wiskobas bulletin

Jaargang 2, nr. 3
Maart 1973

wiskobas bulletin

— Bulletin ter begeleiding van het eksperiment 'Wiskunde op de Basisschool'
— Verschijnt gedurende de tweede jaargang 6 keer

JAARGANG 2, Nr. 3 – MAART 1973

REDAKTIE:
F. Goffree, R.A. de Jong (eindredakteur), G.H. Meijer, Drs. A. Treffers, Drs. E.J. Wijdeveld.

MEDEWERKERS:
Prof.Dr. F. van der Blij, J. van den Brink, W.M.F. Bronnenberg, J. van Bruggen, K. Frenay, Prof.Dr. H. Freudenthal, L. Gilissen, H. Jansen, H. ter Heege, D. Karman, Drs. K.B. Koster, F. du Maine, E. de Moor, D.W. Oort, P. Scholten, L. Streefland.

LAY-OUT:
Rob Timmer

CARTOON:
Hans de Boer

REDAKTIEADRES:
INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS
Tiberdreef 4, Utrecht.
t.a.v. R.A. de Jong.

ABONNEMENTSPRIJS:
f 25,– per jaargang.
Men abonneert zich door dit bedrag over te maken op girorekening 500167 van Vlaer en Kol te IJsselstein, t.n.v. V.V.C., rek. nr. 218401450, onder vermelding van 'WISKOBAS-BULLETIN'.
Verzamelabonnementen voor studenten Pedagogische Akademies en kursisten Heroriëntering f 15,– per jaargang (aanmelden via docent).

INHOUD

VAST BLOK
Redaktioneel 714
Kolommen: H. Freudenthal 715
Wiskunst: F. van der Blij 717
Problematika: Huub Jansen 722
Wiskunde-werkhoeken: Hans ter Heege . 725
Leerplanologie: Adri Treffers en Edu Wijdeveld 729
Oude wijn in nieuwe vaten: Jan van den Brink 732
Berichten uit het buitenland: Klaas Koster 738
Nieuw op de markt: Ed de Moor 739
Skriptoteek: Johan van Bruggen en Henk Meyer 741
Kleuters en Wiskunde: Jes Melis en Henneke de Lorme-Bakker 744 746
Basje, een jonge onderzoeker: Dik Oort . 749

VARIABEL BLOK
3.1 Operaties 2 756
3.2 De rekenkundige bewerkingen: H. Freudenthal 757
3.3 Operaties op de getallenlijn: Leen Streefland 764
3.4 Automatiseren van operaties: Johan van Bruggen 779
3.5 Wat hoofdrekenen is, weet iedereen: Huub Jansen 784
3.6. Operaties op een band: Hans de Boer 787
3.7 Rekenen met machines: Dik Oort en Henk Meyer 790
3.8 Vermenigvuldigen: Huub Jansen en Fred Goffree 793
3.9 Operaties in het integratieplan: Adri Treffers 801

RESPONS BLOK
3.1 Inleiding en leeswijzer 804
3.2 Open beweringen in klas 1 805
3.3 Is dat toevallig? 808
3.4 Een onderwijsleerpakket 'Open beweringen' 810
3.5 Tel-op-tal-cijfers 813
3.6 Van kabouters naar de tweede kamer 815
3.7 Vervolg op 'De fietsenstalling' .. 819
3.8 Reaktie op 821
3.9 Koncentratie aan het spijkerbord 823

EEN UITGAVE VAN HET INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS

INHOUD

Redaktioneel	-	714
Kolommen	- H. Freudenthal	715
Wiskunst	- F. van der Blij	717
Problematika	- Huub Jansen	722
Wiskunde-werkhoeken	- Hans ter Heege	725
Leerplanologie	- Adri Treffers en Edu Wijdeveld	729
Oude wijn in nieuwe vaten	- Jan van den Brink	732
Wim Wiedes	- Hans ter Heege	738
Berichten uit het buitenland	- Klaas Koster	739
Nieuw op de markt	- Ed de Moor	741
Skriptoteek	- Johan van Bruggen en Henk Meyer	744
Kleuters en Wiskunde	- Jes Melis en Henneke de Lorme-Bakker	746
Basje, een jonge onderzoeker	- Dik Oort	749

redaktioneel

KUN JE EEN BULLETIN ETEN?

't Zou niet gek zijn! Propagandisten van milieubewustzijn zouden het zeker op prijs stellen in het kader van de recycling: een proces waarin produktief gebruik wordt gemaakt van onze afval. Oude flessen naar de glasindustrie, tot pakketjes geperste auto's naar de hoogovens, bulletins naar de automatiek in de stationsrestauratie. Niet zo gek!
De vraag is echter anders bedoeld. Op gevaar af voor een mediumvijand te worden versleten, stellen we, dat ons leven voor een goed deel bepaald wordt door wat de media ons presenteren. Dagelijks maken we kennis met de levensstijl van Peyton Place (nou ja, stijl!), met de verlokkingen van de STER (jong, vitaal, bruisend), met de probleem-oplosser Mannix (krachtdadigheid kent geen tijd), met de muziek van Willem O', met de opvattingen van ...., met de recencies van ...
'Op maat' worden ons *nieuwe* problemen aangeboden via grote U-uren, zaterdagse bijlagen en dubbelnummers. 'Op maat' verdwijnen deze problemen om plaats te maken voor weer nieuwe. Wee de journalist die er een week te laat mee is, wee de lezer en kijker die zich intensief in het probleem verdiept. Ze worden op maat gesneden om op maat te worden gekonsumeerd.
En we konsumeren het. We 'vreten' het!
Zo langzamerhand is konsumeren een houding, een attitude geworden. Door te konsumeren menen we onszelf te kunnen kompleteren, deel te kunnen krijgen aan een volmaakter bestaan, met een geweldige vriendenkring (dankzij de deodorant), met een komeetachtige karrière (dankzij de broodverpakking).
Zo eten we niet alleen margarine uit kuipjes en bruin spul met nootjes uit vetvrij papier, maar ook politiek en ook godsdienst. We weten niet beter. We kunnen niet anders. We zijn zo gekonditioneerd.
Zo benaderen we alles wat op ons afkomt als konsument: lekker ..... dan eten, niet lekker ..... weg er mee!
En omdat konsumptief gedrag nabootsend gedrag is, zijn we zelfs niet vrij in wàt we al dan niet lekker vinden.

Daar staan we dan als redaktie. We willen inlichten, toelichten en voorlichten. Van propaganderen zijn we wat kopschuw. We willen niet meewerken aan het konsumptionalisme (nieuw woord). We willen niet dat het Bulletin gegeten, gekonsumeerd wordt.
En ... we streven ernaar om deze intenties waar te maken in onze produkten.
Hoe moet dat dan?
Misschien kunnen we het aan twee voorbeelden illustreren.

* *De artikelenserie 'leerplanologie'*
'Moeilijk', wordt wel gezegd. 'Verdraaid interessant', menen anderen. 'Teorie waar je niets aan hebt.'
Akkoord, het is moeilijk. Kan het eenvoudiger? Wellicht als volgt: verpak dezelfde hoeveelheid informatie in twee keer zo veel zinnen; de 'ideedichtheid' wordt kleiner en de 'leesbaarheid' groter. Het is de vraag of de wal het schip niet gaat keren, of de lezers de boodschap geinteresseerd blijven volgen.
Weglaten? Deze vraag is essentieel, namelijk die naar de verantwoording. Mag je weglaten? Of mòet je je grondslagen openbaar maken. We menen dat we ons in dit opzicht moeten verantwoorden jegens u. Daarom kiezen we voor openbaarmaking, ook van moeilijke zaken, *opdat u meebeslist*. Wiskobas-Bulletin verdraagt geen konsumptieve lezers!

* *De artikelenserie over 'wiskundewerkboeken'*
Deze artikelen hebben een heel ander karakter. Ze zijn praktisch en bevatten 'tips' voor het dagelijks handelen in de klas. Steeds mogelijkheden, nooit voorschriften. Soms waarschuwingen: pas op voor ...! Soms richtingwijzers: let vooral op ...! Ze geven richting en vrijheid. Niet voor de konsumptie, maar om er mee aan de gang te gaan, er iets mee te doen. Rob de Jong

kolommen

H. FREUDENTHAL

'HIJ IS MÍJN BROER'

De grote wiskundige Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) had een broer Moritz die in zíjn tijd veel beroemder was dan hij, omdat zijn naam dankzij geruchtmakende en inmiddels vergeten uitvindingen geregeld in de krant kwam. Toen onze Carl Gustav eens aan een dame werd voorgesteld, die vroeg 'Bent u dan misschien de broer van Moritz Jacobi?' gaf hij het antwoord: 'Neen, hij is míjn broer!'
Wèl, als A de broer is van B, is B ook de broer van A – dat is wat je noemt de *refleksiviteit* van de familierelatie 'broer zijn'. Dat er desniettemin mensen zijn die het niet leuk vinden, altijd de broer van hun broer te zijn (of anderen die er juist trots op zijn), doet emotioneel aan de gelijkwaardigheid van 'A is broer van B' en 'B is broer van A' niets af. Als wiskundige variabele is A niet beter dan B, maar sommigen willen toch liever A dan B zijn en 'wie A zegt, moet ook B zeggen' klinkt heel raar, als ik A en B verwissel.

* * *

'Kleine jongens mogen niet jokken' – behelst dit dat grote jongens het wel mogen? Neen, maar grote jongens kúnnen niet jokken. Als zij dat doen, wat bij kleine jongens jokken is, dan 'spreken zij onwaarheid'.

* * *

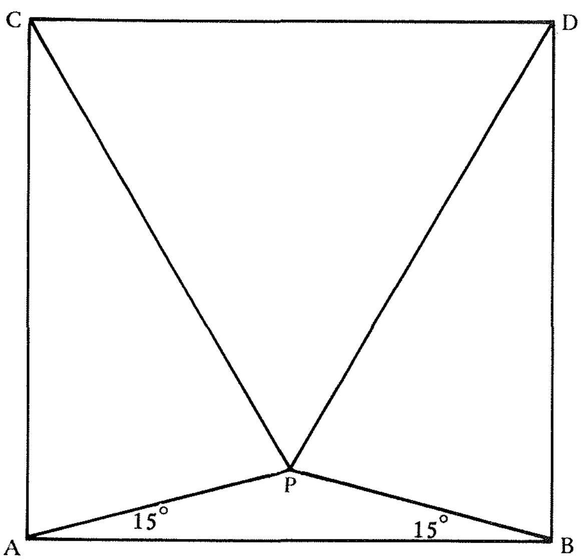
'De treinen naar Den Haag vertrekken van Perron 2'. Ik ga naar Perron 2, stap in de eerste de beste trein en beland in Rotterdam. De treinen naar Den Haag vertrekken van Perron 2, maar er zijn nog andere treinen die hetzelfde doen. Iets formeler gezegd:
Volgens de aankondiging geldt
(1) X gaat naar Den Haag $\Rightarrow$ X vertrekt van Perron 2,
maar ik kan er niet uit opmaken:
(2) X vertrekt van Perron 2 $\Rightarrow$ X gaat naar Den Haag.
Dit zou namelijk gelijkwaardig zijn met
(1') X vertrekt niet van Perron 2 $\Rightarrow$ X gaat niet naar Den Haag
of anders gezegd:
Treinen van andere perrons dan 2 gaan nooit naar Den Haag.
Aan de andere kant zou (2) gelijkwaardig zijn met:
(2') X gaat niet naar Den Haag $\Rightarrow$ X vertrekt niet van Perron 2,
hetgeen ook kan worden geformuleerd als:
Treinen niet naar Den Haag vertrekken niet van Perron 2,
maar dit is niet hetzelfde als (1').

