer zij: ik kan jullie gerust naar 't schateiland laten vertrekken. Je hebt blijk gegeven van het feit dat je met elkaar in staat bent moeilijke problemen op te lossen'.

Dat was de eerste. Gelukkig dat we toch doorgezet hebben. En Joost heeft het toch maar goed verteld. Nu laat mijnheer 't spel van de hele week zien. Daar staat nog heel wat op: een dambord, dobbelstenen, een punaise, een ...... Wat zou dat allemaal betekenen?

Jullie hebt de eerste stap gezet. Jaap mag dat goed laten zien: steek de vlag maar in de 1. Zoals je ziet zijn er nog 5 opdrachten te volbrengen....
'Hiernaast is het eiland Kanzania. Op de gang kun je je verkleden om daar als echte onderzoekers aan te komen. Ik moet je waarschuwen, de Kanzanianen staan bekend als wantrouwende en weinig gastvrije lieden. Als je op 't eiland komt moet je je dus behoorlijk gedragen.....'

o o o o o

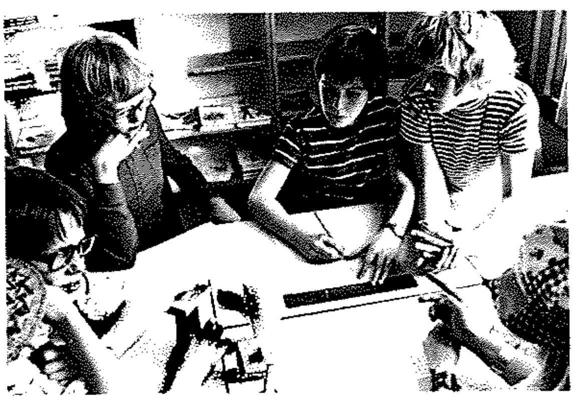
Op de gang hebben we ons verkleed. Wat leuk, allemaal in vakantiekleding, met hoeden, zonnebrillen en scheppen. Het lijkt echt zomer... En toen we door de deur van klas 5^A kwamen schrokken we ons een hoedje. Mijnheer zat daar in een wit gewaad, met baard en tulband. Echt griezelig, maar we moesten naar hem luisteren.....



Verduld, de kinderen doen net of 't karnaval is. Waarom spelen ze nu niet mee. Goed, dan zullen ze 't hebben:
'Vreemdelingen op Kanzania! Wat wilt ge op ons ongastvrije eiland? U gedraagt zich als toeristen, die overal op de wereld onrust en lawaai met zich meebrengen. Denkt ge dat u op deze wijze enige kans maakt op ons eiland te mogen vertoeven?'
Ja hoor, 't lukt. Ze gaan het spel meespelen. Daar komt warempel Karin naar voren om iets te zeggen.....

Dat was nog maar net op het kantje. Het scheelde maar heel weinig of de Witte Magiër – mijnheer natuurlijk! – had ons van het eiland gestuurd. Nu vertelt hij ons de opgave: al jarenlang gooit hij met 8 punaises. Sommige komen plat op hun rug terecht, sommige komen 'op hun pootjes' terecht. Het komt praktisch niet voor dat ze alle acht op hun pootjes terecht komen. Toch wil hij van ons de kans weten, dat ze wél alle acht op hun pootjes terecht komen. Nou, dat kunnen we met z'n allen vast wel vinden; we kregen ook nog allemaal doosjes met kanzaniaanse punaises. 'Zullen we in groepjes gaan werken.....!?'

Inderdaad, wat we bij de voorbereiding als moeilijkheid zagen aankomen, gebeurt hier ook. Ze gaan allemaal met acht punaises gooien! Hoe krijg ik ze nu zover dat ze eerst de (zweet) kans voor één punaise gaan bepalen? Om daarna via een staafdiagram naar de gevraagde kans te komen, mag niet moeilijk zijn, dat hebben we in de vorige lessen zo vaak gedaan.

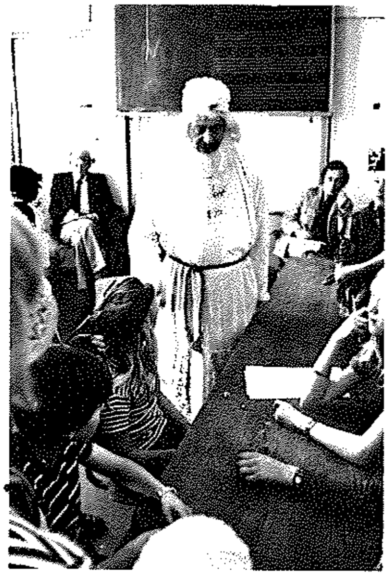


Nu hebben we in ons kleine groepje nog verschil van mening. Joost wil gewoon doen wat de Witte Magiër gezegd heeft: 8 punaises opgooien en tellen hoeveel er op hun pootjes terecht komen. En Brenda doet 't heel anders. Ze zeurt maar over één punaise en dan het telefoonboek gebruiken! Laten we nu toch vlug beginnen!

Wie had dat gedacht? Brenda is de enige van de hele klas die het probleem goed zou willen aanpakken. Maar haar stemmetje heeft niet voldoende volume. Die jongens willen alleen maar linea recta naar de schat. Ze gunnen zich geen tijd om even rustig te overwegen of na te denken. Alle wijze lessen worden op deze manier teniet gedaan. Gelukkig hebben we bij de voorbereiding afgesproken dat de Witte Magiër op dit punt kan ingrijpen.....

'Luistert vrienden. Ik bemerk dat gij ijverig zijt en dat gij zich geen tijd gunt om diep na te denken. Ik vermoed dat uw wens om mij te helpen daarvoor verantwoordelijk is! Toch moet ik nogmaals herhalen: al jarenlang gooi ik 8 punaises tegelijk op, en nog steeds weet ik de gevraagde kans niet. Met 8 punaises tegelijk kom je er nooit achter... Bovendien moet ik ook konstateren dat in uw land — in het verre Europa — niet de meest wijze stem maar de luidste stem het gelijk aan zijn zijde krijgt. Ik geef u nog één wijze raad: luistert naar Brenda, zij heeft de goede aanpak in gedachten....'

Nu hoop ik maar dat ze het goed kan vertellen en dat ze willen luisteren.....



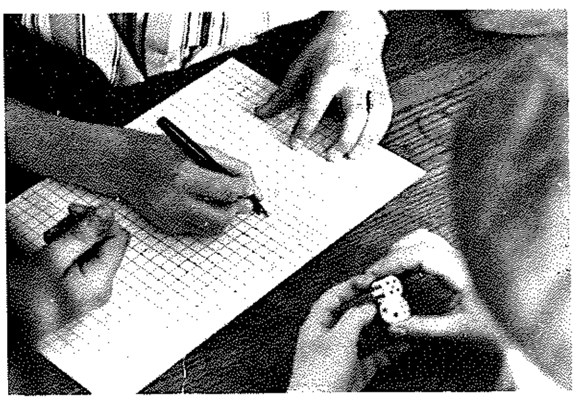
Goed zeg, van Brenda. Achteraf was het natuurlijk logisch, zoals ze dat deed. Eerst allemaal met één punaise gooien en de kans bepalen dat hij op z'n pootjes terecht komt. En toen zei ze dat het dan net verder ging als met de surveillancewagens in de vorige les op de t.v. Nou, we vonden een kans van 0,3. Toen namen we allemaal een bladzijde uit het telefoonboek en een paar kinderen wisten toen nog niet wat ze ermee moesten doen.

'Je pakt 8 cijfers — dat zijn de 8 punaises — en als het een 1, 2 of 3 is, ligt hij op z'n pootjes, anders plat.....'

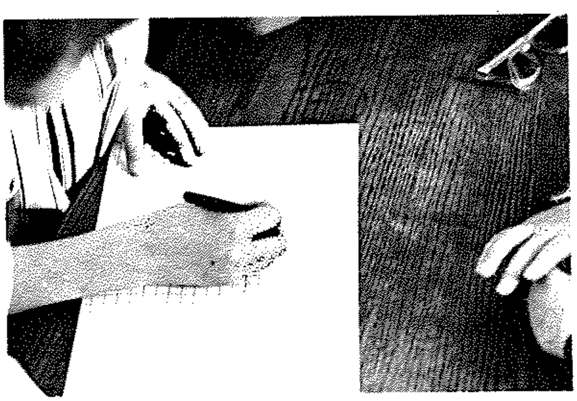
Toen hebben we met z'n allen 250 keer 8 cijfers bekeken en op het bord 'gestapeld'.....

Ik geloof dat mijnheer — de Witte Magiër bedoel ik — tevreden is met onze oplossing. Maar als ze allemaal zo lastig zijn dan ben ik bang dat we er nooit zullen komen! Gelukkig is de bel gegaan en gaan we nu eerst naar huis om te eten...

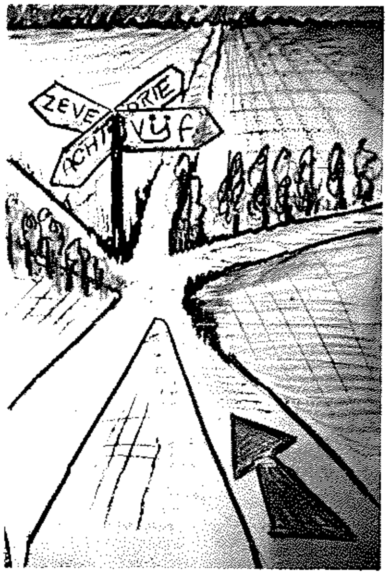
'Jullie hebt mij geweldig geholpen en ik zal jullie tot het eiland toelaten. Maar denk er aan, de eilandbewoners zijn niet gastvrij. Toch geef ik je een aanwijzing om verder te komen. De eerste, die je hier op dit eiland nu dient te ontmoeten is de vorst. Daarginds zie je een 5-sprong, je komt uit de richting van de pijl. Kies nu die weg, die de meeste kans heeft door het gooien met twee dobbelstenen te worden aangewezen..... ik heb gezegd.'



Dat is een gemakkelijke opgave zeg. We gooien allemaal met 2 dobbelstenen en dan maar turven. Ik heb trouwens het gevoel dat het ook anders kan. Op de televisie was ook een keer zoiets met twee tollen.....

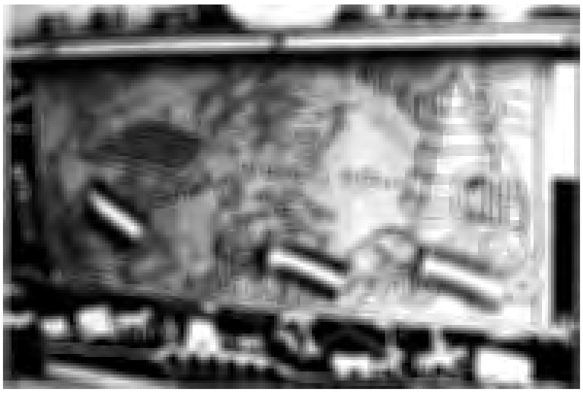


Kijk, dat is toch geweldig leuk om te zien. De ene groep berekent vol overtuiging de 'zweet'-kans en de andere gaat op zoek naar de 'weet'-kans. Je kunt je haast niet voorstellen dat die kinderen nog door willen gaan. Bijna de hele ochtend zijn ze druk bezig geweest en ze beginnen vanmiddag toch maar weer met frisse moed. Een kompliment voor deze oplossing hebben ze wel verdiend.



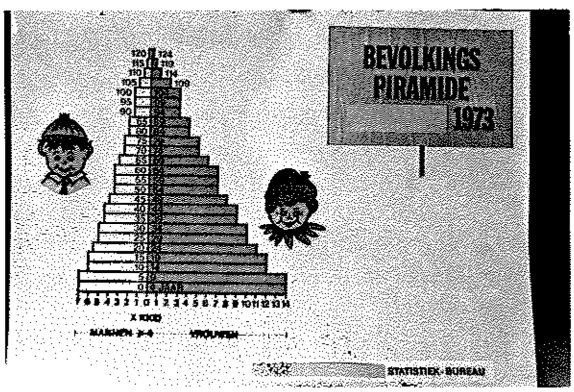
Alle groepen zijn het vlug eens geworden. Zo'n makkelijke som hadden we niet verwacht. We kiezen weg 'zeven' en dat is zeker – honderd procent – de goede weg. Je kan het trouwens wel zien aan mijnheer, die zo net heel tevreden de klas uitging. Ik denk dat hij zich weer gaat verkleden. We moeten tenslotte bij een vorst op bezoek.

'Gasten van Kanzania. Langs telepatische weg heb ik vernomen dat gij de juiste oplossing gevonden en dus de goede weg naar mijn paleis bent ingeslagen! Uw kunst van het probleemoplossen heeft mijn grote bewondering en ik moet u daarvoor dan ook nu al een groot kompliment maken!'



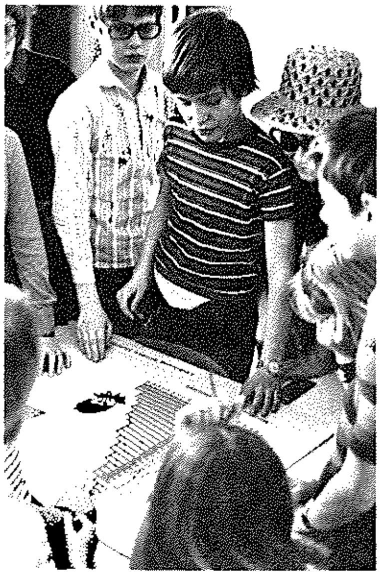
Ziezo, mijnheer de vorst is een keer echt tevreden. En Wilma mocht de derde vlag in de kaart steken. Je kunt zien dat we al een heel eind op weg zijn. Maar nu komt al direkt de vierde opgave. Ik vind onze mijnheer toch wel een echte vorst, zo met die purperen mantel, witte baard en rode fez.

Ze hebben nog nooit een bevolkingspiramide gehad. Ik zal dus maar een kleine aanwijzing geven. De scheve verdeling tussen mannen en vrouwen moeten ze zelf maar uitzoeken.
'Vrienden, gij wilt medewerkers voor uw ekspeditie werven. Maar weet gij wel hoe vreemd onze bevolking is verdeeld in mannen en vrouwen? Gij wilt bovendien een Kanzaniaanse verblijfsvergunning. Welnu, beschouw deze bevolkingspiramide. Hier staan de aantallen Kanzanianen, hier van 0 tot 4 jaar, daarboven van 5 tot 9 jaar,... Er zijn zelfs Kanzanianen van 124 jaar!.....'



Dit is een bevolkingspiramide. Je ziet zo dat er meer vrouwen dan mannen zijn. Maar mijnheer zei dat we een kans moesten uitrekenen. De eerste Kanzaniaan, die we straks op de trap zullen ontmoeten, is een man of een vrouw. Je weet dat niet van te voren. Hoe groot is nu de kans dat 't een man is....?

Dat gaat erg goed. Ik weet niet op welk nivo ze dit probleem gaan oplossen, maar ze komen er gemakkelijk uit. In elk geval werken ze niet met de aantallen mensen. Het lijkt erop dat ze het meetkundig doen. In elk geval moeten ze straks heel goed zeggen wat ze precies gedaan hebben. Ik heb trouwens nog helemaal niet het verkeerde antwoord '1 op 2' gehoord.



Wat een afgang. We zouden even vertellen waarom die kans op een man gelijk was aan 1 op 3. En de vorst wilde het niet aksepteren. Eigenlijk had mijnheer wel gelijk, niemand kon precies zeggen waaròm het 1 op 3 was.

En daar schiet me Peter even uit z'n slof. Nog maar net heb ik ze met hun klungelige oplossing teruggestuurd of hij stapt naar voren.
'Kijk', zegt Peter, 'die staven zijn overal 2 lang – ik heb door 7 gedeeld – en die dan 1. Je kunt 't nog beter zien als je naar de stukjes kijkt die overblijven. Nou, en dan is er steeds 1 man en 2 vrouwen Dus 1 man op de drie.'
Geweldig, hè? Peter krijgt een pluim op z'n hoed, en daarmee toch ook wel weer de hele groep.

○ ○ ○ ○ ○

Het is gelukt voor vandaag. We hebben bijna de hele dag gedaan over 4 opgaven. Vanochtend vond ik het erg moeilijk, maar vanmiddag was het veel gemakkelijker. We zijn dan ook veel eerder klaar dan we gedacht hadden. Mijnheer vond vast dat het goed ging, want we mogen nu lekker tekenen.

○ ○ ○ ○ ○

Vanmiddag ging alles van een leien dakje. Ik kreeg de indruk dat de storende faktor van het verhaal, waardoor de kinderen in te hoge mate gemotiveerd waren, vanochtend sterker werkte dan vanmiddag. Daarnaast ontdek je toch wel waar nog lakunes zitten. Dit betreft zowel het inhoudelijk aspekt – zo is het begrip zweetkans nog niet bij iedereen goed gevuld en zeker niet funktioneel aanwezig – als de wijze van werken. Ik denk dat ik vooral op dat laatste in de komende weken nog eens ekstra ga letten. Wat zou het niet geweldig geweest zijn als ze vanochtend direkt die drie eilanden met weeroverzichten overzichtelijk naast elkaar hadden gehangen.....

4.8 KIJK OP KANS

PLOFFENDE OUDERS

ROB DE JONG

Spots aan!
Gezellig gekeuvel in het centrum. Driftig rondrennende mensen met kamera's en mikrofoons en notitieblokken in de periferie.
Drie, twee, een, nu!

'Dames en heren. Welkom op deze bizondere ouderavond.'
Met deze woorden van de heer J. Kramer, hoofd van de Hengelosche School Vereniging werd op 22 februari j.l. een ouderavond van drie scholen, namelijk de John F. Kennedyschool (R.K.), de Dr. A. Kuyperschool (P.C.) en de Hengelosche School Vereniging (Biz. Neutraal) geopend.
Een ouderavond georganiseerd door scholen van drie verschillende besturen. Uniek!
Voeg hier de regisseurs, technici, redakteuren en wetenschappers van NOT, TELEAC en IOWO met hun beroepsmatige aktiviteiten aan toe, en de bizonderheid van de situatie zal u duidelijk zijn.

Wat is er aan de hand?
Wel, de leerlingen van de zesde klassen van de genoemde scholen hebben deelgenomen aan

de 'try-out' van de serie 'Kijk op kans'. En de ouders krijgen op deze avond de gelegenheid om hier nader kennis mee te maken. Hun kinderen zijn immers thuisgekomen met allerlei verhalen over tolletjes, dobbelstenen, surveillancewagens en schateilanden. Ouders willen dan weten – en terecht – wat de bedoeling van het gebeuren is geweest.
De 'dubbele bodem' van de avond is dat er tevens opnamen voor één van de Teleac-lessen worden gemaakt.

Edu Wijdeveld houdt een korte inleiding. IOWO, NOT en TELEAC hebben gezamenlijk een onderwijsleerpakket, een draaiboek voor het onderwijsgebeuren, samengesteld. Na zo'n start moet in een volgende fase nagegaan worden hoe het samengestelde funktioneert. In de afgelopen periode zijn 6 onderwijzers in Hengelo bereid geweest om met het pakket 'vooruit' te werken. De inleider maakt van de gelegenheid gebruik om voor het forum der ouders het ongelooflijk entoesiasme van deze onderwijzers te belijden. De mening dat er sprake is van een afnemend idealisme van de onderwijzers kan naar het land der fabelen verwezen worden.

De ouders gaan nu – begeleid door Fred Goffree – zelf aan het werk. In groepjes van drie wordt 'geploft'. Veel hilariteit. Uitslagen worden genoteerd. Hoe kun je dat 'handig' noteren? Originele oplossingen komen naar voren. Zo wordt iets geproefd van wat bedoeld wordt met het begrip 'matematiseren'.

Eén van de TELEAC-lessen wordt vervolgens getoond. Enerzijds om een impressie te geven van de aktiviteiten die in de klassen hebben plaatsgevonden, anderzijds om te weten te komen hoe ouders reageren op vorm, inhoud en presentatie van de lessen. Grote belangstelling en niet alleen wanneer de eigen kinderen in beeld komen. Onderlinge gesprekken ontstaan.

Na de pauze kunnen aan een forum vragen worden gesteld. Enkele uitspraken naar aanlei-

ding van de hamvraag 'Wat zijn nu de ervaringen van de onderwijzers met dit programma?' :

* Het is een heel andere aanpak. Niet de 'rijtjes sommen' zijn het doel. Maar een direkte benadering vanuit levensechte problemen. De rekenproblemen (bijvoorbeeld 'procenten') worden funktioneel binnen een groter geheel. Soms betekende dit dat veel leerlingen in één keer erg kreatief moesten en konden zijn.
* Het is net alsof je andere gebieden aanboort dan we veelal met het bekende rekenen doen. Naar mijn idee zijn de kinderen door de problemen kritischer gaan denken.
* Niet alleen voor de goede leerlingen. Trouwens wat zijn 'goede leerlingen'? De ervaring is dat sommige 'slechte' rekenaars nu heel anders voor de dag komen. En dat komt omdat ze gemotiveerd zijn.

In één keer is het elf uur. We 'ploften' zowat, maar nu van de hitte. Spots uit. Driftige mensen gaan aftakelen. Groepen ouders praten nog wat na. Een suksesvolle avond.