De lezer zal – als hij het niet al wist – wel begrepen hebben dat de pijl '$\Rightarrow$' aan
$P \Rightarrow Q$
de betekenis geeft van
als P dan Q.
In het algemeen moet men
$P \Rightarrow Q$ en $Q \Rightarrow P$
goed uit elkaar houden. Zijn beide waar, dan mag men
$P \Longleftrightarrow Q$
konstateren. Je leest dit ook: P dan en slechts dan als Q.
Met voor
P : X is een mens
en
Q : X is een tweevoeter
mag ik
$P \Rightarrow Q$ maar niet $Q \Rightarrow P$
stellen, want ook vogels zijn tweevoeters. Met
P : X is een mens
Q : X is een tweevoeter zonder veren
mag ik
$P \Rightarrow Q$ en $Q \Rightarrow P$
konstateren, dus ook
$P \Longleftrightarrow Q$,
dan en slechts dan is iets een mens als het een ongeveerde tweevoeter is.
Het is belangrijk om op zoiets bij wiskundige bewijzen te letten. Als je moet bewijzen

de punten van de middelloodlijn van AB zijn even ver van A en van B,
en je bewijst feitelijk
de punten even ver van A en B liggen op de middelloodlijn van AB,
heb je niet aan de eisen voldaan, al is het ene even gemakkelijk of moeilijk als het andere. Maar soms gebeurt het ook, dat het de ene kant op veel gemakkelijker is dan de andere kant op — als ze dan alle twee waar zijn. Een mooi voorbeeld is
In een gelijkbenige driehoek zijn de twee bissektrices van de gelijke hoeken even lang
doodgemakkelijk, maar
Als in een driehoek twee bissektrices even lang zijn, is de driehoek gelijkbenig
een pittig probleempje — probeer het maar.

* * *

Even iets anders — minder moeilijk. Ik haal het uit P.M. van Hieles proefschrift van 1957. In het vierkant ABCD heb ik op AB een gelijkbenige driehoek ABP met basishoek 15° gezet. Bewijs dat de driehoek CDP gelijkzijdig is.



Voor wie het wil proberen, heb ik een sterretjes-pauze ingelast.

* * *
* * *
* * *

U hebt het misschien gemerkt:
Als PCD gelijkzijdig, dan $\angle PAB = \angle PBA = 15°$, is heel gemakkelijk want
$\angle PCA = \angle ACD - \angle PCD = 90° - 60° = 30°$,
verder
$PC = CD = CA$,
dus $\angle CPA = \angle CAP = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$,
dus $\angle PAB = \angle CAB - \angle PAC = 90° - 75° = 15°$.
Maar dit was niet gevraagd te bewijzen.
Gevraagd was:
Als $\angle PAB = \angle PBA = 15°$ dan PCD gelijkzijdig,
en dat is niet hetzelfde.
Of is het wel hetzelfde?
Hier weer een sterretjes-pauze.

* * *
* * *
* * *

Laten we het punt P lopen op het lijnstuk dat de middens van AB en CD verbindt. Laat ik als afkorting schrijven:
$\angle PAB = \alpha$
$\angle PCD = \alpha'$.
Als α verandert, verandert ook α'. Als P in 't midden van het vierkant zit, is toevallig $\alpha = \beta = 45°$; voor de rest is het verband nogal ingewikkeld, maar in elk geval: als P van onderen naar boven loopt, neemt α gestaag toe en α' gestaag af.
Er is maar één keuze van P waarbij $\alpha' = 60°$ wordt en dan is $\alpha = 15°$ (zoals net bewezen).
Als $\alpha' < 60°$ dan $\alpha > 15°$.
Als $\alpha' > 60°$ dan $\alpha < 15°$.
Anders gezegd:
Als α niet $> 15°$, dan α' niet $< 60°$.
Als α niet $< 15°$, dan α' niet $> 60°$.
Of nog anders:
Als $\alpha \leqslant 15°$, dan $\alpha' \geqslant 60°$.
Als $\alpha \geqslant 15°$, dan $\alpha' \leqslant 60°$.
Dus:
Als $\alpha = 15°$, dan $\alpha' = 60°$.
Als u het begrepen hebt, zal het u niet moeilijk vallen het ook in minder woorden te zeggen.

wiskunst

F. VAN DER BLIJ

SOEPSPEELTJES EN TURKSE TEKENINGEN

Toen ik overdacht welk onderwerp ik in dit nummer aan de orde zou stellen kreeg ik soepspeeltjes in handen. Het zijn eenvoudige plastic bouwsteentjes, waar je dieren, auto's en huizen mee kunt bouwen. Maar, zoals zo vaak het geval is, kun je er ook wiskunde mee bedrijven. Wij willen nu geen volledig verhaal over de bouwstenen vertellen; omdat ze in vier kleuren mee verpakt worden (20 per pakje soep) is er eindeloos veel kombinatoriek mee te bedrijven.

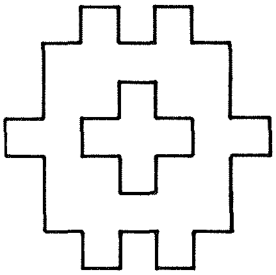


Fig. 1

Ze hebben de vorm van figuur 1. Wel symmetrie, maar geen invariantie bij draaïing over 90°. Door deze asymmetrie kun je ze mooi gaan koppelen, van 6 is een stevige kubus te maken, enzovoort. Maar we kunnen ook gewoon een vlak patroon maken. Als u naar figuur 2 kijkt ziet u een merkwaardigheid ontstaan. Tussen de bouwstenen komen openingen van precies dezelfde vorm als de opening binnen ieder blokje.

Met de bouwstenen van de vorm als in figuur 1 en met tegels van de vorm als van een eenvoudig kruis (figuur 3) kunnen we een aaneensluitende vloerbedekking maken.

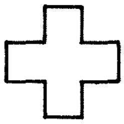


Fig. 3

We komen nu tot de vraag welke tegelvloeren er alzo mogelijk zijn. We zouden eerst met één soort tegels kunnen werken. Natuurlijk kent u de bestrating met vierkante tegels; u weet ook dat u met regelmatige zeshoeken een bijenkorfachtige tegelvloer kunt maken. En ook met gelijkzijdige driehoeken is een tegelvloer te maken.

Willen we regelmatige vloeren met regelmatige veelhoeken hebben dan is alles hiermee beke-

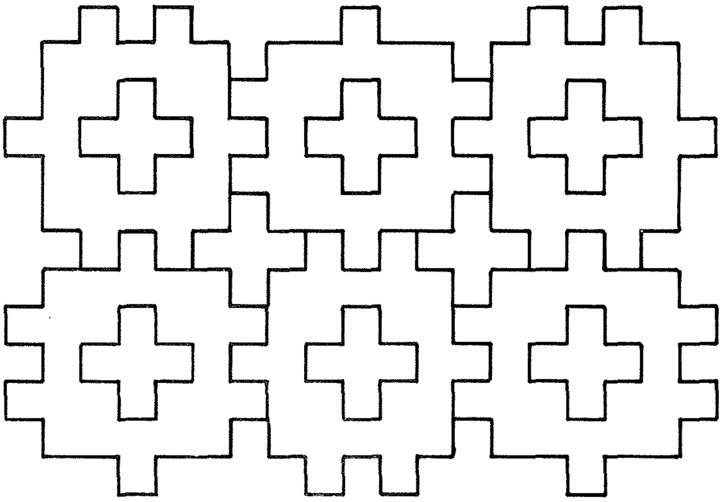


Fig. 2

ken. De hoek van een regelmatige n-hoek is immers $180° - \frac{360°}{n}$; stel dat er k in een hoekpunt samenkomen, dan moet $k(180° - \frac{360°}{n})$ gelijk zijn aan 360°.

Dus $k(1 - \frac{2}{n}) = 2$,
$kn - 2k = 2n$,
$(k - 2)(n - 2) = 4$.
En de enige oplossingen zijn $k = 6$, $n = 3$ of $k = 4$, $n = 4$ of $k = 3$, $n = 6$.
Uit deze drie tegelvloeren zijn vele anderen af te leiden door de stukjes wat te vervormen. We kunnen ieder vierkant bijvoorbeeld vervormen tot een figuur als we zien in figuur 4.

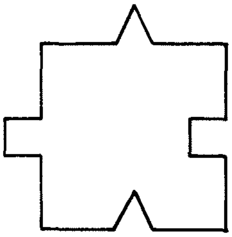


Fig. 4

Opmerkelijk is te zien dat als we de regelmatige zeshoek vervormen tot een vierkant, de bijenkorf-zeshoeken-tegelvloer tot een vierkanten tegelvloer wordt op de manier zoals onze trottoirs gelegd worden. (figuur 5)

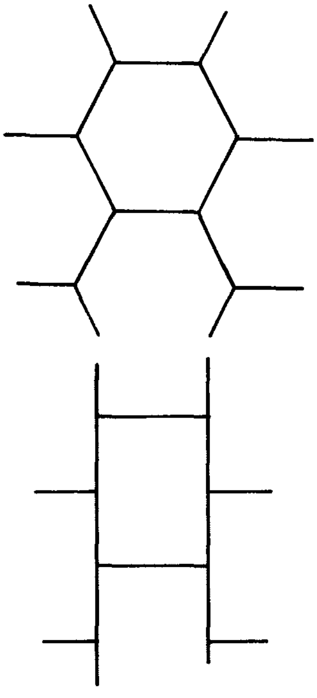


Fig. 5

Vele prenten van M.C. Escher berusten op dit tema. We laten nog een voorbeeld zien. (figuur 6)

Om er echt over te kunnen praten moesten we het een en ander vertellen over groepen van bewegingen en spiegelingen van het vlak.

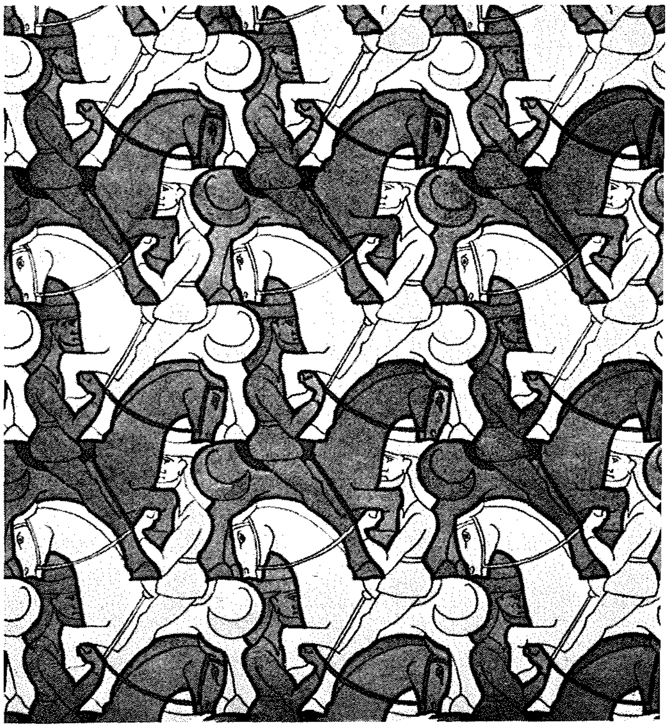


Fig. 6

We merken nog even op dat we regelmatige tegelvloeren ook op een geheel andere manier hadden kunnen berekenen, waarbij het geen rol meer speelt dat de tegels regelmatige veelhoeken zijn, maar alleen dat het allemaal n-hoeken zijn, waarvan er in ieder punt k uitkomen.
Er is namelijk een analogon van de bekende veelvlaksformule voor vlakvullingen
Z(ijden) + H(oekpunten) = R(ibben) + 2, die we ook kunnen beschouwen als veelvlaksoverdekkingen van een torus. Door de overstaande zijden van een rechthoekig stukje millimeterpapier aan elkaar te plakken zien we de 'betegelde' torus ontstaan.
Voor de 'betegelde' torus geldt de formule $Z + H = R$.
Nu geldt $R = \frac{n}{2}Z$, en $H = \frac{n}{k}Z$,
zodat $(1 + \frac{n}{k}) = \frac{n}{2}$.
En hieruit volgt weer $(n - 2)(k - 2) = 4$, enzovoorts.

* * *

We willen nu in plaats van één soort tegels, tegelvloeren met twee soorten tegels leggen.

Eén voorbeeld zagen we al, de soepspeeltjes enerzijds en de kruisen anderzijds. Ik laat nog twee voorbeelden zien.

Fig. 7

In figuur 7 reproduceerden we een turks miniatuur, voorstellende de geboorte van Mohammed (Topkapi Museum, Istanbul). De tegels zijn gewone vierkanten en wat onregelmatig gevormde sterren. U moet wel even goed kijken om de struktuur te ontdekken.
Een tweede voorbeeld (figuur 8) uit dezelfde kultuur stelt Mohammed in Medina voor, sprekende met ambassadeurs van omliggende landen. De tegels zijn hier zeshoeken en driehoeken. De zijden van de zeshoeken zijn de helft van de zijden van de driehoeken.

Kunnen we deze strukturen ook opsporen met de formule $Z + H = R$? Laten we een stuk nemen met n-hoeken en wel N in getal en m-hoeken, M in getal.
Dan is $R = \frac{nN+mM}{2}$, $Z = N+M$, $H = \frac{nN}{k} = \frac{mM}{l}$; als in een hoekpunt steeds k n-hoeken en l m-hoeken voorkomen.
We vinden na enig rekenen:

$$1 + \frac{nl}{km} + \frac{n}{k} = \frac{n}{2} + \frac{ln}{2k}.$$

Welke mogelijkheden zijn er? Ik geef niet de berekening; met wat handig proberen is in te zien dat in onderstaande tabel alle oplossingen van deze vergelijking (met de voorwaarde $n > 2$, $m > 2$, $k + l \geqslant 3$) staan.
We beperken ons tot de oplossingen met $n \neq m$. Als $n = m$, dan vinden we de drie bovenbeschouwde regelmatige vloeren terug.

Fig. 8

n	m	k	l
3	6	4	1
3	4	3	2
3	6	2	2
3	12	1	2
4	8	1	2
5	10	2	1

Uit de regelmatige vloeren kunnen we deze nieuwe afleiden, bijvoorbeeld door het afsnijden van hoekjes; een bekend type keukenvloer is figuur 9.
Door de middens van de ribben van een regelmatige vloer te nemen ontstaat weer een nieuwe. Alleen de laatste met $n = 5$, $m = 10$, $k = 2$, $l = 1$ lijkt wat vreemd.

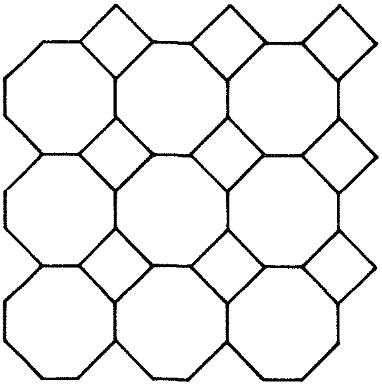
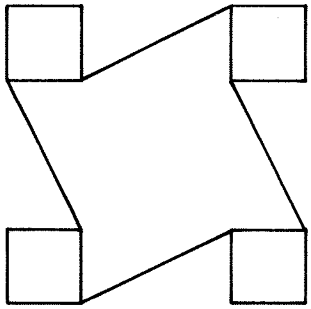


Fig. 9

Met regelmatige veelhoeken past de som van de hoeken wel, een vijfhoek heeft hoeken van 108°, een tienhoek van 144° en 108° + 108° + 144° = 360°. Maar als u het probeert past het niet!

Maar hoe past nu onze vulling met vierkanten en sterren erin? Als we de vierkantjes kleiner maken verandert de ster van vorm, het gaat er bijvoorbeeld zo uit zien:



Na wat rekken en trekken wordt de ster een regelmatige achthoek en we hebben de situatie van figuur 9 terug gekregen.

We geven nog een voorbeeld van islamietische kunst.
In figuur 10 ziet u een stukje van de Kalta Minar, in 1850 gebouwd in Khiva. Hier zijn de stukjes 'kruisen' zoals we ze bij de soepspeeltjes tegenkwamen en vormen de gedaante van een letter H.
Passen deze ergens in onze teorie?

Er is over tegelvloeren en vlakke ornamenten zeer veel literatuur. Ik noem slechts van H. Weyl 'Symmetry' en van A. Speiser 'Die Mathematische Denkweise'.
H.S.M. Coxeter en Fejes Toth schreven verschillende studies over regelmatige lichamen en regelmatige vlakvullingen.

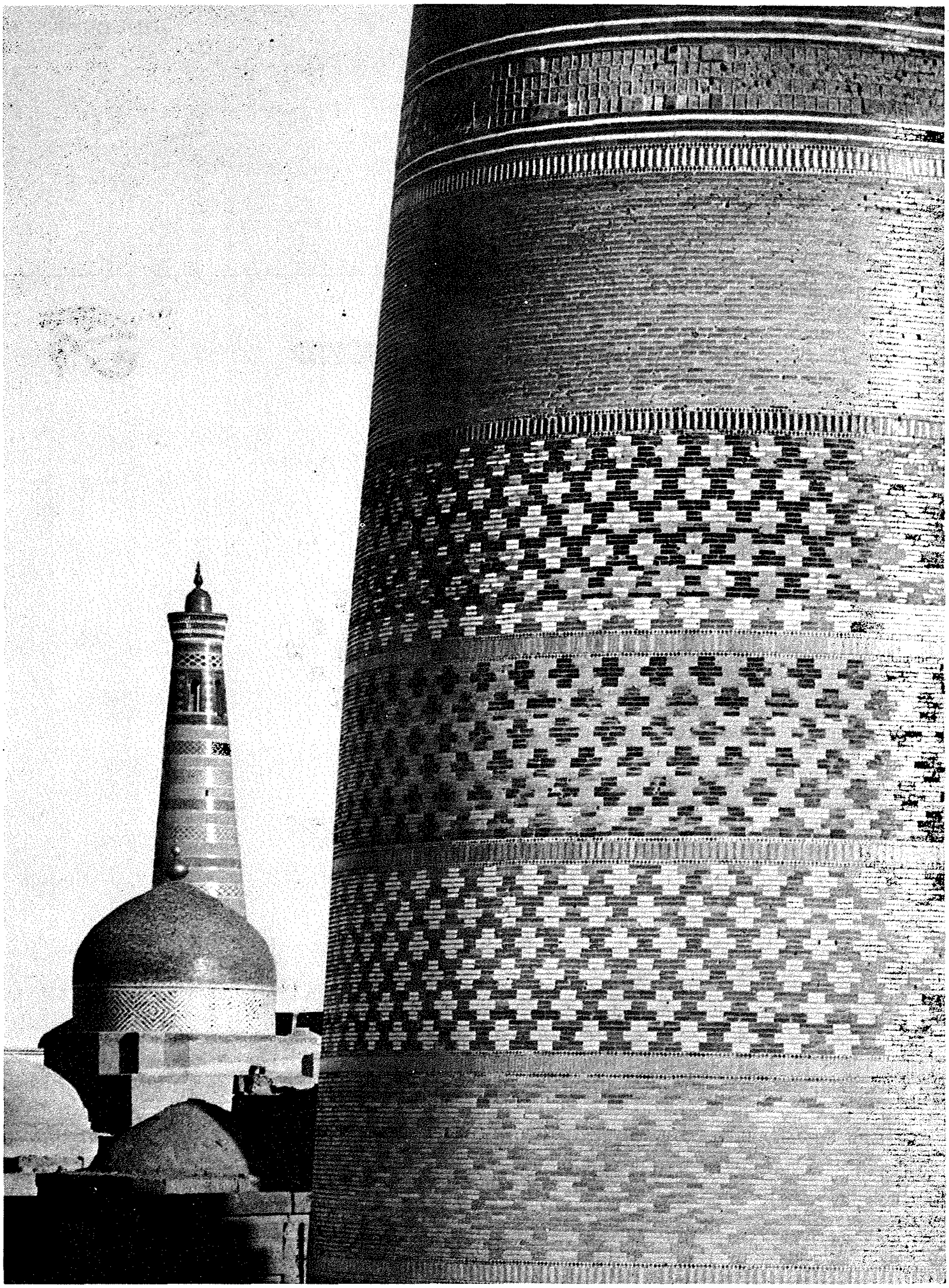
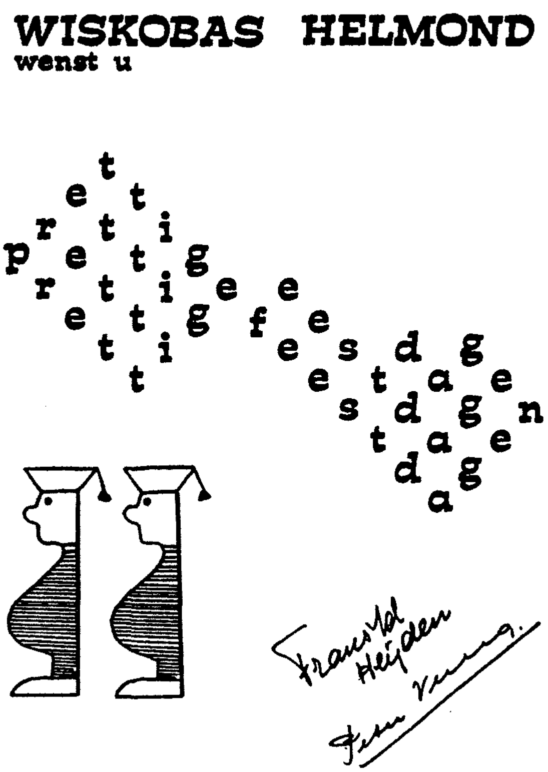