En de moraal:
Als we toch eens wat meer samenwerkten in het onderwijs, wat zou er dan veel mogelijk zijn.

– THEORETISCH EEN MEISJE –

' Die mevrouw verwacht een baby. Het wordt een jongen of een meisje.
Wat heeft de meeste kans ? '

'..... een meisje, omdat het zelf een mevrouw is.'

4.9 KRIS-KRAS DOOR NEDERLAND *)

HANS TER HEEGE

SPELREGELS

1 Speel het spel met 2, 3 of 4 kinderen.
2 Je hebt nodig: een dobbelsteen, een pion en 'geld' (fiches, lucifers, blokjes MAB, of wat dan ook).
3 Iedere speler krijgt 25 fiches.
4 Wie het hoogst gooit, mag beginnen. De spelers gooien om beurten.
5 Gooi je bijvoorbeeld 1, dan mag je naar Amsterdam. Rotterdam is 2, enzovoort.
6 Als je bijvoorbeeld in Amsterdam (1) staat, dan kun je weer 1 gooien. Je moet dan blijven staan (overnachten). Dat kost veel. Het overnachten kost per nacht in:

Amsterdam	5 fiches
Rotterdam	5 fiches
Den Haag	4 fiches
Utrecht	3 fiches
Arnhem	3 fiches
Alkmaar	2 fiches

Stort dat in de pot.
7 Je mag alleen maar weg als je rechtstreeks naar de volgende plaats kunt. Sta je bijvoorbeeld in Alkmaar (6), dan kun je alleen maar naar Amsterdam (1) en Den Haag (3). Want 6 gooien wil zeggen overnachten. En de overige steden zijn niet direkt te bereiken: van Alkmaar naar Arnhem moet je over Amsterdam en Utrecht.
8 Als je moet blijven omdat je een *andere* plaats hebt geworpen waar je niet rechtstreeks naar toe kan – zie spelregel 7 –, dan kost je dat nog eens 4 fiches ekstra. Dit geldt voor elke plaats. Je blijft per slot van rekening niet op een droogje zitten. Stort de 4 fiches in de pot.
9 Winnaar is de speler die het eerst in alle steden is geweest. Het spel is afgelopen als je geen geld meer hebt of als je alleen bent overgebleven. *De winnaar krijgt de pot.*

*) Het speelblad is in dit Bulletin ingevouwen.

WAT ZIT ER ACHTER?

1 Als we van Rotterdam naar Alkmaar gaan, kunnen we dat niet in één stap (één worp) doen. Alkmaar is vanuit Rotterdam niet rechtstreeks bereikbaar. In de volgende tabel ziet u welke plaatsen onderling bereikbaar zijn in één worp.
Verklaring: 0 – blijven staan
1 – door gaan

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	0	1
2	1	0	1	1	1	0
3	1	1	0	1	1	1
4	1	1	1	0	1	0
5	0	1	1	1	0	0
6	1	0	1	0	0	0

We kunnen uit de gegevens van het speelveld, maar ook uit de gegevens van de tabel opmaken hoe groot de kans is dat we in een bepaalde plaats moeten blijven staan. In Alkmaar is dat $\frac{2}{3}$, in Den Haag $\frac{1}{6}$.

2 Vanuit Arnhem kunnen we op 2 manieren in Den Haag komen *in twee worpen* (twee stappen),

	1	2	3	4	5	6
1					3	
2						
3					2	
4						
5	3		2			
6						

namelijk Arnhem – Utrecht – Den Haag
en Arnhem – Rotterdam – Den Haag.

Vanuit Amsterdam kunnen we op 3 manieren in Arnhem komen.
Welke?
Deze twee gegevens zijn reeds in de tabel opgenomen. Maakt u met behulp van de gegevens van het speelveld de tabel af.

3 Stel dat een leerling in 9 beurten de volgende serie gooit:

6 5 3 3 5 2 6 1 4,

is hij dan klaar en hoe is zijn 'financiële positie'?

Antwoord:

1e worp 6	–	Alkmaar	25 fiches
2e worp 5	–	blijven staan	19 fiches
3e worp 3	–	Den Haag	19 fiches
4e worp 3	–	blijven staan	15 fiches
5e worp 5	–	Arnhem	15 fiches
6e worp 2	–	Rotterdam	15 fiches
7e worp 6	–	blijven staan	6 fiches
8e worp 1	–	Amsterdam	6 fiches
9e worp 4	–	Utrecht	6 fiches

De leerling is dan inderdaad klaar en heeft nog 6 fiches over.

4 Om alle plaatsen te bezoeken in 6 worpen is niet gemakkelijk.
Onmogelijk is het niet. Zo zijn de trajekten

6 1 3 2 4 5 en 4 1 6 3 5 2

mogelijk.

Het aantal permutaties van 1 2 3 4 5 6 is 6! = 720. Het is echter duidelijk dat vele permutaties niet een goede serie worpen voorstellen. Zo mogen niet voorkomen: 15; 26; 46; 51; 56; 62; 64; 65, omdat die als gevolg van spelregels 7 'blijven staan' tot gevolg hebben.

5 Aansluitend bij een artikel in Wiskobas-Bulletin 2 (2e jaargang)[1]) enkele opmerkingen.
De 'éénstapsmatrix' (of éénworpsmatrix) ziet er als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uiteraard komt deze matrix overeen met de getallen die we vonden bij 1, waar we de bereikbaarheid in één worp onderzochten. Analoog aan hetgeen in het genoemde artikel werd uitgelegd[2]), berekenen we de *tweestapsmatrix:*

$$M_1 \cdot M_1 = M_2 \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De tweestapsmatrix zegt ons dat we op 5 manieren in twee stappen van Den Haag in Den Haag terug kunnen komen.
Dat is ook duidelijk uit gegevens van het speelveld: we kunnen 5 keer heen en weer. We kunnen in twee stappen slechts op één manier van Arnhem in Alkmaar komen, en wel via Den Haag. U merkt misschien dat we op bekend terrein zijn. Dat klopt. We hebben het bij 2 zelf met behulp van het speelveld uitgeknobbeld.

6 We kunnen aan het bovenstaande een brok kansrekening vastknopen: in 2 worpen kunnen we 36 verschillende paren ogen gooien. Daarbij is 2-6 niet hetzelfde als 6-2.
Eén van die 36 worpen zou ons vanuit Arnhem in Alkmaar brengen, namelijk het paar 3-6. De kans hierop is $\frac{1}{36}$.

7 Op hoeveel manieren kunnen we in drie stappen van Arnhem naar Alkmaar komen?
Daarvoor staan ons nu twee oplossingsmethoden ter beschikking.
* Uitschrijven naar aanleiding van de gegevens van het speelveld:

---

[1]) Pagina 641 en verder.

[2]) Volgens de procedure: rij 1 vermenigvuldigen met kolom 1, rij 2 met kolom 1, rij 3 met kolom 1, enz.

Arnhem – Utrecht – Amsterdam – Alkmaar
Arnhem – Utrecht – Den Haag – Alkmaar
Arnhem – Rotterdam – Amsterdam – Alkmaar
Arnhem – Rotterdam – Den Haag – Alkmaar
Arnhem – Den Haag – Amsterdam – Alkmaar.

Dat zijn dus 5 manieren.

* We hebben nu ook de beschikking over de matrix-vermenigvuldiging:
$M_2 \cdot M_1 = M_3$.
Vermenigvuldigen we de 5^e rij van de éénstapsmatrix met de 6^e kolom van de tweestapsmatrix dan krijgen we:

$$0.1 + 1.2 + 1.1 + 1.2 + 0.1 + 0.2 = 5$$

Het antwoord blijkt te kloppen met het eerstgevonden resultaat.

8 In 3 worpen kunnen we $6^3 = 216$ verschillende drietallen ogen gooien. Vijf ervan brengen ons vanuit Arnhem in Alkmaar. Deze kans bedraagt dus: $\frac{5}{216} \approx 2{,}3\%$.

9 In Amsterdam overnachten kost 5 fiches. Moeten we er een ekstra 'dag' (beurt) verblijven, dan kost dat nog eens 4 fiches.

Hoe 'duur' is nu Amsterdam? Of anders gezegd: hoeveel fiches gaat een verblijf in Amsterdam ons naar verwachting kosten?

* de kans om in Amsterdam te zijn en te moeten blijven, dat wil zeggen 1 gooien, is $\frac{1}{6}$; het kost ons naar verwachting:

$$\tfrac{1}{6} \times 5 = \tfrac{5}{6};$$

* de kans om vanuit Amsterdam niet verder te kunnen is ook $\frac{1}{6}$; we kunnen namelijk niet naar Arnhem (5 gooien); het kost ons naar verwachting:

$$\tfrac{1}{6} \times (5+4) = \tfrac{9}{6} = 1\tfrac{1}{2} \text{ (fiches).}$$

Een verblijf in Amsterdam zal ons waarschijnlijk $\frac{5}{6} + 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{3}$ fiches gaan kosten.
Voor de overige steden zijn deze bedragen:

* Rotterdam : $\frac{1}{6}.5 + \frac{1}{6}.9 = 2\frac{1}{3}$,
* Den Haag : $\frac{1}{6}.4 = \frac{2}{3}$,
* Utrecht : $\frac{1}{6}.3 + \frac{1}{6}.7 = 1\frac{2}{3}$,
* Arnhem : $\frac{1}{6}.3 + \frac{2}{6}.7 = 2\frac{5}{6}$,
* Alkmaar : $\frac{1}{6}.2 + \frac{3}{6}.6 = 3\frac{1}{3}$.

– TOEVAL –

'Vind jij het toevallig dat die jongen op dezelfde dag jarig is als zijn vriendje?'
'.... nee, eigenlijk niet. Er zijn miljarden mensen op de aarde en je hebt maar 365 dagen.'

4.10 ZOZOEKIE'S WEDERWAARDIGHEDEN

EMPIRISCH KANSBEGRIP – EEN PRAKTISCH PROBLEEM

LEEN STREEFLAND [1])

1 OPMERKINGEN VOORAF

In het voorafgaande gedeelte heeft u kennis kunnen nemen van onderwijservaringen, waarbij het voornamelijk ging om het bijbrengen van het teoretisch of apriori-kansbegrip.
Hierop aansluitend willen we u een konkrete uitwerking geven van een stuk onderwijs op praktisch nivo, waarbij het in het eerste gedeelte geleerde door de leerlingen *toegepast* kan worden op een 'praktisch' probleem.
Het is de bedoeling, dat in deze toepassing het *empirische kansbegrip* voor de leerlingen gestalte gaat krijgen.
Behalve op het kansbegrip, doet het volgende pakket ook een beroep op vaardigheden, die in de sfeer van de beschrijvende statistiek liggen.
We noemen:
- uit een hoeveelheid van gegevens de adekwate gegevens verzamelen,
- het samenstellen van een frekwentie-tabel,
- het samenstellen van een histogram,
- het uitvoeren van eenvoudige rekenkundige bewerkingen,
- het kunnen invullen van een roosterdiagram.

Rest ons, voorzover het deze inleiding betreft, nog te vermelden, dat we dankbaar gebruik gemaakt hebben van het feit, dat 'HET WEER' dagelijks een grote rijkdom aan gegevens oplevert. Het kiezen van een aangrijpingspunt binnen 'de sfeer van het weer' waarborgt derhalve tevoren al ruime mogelijkheden tot een diversiteit van wiskundige aktiviteiten.

2 INSTAPPEN IN DE PROBLEEMSITUATIE

2.1 Inleiding

Inspekteur Zozoekie van de amsterdamse recherche is een beklagenswaardig man. Hij tobt met een aan hem opgedragen onderzoek en krijgt zowel van zijn kommissaris als van de pers te verstaan, dat hij niet voor zijn taak berekend is, althans daaraan bestaat ernstige twijfel.

Zie daar een beknopte schets van de blik die de leerlingen via een introducerend verhaal in de amsterdamse kriminele en justitiële keuken mogen werpen.

Het verhaal eindigt met een niet geëkspliciteerde probleemsituatie, waarop in de beschrijving van de eerste les nader zal worden ingegaan.
Een feit is, dat bedoelde probleemsituatie aanleiding geeft tot allerlei statistische aktiviteiten voor de leerlingen.

[1]) De ideeën die aan dit artikel ten grondslag liggen zijn door een groepje IOWO-medewerkers gelanceerd tijdens een kadervormingsbijeenkomst.

2.2 Het uitgangsverhaal (leerlingentekst)

Met vermoeide bewegingen komt rechercheur Zozoekie van achter zijn buro overeind; een buro, dat bezaaid ligt met paperassen, een overvolle asbak, waar de peuken van half opgerookte sigaretten afgerold zijn en een kompleet 'kegelspel' van koffiebekers, waarvan sommige nog halfvol.

De gekwelde rechercheur rekt zich uit en loopt daarna met de gang van een ter dood veroordeelde naar het toilet. Hij kijkt in de spiegel en ziet een gezicht, dat het zijne niet meer is. Inbleek, donkere wallen onder de roodomrande ogen, sterk vermagerd.

Hij ziet het allemaal niet meer zo. Zeker niet nu hij vanmorgen ook nog ter verantwoording geroepen is door de kommissaris.

'Zozoekie wat jij de laatste tijd uitvreet is me niet duidelijk, maar het wordt nu toch de hoogste tijd, dat je eindelijk wat klaarheid brengt in die ZAAK van jou. Ik geef je nog precies drie dagen. Ben je dan nog geen stap verder, dan ....'

Ja, dat werd even tegen hem gezegd! Gezegd? Het was meer bulderen geweest. Alsof hij zich niet weken achtereen had uitgesloofd, z'n nachtrust had opgeofferd en zich volledig had ingezet, om deze zaak, die een geweldige uitdaging voor hem was, tot een oplossing te brengen.

En dan die niet uitgesproken bedreiging aan het eind van z'n donderspeech. Allerlei dingen spookten hem door het hoofd: degradatie? ontslag?

Daar kwamen die verdachtmakende opmerkingen in de krant dan nog bij.

'Raadselachtige verdwijningen in amsterdamse haven nog onopgelost', stond er met vette koppen.

En in het artikel zelf:

'In verband met de raadselachtige verdwijningen in de amsterdamse haven tast de politie nog steeds in het duister. We kunnen ons niet aan de indruk onttrekken, dat de politie in deze kwestie niet voor zijn taak berekend is.........'

Dát hadden ze geschreven, de muskieten.

'Ach wat kan het mij ook schelen. Laat ze allemaal de ram-bam krijgen', gromde hij in zichzelf. Er was nog maar één ding waarin hij op dit moment interesse had, en dat was zijn bed. Een neerslachtig makende moedeloosheid had zich van hem meester gemaakt. Het deed hem niets meer, al zou hij de drie dagen, die de baas hem nog gegeven had slapend doorbrengen.

Maanden en maanden geleden was het begonnen. Op een morgen had Kapitein Söderholm van de zweedse ertstanker Niel Holgerton zich gemeld, met de mededeling, dat één van zijn mensen tijdens het verblijf in Amsterdam vermist was. Met de regelmaat van een klok waren daarne soortgelijke vermissingsberichten binnen gekomen. Steeds betrof het een chinees, die verdwenen was.

De recherche-afdeling van de amsterdamse politie had een groots opgezet onderzoek ingesteld onder leiding van rechercheur Zozoekie. Ieder pakhuis was tot in alle hoekjes en gaatjes doorzocht. Herhaalde malen was er gedregd in de havens. Tot nu toe leverden de gedane inspanningen niets anders op dan de gramschap van de kommissaris en het verwijtende geschrijf van de kranten.

Ze waren nog even ver als na de eerste vermissing en inmiddels was het aantal opgegeven vermisten gestegen tot TIEN.

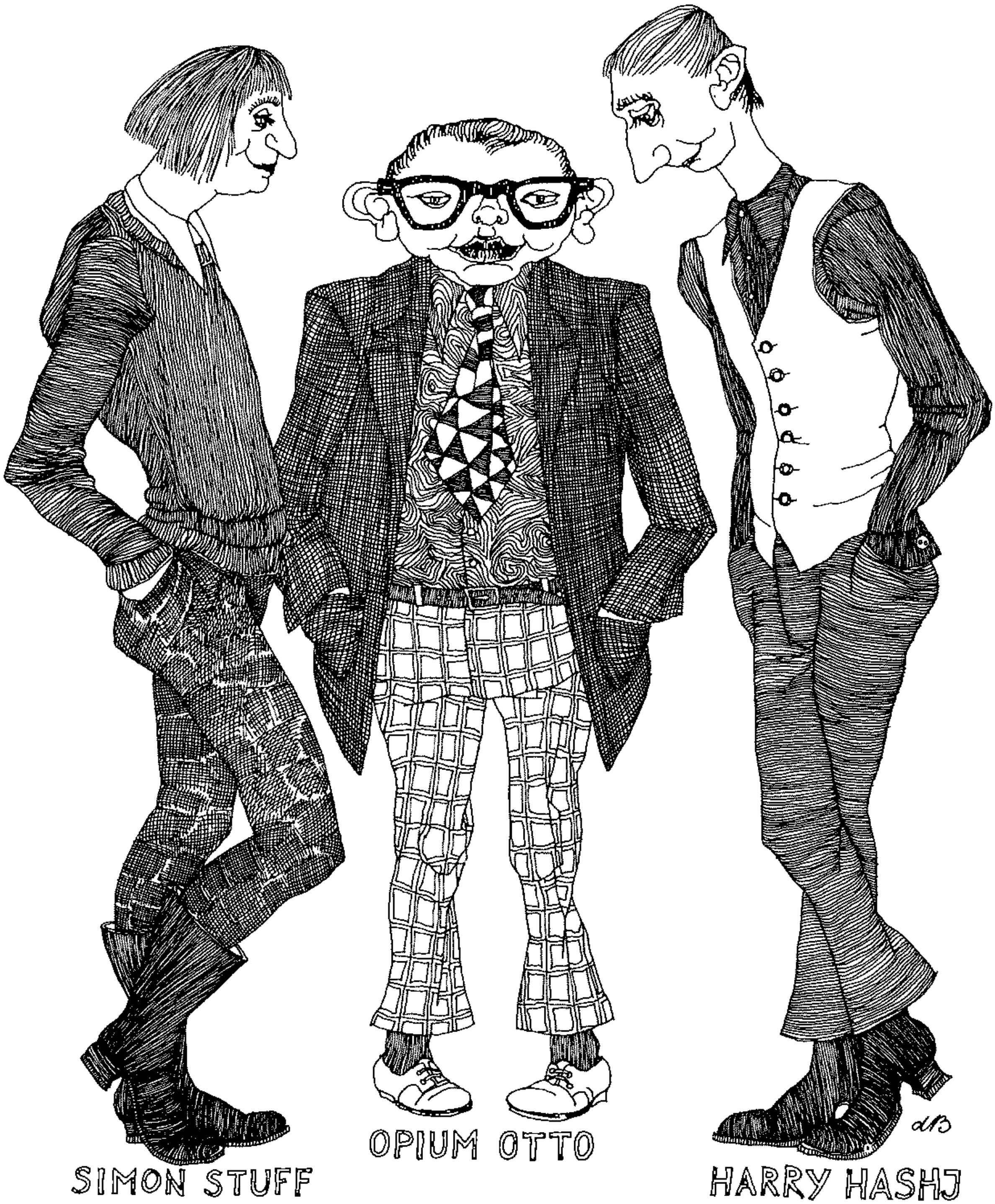
* * *

Zozoekie rekt zich behaaglijk uit. Zestien uur achtereen heeft hij geslapen. Hij voelt zich danig opgefrist. Maar nu haast maken. Drie dagen zijn snel voorhij.

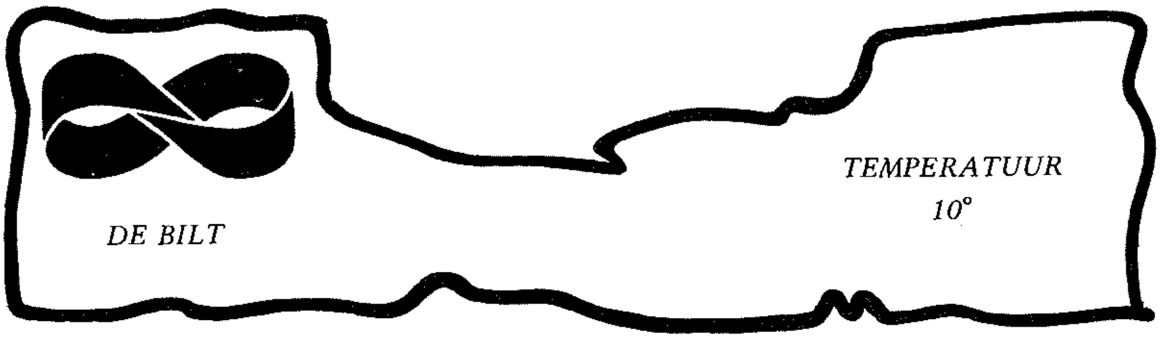
Een half uur later zit hij achter zijn buro.

'Nog iets bizonders Watson?', vraagt hij, wanneer zijn assistent binnen komt.

Deze schudt aarzelend-ontkennend zijn hoofd, bang als hij is zijn superieur te ontstemmen. Bovendien was zijn humeur de laatste dagen al om op te schieten.