Fig. 10

problematika

HUUB JANSEN

1

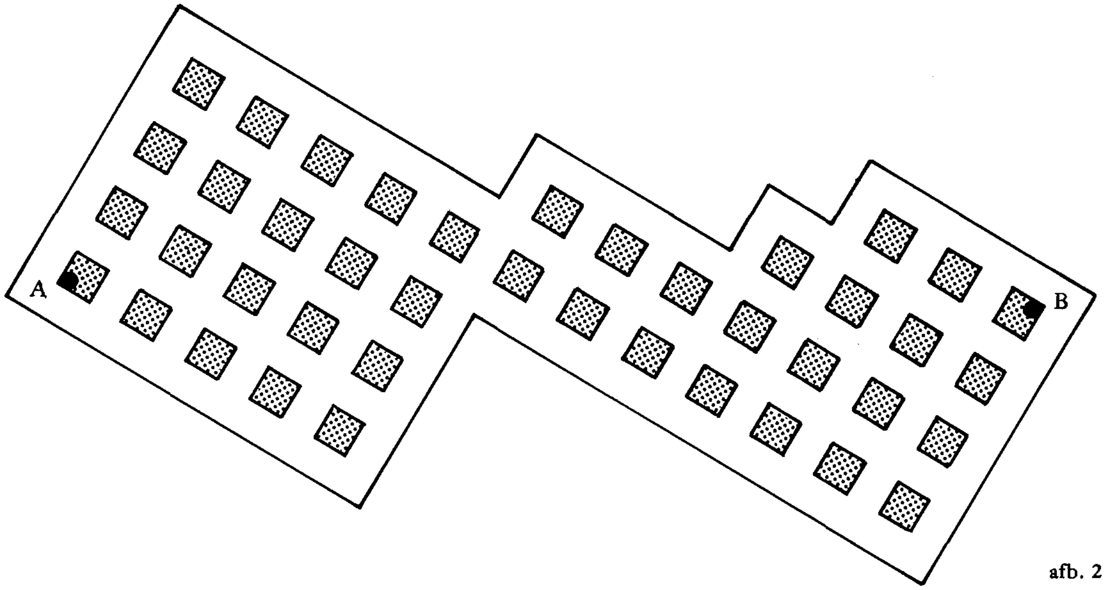


afb. 1

Rond de jaarwisseling (eigenlijk een vreemde uitdrukking) ontvingen de werkers van het I.O.W.O. bovenstaande kaart van kollega's uit de Peel.
Ofschoon aan de late kant, willen wij alsnog hen — en de anderen, die ons veel goeds voor 1973 toewensten — hartelijk bedanken voor hun attentie en verder hopen wij maar dat ieder inmiddels gekregen heeft wat hem (of haar) toegewenst is.
Wij hielden in ieder geval uit de helmondse kaart een aardig probleem over. Het probleem namelijk op hoeveel manieren op de kaart de uitdrukking:

prettige feestdagen

te lezen valt, waarbij het fijn zou zijn als u in staat bent om niet alleen de vraag te beantwoorden, maar om ook nog enige systematiek in uw telling aan te brengen. Heroriënteringskursisten kennen dit probleem al in wat andere vorm; daarom voor hen nog de volgende vraag, die hoort bij afb. 2.

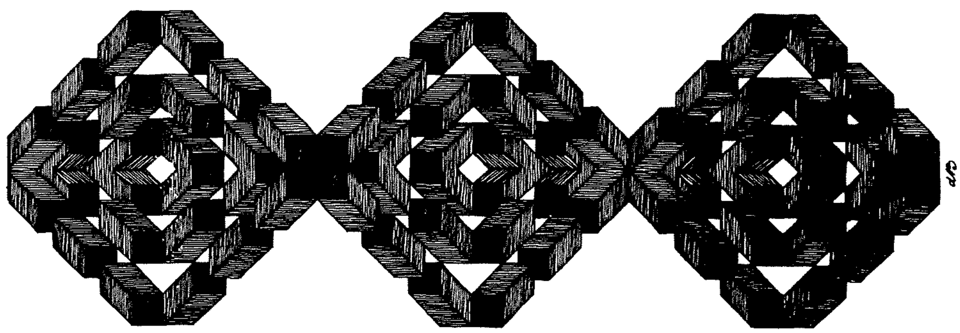


afb. 2

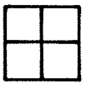
Een wat wonderlijk stratenplan voorstellend een denkbeeldig stadje in het land 'Wiskobassië'.
De vierkantjes stellen huizenblokjes voor, de ruimten daartussen de straten. Het mannetje, dat in A woont gaat regelmatig op bezoek bij het wiskobasmannetje (of vrouwtje!) dat woont in B.

Hoeveel keer kan hij dat doen als hij steeds een andere weg wil bewandelen?

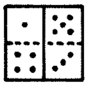
Wellicht kent u ook 'Het Stadsplan' en vindt u dat we dit keer eenvoudig zijn begonnen. Bedenk dan maar dat deze probleempjes voor uw leerlingen nog wel een uitdaging kunnen bevatten.



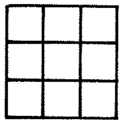
2



Dit vierkant van 2 bij 2 is op een simpele wijze te bedekken met dominostenen, die bestaan uit 2 vierkantjes, die elk even groot zijn als 1 vierkantje waaruit bovenstaande figuur is opgebouwd.



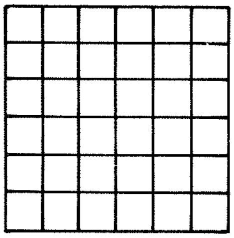
Lukt dit bedekken van een vierkant met dominostenen nu ook nog wanneer we uitgaan van nevenstaand 3 bij 3-vierkant?



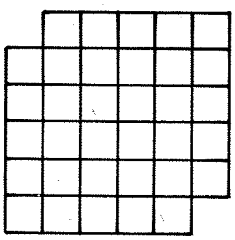
Het antwoord is niet moeilijk te vinden; een kind kan de was doen.

Welke algemene regel zit hierachter?

Lastiger wordt het wanneer we aankomen met een 6 bij 6-vierkant.



en er dan ook nog 2 tegenover elkaar liggende hoekvierkantjes van afzagen en vervolgens de vraag stellen of dit restant van het vierkant nog precies met dominostenen te bedekken is?



Mocht dit bedekken niet lukken en hebt u bovendien het gevoel dat het niet kan, ga dan niet bij de pakken neerzitten, maar probeer te bewijzen, dát het niet gaat. O ja, vóór we het vergeten: in goede en vooral fraaie oplossingen zijn we altijd geïnteresseerd.

wiskunde werkhoeken

HANS TER HEEGE

Hoewel vele onderwijzers graag hun rekenonderwijs zouden willen individualiseren, blijkt dit in de praktijk niet mee te vallen. Zo weten we ook vaak geen raad met een 'laboratory approach' in het rekenen.
Centraal staat de vraag: 'Wat kan de funktie van de wiskundewerkhoek binnen ons reken- en wiskundeonderwijs zijn?'
Die vraag behoren we ons steeds te stellen en het antwoord dat we geven moet ook steeds aangepast worden aan de situatie waarin we verkeren. Aan hoeveel leerjaren geven we les? Hoe groot is de klas? Laagste, midden of hoogste klassen? Enzovoorts.

We onderscheiden drie aspekten:

* In ons klassikale rekenonderwijs zien we een uitgelezen gelegenheid om de werkvorm van de 'laboratory approach' te hanteren. De opdrachten, in de vorm van een opdrachtkaart of een praktikum, worden *door iedere leerling* uitgevoerd. Het is niet beslist noodzakelijk dat alle leerlingen tegelijkertijd aan de opdrachten werken. De opdracht is opgenomen in het basisleerprogramma.
  Een voorbeeld vinden we in het H.O. blok Meten (BAS, hoofdstuk 2.2), waar de inhoudsmaat wordt ontwikkeld voor klas 2.
* We beslissen dat een leerling of een groep van leerlingen wat dieper op de reeds behandelde stof moet ingaan. We geven deze leerlingen opdrachten die uitgevoerd kunnen worden als zij klaar zijn met het 'gewone' programma of op een speciaal 'laboratorium-uur'. De stof die op deze wijze wordt doorgenomen geeft een *verrijking van ervaringen* ('wiskunde-doen'). De wiskundige problemen worden van een andere kant belicht.
  De opdrachtkaarten die u vindt in het H.O. blok Meten (BAS, hoofdstuk 4.1) zijn hiervoor representatief, alsmede een groot deel van de opdrachtkaarten die in diverse nummers van het Wiskobas-Bulletin zijn opgenomen.
* Ondanks onze hulp en uitleg bemerken we dat bepaalde stof door een leerling niet begrepen wordt. We kunnen het nog eens proberen met een laboratorium-aanpak. Dit aspekt van de funktie van de wiskundewerkhoek tendeert naar de *remedial teaching*.
  Uiteraard kunnen we hiervan geen voorbeelden noemen: er kan geput worden uit wat er reeds in de wiskundewerkhoek aanwezig is.

Het is duidelijk dat de drie genoemde aspekten in een schoolwerkplan aanwezig moeten zijn, het is echter onontkoombaar dat wij in Arnhem (ontwerpschool) en in Utrecht (IOWO) ons in de eerste plaats richten op het eerste aspekt, waarbij geput kan worden uit hetgeen reeds is ontwikkeld.

Het bovenstaande betreft de funktie van het wiskundewerklokaal binnen het reken- en wiskundeonderwijs. Men kan die funktie goed zien zitten en toch grote moeite hebben met de 'laboratory approach'. We moeten daarbij dan niet uit het oog verliezen dat een groot deel van de kollega's eigenlijk te weinig kennis hebben van de wiskunde om dit vak te kunnen geven. Dit is, naar bleek op de ICME te Exeter (Wiskobas-Bulletin, jrg. 2 nr. 1, pag. 519 en v.), een internationaal probleem. We menen met de wiskunde-didaktiek op de P.A., met de heroriënteringskursussen, met de uitgave van het Wiskobas-Bulletin en met de T.V.-uitzendingen op de goede weg te zijn.
Wellicht nog belangrijker dan het veelal ontbreken van een adekwaat wiskundig nivo is de geringe ervaring bij het hanteren van de werkvormen die uit het werken met de wiskundewerkhoek voortvloeien. Deze kwestie is daarom zo belangrijk omdat het hier

draait om het gedrag van de onderwijzer in de klas. Het veranderen van ons didaktisch en organisatorisch handelen zal voor velen niet gemakkelijk zijn: je geeft zó les omdat je zó bent.

Het is daarom van belang om ervaringen op te doen met een individualiserende aanpak zoals die met de wiskundewerkhoek. De onderwijzer zal die ervaring in de klas kunnen opdoen, waarschijnlijk met veel vallen en opstaan. De aanstaande onderwijzer kan in zijn opleiding ervaringen opdoen.