SIMON STUFF
OPIUM OTTO
HARRY HASHJ

Plotseling rinkelt de telefoon. Verveeld neemt Zozoekie de hoorn op. Aan de andere kant van de lijn klinkt heel zacht een stem, die zegt: 'Menill, belanglijk nieuws vool u, lijk in haven, chinees' daarna niets meer. 'Hallo, hallo, HALLO!', schreeuwt Zozoekie in de hoorn, waarna hij geërgerd het ding met een klap op het toestel smijt. 'Kom mee, Watson, onmiddellijk naar de haven, en waarschuw direkt de dregploeg'.
Hoop welt in Zozoekie op. Zou nu eindelijk een tipje van de raadselachtige sluier opgelicht kunnen worden.
En inderdaad! Na uren van nauwgezet zoeken vindt men het lijk van een chinees. De arme man moet al heel lang geleden verdronken zijn, stelt later de patholoog-anatoom Dr. Immervrij vast.
Hij kan het niet zo precies zeggen maar met behulp van de hem ter beschikking staande middelen konkludeert hij, dat het in ieder geval in 1970 geweest moet zijn. Toch zijn ze nog niet zoveel wijzer geworden. De gevonden chinees is niet meer herkenbaar. Het nazoeken van zijn zakken levert niets anders op dan het volgende stukje papier:



* * *

Enige tijd later blijkt het geheimzinnige telefoontje toch het startpunt geweest te zijn van een reeks elkaar snel opvolgende gebeurtenissen.
Uiteindelijk blijft Zozoekie met het volgende probleem zitten:

Gegevens

* Op het lijk van de chinees is een briefje gevonden, met daarop:
  DE BILT
  TEMPERATUUR 10°.
* Dr. Immervrij stelde vast, dat de chinees in 1970 overleden moet zijn.
* Na veel speur- en denkwerk zijn nog drie potentiële verdachten overgebleven: Simon Stuff, Opium Otto en Harry Hashj.
  Alle drie hebben diverse veroordelingen achter de rug wegens het verhandelen van verdovende middelen in grote hoeveelheden, openlijke geweldpleging tegen de politie, illegaal bezit en gebruik van vuurwapens.
* De drie 'heren' weigeren ieder hardnekkig een bekentenis te doen en hebben voor het jaar 1970 elk een alibi, dat voor een deel kontroleerbaar is, namelijk
  - Simon Stuff werd op 31 juli 1970 na het uitzitten van zijn zoveelste straf uit de gevangenis ontslagen en was de rest van het jaar op vrije voeten.
  - Opium Otto kwam op 31 maart 1970 op vrije voeten en verbleef gedurende de maanden augustus-september '70 voor 'zaken' in Hong-Kong.
  - Harry Hashj zat een korte straf uit van 1 april 1970 t/m 30 september 1970 en was de rest van het jaar 'vrij'.

3 BESCHRIJVING VAN EEN STUKJE ONDERWIJS

3.1 Les 1

De onderwijzer begint met een klasse- of leergesprek naar aanleiding van het verhaal dat de leerlingen bij het begin van de les gelezen hebben.
Er wordt nagegaan of elke leerling het verhaal goed gelezen en ook begrepen heeft.
Het verhaal wordt gerekapituleerd, met name ten aanzien van de gegevens, welke Zozoekie ter beschikking staan.
De inventarisatie van de gegevens mondt uit in de formulering van de probleemstelling (door de leerlingen), waarbij de onderwijzer zijn rol slechts beperkt tot die van gespreksleider. De tijd voor dit onderdeel (leesles plus inventarisatie) hangt vanzelfsprekend af van het nivo van de leerlingen.

3.1.1 *Groepswerk (diskussie) klassegesprek*
Voordat de leerlingen de beschikking krijgen over tabellen met de benodigde gegevens, laat de onderwijzer ze in kleine groepjes diskussiëren over de volgende vragen en uitspraken:
- wat wordt bedoeld met maksimum-temperatuur in een etmaal?
- wat wordt bedoeld met minimum-temperatuur in een etmaal?
- wat kun je van de maksimum- en minimum-temperatuur zeggen als in een etmaal de temperatuur van 10°C is voorgekomen?
- de moord kan niet in januari gepleegd zijn
- in welke maanden komen de meeste dagen voor, waarop de temperatuur 10°C is geweest?

De onderwijzer verzamelt de antwoorden en kommentaren. De inventarisatie geeft aanleiding tot een korte diskussie. De leerlingen moeten zelf tot de konklusie komen dat nauwkeurige gegevens over het weer nodig zijn.
De onderwijzer zegt toe deze gegevens in de volgende les beschikbaar te zullen stellen (bijlage) en ze dan kort toe te lichten.
Het uitgangsprobleem wordt nog eens nauwkeurig geformuleerd en er wordt vastgesteld, wat in het vervolg onder een 10°C-dag verstaan zal worden.

3.1.2 *Werkvormen en leersituaties in les 1*
- individueel werk (stillezen),
- klasse- of leergesprek, rekapitulatie van het verhaal, inventarisatie van de gegevens, formulering van de probleemstelling,
- groepswerk (diskussie) naar aanleiding van enige begripsbepalende vragen (bijvoorbeeld 10°C-dag),
- klassegesprek ter inventarisatie van de groepsdiskussie, vaststelling van de benodigde gegevens.

3.1.3 *Kanttekeningen vanuit de praktijk*
De leerlingen[1]) kwamen zelf tot een korrekte formulering van de probleemstelling. Ze hadden er geen enkele moeite mee te bedenken, dat je voor nadere informatie over het weer in De Bilt moest aankloppen en dat voor een korrekte aanpak van het probleem die uitgebreidere informatie ook nodig was.
Maksimum-, minimumtemperatuur en het begrip 10°C-dag passeerden de revue. Eisen te stellen aan maksimum- en/of minimumtemperatuur om te kunnen spreken van een 10°C-dag werden genoemd.
Kortom, de resultaten van het leergesprek waren hoopgevend, hoewel hierbij wel aangetekend dient te worden, dat de korrekte antwoorden veelal geformuleerd werden door 'goede' leerlingen.

3.2 Les 2

3.2.1 De onderwijzer stelt, overeenkomstig zijn toezegging in de eerste les de benodigde gegevens beschikbaar en geeft daarop een korte toelichting.
Vervolgens wordt de klas ingedeeld in groepen van drie leerlingen.
Met behulp van de beschikbaar gestelde gegevens wordt begonnen met de verwerking van 3.2.2.

3.2.2 *Het praktikum*
De eerste twee pagina's van het praktikum zijn bedoeld voor groepsgewijze verwerking om op deze manier sneller tot een inventarisatie van de benodigde gegevens te komen.

1) Twee zesde klassen van de ontwerpschool Wiskobas te Arnhem.

UITGANGSPROBLEEM (LEERLINGENTEKST)

We moeten van elke dag in 1970 nagaan of het een 10°C-dag is geweest. Deze serie dagen gaan we vergelijken met die dagen, waarop één of meerdere verdachten op vrije voeten waren.

- ▶ In welke maanden van het jaar komen er 10°C-dagen voor?

- ▶ In welke maanden was Simon Stuff op vrije voeten?

- ▶ In welke maanden kan Simon Stuff de moord gepleegd hebben?

- ▶ Ga dit ook voor de andere verdachten na.

- ▶ Welke maanden komen, denk je, het meest in aanmerking?

- ▶ Tel voor elke maand van 1970, het aantal dagen waarop de temperatuur van 10°C voorkwam.
  Vul je antwoorden in de volgende tabel in. (verdeel het werk over de leden van je groepje!)

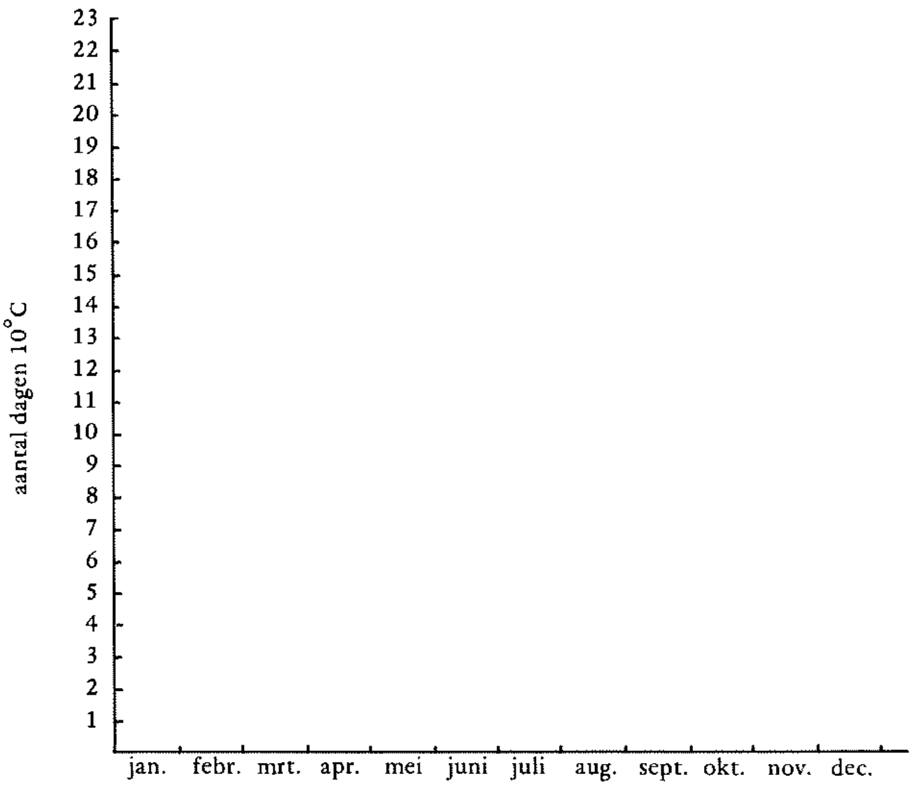
maand	aantal 10°C-dagen

▶ Is het 'normaal' dat er in februari geen 10°C-dagen voorkomen?

▶ Kan de moord in december gepleegd zijn?

▶ Kan de moord in mei gepleegd zijn?

▶ Maak een histogram van de tabelgegevens.



▶ Het histogram vertoont twee 'pieken'.
Kun je ook verklaren waarom?

3.2.3 Elk groepje bespreekt de gevonden resultaten met de onderwijzer. Daarna gaat iedere leerling individueel verder met het beantwoorden van de volgende vragen.

3.2.4 INDIVIDUEEL WERK (LEERLINGENTEKST)

▶ Hoe groot was het aantal '10°C-dagen' in 1970? ☐

▶ In welke maand was het grootste aantal 10°C-dagen? ☐

Hoeveel dagen waren dat? ☐

In welke maand was het kleinste aantal 10°C-dagen? ($\neq 0$) ☐

Hoeveel dagen waren dat? ☐

▶ De misdaad, waarvan in het verhaal sprake is, is gepleegd op een willekeurige 10°C-dag in 1970.

Hoeveel van deze dagen telde 1970? ☐

Hoeveel van deze dagen telde de maand september? ☐

Hoe groot is de kans, dat een *willekeurige 10°C-dag* in september viel? ☐ op ☐ of ☐

We kunnen dat nu voor elke maand nagaan.

Gebruik de gegevens uit de tabel van opdracht 6 van het groepspraktikum.

▶ Hoe groot is nu de kans, dat een willekeurige 10°C-dag in 1970 viel in:

– de maand maart:	☐	op	☐	of	☐
– de maand april:	☐	op	☐	of	☐
– de maand mei:	☐	op	☐	of	☐
– de maand juni:	☐	op	☐	of	☐
– de maand juli:	☐	op	☐	of	☐
– de maand augustus:	☐	op	☐	of	☐
– de maand september:	☐	op	☐	of	☐
– de maand oktober:	☐	op	☐	of	☐
– de maand november:	☐	op	☐	of	☐
– de maand december:	☐	op	☐	of	☐
– de maand januari:	☐	op	☐	of	☐
– de maand februari:	☐	op	☐	of	☐

▶ Hoe groot zijn de door jou berekende kansen in deze opdracht samen? ☐

▶ Voor het beantwoorden van deze opdracht kun je gebruik maken van de tabel uit het groepspraktikum of je kunt de antwoorden van de vorige opdracht gebruiken.

– Hoeveel 10°C-dagen waren er in het eerste halfjaar van 1970? ☐

Hoeveel van die dagen waren er in totaal? ☐

– Hoe groot is dus de kans, dat een willekeurige 10°C-dag in het eerste halfjaar van 1970 viel? ☐

Hoe groot is die kans voor het tweede halfjaar van 1970? ☐

– Bereken ook de volgende kansen: de kans dat een willekeurige 10°C-dag viel in:

het eerste kwartaal van 1970 (jan t/m mrt) [ ]

het tweede kwartaal van 1970 (april t/m juni) [ ]

het derde kwartaal van 1970 (juli t/m sept) [ ]

het vierde kwartaal van 1970 (okt t/m dec) [ ]

▶ De kans dat een willekeurige 10°C-dag viel in het [ ] kwartaal, is dus het grootst.

▶ We zullen nu eens gaan kijken hoe het staat met de alibi's van onze verdachten.
Geef door een kruisje in de volgende tabel aan in welke maanden de drie verdachten de misdaad gepleegd kunnen hebben:

	jan.	febr.	mrt.	apr.	mei	juni	juli	aug.	sept.	okt.	nov.	dec.
Simon Stuff												
Opium Otto												
Harry Hashj												

▶ Op wie zal inspekteur Zozoekie zich in het vervolg van zijn onderzoek nu het beste kunnen gaan koncentreren?
Motiveer je antwoord.

3.2.5 *Werkvormen en leersituaties in les 2*
– groepswerk (eerste deel praktikum),
– groepsgewijze bespreking van de resultaten,
– individueel (schriftelijk) werk.

3.2.6 In een korte *klassikale nabespreking* komt het voor individuele verwerking bestemde gedeelte van het praktikum nogmaals aan de orde. Dit kan het beste, indien de tijd dit dan nog toelaat, aan het einde van de tweede les geschieden.

3.2.7 *Kanttekeningen vanuit de praktijk*
Het beschikbaar stellen van twee pagina's met informatie (zie bijlage) en de opdracht daaruit de adekwate gegevens te inventariseren bezorgde diverse leerlingen de nodige hoofdbrekens. Dit pleit o.i. voor een inleidende oefening, als in het praktikum, voordat gegevens over een aantal jaren geïnventariseerd moeten gaan worden.

De minder begaafde leerlingen bleken veel steun te hebben aan een schetsje van een termometer in verband met het vaststellen of een dag in 1970 al dan niet een 10°C-dag geweest is.
Het tekenen van het histogram leverde geen moeilijkheden op, ook al omdat na het lezen van het verhaal 'het staafdiagram nog even gerepeteerd werd'.
De verklaring waarom het histogram twee pieken vertoonde bleek voor veel leerlingen te lastig.

Voor het individuele gedeelte van het praktikum (3.2.4) kan gesteld worden, dat voor diverse leerlingen de kreatie van een '10°C-dagen-vaasmodel' heel verhelderend werkte. (hoe groot is de kans dat een willekeurige 10°C-dag in ...... viel?)

4 UITZICHT OP HET VERVOLG

4.1 Inleiding

In het voorgaande pakketje had de kansterminologie voor een groot deel achterwege kunnen blijven. Het probleem waarvoor de leerlingen gesteld werden, had ook via eliminatie en uittellen opgelost kunnen worden.
Dat desondanks toch van kansen gesproken werd vindt z'n motivering in het feit, dat binnen de kontekst van dit pakket en de suggesties voor het vervolg, de gekozen bewoordingen beter pasten.
Het vervolg kan nu gekenmerkt worden door het impliciete toepassen en vervolgens expliciteren van het *empirische kansbegrip*.
Bij de aktiviteiten, zoals ze voor het vervolg gesuggereerd worden, kan — met het voorgaande als uitgangssituatie — de vraag ter diskussie gesteld worden: over hoeveel jaren moeten de beschikbare weergegevens geïnventariseerd worden om een enigszins betrouwbaar beeld te krijgen?
Mogelijk dat verschillende suggesties uit de klas in het onderzoek mee gaan spelen, waardoor men later over vergelijkingsmateriaal beschikt.

4.2 Beschrijving van een probleemsituatie voor het vervolg

Planning van een schoolreisje van enkele dagen of een werkweek.
In een bepaalde periode van het jaar, bijvoorbeeld tussen 1 april en 30 juni, dient de betrokken aktiviteit gepland te worden, doch binnen die periode vallen nog een aantal andere gebeurtenissen, waarmee rekening gehouden dient te worden als: de schooltoets, de verjaardag van meneer, de sportdag met de andere scholen, etc.
Dit geeft aanleiding tot het opzetten van een *tijdas* voor die periode. De verschillende gebeurtenissen, waarmee bij de betrokken planning rekening gehouden dient te worden kunnen op de tijdas ingekleurd worden.
Dit resulteert uiteindelijk in de vaststelling van twee of meer alternatieven.
Uit deze alternatieven worden de aantrekkelijkste gekozen (aan het eind van de genoemde periode, omdat we dan het mooiste weer *verwachten*).
Op grond van de gegevens (van De Bilt), die beschikbaar zijn, worden een aantal jaren geïnventariseerd op die weerverschijnselen, die de leerlingen belangrijk achten
— voor het welslagen van het reisje is in de eerste plaats noodzakelijk, dat het aantal uren neerslag minimaal is, terwijl een aangename temperatuur eveneens een positieve invloed kan hebben —.
Vervolgens worden enkele groepen geformeerd, die voor de verschillende alternatieven het onderzoek zullen gaan verrichten.
Dit houdt in konkreto in: het inventariseren van de gegevens, het samenstellen van tabellen en grafieken, het berekenen van kansen op het aantal uren neerslag en een bepaalde (gemiddelde) temperatuur voor de betrokken periode, het veelvuldig toegepast rekenen met decimale getallen en het schrijven van een verslag.
De uiteindelijke onderzoeksresultaten worden besproken, resultaten vergeleken en een definitieve vaststelling van het reisje of de werkweek vindt plaats.

4.3 Overige suggesties voor het vervolg

* *Regenverzekering*
  Analoog aan het onder 4.2. geschetste is het probleem van het plannen van een vakantie (in eigen land) en de vraag of het gewenst is voor de gekozen periode al dan niet een regenverzekering af te sluiten.
  Het probleem zou aan het vorige gekoppeld kunnen worden. Feit is, dat bij de regenverzekering met premies gewerkt moet gaan worden, waarbij de matematische verwachting een rol speelt.

* *Vorstverletregeling*
  Op basis van enerzijds een gegeven aantal bouwvakkers en een aantal bedrijven, welke een x-bedrag in een 'vorstverletpot' storten en anderzijds de weergegevens van de laatste 30 jaar (De Bilt), zou een vorstverletregeling ontworpen kunnen worden. Ook hier speelt het begrip matematische verwachting een rol.

Temperatuur ($^\circ$C) te De Bilt

maks	min	maks	min	maks	min	maks	min	maks	min	maks	min
januari		februari		maart		april		mei		juni	
−5,5	−12,2	−3,2	−8,6	4,7	−1,3	4,9	0,5	11,5	3,8	16,3	11,7
2,8	−7,7	7,9	−6,1	6,3	−0,7	4,2	−0,5	11,1	5,5	16,9	7,1
3,7	−0,8	6,8	2,8	3,2	−0,1	5,6	−0,5	16,6	7,9	19,1	6,9
1,6	−4,0	5,9	1,4	2,5	−2,1	5,1	0,1	17,9	5,6	19,7	8,2
0,3	−5,6	5,0	0,9	2,8	−3,3	5,3	−0,5	19,8	8,6	21,9	8,5
0,5	−3,4	2,8	−3,2	3,4	−0,3	5,3	0,0	21,9	9,3	25,5	12,2
0,7	−7,5	3,2	−3,0	2,8	−1,3	4,4	−0,4	21,0	13,6	26,2	15,4
−0,8	−4,6	6,0	−1,8	1,3	−2,9	5,7	−2,2	21,1	11,5	28,4	17,1
3,8	−1,6	6,5	2,1	2,8	−1,6	6,4	−0,4	20,9	11,0	28,6	17,7
3,5	0,7	2,5	−0,1	4,5	−2,0	6,5	1,5	21,8	12,9	28,3	16,0
7,9	1,7	3,6	−0,1	5,1	−3,4	7,6	1,9	21,7	8,1	26,2	14,2
7,4	2,5	1,3	−2,8	5,9	0,9	11,0	3,2	19,0	10,4	22,2	13,3
5,9	2,6	2,1	−1,0	4,0	0,3	10,2	4,7	16,7	10,0	18,3	10,2
6,4	2,1	1,6	−3,7	3,2	−1,7	7,0	3,2	19,8	7,1	15,4	10,0
6,1	2,2	−1,5	−9,9	5,5	−3,3	10,9	1,1	19,0	7,3	17,6	8,8
4,8	1,9	0,2	−3,5	7,4	1,6	13,7	9,0	15,7	11,4	21,1	8,3
1,9	−1,6	2,4	−7,4	7,3	4,4	14,0	9,4	16,5	9,3	26,8	12,3
5,4	−1,7	2,5	−4,2	7,6	1,7	12,4	9,6	17,4	7,6	25,6	15,4
2,6	−1,4	2,8	−6,2	7,0	3,4	12,1	3,9	16,9	8,0	26,4	13,1
0,2	−2,4	6,5	−2,2	9,4	2,7	10,3	1,3	14,5	6,4	25,7	16,4
−1,0	−4,8	6,3	−1,7	10,0	3,9	10,2	4,0	13,2	7,3	24,6	10,1
−1,2	−5,1	9,2	−6,3	9,9	6,0	12,7	9,0	10,7	6,2	25,2	15,5
2,3	−1,5	9,3	−3,9	10,9	0,1	12,3	8,5	14,2	5,5	23,4	16,4
4,6	1,7	7,4	−2,9	6,8	3,1	12,4	7,3	18,5	7,8	20,3	11,9
8,1	2,2	5,1	−0,6	6,3	1,2	12,6	8,7	20,4	11,2	19,4	14,9
7,9	5,5	4,6	−0,9	6,5	−1,2	9,4	5,0	15,7	9,5	24,9	12,2
6,6	4,4	2,4	−1,3	4,7	−0,7	8,6	4,6	12,2	7,5	28,0	16,2
4,7	2,0	2,0	−3,2	4,9	0,0	8,3	2,8	17,8	8,2	20,7	14,9
3,6	−0,4			6,1	0,8	7,0	2,4	19,5	9,8	16,8	12,7
1,0	−1,9			8,7	3,6	7,3	2,9	16,7	9,4	15,6	10,0
−1,9	−6,7			7,7	3,5			15,5	11,9		

Temperatuur (°C) te De Bilt

maks	min	maks	min	maks	min	maks	min	maks	min	maks	min
juli		augustus		september		oktober		november		december	
14,7	10,8	25,3	13,3	18,5	14,3	14,9	9,7	13,7	11,2	8,1	6,1
15,3	9,0	26,5	16,0	18,2	7,9	15,9	8,2	14,9	9,0	7,7	4,8
14,6	10,3	26,4	16,1	18,9	14,1	12,9	6,1	14,1	11,4	11,3	5,9
17,3	10,5	24,9	15,5	16,6	12,1	14,0	8,7	12,3	8,8	10,9	2,5
18,6	13,0	25,6	12,2	18,0	11,8	15,3	12,8	11,3	8,8	8,6	5,8
23,6	14,3	24,1	15,4	16,9	11,5	15,1	11,6	11,1	5,5	8,8	4,7
28,3	16,0	22,5	15,6	20,6	10,0	13,2	9,2	6,8	3,1	8,1	4,2
27,1	19,5	17,6	13,7	20,2	13,9	14,6	5,9	5,1	2,0	8,6	4,1
22,7	15,6	21,1	14,5	18,2	13,0	15,5	5,6	11,0	5,1	8,0	4,7
19,1	12,0	17,3	13,3	15,8	12,1	17,9	7,1	9,3	6,0	8,2	5,6
17,9	12,5	19,0	13,9	15,4	11,3	23,2	10,7	12,7	5,5	7,7	3,1
20,7	11,4	19,8	8,8	16,2	10,8	18,5	10,6	12,0	5,7	4,3	−1,3
23,3	13,2	24,5	12,3	15,4	10,8	15,0	10,8	8,4	4,1	7,0	3,2
20,9	10,4	22,6	16,0	15,8	9,8	12,6	9,1	8,1	2,1	7,5	4,1
15,7	10,4	19,6	9,1	19,9	11,9	12,6	5,2	7,2	3,5	6,7	3,0
14,5	10,1	18,0	13,6	15,6	10,6	13,4	1,6	6,3	2,5	6,0	2,6
15,8	10,3	15,7	10,8	17,5	10,2	14,9	4,9	8,3	1,4	2,6	−0,6
20,3	8,2	17,9	11,3	20,5	8,6	15,5	4,8	12,5	4,7	5,1	2,5
16,5	13,3	21,4	12,3	23,6	12,3	12,8	8,1	13,4	7,1	7,6	4,5
15,2	10,3	20,1	14,3	21,4	11,2	8,5	4,9	8,2	2,4	8,1	4,9
15,8	9,2	18,1	10,3	19,5	14,0	10,7	6,5	9,4	4,6	5,5	1,6
18,0	10,2	19,4	10,7	16,3	7,6	11,2	5,8	5,5	2,7	4,3	0,2
21,4	8,9	20,1	12,8	15,8	6,4	11,7	6,5	7,4	2,2	0,2	−3,2
21,2	13,7	23,0	14,3	17,3	6,7	11,5	8,1	10,3	4,2	−1,4	−6,6
16,3	12,1	19,8	10,9	21,4	9,7	12,1	10,2	11,0	3,4	−2,4	−4,7
17,4	11,5	21,0	10,1	21,4	12,3	12,2	9,1	11,5	4,8	−3,5	−5,6
19,1	13,1	22,9	10,9	21,0	11,8	11,1	7,0	8,9	2,9	−4,6	−8,4
22,7	14,9	20,1	10,9	22,0	12,1	13,6	6,9	7,5	2,5	−1,8	−6,9
20,0	14,8	26,4	9,3	21,0	8,4	13,9	7,5	13,3	5,7	−1,8	−3,9
23,0	9,5	23,9	12,3	17,4	11,2	13,3	10,6	13,1	7,1	−0,2	−4,5
25,4	15,2	22,8	11,1			13,6	10,9			0,4	−4,7

INHOUD

MEDEWERKERS AAN DIT BLOK:
Marja Boerema, mej. S.A. Versteeg, Abel Bisschop, Idske Dijkstra, F.F.J. Gaillard, Rob de Jong, Harm Jongsma, Daan Karman, John Kemps, Pierre Knops, Ton op de Weegh, deelnemers heroriënteringskursus Eelde/Paterswolde, Afke, Age, Els, Inger, Harry-Jan, Mario, Sierk, Simon, Willy.

respons blok

4.1 INLEIDING EN LEESWIJZER

De leerplanontwikkelaarsgracht onderscheidt zich in bijna niets van de klompenmakerssteeg, de zadelmakersstraat en de looiersgracht. Overal bedrijvigheid en gesappel. Materialen worden aangevoerd en bewerkt en produkten uitgestald. De gracht laat tevens nieuwsgierigen zien die slenteren, toekijken en genieten van hun vrije uurtjes.
Een groep ontwerpers praat met kinderen, leest, schrijft, geeft papieren door aan omstanders. Deze bekijken het, maken notities, treden in diskussie of gooien de papieren in de gracht. Bij een brug staat een artist op krukken voor zichzelf te werken. Een praatgrage limburger stopt spullen in zijn mars — waar hij al veel in heeft — en gaat de boer op. Een lange magere denker deelt schouderklopjes uit, argumenteert, vermaant. Een smalgeschouderde redakteur duwt een kar vol grondstoffen voor zich uit en imiteert een breedschoftige belgische knol. Een amsterdamse zweepslager loopt rond om de produktiviteit van allen te verhogen.
Een normaal straatbeeld, nietwaar?

Het beeld is in zoverre juist dat leerplanontwikkeling een ambacht is als elk ander. Een ambacht dat in de openbaarheid — voor iedereen zichtbaar — uitgeoefend wordt.
Het beeld onderscheidt zich als we nader toekijken.
De ambachtsman maakt niet opdat anderen zich vergapen aan zijn vakmanschap en om al imponerend z'n produkten te verkopen.
De omstanders zijn niet zomaar nieuwsgierigen in hun zondagse goed, maar aktief-geïnteresseerden in werkplunje.
Enfin, u weet het zo langzamerhand wel.

Het aantal geïnteresseerden en ook de kwaliteit van de interesse blijft toenemen. De bijdragen uit dit Respons-Blok spreken wat dat betreft voor zichzelf.

Het probleem dat we niet al het toegezondene kunnen opnemen, wordt steeds nijpender.

De redaktie heeft deze keer plaats ingeruimd voor een bijdrage van twee studenten uit Arnhem. Het is een verheugend verschijnsel dat ons werk kritisch wordt begeleid, ook door onderwijzers-in-opleiding. **(4.2)**
Abel Bissehop heeft naar aanleiding van het blok 'In Orde' een uitgebreid en keurig verzorgd werkstuk gemaakt. De door hem samengestelde werkbladen zijn kostelijk geïllustreerd. We hopen dat de tekenaar van het Bulletin het nivo kan evenaren. **(4.3)**
Twee bijdragen over breuken. Pierre Knops is nagegaan in hoeverre leerlingen van een mavo brugklas de breuken-basisstof beheersen. De vaststelling dat het beheersingsnivo lager ligt dan wat van leerlingen 5^e klas basisschool verwacht wordt, geeft te denken. **(4.4)**
Docenten bij het lager technisch onderwijs vinden in het algemeen dat breuken in het onderwijs gehandhaafd dienen te blijven F.F.J. Gaillard geeft verslag van een enquête. **(4.5)**
Een illustratie van hoe je met een klas tot problem-solving kunt komen is beschreven in een lesverslag van mej. S.A. Versteeg van de Oorsprongschool (klas 1^A) te Baarn. **(4.6)**
Leerlingenwerk vindt u in **4.7**, **4.8** en **4.9**, respektievelijk over meten, modelbouw en een rekenspel.
De lessenserie — met ervaringen — over 'Het spijkerbord' uit de kursus Eelde/Paterswolde, bevat enkele leerzame observaties. **(4.10)**
Verder staan hier en daar in dit blok een viertal 'wist-u' stukjes. De inhoud van deze stukjes is afkomstig uit de korrespondentie.

Er zijn deze keer nogal wat bijdragen bij uit het noorden van het land. 't Noorden eksporteert kennelijk niet alleen stamboekvee en aardgas, maar ook goede ideeën.

4.2 PEDAGOGISCH-FILOSOFISCHE KONSEKWENTIES

JOHN KEMPS
TON OP DE WEEGH[1])

VAN WAARSCHIJNLIJKHEIDSREKENING EN STATISTIEK

Wij lazen het artikel van Hubert Winters in Wiskobas-Bulletin nummer 3 van dit jaar. We waren hierin bizonder geïnteresseerd, aangezien ons werkstuk over statistiek en waarschijnlijkheid ging. Het volgende houdt geen verwijt in aan Hubert Winters, maar zijn artikel was voor ons aanleiding een problematiek aan de orde te stellen, die ons inziens te weinig aandacht heeft gehad, namelijk de filosofisch-pedagogische konsekwenties van introduktie van het onderwerp statistiek en waarschijnlijkheid op de basisschool.

Wie tegenwoordig de krant opslaat, televisie kijkt, deelneemt aan gesprekken etc., zal dikwijls gekonfronteerd worden met begrippen uit het arsenaal van statistiek en waarschijnlijkheid. Statistiek en waarschijnlijkheid schijnt een niet weg te denken deel van ons leven geworden te zijn. Dus ook van het leven van het jonge kind dat bezig is de wereld te verkennen. We vinden het daarom zeer belangrijk dat aan deze materie aandacht wordt besteed op de basisscholen. Maar het invoeren van deze 'leerstof' heeft konsekwenties.
Allereerst *filosofisch*. We leven in een maatschappij, waarin techniek een belangrijke plaats inneemt. Zó belangrijk, dat de techniek in niet onbelangrijke mate ons leven beïnvloedt. Men denke bijvoorbeeld aan automatisering (werkloosheid), kommunikatiemiddelen, vervoer, elektriciteit, atoomsplitsing (kernbom!) en dergelijke. De grote vlucht die de techniek sinds de industriële revolutie heeft genomen is alleen mogelijk geweest door de stormachtige ontwikkeling van de wetenschap. Door deze belangrijke plaats in ons leven van techniek en wetenschap is het gevaar niet denkbeeldig, dat de mens op de achtergrond raakt. We zijn er ons weliswaar van bewust, maar er wordt (té) weinig aan dit verschijnsel gedaan.
Statistiek en waarschijnlijkheid is een tak van wetenschap, die wel specifiek de kenmerken van deze beïnvloeding van de wetenschap op de mens bezit: zij probeert toekomstige verschijnselen, gebeurtenissen in een formule te vatten. Het gevaar bestaat, dat de mens zich blind gaat staren op deze berekeningen en vergeet, dat er faktoren zijn, die de hele kansberekening twijfelachtig maken. Deze faktoren, bijvoorbeeld gevoel, wederzijdse beïnvloeding, natuurrampen, oorlogen, maatschappelijke ontwikkeling en dergelijke zijn niet van te voren eksakt te voorspellen en dus niet eksakt in de kansberekening te verwerken.
We geven slechts een enkel voorbeeld: na de tweede wereldoorlog is men op grond van wetenschappelijke prognoses overal in nederland kerken gaan bouwen. Men kon toen (wetenschappelijk) nog niet voorzien dat er o.a. een proces van dekonfessionalisering zou ontstaan (een typische vorm van de invloed van het gevoel). Resultaat: kerken lopen leeg, kerken moeten zelfs gesloten worden. Met het bovenstaande hebben we niet willen aantonen, dat statistiek en waarschijnlijkheid geen nut heeft, maar wél dat een kritische houding ten aanzien van prognoses noodzakelijk is.
Dat dit *pedagogische konsekwenties* heeft zal een ieder duidelijk zijn. De taak van de opvoeder in deze zal dan ook moeten zijn: voortdurend wijzen op de betrekkelijkheid van waarschijnlijkheidsberekening, op de invloed van irrationele faktoren, in wezen op de vrijheid van de mens. Hij zal moeten wijzen op het gevaar, dat de wetenschap de mens gaat beheersen in plaats van de mens de wetenschap. Hij zal zijn kinderen op het gevaar van 'sociologische overmacht' moeten wijzen.
Wanneer de onderwijzer statistiek en waarschijnlijkheid op deze manier relativeert, naast de vele positieve dingen van statistiek en

waarschijnlijkheid, is deze stof zeer nuttig voor het wiskunde-onderwijs op de basisschool. Het wiskunde-onderwijs, dat de kinderen onder andere vertrouwd wil maken met de (wiskundige) achtergrond van onze maatschappij.
We zien met belangstelling reakties op het bovenstaande tegemoet en zouden het zeer op prijs stellen, indien deze visie in het komende Wiskobas-Bulletin geplaatst werd.

REDAKTIONEEL KOMMENTAAR
Inderdaad, steeds dient de mens, vooral de medemens centraal te staan. Opvoeding of liever de onderlinge vorming tot mens is veel belangrijker dan het leren van weetjes. Juist de kansrekening geeft hier veel mogelijkheden. De verschijnselen zelf zijn niet te voorspellen. Wel kunnen we met een zekere mate van betrouwbaarheid voorspellen hoe vaak iets voor zal komen als we een serie dezelfde eksperimenten nemen. Maar ook hier blijkt alles mogelijk te zijn. Er zijn faktoren die een oorspronkelijke berekening foutief maken doordat de kansen veranderd zijn.
De mens kan maatregelen nemen om de kans op een dreigende katastrofe te verminderen. De kansrekening leert ons juist dat we erg kritisch dienen te staan ten aanzien van alle prognoses. Door prognoses te geven (rapport van de klub van Rome) kan men beogen te voorkomen dat deze prognoses werkelijkheid worden.

[1]) Studenten aan de katholieke pedagogische akademie te Arnhem.

WIST U 1

– dat het bij meten altijd erg belangrijk is om te weten in welk kader – ten opzichte van welke referenties – een meting wordt bepaald,

– dat de keuze van het kader in hoge mate bepaalt wat het snelst, zwaarst, etc. is,

– dat Pim van Drooge (docent natuurkunde) ons hiervan een leuke illustratie stuurde:
Volgens een ingezonden stuk in 'Scientific American' is de Mount Everest niet de hoogste berg op aarde maar waarschijnlijk de Chimborazo in de Andes.
Het hangt er namelijk maar van af wat men onder 'hoog' verstaat. De Mount Everest steekt 8848 m boven het zeenivo uit en de Chimborazo 6267 m.
Maar het zeenivo ligt aan de evenaar zo'n 20 km verder van het middelpunt van de aarde dan het zeenivo aan de polen, omdat de aarde de vorm van een afgeplatte bol heeft.
Eigenlijk is een afspraak, waarbij men als hoogte van een berg de afstand tot zeenivo neemt minder logisch dan één waarbij men de afstand tot het middelpunt van de aarde neemt, omdat dit laatste een maat is die aangeeft hoe ver de berg de ruimte in steekt.
Op grond van deze afspraak is de Chimborazo, die minder dan 2 graden van de evenaar af ligt, 3 km hoger dan de Mount Everest die bijna 28 graden van de evenaar af ligt.

4.3 OP HOEVEEL MANIEREN?

ABEL BISSCHOP

Juni 1972.
Het is al weer bijna een jaar geleden.
Een onderwijzer staat in zijn klas en tracht de belangstelling van de leerlingen zo vlak voor de zomervakantie gaande te houden. Uitgangspunt bij deze lessen: de vakantie en allerlei dingen die hiermee in verband staan.
U ziet een beeld dat in honderden lokalen van basisscholen geschilderd had kunnen worden.

Na schooltijd laat het personeel van de school waaraan de onderwijzer is verbonden, zich heroriënteren via het blok 'In Orde' op de pedagogische akademie te Appingedam. Zo ontstaan de lessen die door de onderwijzer *'Op hoeveel manieren...???'*, worden genoemd.

De lessen werden op 16 en 23 juni 1972 gegeven in de vijfde klas (33 leerlingen).
Met de heer U. Zeemering, docent wiskundedidaktiek werden naderhand de lessen en de ervaringen van de klasse-onderwijzer besproken.
Op 8 en 15 september van hetzelfde jaar werd een tweede versie van de lessen aangeboden aan een nieuwe vijfde klas.

* * *

LES 1

Doelstelling
De leerlingen maken in deze les kennis met de relatie tussen twee of meer punten en een gegeven aantal verbindingslijnen enerzijds en op hoeveel manieren men van het ene punt naar het andere kan komen.

Indeling
Introduktie (plm. 5 minuten)
De leerlingen worden in de sfeer van de les gebracht door middel van een inleidend gesprekje over vakantie-plannen, met name de voorbereidingen.

De leerlingen noemen een aantal handelingen die je moet verrichten om op reis te gaan; de klasse-onderwijzer noteert de antwoorden op het bord.

Antwoorden die mogelijk gegeven worden:
paspoorten in orde laten maken, het reisdoel uitzoeken, wegenkaarten raadplegen, geschikte kleding en schoeisel uitzoeken, koffers pakken, de auto na laten kijken, het inpakken van de koffers, enz.

Kern (plm. 30 minuten)
Door vier leerlingen wordt een kort toneelstukje opgevoerd. Tema: het uitzoeken van het reisdoel, waarbij meningsverschillen ontstaan waar men heen zal gaan.
Opmerking: het verdient aanbeveling deze opdracht een dag van te voren aan de vier leerlingen te geven in verband met enige voorbereiding.

Na het toneelstukje geeft de onderwijzer aan alle leerlingen de volgende opdracht:

> In het toneelstukje dat je zopas gezien hebt, hoorde je dat men wel graag op reis wilde, maar dat de leden van het gezin het er nog niet over eens waren, waar de reis wel heen zou gaan?
> Schrijf eens op waar de leden van het gezin heen wilden?

De opdracht kan schriftelijk worden gemaakt. Naar eigen inzicht laat de klasse-onderwijzer deze opdracht individueel of in groepjes maken.
Als alle leerlingen hun antwoord genoteerd hebben, schrijft de klasse-onderwijzer de antwoorden op het bord; alle antwoorden die uit de klas komen — dus ook de foute — worden in een kort klassegesprekje besproken.

Opdracht 2 van het eerste werkblad komt vervolgens aan de orde.

Zou het mogelijk zijn een aantal van de reisdoelen die in het toneelstukje zijn genoemd, in één reisplan op te nemen?
Schrijf eens op hoe je dat zou doen.

Ook deze opdracht wordt schriftelijk gemaakt. Naar het inzicht van de klasse-onderwijzer: individueel en/of groepsgewijs. Na het maken worden de diverse antwoorden voor de klas besproken.

De onderwijzer deelt werkblad 2 uit. Hij vertelt dat het gezin er uiteindelijk in is geslaagd één reisdoel te kiezen. Met z'n allen gaan ze op reis en overnachten de eerste avond op een camping in de provincie gelderland. De camping heet 'Rust', maar vader zal er een zeer onrustige avond tegemoet gaan.

De opdracht om werkblad 2 goed te bekijken komt vervolgens aan bod. Lees wat er staat!
Vragen en opmerkingen uit de klas zullen naderhand klassikaal besproken worden. Onder meer zal aan de orde komen dat het eerste gedeelte van het tweede werkblad een deel van de wegenkaart voorstelt.

Verwerking (plm. 15 minuten)
De leerlingen maken werkblad 2.
Instruktie: lees de vraag goed door; kontroleer steeds de antwoorden.
De opdrachten worden twee aan twee gemaakt.
Wijzen op de kern- en keuzevragen.

Nabespreking (plm. 10 minuten)
De onderwijzer noteert niet alleen de antwoorden van de leerlingen op het bord, maar ook de motiveringen.
Aan de hand van het genoteerde wordt een klassegesprek gehouden. Als leiders van het klassegesprek kunnen de leerlingen van het besproken antwoord fungeren.
Ook als geen enkel antwoord goed is, word er een bespreking gehouden.
De onderwijzer kan dan de volgende vragen stellen:
- hoe komt het dat jullie het juiste antwoord niet hebben gevonden?
- zou je het anders kunnen aanpakken?
- hoe kun je het probleem min of meer vereenvoudigen?
Hierna worden de werkbladen ingenomen.