Laten we eens de *mogelijkheden voor studenten* van de Pedagogische Akademie bekijken. Stel dat er vier studenten ervaringen willen gaan opdoen met de wiskundewerkhoek. Zij kunnen beschikken over 5^{e} klassen van 26-33 leerlingen. Zij bepraten met elkaar wat ze precies willen doen in de klas die zij les zullen geven. Daarvoor wordt een lijst met onderwerpen opgesteld, geschikt voor het nivo: klas 5.

Zo'n lijst kan er als volgt uitzien:
- de oppervlakte van een cirkel in hokjes-eenheden (zie: Spijkerbord),
- de oppervlakte van een onregelmatig door een kromme begrensd vlakdeel (zie: Spijkerbord),
- lengtemeting op de kaart met behulp van een kurvimeter (zie: Meten),
- de lengte van een stap (zie: Meten),
- de dikte van een schriftblaadje bepalen,
- kansen met 2 en 3 munten,
- het praktikum Habenichts,
- de oppervlakte van een kastanjeblad uitrekenen,
- de snelheid van een fietser,
- de remkracht van een fietser,
- patronen (zie: Tel-op-tal),
- de gemiddelde snelheid bepalen van een weggeworpen bal,
- het gemiddelde aantal doelpunten bepalen dat geskoord is in een voetbalkompetitie,
- een grafiek maken van de 'zakgeldinkomsten' van de leerlingen uit de klas,
- de slingertijd bepalen van slingers met verschillende lengtes,
- .....

Er wordt gesproken over de lijst, een keuze wordt gemaakt en het werk verdeeld. Afgesproken wordt dat ieder voor minstens vier opdrachtkaarten zal zorgen. Deze opdrachtkaarten schrijven ze zelf of zoeken ze na uit de reeds bestaande en passen die aan. Na een onderlinge bespreking van de opdrachtkaarten, een selektie en eventuele herschrijving gaan ze ermee naar de oefenschool. Ze gaan na of de tekst akseptabel is en kontroleren de haalbaarheid. Hierbij komen de moeilijkheden die er in een opdrachtkaart kunnen zitten naar voren, hetgeen opnieuw aanleiding kan zijn voor het herschrijven van de opdrachtkaart. Deze stap van de kontrole is noodzakelijk omdat met ongeschikt materiaal lessen met de laboratoriumaanpak zonder meer mislukken. En het doel is om ervaringen op te doen met deze werkvorm.

Dan stellen ze een pakket opdrachten samen voor vier lessen die ieder zal geven in zijn eigen oefenklas. Daarbij komen onder meer de volgende aspekten om de hoek kijken:

- Hoeveel leerlingen kunnen zinvol aan dezelfde opdracht werken? Eén? Twee of drie?
- Hoe worden de opdrachten over de leerlingen van onze klas verdeeld? Hierbij rekening houden met de moeilijkheidsgraad van de opdrachten.
- Welke aktiviteiten doen de leerlingen? Kunnen ze daarbij op hun plaats blijven zitten? Het is prettig als er niet te veel leerlingen tegelijkertijd rondlopen.
- Welke materialen zijn nodig? Hoeveel?
- Hoe laten ze de leerlingen hun aktiviteiten noteren? Een groepsverslag?

Dan wordt de eerste les gegeven, waarbij de andere drie studenten aanwezig zijn. Zij kunnen profiteren van de ervaringen die in deze les worden opgedaan.

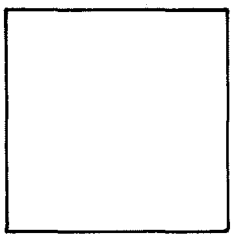
Zo'n les duurt ongeveer vijf kwartier. Het eerste kwartier kan aan instruktie worden besteed. De groepen worden ingedeeld, de opdrachten worden verstrekt. Afspraken over het 'gedrag' van de leerlingen worden gemaakt. Gezegd wordt waar het materiaal kan worden gevonden — laat ze het in groepjes halen —. Uitgelegd wordt hoe het resultaat genoteerd moet worden.
Ze houden rekening met vlugge leerlingen: ze spreken af wat iemand gaat doen die klaar is. De vier laboratorium-lessen bespreken ze onderling en een groepsverslag wordt gemaakt, waarin observaties over leerlingenaktiviteiten.

Ten aanzien van het materiaal nog het volgende: de Pedagogische Akademie stelt het materiaal beschikbaar. In deze fase van de leerplanontwikkeling is het ondenkbaar dat vele basisscholen beschikken over voldoende materiaal. De Pedagogische Akademie geeft, ook in dit opzicht, de toon van de vernieuwing aan.

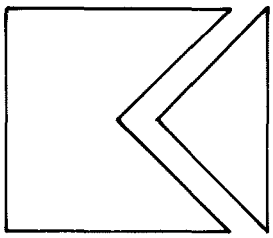
'de studenten in aktie'

3

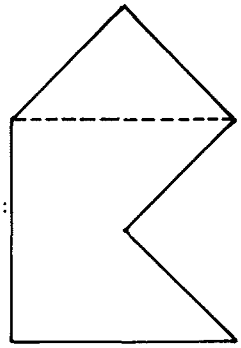
Een eenvoudig ogend probleempje.
Een probleem dat u aan uw buurman kunt voorleggen, waarbij de kans bestaat dat hij — uw buurman! — met u om een fles cognac wil wedden, dat hij binnen 2 dagen de oplossing kan vinden.
Neem de weddenschap dan rustig aan, want een fles cognac is altijd welkom. Per slot van rekening bedrijft u al zo lang wiskunde-(reken-)onderwijs uit ideële overwegingen, dat er ook wel eens een kleinigheid mee verdiend mag worden.
U voelt inmiddels wel dat dit de inleiding is tot een eenvoudig probleem met een eveneens eenvoudige oplossing, waarvoor wiskundige voorkennis bovendien niet vereist wordt en waarvan de enige moeilijkheid gelegen is in het vinden van die oplossing.
We beginnen met een vierkant.



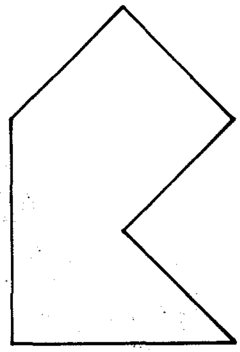
We zetten de schaar erin



en plakken
het uitgeknipte
deel er bovenop:



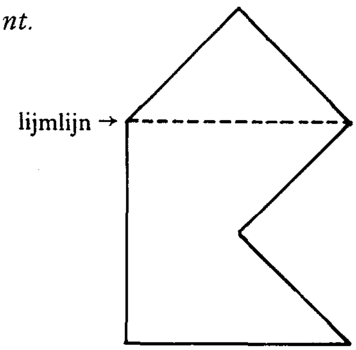
Met plakband (of velpon)
zien we er geen barst meer van.



De vraag luidt nu:

deze laatste figuur weer in 2 delen te knippen
die weer samengevoegd kunnen worden tot 1 vierkant.

Hierbij gooien we natuurlijk niets weg, terwijl het knippen langs de lijmlijn en daarna weer het oorspronkelijke vierkant leggen, te flauw is om over te praten. Uw schrijver kent 1 oplossing, die hij bovendien niet zelf gevonden heeft en hij weet niet of wellicht meerdere oplossingen mogelijk zijn.
Veel sterkte!



leerplanologie

ADRI TREFFERS
EDU WIJDEVELD

OVER LEERSTOFPROGRAMMA'S

0 Inleiding

Vanaf het begin van de vijftiger jaren is er onder invloed van de wiskunde-wetenschap, de maatschappij (waaronder het onderwijssysteem) en de wiskunde-didaktiek een snelle verandering opgetreden in de leerstofprogramma's van het rekenonderwijs op de basisschool.

Aanvankelijk beperkte zich de verandering tot een enkel projekt, in de loop van de zestiger jaren kreeg de leerstofrevolutie echter internationale allure. De inhoud van de programma's beslaat een breder terrein dan het traditionele leerplan: meten, meetkunde, waarschijnlijkheidsrekening, statistiek en funkties, krijgen vrijwel in alle nieuwe programma's een ruime plaats toebedeeld. Begrippen uit de verzamelingenleer en de formele logika spelen een belangrijke rol en ook wordt er ruim gebruik gemaakt van struktureel materiaal.

Toch mogen al deze overeenkomsten tussen de nieuwe programma's niet verhelen, dat er aanmerkelijke verschillen bestaan. Het is dan ook weinig zinvol om te spreken over **de** moderne wiskunde op de basisschool: er is geen homogeniteit in de verandering.

We onderscheiden:
– de matematisch-empirische richting
– de matematisch-aritmetische richting
– de matematisch-strukturele richting.

1 De matematisch-empirische richting

De matematisch-empirische richting legt de nadruk op empirische aktiviteiten. Er is aandacht voor aktief taalgebruik, waarnemen, meten, eksperimenteren en verslaggeving.

Dit alles wordt gebundeld in een geheel van aktiviteiten, dat de klas tot een soort werkplaats maakt. Niet het leerboekje, maar de werkkaart en het bijbehorende materiaal nemen een centrale plaats in en de onderwijzer is kreatief in het onderwijsproces betrokken. Het onderwijs draagt een sterk *handelend karakter*: er worden begrippen ingevoerd, gegevens verstrekt, materialen aangeboden en opdrachten uitgedeeld, waarmee de leerlingen gelegenheid krijgen om in hoge mate zelf aktief te zijn, ontdekkingen te doen, wetmatigheden vast te leggen, onder woorden te brengen, te formaliseren, eventueel te generaliseren en eksperimenten uit te voeren. De leerstof wijkt af van de traditionele rekenleerstof: meten, grafische verwerking en meetkunde krijgen een plaatsje toebedeeld in dit soort onderwijs. Het geheel maakt in vergelijking met het traditionele rekenen wat de leerstof aangaat een evolutionaire indruk en geeft wat de aanpak betreft de impressie van een revolutionaire verandering.

In het algemeen zijn de vertegenwoordigers van de matematisch-empirische richting voorzichtig met het gebruik van verzamelingentaal, omdat de meer matematische benaderingswijze een intuïtief begrip van verzameling, zoals dit in het dagelijks leven naar voren komt, in de weg kan staan. Dit *alledaagse begrip van verzameling* wordt verworven door akties, handelingen, omgaan met ... en sluit het nauwkeurig vooraf gedefinieerd zijn lang niet altijd in zich. Daar komt dan nog bij, dat deze verzamelingen uit het alledaagse leven een zeer specifieke inhoud hebben, namelijk als dingen die bij elkaar horen in een natuurlijke, dat wil zeggen in een zich in het alledaagse leven voordoende betekenis.

En in deze betekenis handelt en denkt een kind reeds over verzamelingen, zonder dat het begrip als zodanig geëkspliciteerd hoeft te worden. Laten we het zo gebruiken en laten we het kind de vrijheid geven zijn taal te ontwikkelen en het niet vanaf het begin in een keurig matematisch konfektiepak steken, aldus deze zienswijze.[1)]

[1)] Zie 'Notes on Mathematics in Primary Schools' (Ass. of Teachers of Mathematics – pag. 301 e.v.).