LES 2
Doelstelling
- aansluitend op de eerste les: een nadere kennismaking met de bedoelde leerstof,
- verdere verdieping, waarbij het inzichtelijk werken met schema's wordt belicht.

Indeling
Introduktie (plm. 5 minuten)
De klasse-onderwijzer heeft de werkbladen aan de leerlingen teruggegeven.
Op het bord heeft hij enkele opmerkingen geschreven die gemaakt zijn tijdens de 'nabespreking' van les 1. Hierover wordt nog eens een kort klassegesprekje gehouden. Met name kan in dit gesprekje een aantal schema's die door de leerlingen gevonden zijn, worden besproken.

Kern (plm. 35 minuten)
De leerlingen krijgen allereerst de werkbladen 3 en 4.
De instruktie omvat:
- lees de opdrachten goed door,
- ga de mogelijkheden na,
- probeer bij elke opgave een schema te maken,
- werk twee aan twee, of individueel.

Tijdens het werken loopt de onderwijzer door de klas om in ruimere mate hulp te bieden, aangepast aan de groepen waarin wordt gewerkt.
Het is niet noodzakelijk dat alle leerlingen alle opgaven maken en afhebben.
De volgorde waarin de opdrachten worden gemaakt, door de leerlingen zelf laten bepalen.

Nabespreking (plm. 20 minuten)
Deze bespreking wordt gehouden als een klassegesprek, waarbij de gehanteerde schema's centraal staan.
De werkwijze is nu als volgt:
Van een opdracht schrijft een leerling zijn oplossing en motivering op het bord. Een klassegesprekje over deze notatie volgt, waarbij de klasse-onderwijzer en de betrokken leerling(en) als gespreksleiders optreden.
Opmerkingen en konklusies uit de klas worden op het bord geschreven. Eventueel rondt de onderwijzer het gesprek af.

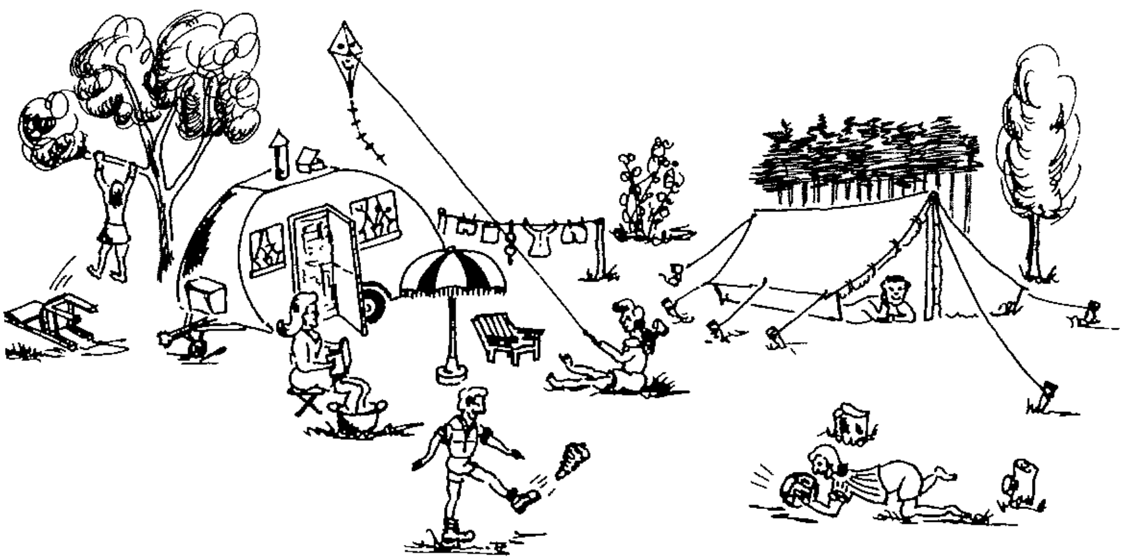
---

[1]) Onderwijzer aan de openbare basisschool 'Klaas de Vries' te Appingedam.

WERKKAART 1 **REISDOELEN**

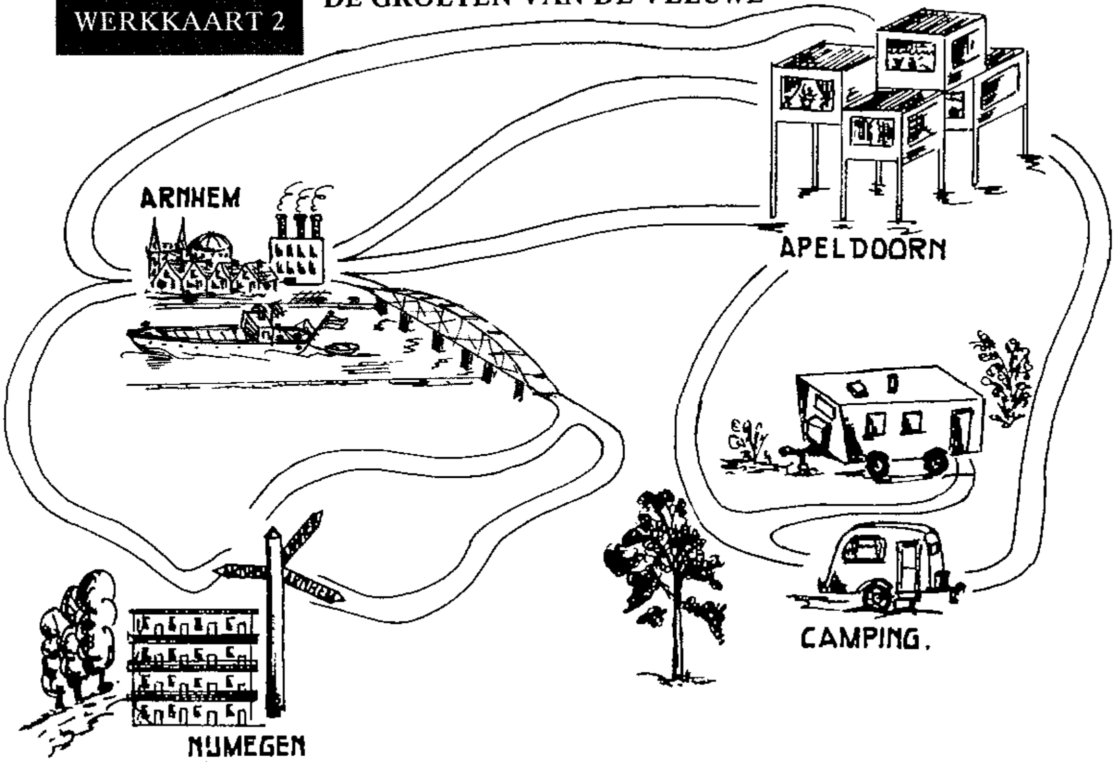
1. In het toneelstukje dat je zopas hebt gezien, hoorde je, dat men graag op reis wilde. Maar de leden van het gezin waren het nog niet eens waar de reis naar toe zou gaan.
Schrijf hieronder eens, waar de leden van dit gezin heen wilden?
Kun je ook een schema bedenken, zodat we sneller zien, wat je precies bedoelt?

2. Zou het mogelijk zijn een aantal van de reisdoelen die in het toneelstukje zijn genoemd, in één reisplan op te nemen?
Schrijf hieronder hoe je dit zou gaan doen.



WERKKAART 2

DE GROETEN VAN DE VELUWE



Vader en moeder Jansen zitten met hun kroost op een camping midden op de Veluwe. De volgende dag wil het gezin vertrekken naar Nijmegen.
Vader zit in de rustige omgeving van camping 'Rust' de wegenkaart te bekijken. Hij ziet tot zijn grote schrik dat hij op verschillende manieren naar Nijmegen kan rijden. 's Avonds roept hij zijn vrouw en kinderen rond het kampvuur, ook het zoontje dat voor straf aan de waslijn moest hangen. Samen gaan ze uitrekenen op hoeveel manieren men van de camping naar Nijmegen kan rijden. Het is een hele opgave. Daarom........ help vader Jansen even mee. De man kan er niet uitkomen.

Deze opdrachten moet je maken

1. Op hoeveel manieren kun je van de camping naar Apeldoorn komen?
2. Op hoeveel manieren kun je van Apeldoorn naar Arnhem komen?
3. Op hoeveel manieren kun je van Arnhem naar Nijmegen komen?

Dit zijn de moeilijke opdrachten. Veel sukses!

4. Op hoeveel manieren kun je van de camping naar Arnhem komen? Je mag aantekeningen maken op de achterzijde van dit blad.
5. Op hoeveel manieren kun je van de camping naar Nijmegen komen? Aantekeningen kun je op de achterzijde van dit blad maken.

WERKKAART 3 **ROKKEN EN TRUITJES EN HANDEN**

eze opgaven moet je maken

1. *Ina heeft problemen met haar kleding*

Ina Jansen gaat ook mee naar Spanje. Zij mag zelf kiezen wat zij mee zal nemen om daar aan te trekken. Ina kiest één rok en vier truitjes. Zij denkt dat zij daar genoeg aan heeft.

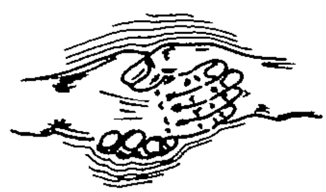
- Haar broer Geert zegt dat zij nu maar vier mogelijkheden heeft om zich aan te kleden in Spanje en onderweg.

  Heeft hij gelijk of niet?
  Vertel er wel bij hoe je aan je antwoord bent gekomen.

- Stiekum heeft moeder nog een ekstra rokje in de koffer van Ina gedaan. Maakt dit nog enig verschil wat betreft de mogelijkheden voor kleden van Ina? Verklaar je antwoord.

2. *Het afscheid*

Naast de familie Jansen wonen mevrouw en meneer Geurtsen. Bij het vertrek van de Jansens (6 personen) geeft men elkaar de hand en wenst men elkaar een fijne tijd toe.



- Hoe vaak worden er handen geschud?
- Hoe kom je aan het antwoord?

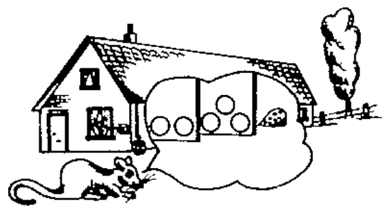
- Verzin nu zelf iets bij het 'handen schudden' zodat de som moeilijker wordt, maar zet er dan wel even bij hoe je het moet uitrekenen.

WERKKAART 4 **KIEZEN MAAR . . .**

Uit de volgende opgaven kun je kiezen zoals je zelf wilt

❶ *Als de katten van huis zijn, ...!*

Nu de familie Jansen van huis is, hebben de muizen vrij spel in het lege huis. Jammer voor die muizen is echter dat de Jansens alle deuren hebben dichtgedaan. Ze kunnen dus alleen maar gebruik maken van de gaten die ze zelf hebben geknaagd. Zo ziet het er uit:



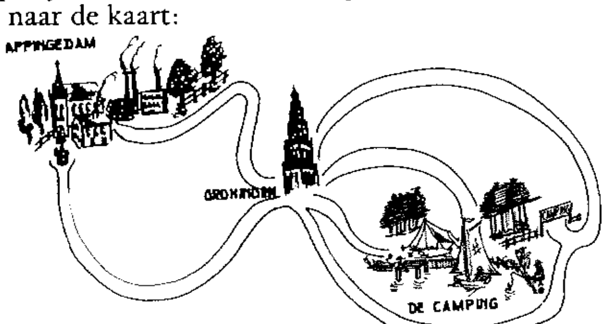
▸ Op hoeveel manieren kan de muis het stukje kaas bereiken?

▸ Hoe kom je aan het antwoord?

▸ Kun je er ook een schema van maken? Zet het hieronder!

❷ *De reisroete*

Vader heeft op zijn autorit naar de camping de keuze uit verschillende wegen. Kijk maar eens naar de kaart:



▸ Op hoeveel manieren kan vader naar de camping rijden?

▸ Maak er een schema bij, waaraan we kunnen zien hoe je het zo precies weet.

ERVARINGEN

Het bleek dat veel leerlingen – bij de eerste versie van de lessen – moeite hadden de stap te maken van de in het toneelstukje genoemde reisdoelen naar de opdracht om vader Jansen mee te helpen. (werkblad 2)

De opdracht was zeer ruim gesteld; door de onderwijzer werd ook geen verdere informatie toegevoegd.[1])

De leerlingen mochten de opdracht in groepjes van twee maken.

Zeven van de zestien groepen slaagden erin het antwoord te vinden.

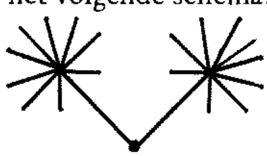
Er werden diverse oplossingsmetoden door de leerlingen gehanteerd.

Een korte opsomming:

- Een van de groepen schreef

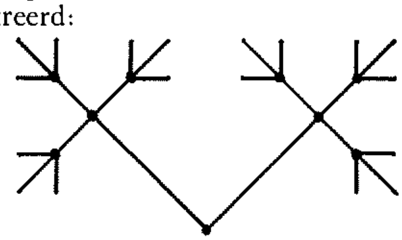
  'Wij hebben eerst bij weg 1 gekeken (vanaf de camping, A.B.) en we kunnen op negen manieren naar Nijmegen. Bij weg 2 ook negen manieren. 9 + 9 = 18.'

  Bij enkele groepen was dit verhaal uitgebreid met het volgende schema:

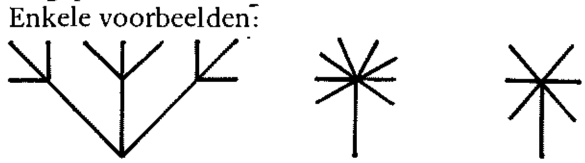


Opmerking: de leerlingen hadden reeds bij de lessen studerend-lezen kennis gemaakt met het begrip schema.

- Een groep had bovenstaand verhaal als volgt geïllustreerd:



- Er waren ook groepen waar een schema werd toegepast dat tot een fout antwoord leidde. Enkele voorbeelden:



- Een andere groep ging de verschillende wegen kleuren. De wegen werden dan geteld.
  Bij een gesprek met dit groepje bleek dat de leerlingen de tekening wel wat onoverzichtelijk vonden.

- Twee groepen gingen de wegen tussen twee steden op het stencil nummeren. Daarna noteerde men de wegen onder elkaar:
  we hebben weg 1 genomen; van weg 1 naar weg 3; van weg 3 naar weg 6;
  we hebben weg 1 genomen; van weg 1 naar weg 3; van weg 3 naar weg 7;
  we hebben weg 1 genomen; van weg 1 naar weg 3; van weg 3 naar weg 8;
  we hebben weg 1 genomen; van weg 1 naar weg 4; van weg 4 naar weg 6;
  enz.

  U ziet dat het probleem door de leerlingen zeer systematisch is benaderd.

- 'We hebben 2 x 3 x 3 = 6 x 3 = 18 wegen.
  Wij hebben de eerste wegen allebei in drieën gesplitst en daar kwam 6 uit. Die zes wegen hebben wij alle zes in drieën gesplitst en toen kwam het antwoord: 18.'
  Het geheel werd geïllustreerd met een schema.

Samenvatting

Als we naar het resultaat van deze eerste les kijken, dan kan gekonstateerd worden dat het sukses niet zo groot was. Het aangeboden probleem – op werkblad 2 – was voor veel leerlingen te kompleks. Daarom werd een tweede versie gemaakt. De opdrachten werden nu meer gedetailleerd gesteld.

De nabespreking die aan het einde van de eerste les in juni werd gehouden, bleef gehandhaafd. De opdrachten op de volgende twee werkbladen lieten geen moeilijkheden bij de leerlingen zien.

Opvallend was wel dat de leerlingen de *oplossingsmetoden* die ter sprake waren gekomen in de nabespreking van de eerste les, hadden overgenomen.

De ervaringen die werden opgedaan tijdens de tweede les, gaven geen aanleiding veranderingen aan te brengen in de presentatie van de les en in de uitvoering van de werkbladen.

---

[1]) In de eerste versie was de opdracht van werkblad 2 als volgt geformuleerd:

> 'Help vader Jansen even mee. De arme man kan er niet uitkomen.
> Antwoord: ik meen dat men op . . . . . manieren van de camping naar Nijmegen kan komen.
> (Schrijf achter op dit papier hoe je aan het antwoord bent gekomen.)'

De in dit artikel gepresenteerde werkbladen hebben allemaal een eerste revisie ondergaan.

4.4 BREUKEN BREKEN JE DE NEK

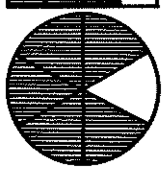
PIERRE KNOPS

Welke basisstof voor breuken bezitten onze mavo-brugklassers?
Om dit te onderzoeken gebruikten we no 7 en no 8 van de Schiedamse Reken Test (S.R.T.). Onze keuze viel hierop omdat deze test gemakkelijk door de onderwijzer zelf kan worden afgenomen. Ter illustratie geven we van elk testonderdeel twee voorbeelden.

Test 7

7.1 Elementair begrip (6 opgaven):

$= \frac{\cdot}{\cdot}$ deel



$= \frac{\cdot}{\cdot}$ deel

7.2 Het begrip 'deel van' in de vorm van een breuk (10 opgaven):

$\frac{1}{2}$ van 4 = ..

$\frac{1}{10}$ van .. = 1

7.3 Herleiden van breuken tot een geheel getal en omgekeerd (10 opgaven):

$3 = \frac{\cdot}{4}$

$.. = \frac{27}{9}$

7.4 Vereenvoudigen van breuken (10 opgaven):

$\frac{3}{9} = \frac{\cdot}{\cdot}$

$\frac{18}{36} = \frac{\cdot}{\cdot}$

7.5 Het 'aanbreken van' en het 'herleiden tot' eenheden (10 opgaven):

$1\frac{\cdot}{\cdot} = \frac{5}{3}$

$4\frac{1}{3} = \frac{\cdot}{3}$

Test 8

8.1 Optellen en aftrekken van gelijknamige breuken (10 opgaven):

$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = ..$

$4\frac{3}{5} - 1\frac{2}{5} = ..$

8.2 Optellen en aftrekken van gelijknamige breuken, met vinden van de eenheden (10 opgaven):

$4\frac{2}{5} + 1\frac{4}{5} = ..$

$10\frac{3}{6} - 9\frac{4}{6} = ..$

8.3 Optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken (10 opgaven):

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{\cdot}{\cdot} + \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\cdot}{\cdot}$

$2\frac{1}{3} - \frac{4}{7} = \frac{\cdot}{\cdot} - \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\cdot}{\cdot}$

8.4 Vermenigvuldigen met breuken (10 opgaven):

$3 \times 2\frac{3}{4} = \frac{\cdot}{\cdot}$

$3\frac{2}{7} \times 1\frac{2}{5} = \frac{\cdot}{\cdot}$

8.5 Delen met breuken (10 opgaven):

$8 : 5 = \frac{\cdot}{\cdot}$

$3\frac{1}{5} : 1\frac{3}{5} = \frac{\cdot}{\cdot}$

testblad	klas[1])	aantal leerlingen dat een fout maakt op een onderdeel										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7.1	A	24	5	2								
	B	25	4									
7.2	A	20	4	1		1	1					4
	B	17	2	1		2			2	1	3	1
7.3	A	7	7	9	5	2		1				
	B	8	10	9	2							
7.4	A	21	7	1	1	1						
	B	18	8	1	1			1				
7.5	A	23	3	1			2	1			1	
	B	18	10	1								
8.1	A			1	3	15	9	2	1			
	B				1	20	5	2		1		
8.2	A	3	3	14	7	2			1	1		
	B	2	5	5	7	8	1		1			
8.3	A	5	7	4	5	3	4	2		1		
	B	1	3	7	7	2	2	1		2	3	1
8.4	A		6	6	2	6	4	4	1	1	1	
	B	1	2	3	5	3	6	3	3	2	1	
8.5	A		2	1	4	3	4	7		3	1	6
	B		1		3	2	1	8	4	4	4	2

Konklusies

* Testblad 7 blijkt door de meeste leerlingen voldoende beheerst te worden.
* Van testblad 8 wordt alleen 8.2 voldoende beheerst (en slechts door één klas).
* Opmerkelijk is het grote verschil in prestaties op testblad 7 en 8.
* De meeste van onze mavo-brugklassers bereiken een klassikale beheersing van 4b (tweede deel van het 4^{e} leerjaar basisschool).

Vraag

Zou het verschil niet veroorzaakt kunnen zijn door het gebruik van verschillende rekenmetoden op de basisschool?

[1]) De test werden afgenomen in twee brugklassen (A, B) met respektievelijk 31 en 29 leerlingen.

4.5 BREUKEN TOCH MAAR HANDHAVEN?

F.F.J. GAILLARD

RESULTATEN VAN EEN ENQUÊTE IN DE REGIO BREDA

Tijdens de eerste jaargang van dit Bulletin zijn twee variabele blokken gewijd aan het breuken-onderwijs.
Vragen naar wensen en meningen binnen het voortgezet onderwijs werden herhaaldelijk gesteld. We kregen wel informatie vanuit het avo, maar van het lager beroepsonderwijs hoorden we weinig.
Kollega Gaillard van de katholieke technische school 'De blauwe kei' te Breda en voorzitter van de werkgroep Breda van het projekt 'lbo' heeft toen aangeboden om via een enquête na te gaan welke opvattingen omtrent het breuken-onderwijs docenten aan lagere technische scholen hebben. Enquêteformulieren werden vervolgens verstuurd naar technische scholen in Breda, Oosterhout, Geertruidenberg, Dongen, Waalwijk en Etten.

De enquêtevragen en de resultaten – 178 formulieren werden geretoerneerd – geven we gaarne weer. De redaktie is erg benieuwd naar reakties van lezers op de door de docenten genoemde argumenten.

Breukenenquête

A: leraren die les geven in algemene vakken (waaronder natuur- en scheikunde)
P: leraren die les geven in praktische vakken (waaronder tekenen en teoretisch technische vakken)

▸ Vraag 2a: Is het voor leerlingen van het l.t.o. noodzakelijk bekend te zijn met breuken?

	ja	nee	geen mening	totaal
A:	58	6	2	66
P:	107	4	1	112

▸ Vraag 2b: Is het voor leerlingen van het l.t.o. noodzakelijk bekend te zijn met decimale getallen?

	ja	nee	geen mening	totaal
A:	64	1	1	66
P:	106	3	3	112

▸ Vraag 3: Kunnen we er mee volstaan de leerlingen te leren om uitsluitend met decimale getallen te werken?

	ja	nee	geen mening	totaal
A:	14	48	4	66
P:	15	94	3	112

Argumenten van groep A
Breuken moeten aangeleerd worden omdat
- het dagelijks leven dat eist ($\frac{1}{2}$ pond, kwartaal, $6\frac{3}{4}$% rente, $\frac{1}{8}$ deel van de wereldbevolking),
- men er beroepsmatig mee te maken krijgt (hout- en metaalboren en schroeven worden met breuken aangeduid),
- breuken zijn duidelijker dan decimale getallen omdat ze konkreter voor te stellen zijn,
- men in de muziekles moet weten wat halve en kwart noten zijn en een $\frac{3}{4}$ maat,
- men in de gymnastiekles moet weten wat een halve of een kwart draai is.

Argumenten van groep P
Breuken moeten aangeleerd worden omdat
- men in de techniek niet buiten breuken kan,
- er met breuken gemakkelijker te werken valt en sneller (dit antwoord is vaak gegeven),
- breuken onmisbaar zijn bij de berekening van snelheden, tandwieloverbrenging, druk op zuigers, afstanden van knooppunten in staalkonstrukties, metingen in passingstelsels,
- automonteurs moeten kunnen werken met fabrieksgegevens als afstelgegevens, afmetingen, druk, koppels (bijvoorbeeld $\frac{1}{16}$", $\frac{1}{64}$"),
- de receptuur – horeca-afdeling – altijd in breuken staat (bijvoorbeeld het maken van cocktails),
- men nauwkeuriger werken kan met breuken,

- breuken nodig zijn bij het draadsnijden (bijvoorbeeld $\frac{3}{8}$),
- een pen en gat-verbinding bijvoorbeeld op $\frac{1}{3}$ afgeschreven moet worden,
- handelsmaten van gas- en stoompijpen in breuken gegeven worden,
- handelsmaten van hout in breuken gegeven worden (bijvoorbeeld vijfkwartshout, $\frac{1}{4}$" beitel),
- typografische maten van het twaalfdelig stelsel in het tiendelig stelsel moeten worden omgezet.

▶ Vraag 4: Welke van de volgende bewerkingen met breuken acht u noodzakelijk?

	ja	nee	geen mening	totaal
optellen				
A:	56	5	5	66
P:	98	8	6	112
aftrekken				
A:	56	5	5	66
P:	98	8	6	112
vermenigvuldigen				
A:	50	9	7	66
P:	97	8	7	112
delen				
A:	43	15	8	66
P:	90	14	8	112
machtsverheffen				
A:	15	43	8	66
P:	31	73	8	112
worteltrekken				
A:	16	42	8	66
P:	27	76	9	112

▶ Vraag 5: Kunt u voorbeelden geven uit uw vakrichting?

Door groep A gegeven voorbeelden
- rente $7\frac{3}{4}$% berekenen,
- radslag $2 \times \frac{1}{4}$ draai (gymnastiek),
- $1\frac{2}{3} \times 6$,
- tijd aflezen op een stopwatch.

Door groep P gegeven voorbeelden
- $\frac{3}{4}m + 2m + \frac{5}{6}m$,
- overbrenging $D_1 \times n_1 = D_2 \times n_2$,
- bereken de vervangingsweerstand: $\frac{1}{R_v} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (dit voorbeeld wordt veel door leraren elektrotechniek gegeven),
- overbrengingsverhoudingen,
- tandwielberekeningen,
- aflezen van de schuifmaat,
- $\frac{3}{16}" - \frac{1}{8}" =$,
- lagenmaat bij metselwerk,
- breedte papierformaat is $21\frac{1}{2}$ augustijn, zetbreedte is $\frac{5}{8}$ van de papierbreedte, $\frac{5}{8} \times 21\frac{1}{2}$ augustijn = $13\frac{7}{16}$ augustijn, $\frac{7}{16} \times 12$ punten = $5\frac{1}{4}$ punt,
- schroevenmaten in duimen (bijvoorbeeld: $1\frac{1}{4}$").

▶ Vraag 6: Welke van de volgende bewerkingen met decimale getallen acht u noodzakelijk?

	ja	nee	geen mening	totaal
optellen				
A:	60	0	6	66
P:	105	0	7	112
aftrekken				
A:	60	0	6	66
P:	104	1	7	112
vermenigvuldigen				
A:	58	2	6	66
P:	104	1	7	112
delen				
A:	55	4	7	66
P:	99	6	7	112
machtsverheffen				
A:	23	32	11	66
P:	41	53	18	112
worteltrekken				
A:	24	31	11	66
P:	42	52	18	112

▶ Vraag 7: Kunt u voorbeelden geven uit uw vakrichting?

Weinig voorbeelden worden genoemd.

▶ Vraag 8: Opmerkingen

De opmerkingen komen — bijeen genomen — neer op:

breuken komen in de praktijk voor, dus handhaven; probeer er op een prettige manier les in te geven, stel de stof konkreet voor en laat alle ballast weg; denk bij het bepalen van de leerstof ook aan mogelijkheden voor verdere studie; vergeet de procent-berekeningen niet; zorg dat ze de tafels van vermenigvuldiging kennen; hoofdrekenen is zeer belangrijk vooral voor kelners.

4.6 VAN DIEREN NAAR DE GETALLENLIJN

MEJ. S.A. VERSTEEG

Wiskunde is een middel om de werkelijkheid te beschrijven, wordt in het kader van het Wiskobasprojekt vaak gesteld.
Die 'beschrijving' is dan een proces, waarbij men de werkelijkheid vanuit een spesifieke – matematische – gezichtshoek bekijkt, uiteraard om er beter van te worden.
Zo is het weergeven van een groot aantal waarnemingen in een tabel of grafiek, een spesifieke manier van beschrijven van die waarnemingen om er meer regelmaat, meer orde in te scheppen. Een typisch matematische aktiviteit!
Dergelijke matematiseringsprocessen voltrekken zich in het onderwijs op vele nivo's; ze vertonen vele aspekten.
Eén van die aspekten nu is het feit, dat je er überhaupt aan begint ...! Er moet een motief zijn om met deze spesifieke matematische bril de werkelijkheid te beschouwen.
Voor het onderwijs betekent dit, dat we de leerlingen vanuit een hun motiverende, konkrete situatie, onopvallend moeten konfronteren met deze 'bril'.
Door een groot aantal, gevarieerde ervaringen moeten ze ingroeien in de spesifieke benaderingswijze, in de 'taal' die de wiskunde spreekt. (Zoals ook het verkeer, de muziek, de sport, etc. zijn spesifieke benaderingswijze kent, zijn spesifieke taal spreekt.)

Onderstaand lesverslag van Mej. Versteeg is o.i. een voortreffelijk voorbeeld van een dergelijk, onopvallend 'ingroeiingsproces'.
De kinderen zijn en blijven gemotiveerd. Zij bepalen vorm en tempo, waarin het matematiseringsproces zich – stap voor stap – voltrekt. De onderwijzeres geeft hier leiding aan door op het geschikte moment de probleemsituatie steeds verder toe te spitsen. Terzijde ontdekt men in dit lesverslag hoe implisiet een groot aantal wiskundige ervaringen wordt 'meegenomen' en aanleiding kan zijn voor een vervolg.

Tijdens een kringgesprek over dieren die de kinderen op een boerderij hadden gezien, vroeg ik: 'wie van jullie heeft thuis ook een dier; vertel daar eens wat van.'
Alle kinderen hadden hier wel iets over te zeggen, dus.... het werd een langdurig gesprek.
Aan het eind vroeg ik daarom aan een van de kinderen: 'weet jij nu nog wat Monique vertelde?'
'Nee.'
Een ander kind meldde prompt: 'maar ik weet het nog wel.'
'Nou dat is fijn, maar weet jij dan nog wel wat Esther vertelde?'
'Nee, dat niet meer.'

Zo ontstond het eerste probleem:

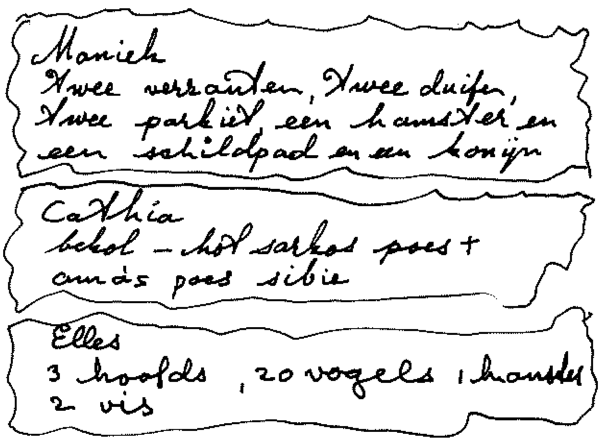
Wat moeten we doen om het vertelde niet te vergeten?

De oplossing die onmiddellijk uit de kring kwam was: 'alles op het bord schrijven.'
Na elkaar kwamen er nu vijf kinderen voor het bord die uitgebreid opschreven wat ze zo thuis aan dieren bezaten. En dat was niet weinig.
Rikky: vis kip poes
Astrid: drie honden
Harm: 2 grooten koenijnen en 4 jongen koenijnen en 20 wogels en 4 vissen.
enz.
Intussen hield ik de tijd in de gaten. Het duurde al tien minuten. En dat toekijken en stilzitten begon een aantal kinderen te verve-

len. Zo kwamen we aan de vraag: 'hoe lang gaat dit duren?' Er waren nog vier groepen die elk wel evenveel tijd nodig zouden hebben. Het zou voor de hele klas wel komen op wat Bart intussen op het bord schreef: 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50 (minuten). Dus wel een uur!
In elk geval veel te lang, zowel voor mij als voor de kinderen.
Bovendien zou het bord ook wel te klein zijn; het was immers al meer dan half vol.
Alles op het bord schrijven was dus toch niet zo'n best idee.
'Wat dan wel?'
Cathia kwam onmiddellijk met:
'Blaadjes uitdelen en dan allemaal tegelijk opschrijven.'

. . . .

De oogst bestond uit 25 blaadjes waarop de kinderen geschreven hadden hun naam en hoeveel en wat voor dieren, of hun naam en geen dieren.



Het eerste probleem was nu opgelost. Om te weten wat voor dieren Esther had, hoefden we alleen maar haar briefje op te zoeken.

Toen vroeg ik — tweede probleem —:

> *Kunnen we nu net zo makkelijk te weten komen hoeveel honden of poezen we allemaal bij elkaar hebben?*

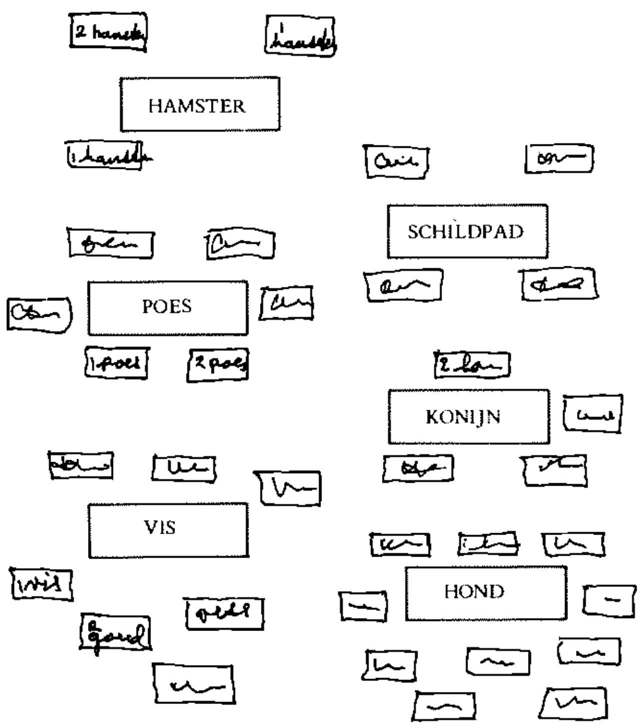
Oh ja, dat was geen moeilijkheid. Gewoon alle briefjes met de honden bij elkaar doen, dan de poezen, enz.
Goed, de briefjes werden weer teruggegeven. En de kinderen konden bij Ralph hun honden brengen, bij Jeroen de vogels, de vissen bij Elles, enz.

Geen probleem voor Bastiaan met een hond, voor Esther met een poes, voor Astrid met drie honden. Maar toen kwam Jeroen met een briefje waarop stond '20 vogels, 1 papegaai en vissen'.
Waar moest hij zijn briefje brengen?
Bij zijn eigen stapeltje vogels of bij Ellis?
En wat moest Cathia met haar poezen en honden?
En Moniek met haar dierentuin?
Het kon zo niet.
De oplossing kwam snel: 'voor iedere soort dier een apart blaadje'.

. . . .

Nieuwe blaadjes werden uitgedeeld en wie meer dan één blaadje nodig had kon dat pakken.
Nu kwam elke soort op een apart blaadje en konden alle honden gebracht worden bij Ralph, de vogels bij Jeroen, de cavia's bij Nikky, enz.
Het tweede probleem was nu makkelijk op te lossen. Je hoefde alleen maar het stapeltje bij Ralph te pakken en goed te lezen en dan kon je de honden tellen.

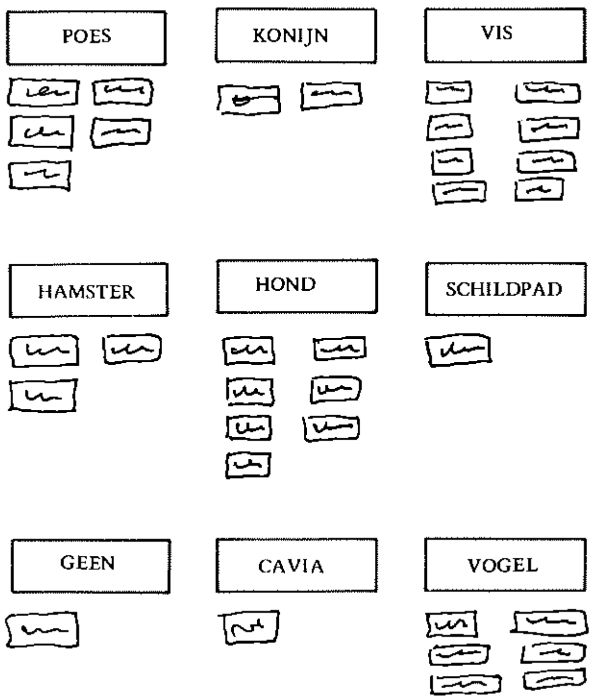
Om alles beter zichtbaar te maken heb ik de briefjes op het flanelbord geplakt rondom een kaartje met de naam van het dier:



Toen kwam het derde probleem:

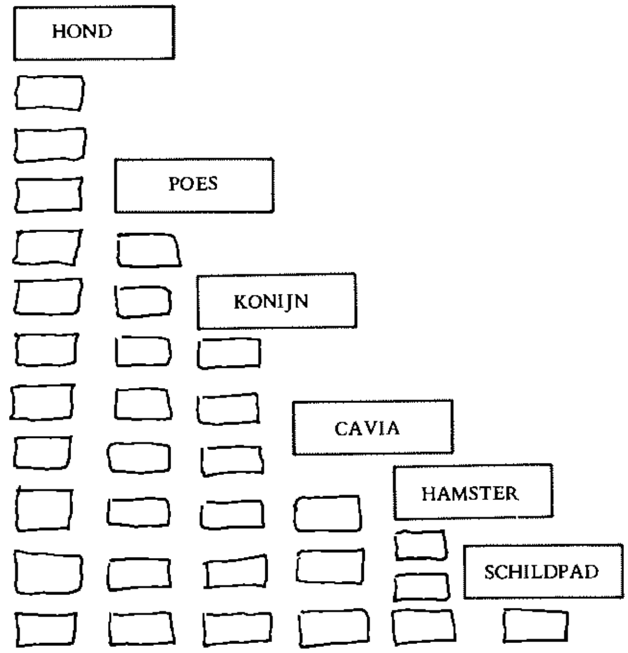
Kun je nu makkelijk zien hoeveel hamsters er zijn?
Zijn er meer honden dan poezen?

Het antwoord was: 'het moet anders worden opgeplakt, op een rijtje.'
'Doe het maar. Laat eens zien!'



Opnieuw werd de vraag gesteld: 'hoeveel hamsters?'
Een kind telt: 'één, twee, drie blaadjes, dus drie hamsters.'
'En hoeveel cavia's?'
'Eén blaadje dus één cavia.'
'Kon 'es hier en bekijk het eens van dichtbij. Hoeveel cavia's?'
'Drie, er staat drie op het blaadje.'
'Zijn er meer hamsters of meer cavia's?'
'Evenveel.'
'Kun je dat ook makkelijk zien op het bord?'
'Nee.'
'Wat kunnen we daaraan doen? Bekijk het eens en denk er over na.'
Het duurde niet lang of het antwoord kwam: 'voor elk dier moet een apart blaadje komen.'
En zo gebeurde.

Op het bord kwam nu:



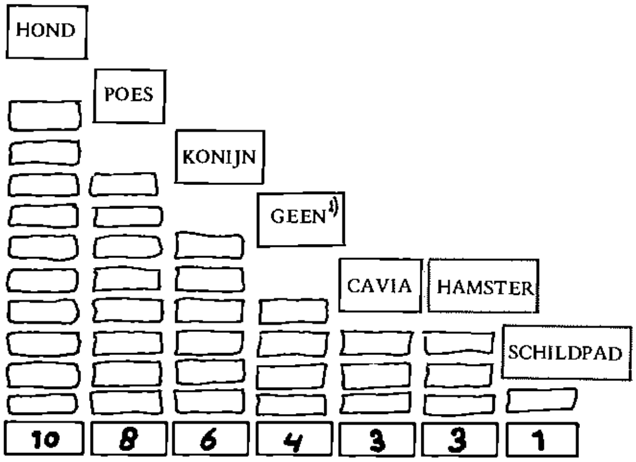
(De vissen en vogels heb ik er uitgehaald vanwege het grote aantal, nl. 49 en 82).
Het werd 'net een trapje'.
Op de blaadjes stonden nu ook geen woorden meer, maar een tekeningetje van het betreffende dier. Het aantal, 'meer', 'minder' en 'evenveel' was vervolgens gemakkelijk van het flanelbord af te lezen.

Zover mogelijk van het flanelbord vandaan staand, vroeg ik aan een kind dat er even ver van af was:

Kun je hier vandaan nou echt gemakkelijk zien hoeveel honden er op het bord staan?
(vierde probleem)

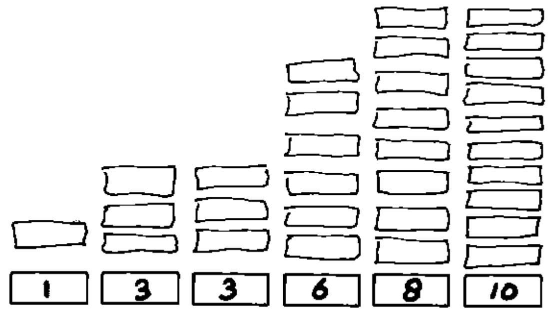
'Nou, nee eigenlijk niet zo goed.'
'Het is niet duidelijk te zien.'
'Wat kunnen we er dan nog meer aan doen?'
'Er dichterbij gaan zitten.'
'Grotere kaartjes maken.'
De eerste oplossing is niet goed, want we willen het juist hier vandaan kunnen zien.
Grotere kaartjes is veel te veel werk.
'Wat dan wel? Denken jullie er maar even over na, dan vinden jullie het wel.'
Het duurde vrij lang voor Jeroen riep: 'er een nummer bijzetten.'
'Ja', zei toen Monique 'cijfers'.