2 De matematisch-aritmetische richting

De matematisch-aritmetische richting biedt het rekenonderwijs inhoudelijk een verrijking met:

- de kansrekening
- het klokrekenen
- het rekenen met andere 'dingen' dan getallen
- het rekenen in andere talstelsels
- het gebruik van verzamelingentaal bij het rekenen
- en het gebruik van ongelijkheden ($>$, $<$, $\neq$) en frames ($\square$).

De matematisch-aritmetische richting onderscheidt zich door een vroegtijdige introduktie van begrippen uit de verzamelingentaal en het gebruik van deze begrippen voor de ontwikkeling van het getalbegrip en het aanleren van de basisoperaties. Er is weinig ruimte voor de ontwikkeling van 'taaltjes': vanaf het begin worden symbolen als '$\cap$, $\cup$, $\in$, $\notin$', e.d. ingevoerd.

Wiskundig bezien is er op de introduktie van de verzamelingentaal bij deze richting nogal wat aan te merken: de taal wordt ondoorzichtig gebruikt, doordat individu en soort, voorwerp en plaatje, plaatje en praatje door elkaar gehusseld worden, terwijl de verzamelingenleer te pas en te onpas voor het aanleren van de basisoperaties en de behandeling van breuken gebruikt wordt.[2] Kortom, er blijkt een hele kollektie voetangels en klemmen bij de introduktie en de toepassingen van de verzamelingen voorradig te zijn.

Bij alles wat de matematisch-aritmetische richting ons te bieden heeft, dient dit negatieve punt van de misplaatste dikdoenerij met verzamelingen gevoegd te worden.

3 De matematisch-strukturele richting

Deze groepering typeert zich door het sterke aksent op het logische redeneren en de matematische inspiratiebron.

Een leerplan, dat gestoeld is op de matematisch-strukturele principes vertoont weinig overeenkomst met een traditioneel rekenprogramma. Onderwerpen als logika, transformaties, topologie, verzamelingen, talstelsels, struktuurspelen, statistiek, vektoren, e.d. dringen de traditionele onderwerpen naar de achtergrond.

Centraal staat het leren van matematische strukturen, waarbij allerlei strukturele spelletjes een belangrijke rol spelen.

Bij het werken met bijvoorbeeld logi-blokken komen de taal, de matematische strukturen en het spelkarakter duidelijk naar voren. Vertegenwoordigers van de matematisch-logische richting zijn van mening dat kunstmatig materiaal (struktureel materiaal) meer gelegenheid biedt om bepaalde wiskundige begrippen te leren dan spullen uit de natuurlijke alledaagse omgeving van het kind. Ten aanzien van de verzamelingentaal schroomt men niet allerlei symbolen en begrippen vanaf de eerste klas in te voeren, al dient gezegd, dat het gebruik van de taal der verzamelingen met meer zorgvuldigheid geschiedt dan in het matematisch-aritmetische veld het geval is.

4 Het rekenonderwijs

Er zijn de laatste jaren rekenmetoden verschenen, die gestalte proberen te geven aan een verdergaande didaktische vernieuwing en aansluiting zoeken bij het leven van alledag. De krant, het spoorboekje, e.d. maken hierin hun opwachting.

Het blijft naar z'n inhoud rekenonderwijs, maar de leerstof wordt enerzijds besnoeid en anderzijds nieuw leven ingeblazen. Dit vernieuwde rekenonderwijs krijgt vooral gestalte in de hogere klassen van de basisschool en zij poogt het uit z'n isolement te bevrijden door verbindingen te leggen met het alledaagse leven.

5 Een overzicht

* *Nieuw rekenen:* er wordt een nieuw uitgangspunt en een breder toepassingsgebied van het rekenen gezocht. Allerlei onderwerpen uit de krant, het spoorboekje e.d. maken hun opwachting. In de lagere klassen maakt men meer gebruik van struktureel en natuurlijk materiaal.
* *De matematisch-empirische richting:* er wordt toenadering gezocht tot empirische aktiviteiten, het rekenprogramma wordt geïnjekteerd met aktiviteiten als meten, meetkunde en grafische verwerking. Schriftelijke en mondelinge verslaggeving van de eksperimenten vindt op uitgebreide schaal plaats. Men staat gereserveerd tegenover de

---

2) Zie Wiskobas-Bulletin, jaargang 1, no. 2 (pag. 99 e.v.) en no. 4 (pag. 243 en 309).

introduktie van de verzamelingentaal. Vanuit de didaktiek bezien zijn de veranderingen revolutionair: de klas is een werklokaal en de onderwijzer een stimulator en begeleider, die niet zonder meer op het leerboek kan terugvallen. Wat de leerstof betreft zijn de veranderingen evolutionair te noemen.

* *De matematisch-aritmetische richting:* deze richting verrijkt het reken-leerstofgebied met een aantal onderwerpen, zoals het rekenen in verschillende talstelsels, het rekenen met frames in ongelijkheden en het opereren met 'niet-getallen'. Het geavanceerde en soms ondoordachte gebruik van begrippen uit o.a. de verzamelingenleer is een verarming. Didaktisch gezien is er weinig verandering met het traditionele rekenen te konstateren.
* *De matematisch-logische richting* heeft z'n inspiratiebron in de wiskunde. Dat wil zeggen dat de onderwerpen vooral gekozen worden met het oog op de matematische relevantie. Het gevolg is dat men in een geavanceerd programma van deze richting weinig van het traditionele rekenen herkent. Wel treft men begrippen aan als: konjunktie, negatie, doorsnede, transformatie, gesloten kromme, transitiviteit en groep. Zowel didaktisch als matematisch is de beoogde verandering revolutionair.

De vijf genoemde richtingen zijn geïdealiseerde, dus 'zuivere' typen. In het algemeen zal een nieuwe wiskunde-metode van de basisschool op dit moment een mengvorm zijn, waarin de ingrediënten van de vier groeperingen in verschillende verhouding samengesteld zijn in een poging om tot een verteerbaar geheel te komen.

6 De situatie in nederland

Vanaf 1970 wordt in nederland in al de genoemde richtingen geëksploreerd: traditionele rekenprogramma's, vernieuwde rekenmetoden, werkkaarten uit de empirische hoek en ook vertaalde wiskunde-boeken uit de matematisch-aritmetische richting en de meer matematische-logische gezichtshoek kan men in het nederlandse onderwijsveld aantreffen. Afgezien van allerlei problemen op het gebied van de scholing van (aanstaande) onderwijzers, brachten deze uitbundige ontwikkelingen de noodzaak van een nationaal leerplan naar voren.
Welnu, vanaf 1971 wordt er door een groep onderwijzers, rekendidaktici van de P.A., hoogleraren e.a. aan de ontwikkeling van een dergelijk leerplan gewerkt in een projekt, genaamd 'Wiskobas'. Om het gevaar van chaotische ontwikkelingen zoveel mogelijk te bezweren adviseert deze groep de nederlandse onderwijzers om voorlopig (tot 1975) de klassieke rekenmetode trouw te blijven en het huidige rekenonderwijs te verlevendigen. Leerstofblokken voor de P.A. en de H.O.O. zullen daartoe voorlopig als inspiratiebron kunnen dienen en het tijdschrift tracht de mogelijkheid tot respons vanuit de onderwijspraktijk te optimaliseren.

oude wijn in nieuwe vaten

JAN VAN DEN BRINK

OMTREK

Enige didaktische opmerkingen over het begrip 'omtrek'

Door overmatig veel aandacht te besteden aan de omtrek van *rechthoeken* ('de omtrek is tweemaal de lengte en tweemaal de breedte') wordt dit begrip door de kinderen uitsluitend verbonden met deze figuren.
Cirkel en driehoek bijvoorbeeld hebben geen 'omtrek', omdat 'lengte' en 'breedte', waarop de hierboven genoemde 'omtrek' is gedefinieerd, in deze figuren ontbreekt.

Een opmerking terzijde:

> Hetzelfde verschijnsel doet zich voor bij het begrip *kongruentie*. Door de beklemtoning van de kongruentie bij driehoeken ontstaat de indruk dat er geen kongruente vijfhoeken bestaan. De kongruentie wordt 'gekoppeld' aan driehoeken.
> Analoog is er bij onze leerlingen een neiging om omtrek uitsluitend te verbinden aan rechthoeken.

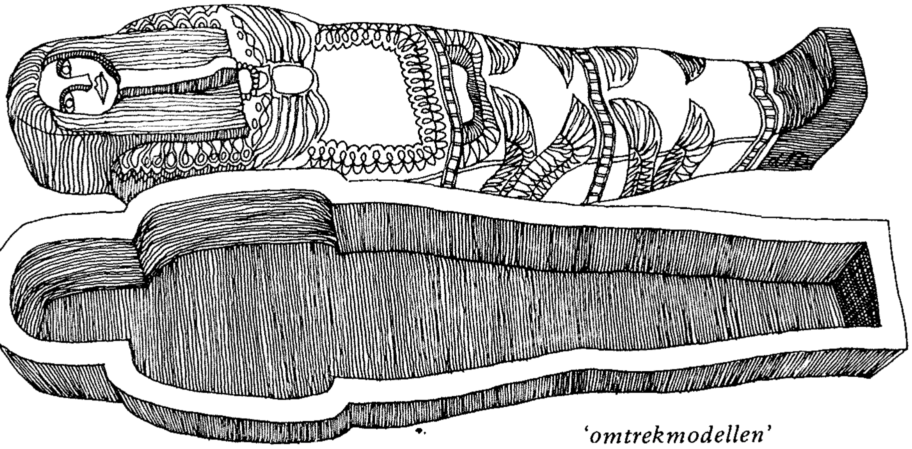
Het is dus nodig dat we ons bezinnen *hoè* we bepaalde eigenschappen van figuren kunnen *onderwijzen*. Aan figuren — door Van Hiele *'dragers van eigenschappen'* genoemd — kunnen we bijvoorbeeld de vorm, de oppervlakte, de omtrek, hoeken, enz., onderscheiden. Om nu één van die eigenschappen (bijv. de omtrek) aan te leren, kan men verschillende wegen bewandelen. Eén onderwijsmetode berust op de volgende leerpsychologische overweging:

> Als we iemand een bepaald begrip willen bijbrengen, zullen we het in allerlei verschillende situaties moeten plaatsen, waarbij we echter zorgen dat het aan te leren begrip invariant blijft.

De omtrek is een eigenschap van figuren, die bij uitstek geschikt is om op deze wijze te worden aangeleerd: laat alle andere eigenschappen van een figuur variëren en zorg ervoor dat de omtrek gelijk blijft.