Het flanelbord kwam er nu als volgt uit te zien:

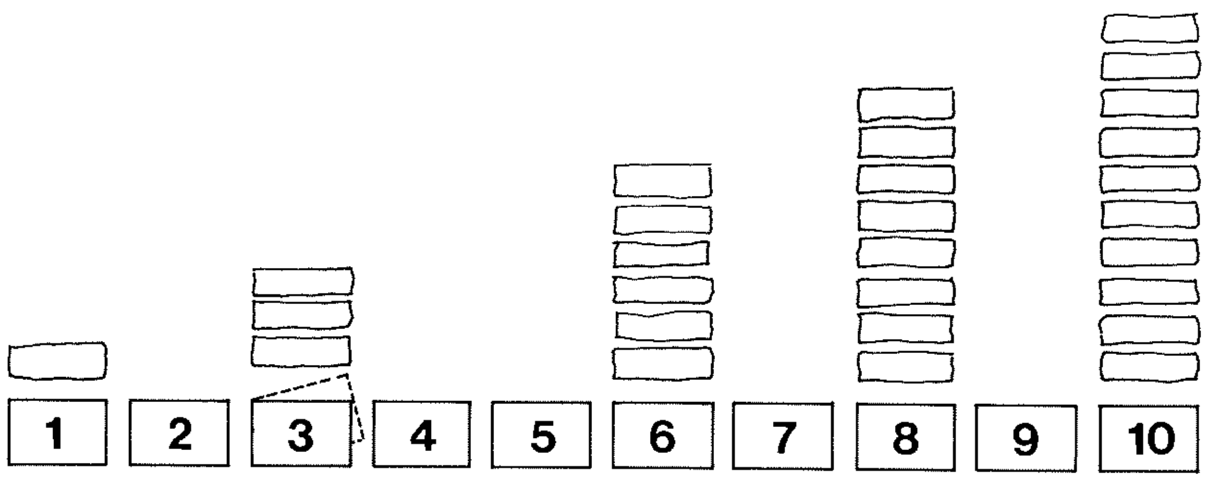


Het volgende probleem (het vijfde) was nu:
Kan het toch nog anders?

Bart kwam met de oplossing: 'de rijtjes andersom plakken.'
'Doe dat maar.'



Onmiddellijk barstte de kritiek los: 'de acht was evenveel, evenlang als de tien'.
Dit werd veranderd.
'Wie zier er nog wat aan? Is het zo helemaal in orde? Kan er nog wat aan veranderen?'
Eén van de kinderen zei toen: 'er is geen twee bij.'
En toen zagen ze het allemaal: geen twee, geen vier, geen vijf, geen zeven, geen negen.
Dat hoort er nog tussen. Het moet niet zo dicht naast elkaar.
Zo ontstond een getallenlijn:



Het ene kaartje met 'drie' gleed van het andere 'drie'-kaartje af. Die deed dus niet meer mee.

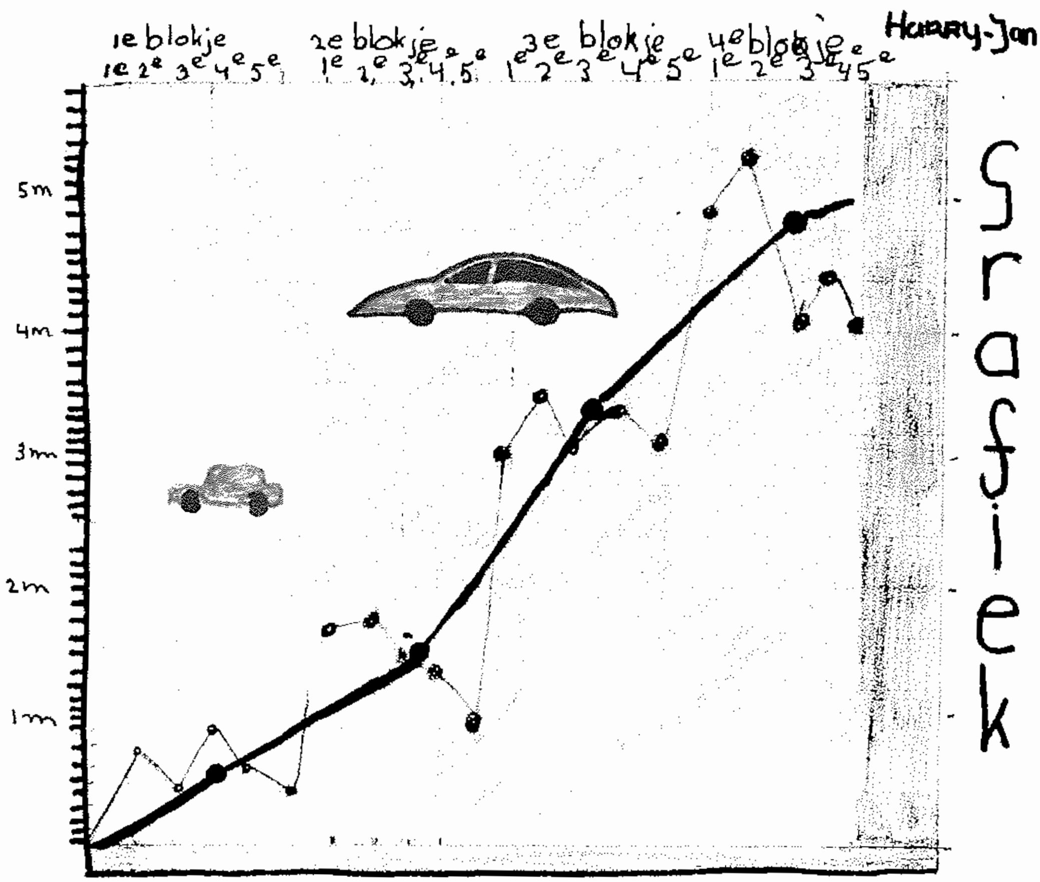
De getallenlijn werd vervolgens op het zwarte bord overgenomen, zo lang mogelijk (tot 21).

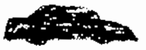
Ook in stukjes (10, 20, 30, enz.) op het klassikale rekenschuifbord. Optellingen en aftrekkingen tussen de 10 en de 20 werden nu gemaakt. Het bleek een heel eenvoudige zaak te zijn geworden: de dieren lopen naar links of naar rechts.

---

[1]) N.B.: in tegenstelling tot de overige kaartjes, die dieren representeren, verwijst de katègorie 'geen' in feite naar kinderen.
Het probleem diende zich pas op dit moment aan.
Na onderzoek bleken de kinderen er géén probleem in te zien, maar toch werd het kaartje 'voor de zuiverheid' in het vervolg uit de grafieken gelaten.

4.7 MEESTER Z'N ZOK



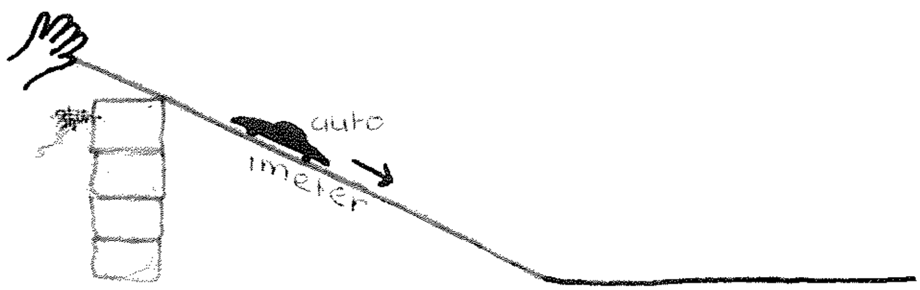
1e blokje hadden we vijf resultaten: 70cm – 47 cm – 95cm – 57 cm – 42 cm het gemiddelde was 62½ cm Deze proeven hebben we met 2 wagens gedaan een oranje die tamelyk wat sneller was dan de rode wagen. Dus de beste resultaten op het grafiek waren van de  oranje wagen. Het 2e blokje hebben deze resultaten: 162cm – 163 cm – 153cm – 151 cm – 100 cm. Het gemiddelde is 145 4/5 cm Uit deze resultaten blykt weer dat de

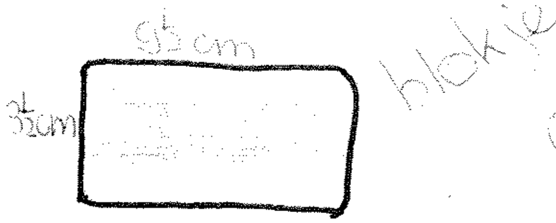
● = gemiddelde

Deelnemers aan de heroriënteringskursus te Leeuwarden lieten hun leerlingen meetopdrachten uitvoeren. We geven enkele opdrachten en resultaten weer.

❶ Hoe ver rijdt een auto van een plankje dat steunt op achtereenvolgens 1, 2, 3, 4 en 5 blokjes?

Oranje wagen sneller was Nu de resulta-
ten van 3 blokjes 300 cm _ 347 cm _ 300 cm
342 cm _ 300 cm, het gemiddelde is
$323\frac{4}{5}$ cm in deze proef was de oranje
wagen weer sneller
Nu 4 blokjes de resultaten zyn: 405
cm 530 cm _ 400 cm _ 440 cm _ 400 cm
451 cm is het gemiddelde. Het hoogste
wat met deze proeven is gehaald
is 530 cm dit werd met de oranje
wagen gereden





Onze groep
bestaat uit 4 leden
Simon Age Mario
en ikzelf Harry-Jan

¹) Docenten: Sj. van der Ploeg (wiskundige) en A. Bult (pedagoog).

❷ Schrijf 5 dingen op die je nooit met je vingertoppen zou meten? Schrijf erbij, waarom niet.
Enkele antwoorden van leerlingen uit een derde klas:

van Franeker naar Schalsem
Omdat het veel te end (ver) was
Van school tot mijn huis huis.
Van de deur (op) (het) tot de tunnel.
Van de tunnel naar Schalsem.
Van mijn plaat naar het schoolplein.

willy

poep omdat het zo stinkt.
een mug omdat je die nooit te pakken krijgt
een Cobra omdat die zo gevaarlijk is
een naar rome omdat het véél te ver is.
een egel omdat het te zeer doet.

afke

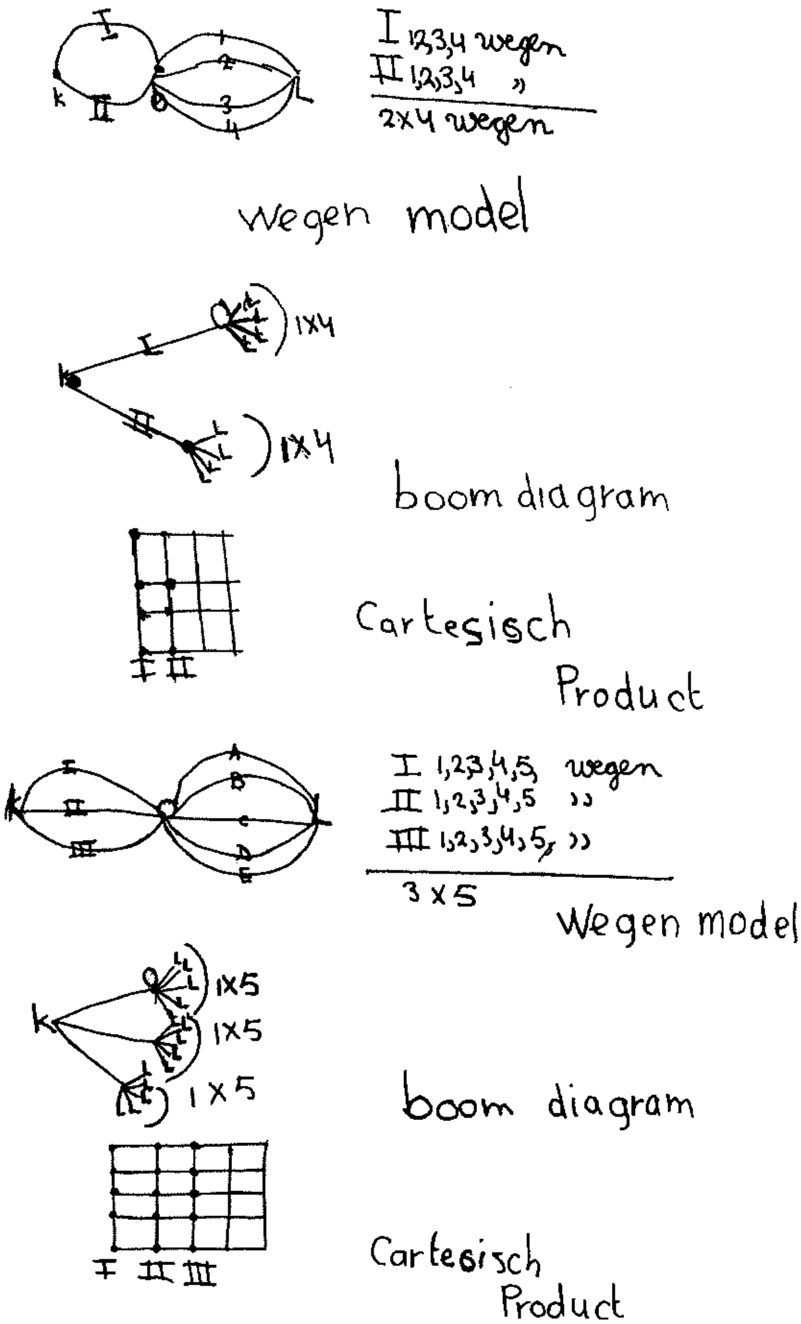
Een plank waar stront ~~on~~ opzit waarom
omdat ik dan viese vingers krijg
Een slang waar viese modder op zit
waarom omdat ik dan ook viese vingers krijg
Ik zouw mester zijn rok niet meten.
want dan krijg ik een pets om mijn hooft.
Ik zouw een vogel nooit meten want hij
vliegt dan weg
Ik zouw een slang nooit meten want
dan kan hij me wel bijten.

sierk

4.8 MODELLEN IN OUDWOUDE

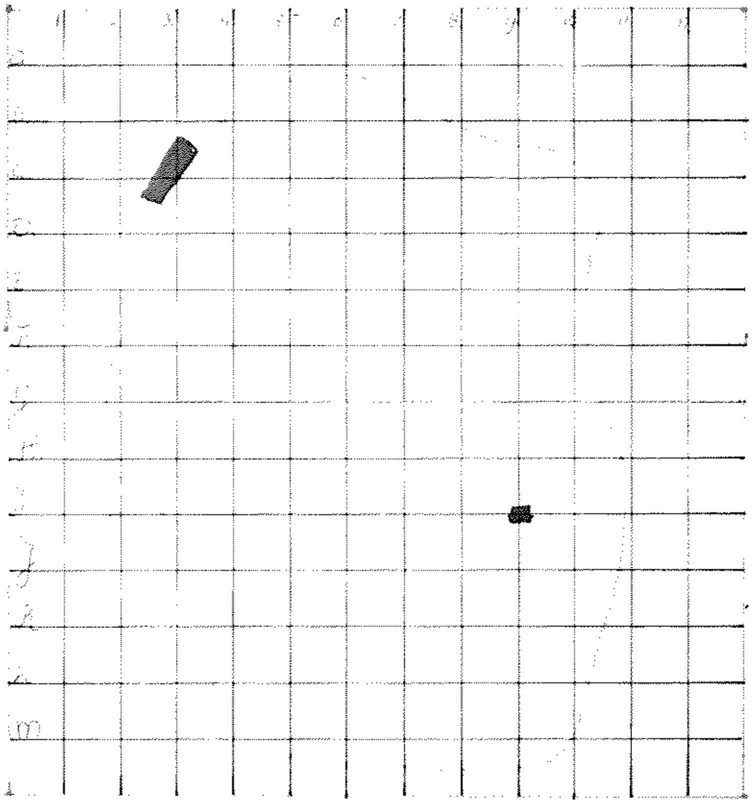
IDSKE DIJKSTRA

De kollega's van de openbare basisschool te Oudwoude volgen de heroriënteringskursus aan de Chr. Pedagogische Akademie 'Mariënburg' te Leeuwarden.[1] *De kinderen uit de derde klas tekenden 'modellen' op grote stukken papier. Het werk van Idske Dijkstra geven we hieronder weer:*



[1]) Docenten: Sj. van der Ploeg (wiskundige) en A. Bult (pedagoog).

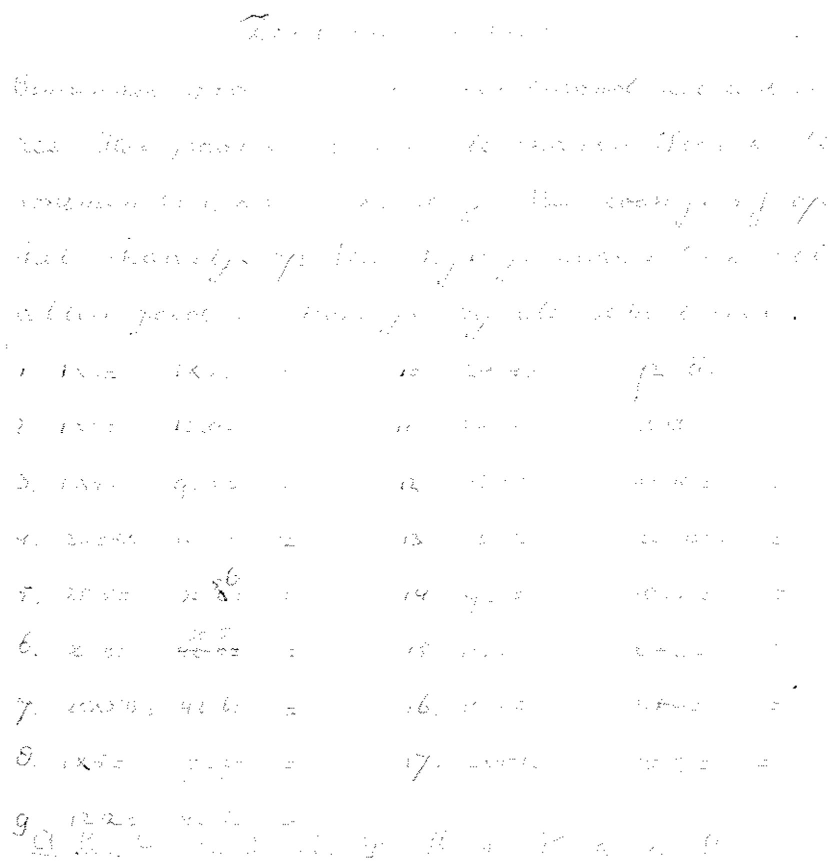
4.9 ZOEK DE SCHAT



MARJA BOEREMA

Beste redaktie,
hier bij deze enveloppe in zit een soort rekenspelletje. Je moet de sommetjes uitrekenen. Dan volg je alle nummers. Als alles goed is, kom je bij de schat uit. Ik heb het zelf bedacht. Mijn vader zei, dat ik het wel naar u toe kon sturen, om het te laten drukken in Wiskobas Bulletin. Het hoeft natuurlijk niet, maar ik zou het wel leuk vinden. Mijn vader krijgt ook altijd Wiskobas Bulletin. Ik lees daaruit wel eens Basje de jonge onderzoeker.

Marja Boerema
11 jaar, 5^{e} klas.



4.10 NOGMAALS HET SPIJKERBORD

Deelnemers aan de heroriënteringskursus te Eelde/Paterswolde[1]) hebben diverse 'Spijkerbord'-lessen gegeven. De ervaringen die in de verschillende leerjaren zijn opgedaan, lopen sterk uiteen We zijn erg benieuwd of uw ervaringen dezelfde zijn.

* * *

INTRODUKTIE SPIJKERBORD

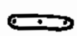
Klas 1

Materiaal : spijkerborden en elastiekjes
Doel : kinderen laten kennismaken met de spijkerborden
Tijdsduur les: ± $\frac{1}{2}$ uur.

Opdracht

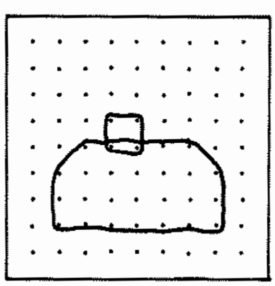
'Hier zijn spijkerborden en elastiekjes. Jullie mogen er een poosje mee gaan spelen'.

Het resultaat van deze opdracht bestond uit het maken van mozaïeken. De meeste kinderen spanden de elastiekjes van de ene spijker naar de andere:

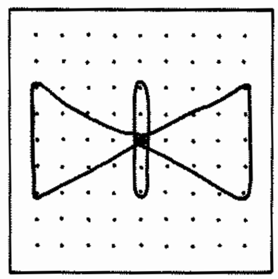


Vervolgens ontdekten de leerlingen dat de elastiekjes ook 'uit elkaar gehaald' konden worden:

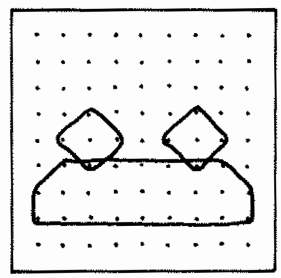
Allerlei meetkundige figuren werden zo gemaakt. In dit stadium verschenen de volgende voorstellingen op het spijkerbord:



'huis'



'vlinder'



'trein'

Maak ook: vogelhuisjes, boten en bloemen in de zon.

Spontaan gingen de kinderen met elkaar bespreken hoe de verschillende figuren gemaakt konden worden.

Na ongeveer twintig minuten wordt de kinderen een nieuwe opdracht verstrekt.

'Jullie moeten nu allemaal een boot gaan maken.'

Al spoedig bleek dat de leerlingen nog niet toe waren aan een dergelijke klassikale opdracht. Ze begonnen er wel allemaal aan, maar weldra fantaseerden ze weer een heel eigen figuur.

* * *

Klas 2

Tijdens de lessen werken de leerlingen in groepjes van 4. Elk groepje krijgt een spijkerbord en een aantal bruine elastiekjes.