Enkele momenten uit een leergang voor het begrip omtrek

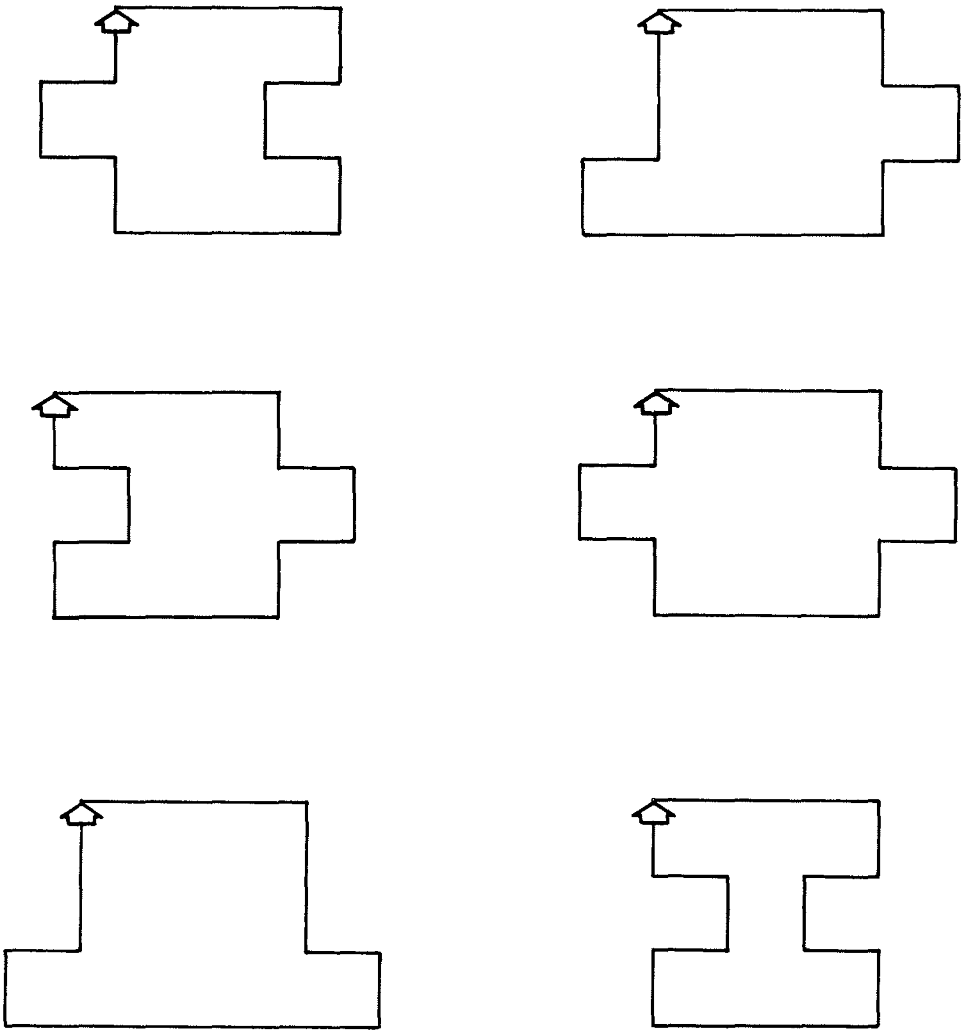
Hier volgen vier voorbeeld-werkkaarten (met een toelichting) die u wellicht in uw klas kunt gebruiken en eventueel kunt uitbreiden. De kaarten zijn op te vatten als momenten in een leergang voor de omtrek van figuren.



'omtrekmodellen'

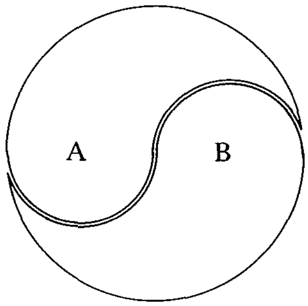
WERKKAART 1 – WEGEN

Zijn al deze wegen even lang?

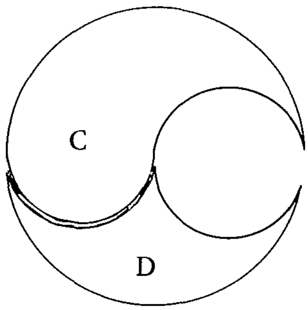


WERKKAART 2 – SPIEGELEN

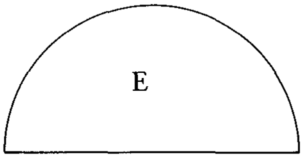
❶ Is de omtrek van figuur A gelijk aan de omtrek van figuur B?

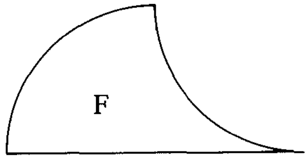


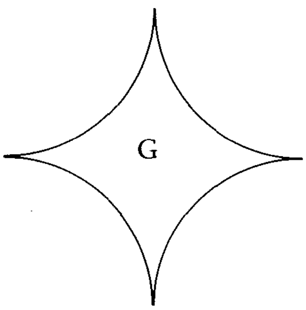
❷ Is de omtrek van figuur C gelijk aan de omtrek van figuur D?

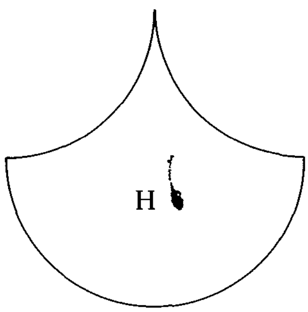


❸ Van welke figuren is de omtrek gelijk?

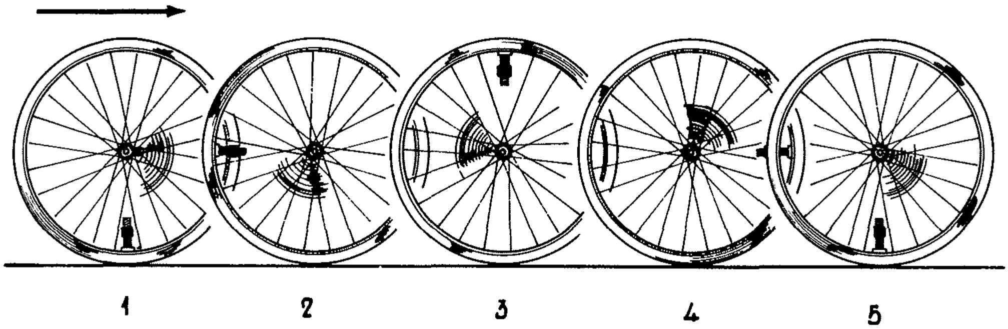






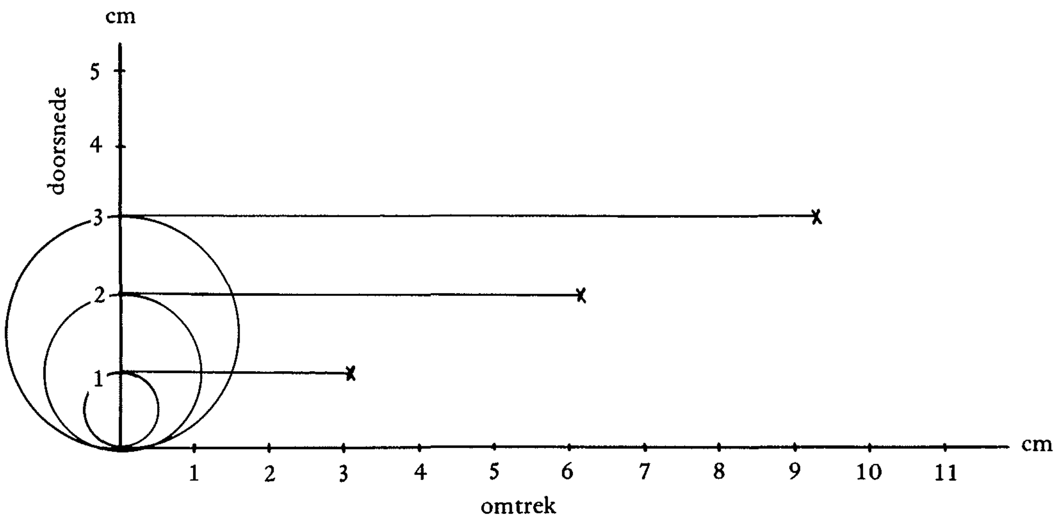


WERKKAART 3 – ROLLEN MAAR



❶ Hoe groot is de omtrek van deze cirkels?

❷ Hoe groot is de 'doorsnede' (de middellijn) van deze cirkels?
Meten met je lineaal!

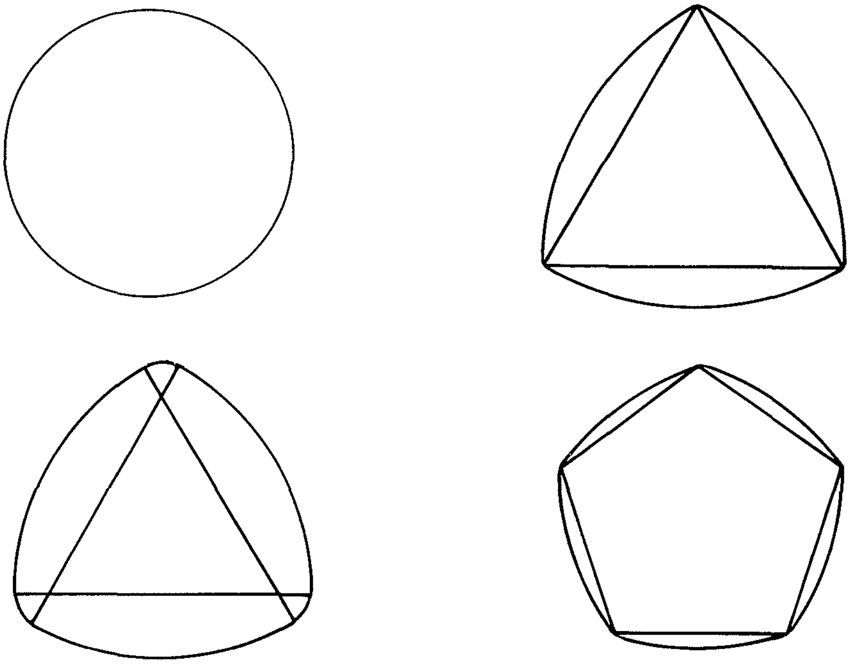


❸ Neem deze grafiek over en laat ook enkele geldstukken rollen:

Een gulden, een kwartje, een stuiver

Meet de doorsnede en de omtrek!

WERKKAART 4 – WIELEN



❶ Schrijf onder elk van deze figuren de wijdte.

❷ Plak de figuren op karton en knip ze uit.

❸ Hebben ze dezelfde omtrek?
Schrijf op wat je ervan vindt:

❹ Als deze 4 figuren 4 'wielen' aan een karretje zijn, draaien de wielen dan allemaal even snel als het karretje rijdt?

▸ Toelichting bij de werkkaarten

WERKKAART 1 – WEGEN

* Deze kaart is bijvoorbeeld in te leiden met de reis van een torretje over het stadsplan.
* Het is duidelijk dat de vorm en de oppervlakte van de figuren variëren, terwijl de omtrek van alle figuren gelijk blijft.
* De begrippen oppervlakte en omtrek moeten door de kinderen duidelijk onderscheiden worden.
* U kunt de leerlingen er op wijzen, dat de ene figuur uit de andere kan ontstaan door gedeelten van de weg te 'spiegelen' of te 'verschuiven'.
* Vraag ze daarna om meerdere verschillende figuren te tekenen die dezelfde omtrek hebben.