---

[1]) Kursusleiders: Jaap Boerema (pedagoog) en Jille Eilander (wiskundige).

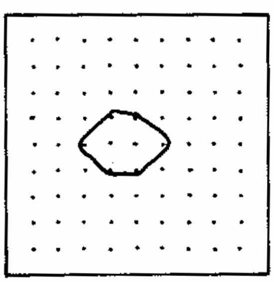
Eerste les
'Hier heb je een bord met spijkers en elastiekjes. Ga maar eens figuren maken op dat bord.'
De meeste leerlingen beginnen direkt met huisjes, later ontstaan ook mozaïekfiguurtjes.
'Maak nu eens deze paddestoel.'
Op het bord wordt de volgende figuur getekend:

'Mag het ook zo, juf?'

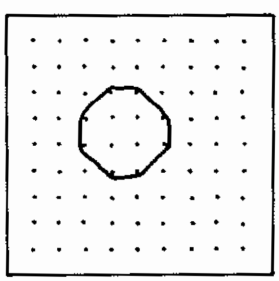
'Nee, dat is niet rond.'
'Nou, dan kan het niet, want een ronde, dat gaat niet.'
Juf vraagt om te maken: een zon, een bal, een gezicht, een lamp.
De klas reageert gemengd: het kan niet, het kan wel.
Na een kort gesprekje is de algemene konklusie: rond kan niet!

'Maak nu een zon, zoals die wordt op het spijkerbord. Eigenlijk dus geen echte zon.'
'Een spijkerbordzon', zegt een leerling.

'Jullie hebben de zon niet allemaal even groot; hoe kan dat?'
'Nou, je gebruikt meer of minder stukjes.'



'6 stukjes'



'8 stukjes'

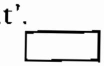
'Na bespreking van de begrippen 'stukjes', 'rechte stukjes' en 'schuine stukjes' maken de leerlingen opdrachten als: 'maak een figuur met 6 stukjes.'

Een tweede les (± 20 minuten) wordt begonnen met een korte herhaling.
De leerlingen moeten nu zelf figuren maken met zóveel 'rechte' en 'schuine' stukjes.
Dit blijkt erg moeilijk te zijn; de stukjes worden meestal niet goed geteld.

Gedurende *de derde les* (15 minuten) is aandacht besteed aan de 'hoeken'.
'Maak een figuur met 3, 4, 5, etc. hoeken.'
Probleem: is dit <——ook een hoek?

Bij de opdracht met 4 hoeken wordt direkt de figuur gemaakt.
'Hoe heet deze?'

Alle leerlingen weten de naam 'vierkant'.
Juf tekent een rechthoek op het bord:



'Waarom is dat geen vierkant?'
'De kanten zijn niet gelijk, juf.'

'Maak nu allemaal vierkanten van verschillende grootten op je spijkerbord.'
De leerlingen ontdekken veel mogelijkheden.

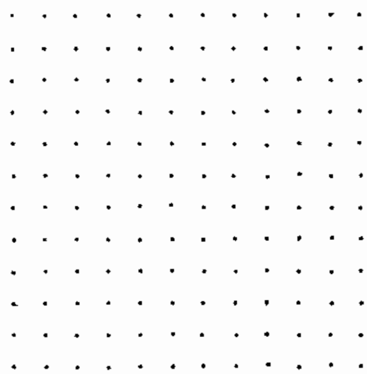
'Maak driehoeken met verschillende vormen.'
Ook hiervan worden diverse en originele oplossingen gevonden.

* * *

De foto's bij dit artikel zijn van Harm Jongsma.

OP WEG NAAR SYMMETRIE

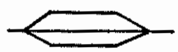
Van dezelfde kursus ontvingen wij een verslag van een tweetal lessen die door de Heer Joosten in een gekombineerde 4^e^ en 5^e^ klas (36 leerlingen) zijn gegeven.
Hij beeft zijn verslag in drie kolommen opgezet. Voor de lezers die bekend zijn met bet model 'Didaktische Analyse' een vertrouwd beeld.

EERSTE LES	MEETKUNDIGE FIGUREN	
Leerstof	Didaktische werkwijze	Verslag
Vierkant Rechthoek Vierhoek Driehoek	**Lesdoel:** de leerlingen moeten m.b.v. 'stippen-papier' (zie fig. 1) beschrijvende eigenschappen van deze figuren ontdekken en formuleren.  fig. 1	**Opmerking:** Toen deze lessen werden gegeven, waren de spijkerborden nog niet klaar, vandaar het stippenpapier.
Vierkant Rechthoek Vierhoek Driehoek	Deze woorden staan onder elkaar op het bord. Iedere leerling krijgt een vel papier. In groepjes van twee tekent ieder de figuur die bij het desbetreffende woord hoort. Je moet de figuur niet eerder tekenen voordat je het met elkaar eens bent.	Dit duurde ongeveer 10 minuten. Het grootste deel had de figuur juist. Het begrip 'rechthoek' leverde bij drie groepen verwarring op met 'een rechte hoek'.
	Klassegesprek over de gevonden figuren. Van enkele groepen worden de figuren naast de woorden getekend. Op- en aanmerkingen worden besproken. Het gaat erom dat ieder een goede meetkundige figuur krijgt in verband met de volgende lesfase.	Dit duurde ruim 5 minuten. Veel problemen waren er niet, daar de figuur in eerste instantie door bijna alle leerlingen goed getekend was. Bovendien kon hier niet te veel worden besproken, daar anders de volgende lesfase geen of nauwelijks zin meer zou hebben.

Eigenschappen formuleren van deze figuren	Schrijf op een 'kladblaadje' wat een vierkant, enz. is. Denk je daarbij in dat je een ander alleen maar mag vertellen wat een vierkant is. Probeer zo nauwkeurig mogelijk te zijn. Dit gebeurt weer in groepjes van twee.	Duur: bijna 15 minuten. Er ontstonden in de meeste groepen zeer geanimeerde diskussies. Vaak werden op het 'kladblaadje' nog allerlei figuren getekend om na te gaan of de formulering wel klopte.
Eigenschappen van de figuur formuleren	In een klassegesprek worden de gevonden eigenschappen geïnventariseerd en op het bord naast de figuren geschreven. De leerlingen noteren het op hun stippenpapier naast de meetkundige figuren.	Duur: ruim 10 minuten. Het vierkant gaf de meeste problemen. Al gauw werd gevonden dat de vier 'kanten' gelijk moesten zijn. Toen ik een ruit tekende, bleek dat er nog iets anders bij een vierkant gelijk moest zijn. Eerst door het stellen van gerichte vragen mijnerzijds ontdekte men dat het om de hoeken ging. Toen men eenmaal door had dat met behulp van 'kanten' en hoeken de figuren konden worden beschreven leverden de andere figuren niet meer zoveel problemen op.
Oppervlakte	Kleur de oppervlakte van deze figuur. Dit wordt gedaan om de leerlingen er nog eens op te wijzen dat allerlei soorten figuren oppervlakten hebben.	Deze herhaling van een bekend onderwerp leverde geen problemen op.

ALGEMENE OPMERKING:
Een geschikt onderwerp voor deze klas, waarbij bleek, dat 'het weten' (tekenen) hoe een figuur er uitziet, nog niet impliseert dat dit ook gemakkelijk te verwoorden is.

TWEEDE LES	SYMMETRIE	
Leerstof	Didaktische werkwijze	Verslag
	Lesdoel: de leerlingen moeten al doende figuren ontdekken die symmetrisch zijn ten opzichte van één as.	
Spiegel-as	Ieder groepje van twee leerlingen krijgt één vel stippenpapier, dat met één lijn	Dit duurde bijna 15 minuten, en werd met veel entoesiasme gedaan. Op

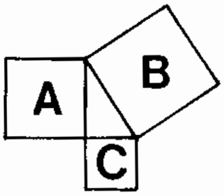
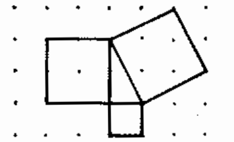
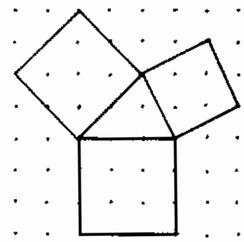
	middendoor wordt gedeeld. Bord:  Eén van de groep tekent links via de stippen 'n figuur; de 'buurman' mag niet kijken. Daarna tekent deze de figuur ernaast, terwijl de eerste kontroleert. Vervolgens omgekeerd.	den duur werd het een sport 'n zo ingewikkeld mogelijke figuur te verzinnen, waarbij al spoedig bleek, dat de schuine lijnen het moeilijkst waren.
	In een klassegesprek wordt over de opgedane ervaringen van gedachten gewisseld.	Dit duurde nauwelijks 5 minuten. De lijn, zo was de opmerking, deelt de figuur precies in gelijke helften.
Symmetrie-as	Bord:  We noemen dit een symmetrie-as. Knip nu uit een half tekenvel ongeveer vier figuren die symmetrisch zijn. Kontroleer door middel van vouwen of beide helften gelijk zijn. Zo ja, teken dan pas de symmetrie-as erin en plak de figuur op de achterkant van het stippenpapier.	Dit duurde 15 minuten. IJverig werd gezocht naar figuren. Enkele groepen ontdekten dat 'n rechthoek niet symmetrisch was volgens de diagonaal (zie les 1). Een vierde deel van de groepen vond na 'n tijdje dat je het blad veel eenvoudiger door midden kon vouwen, want dan was de figuur altijd symmetrisch. Dit werd gehonoreerd als 'n goede ontdekking. Ook werd gezegd dat 't ongeveer hetzelfde was als bij handenarbeid, waarbij spiegelfiguren waren gemaakt uit zwart-wit.

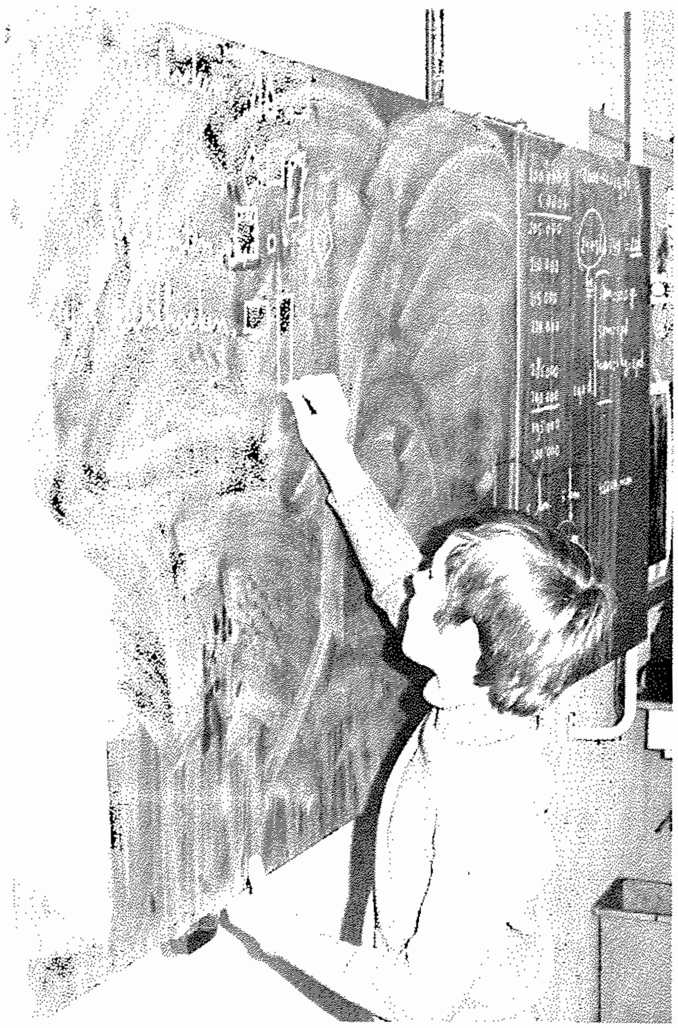
ALGEMENE OPMERKING:
Eveneens een geschikt onderwerp voor deze klas. De mogelijkheid tot zelfkontrole door middel van het knippen is zeer waardevol.

OPDRACHTKAARTEN EN EEN PRAKTIKUM IN KLAS 6

Ervaringen van de heer J. Teut

Inhoud	Vorm	Ervaringen
• Het maken van een spijkerfiguur met een bepaald aantal binnenspijkers en randspijkers. Bepalen van oppervlakte.	Allerlei voorbereidende oefeningen worden achtereenvolgens, of in een reeks, aan de leerlingen voorgelegd. Zelfontdekkende leervorm. De leerlingen werken twee aan twee met spijkerbord en gekleurde elastiekjes. De figuren worden op een 'stippenveld' ingetekend.	Dit onderdeel komt goed over. De leerlingen moeten eerst spelenderwijs de nodige ervaring opdoen. Ze werken met veel entoesiasme. Het zelf-doen en dan tot ontdekkingen komen, spreekt hen zeer aan. Erg stimulerend.
• Via het spiegelspel (kaart S 503)[1]) komt de symmetrie aan de orde. Daarna de kaarten S 504 en S 505. Vervolgens opgaven als: – het maken van een figuur met één of meer symmetrie-assen; – het aanwijzen van deze assen in diverse figuren; – een begin maken met 't ontdekken wat nu eigenlijk een vierkant, een rechthoek, een vierhoek, een driehoek, een ruit, een trapezium, een vlieger, is.	Als boven. De leerlingen moeten figuren maken op het spijkerbord. Het tekenen gebeurt op gekleurd papier, daarna uitknippen en vouwen.	Had in meerdere lessen behandeld moeten worden. Te veel leerstof in één keer.
• Praktikum Vanaf 79/9 wordt het praktikum doorgenomen.[2]) Relatie: randspijkers en binnenspijkers en oppervlakte van de figuur. $\frac{R-2}{2} + B =$ oppervlakte. Hierna moet iedere leerling de ander een figuur voorleggen en de oppervlakte laten berekenen.	Het praktikum wordt op het bord overgenomen. De leerlingen mogen zelfstandig doorwerken. De figuren steeds op 'stippenpapier' laten tekenen.	Het werken met dit praktikum verloopt uitstekend. Zeer goede opbouw van de stof, tot en met de blokformule.

• Stelling van Pythagoras. (kaarten S605 en S606)  Spijkerfiguur *maken* en *tekenen.* Bereken de oppervlakte van A, B en C (met de formule). Wat valt je op? enz.	Zelfontdekkende leervorm.	De leerlingen ontdekken de verschillen tussen de driehoeken in fig. 1  fig. 1 en fig. 2 niet direkt.  fig. 2 Een moeilijkheid is dat de leerlingen de schuine zijde zelf willen gaan berekenen ($\sqrt{\ }$). In onze klas hebben we het met diverse afmetingen bij benadering opgelost.



ALGEMEEN:
Het was mijn bedoeling, om met de voor ons liggende leerstof te eksperimenteren. Zoveel mogelijk doen, want alleen zo doe je ervaringen op. Over het algemeen lijkt mij het gebodene zeer goed bruikbaar, *een goede basis om zelf met eigen ideeën op voort te bouwen.*

---

[1]) Deze kaarten behoren bij het blok 'Het Spijkerbord' en zijn bij het IOWO verkrijgbaar à *f* 2,—.

[2]) Praktikum 'Spijkers en Oppervlakte'.

WIST U 2

– dat een kollega uit Middelburg ons opmerkzaam maakte op het volgende sommetje:

$\frac{2}{5} : \frac{5}{12} \times \frac{1}{2} : 1\frac{1}{15} - \frac{12}{25} \times (1\frac{2}{5} \times \frac{4}{15})$,

– dat leerlingen uit een eerste klas van een mavo-school deze opgave moesten oplossen (in 1973!),

– dat in de schooltoetsen in nederland anno 1973 van dit soort opgaven geen sprake meer is,

– dat het antwoord van het sommetje helemaal niet zo eenvoudig te vinden is,

– dat we erg benieuwd zijn of de genoemde opgave meer regel dan uitzondering is in het voortgezet onderwijs.

WIST U 3

– dat een kollega uit Baarn ons attent maakte op een berichtje in 'De Margriet'

– dat we het eens zijn met de redaktionele opmerking 'Petje af...'

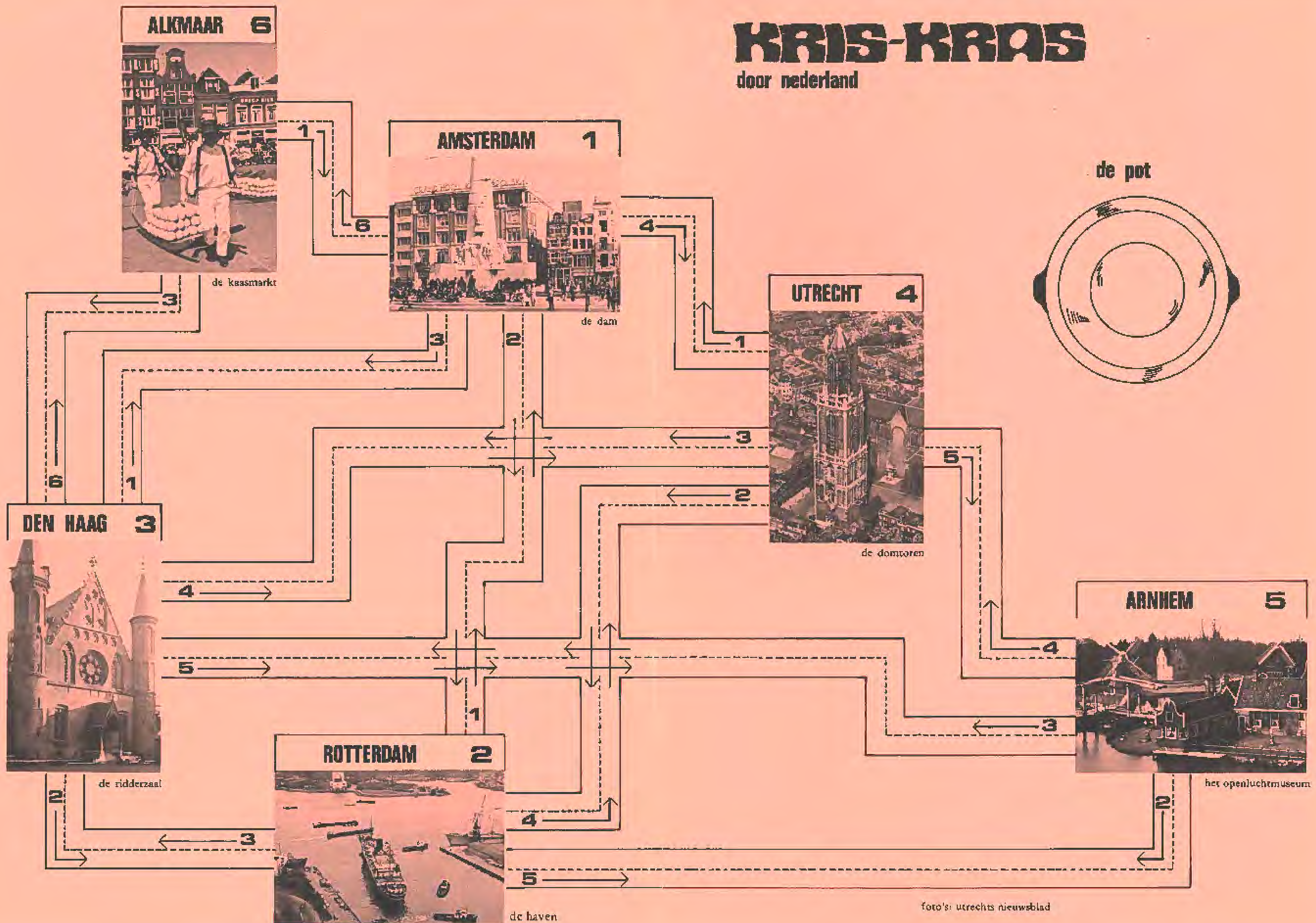
MARGRIET-SOMMETJE

We hebben in de rekenles over oppervlakte Margriet eens nagemeten. We wilden uitrekenen hoeveel ruimte er voor tekst gebruikt was en voor foto's en voor reclame. Na heel veel meten en rekenen hebben we dit gevonden. De totale oppervlakte van een Margriet was 68.120 cm^2.
Daarvan was voor de tekst gebruikt 22.953 cm^2, voor de foto's en tekeningen 26.439 cm^2 en voor reclame 11.384 cm^2.
Toen hebben we ook nog uitgerekend dat dan nog 7.344 cm^2 leeg waren.
We hebben het ook nog in procenten uitgerekend. We vonden: tekst 34%, foto's en tekeningen 39%, reclame 17% en leeg 10% en dat was samen 100%. Misschien vindt U het leuk om dit eens te weten en wij zouden het wel fijn vinden als U in Margriet een klein plaatsje maakt voor onze sommen.

Klas 6B – de Heipaal – Simpelveld

– Petje af voor al dat rekenwerk. Aan narekenen zijn we maar niet begonnen, want wij hebben schrijfwerk te doen. Natuurlijk gaat deze berekening maar voor één bepaald Margietnummer op: elk nummer is weer anders van omvang, samenstelling en vormgeving. – Margriet.

KRIS-KRAS
door nederland



foto's: utrechts nieuwsblad

Omslag: Hans Gauw
Druk: De Gulden Pers N.V.