WERKKAART 2 – SPIEGELEN

* Soms kan men door figuren te vergelijken direkt *zien*, dat de omtrek van beide gelijk is – met andere woorden: men hoeft niet altijd te meten.
* U kunt dit demonstreren door de figuren uit te knippen en te vouwen.
* Ook bij deze werkkaart variëren vorm en oppervlakte, terwijl de omtrek per paar figuren invariant blijft.

WERKKAART 3 – ROLLEN MAAR

* Een derde moment in de leergang omtrek dat weinig beklemtoond wordt, is het zogenaamde *'indirekte meten'*. Hierbij worden bepaalde eigenschappen van een figuur, bijvoorbeeld de omtrek en de middellijn van een cirkel, met elkaar in relatie gebracht, zodat we via de ene grootheid (indirekt) de andere kunnen meten.
* Laat uit het diagram op deze werkkaart de omtrek bij gegeven middellijn 'voorspellen'.

WERKKAART 4 – WIELEN

* Als u meende, dat alleen de cirkel als wiel kan dienen, dan hebt u het mis.
  Op werkkaart 4 zijn 4 figuren getekend (echter niet alle cirkels) die 'dezelfde wijdte' hebben. Wanneer u langs één der figuren twee evenwijdige raaklijnen tekent, dan is de onderlinge afstand tussen elk tweetal raaklijnen konstant.
* De vraag is nu of ook de omtrek van deze figuren gelijk is, zodat ze als wielen onder een karretje wellicht even snel ronddraaien.

▸ Tenslotte ....

Met dit artikel – oude wijn in nieuwe vaten – hebben we willen aantonen dat het begrip *omtrek* rijker is dan louter en alleen de formule '$0 = 2 \times l + 2 \times b$'.
Uit de voorbeeld-werkkaarten moge blijken, dat er binnen het onderwerp 'omtrek' problemen van verschillend nivo – voor verschillende leeftijdsgroepen – bestaan.
Voorts zal het duidelijk zijn dat binnen de bestudering van eigenschappen van figuren de omtrek een leerpsychologische funktie kan vervullen in die zin, dat ze *tegenover* andere eigenschappen geplaatst wordt, juist om deze te belichten.[1)]

---

1) Zie in dit verband het artikel van Klaas Koster in het Wiskobas-Bulletin, jaargang 2, no. 2 (pag. 623).

!Wim Wiedes!

HANS TER HEEGE

EEN NIEUW VERHAAL

Wim Wiedes is jarig! Dat is me een feest! Alle mensen uit de straat mogen komen. Ze dansen en springen en hebben een reuze lol. Maar ja, aan alles komt een eind.
Om zeven uur zijn alle gasten weg. Wim zit nog wat te hijgen en Wies ruimt de rommel op.
Het was zo'n drukte, maar nu is alles zo stil. Wim en Wies gaan aan de tafel zitten en kijken elkaar aan.
'Ik heb honger, vrouw' zegt Wim Wiedes.
'Ik ook Wim', zegt z'n vrouw Wies, 'maar ik kan geen eten koken, alle potten en pannen zijn vuil. Die moet ik eerst afwassen. En voordat ik daarmee klaar ben, is het wel bedtijd.'
Zo zitten Wim en Wies een tijdlang tegenover elkaar en zeggen niets.
Dan staat Wim op en hij zegt:
'Vrouw, ik heb een plan. We gaan eten in het hotel om de hoek!'
Wies springt ook op en klapt in d'r handen van blijdschap.
'Ja, laten we dat gaan doen! Dat wil ik elke dag wel.'
'Nee vrouwtje, elke dag kan dat niet. Maar wel een paar dagen.'
'Ja', roept Wies blij, 'en dan eten we elke dag wat anders!'
Nou, je begrijpt dat Wies en Wim nog meer honger kregen. Wat denk je: elke dag in een hotel eten. En van die lekkere dingen!
Vlug trekken ze hun jas aan en lopen naar het hotel. Ze zoeken het leukste tafeltje uit.
Wim roept de bediende: 'We willen eten, meneer.'
'Dat kan meneer. We hebben kippesoep, aardappelen met boontjes en een stukje vlees en pudding toe.'
'Oh, wat heerlijk', roept Wies, want die houdt zo van pudding.
'Dat is lekker', zegt Wim, want hij lust zo graag kippesoep.

Even later zitten Wim en Wies lekker te smullen.

De volgende dag zitten ze er weer, aan hetzelfde tafeltje voor het raam.
Wim roept de bediende: 'Kunnen we wat eten?'
'Dat kan meneer. We hebben kippesoep, aardappelen met boontjes en een stukje vlees met pudding toe.'
'Dat hebben we gisteren al gegeten', zegt Wies.
'Ja, mevrouw, dat kan want dit is het enige dat wij koken, anders hebben we niet.'
Je begrijpt dat Wies sip keek. Ze had gedacht elke dag wat anders te kunnen eten. Maar dat liep toch helemaal mis.
'Laat ons nog even denken', zei Wim.
Zijn hand onder zijn kin en zijn ogen dicht. Zó dacht Wim wel vijf minuten lang.
Toen gingen zijn ogen open. Wim riep de bediende en zei:
'Dat is goed. Maar ik wil eerst de pudding, dan de aardappelen met boontjes en het stukje vlees en als laatste kippesoep.'
De bediende keek wel raar. En jullie ook wel, denk ik. Maar je begrijpt nu waarom Wim Wiedes één van de slimste mannen van de stad was.

En nu jullie:
Hoeveel dagen hebben Wim en Wies in het hotel gegeten?
Let op: ze namen elke dag een ander menu!

berichten uit het buitenland

KLAAS KOSTER

INFORMATIEBRONNEN OVER HET RUSSISCHE (WISKUNDE-)ONDERWIJS

Sinds 1956 (nog net vóór de lancering van de Spoetnik) bestaat in de Verenigde Staten een projekt dat zich speciaal richt op de bestudering van de ontwikkelingen in het wiskunde- en natuurkunde-onderwijs in de Sowjet-Unie en andere oosteuropese landen als Hongarije, Tjechoslowakije, enz. Dit projekt wordt gesubsidieerd door de amerikaanse Science Foundation en heeft tot taak relevante informatie te verzamelen en bereikbaar te maken voor zowel kurrikulum-projekten als voor leraren en studenten.
De officiële naam van het projekt is: *Survey of recent East European literature in school and college mathematics;* projektdirekteur is Prof. Izaak Wirszup, Department of Mathematics, Eckhart Hall 413, University of Chicago, Chicago, Illinois 60637.
De 'Survey' beschikt over een biblioteek met meer dan 7000, hoofdzakelijk russische boeken en tijdschriften over 'mathematics and its applications, mathematics education, science and science education, education and educational psychology'. Van een aantal boeken en tijdschriftartikelen worden onder supervisie van de 'Survey' engelse vertalingen gemaakt, die vervolgens via de gebruikelijke kommerciële uitgevers*) worden gedistribueerd. Een overzicht van de tot dusver beschikbare titels kan men via de redaktie van dit blad opvragen.
In samenwerking met het onlangs afgesloten S.M.S.G. projekt (zie: Wiskobas-Bulletin, 1971 – pag. 380-381) heeft de 'Survey' via uitgeverij A.C. Vroman een reeks van 15 delen uitgebracht onder de titel: *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics* (eds. J. Kilpatrick en I. Wirszup).
Enkele titels:

- 'The Learning of Mathematical Concepts.'
- 'The Structure of Mathematical Abilities.'
- 'Problem Solving in Arithmetic and Algebra.'
- 'Instruction in Problem Solving.'
- 'Teaching Mathematics to mentally retarded children.'

Andere vertaalde werken van bekende russische auteurs over het wiskunde-onderwijs zijn:

- Elkonin D.B. en Davydov V.V.
  'Potentials for learning mathematics with respect to age level.'
- Menchinskaya N.A., Moro M.I.
  'Questions on methods and psychology of teaching arithmetic on the elementary grades.'
- Krutetskii V.A.
  'Psychology of Mathematical Abilities of Schoolchildren.'

Tevens is vaak informatie te vinden in de tijdschriften *Soviet Education* en *Soviet Psychology*. Deze tijdschriften bevatten engelse vertalingen van russische literatuur.

* * *

Duitse vertalingen van russische literatuur verschijnen voor een groot deel bij *Verlag Volk und Wissen* – Berlijn (recentelijk bijvoorbeeld 'Probleme der Ausbildung geistiger Handlungen', Lompscher J. – 1972, ± *f* 8,–).

* * *

Nederlandstalige literatuur: Ook in het nederlands verschijnen de laatste tijd steeds meer boeken en artikelen over het russische onderwijs- en opvoedingssysteem.

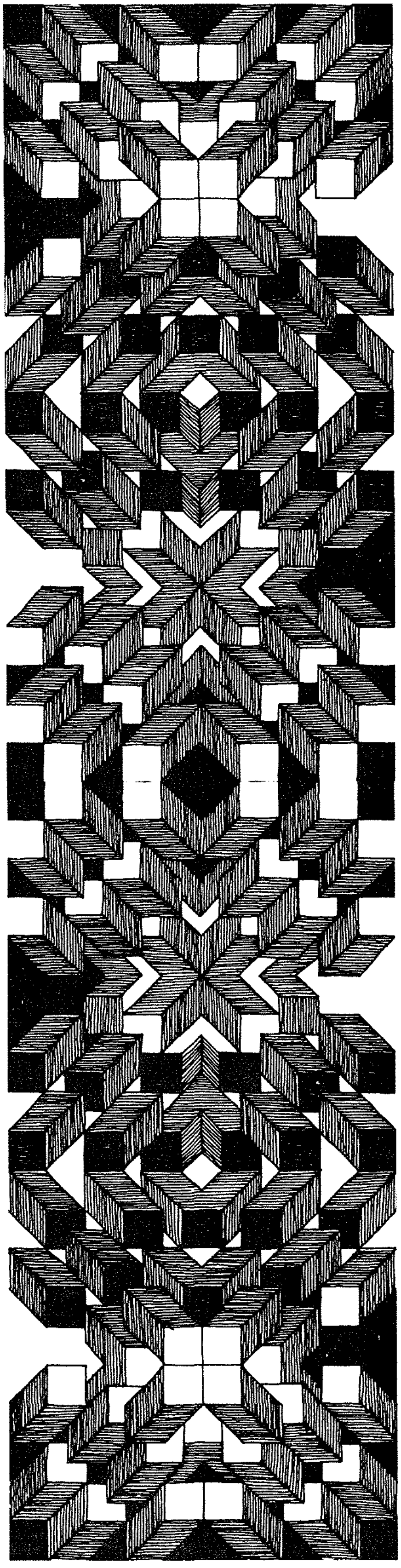
---

*) In dit geval:
D.C. Heath & Co., 285 Columbus Avenue, Boston, Massachusetts 02116.
A.C. Vroman Inc., 2085 E. Foothill Blud, Pasadena, California 91109.
Academic Press, 111 Fifth Avenue, New York, New York 10003.
M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts 02142.

Bijvoorbeeld:

- Kind in gezin en groep – U. Bronfenbrenner
  (Ouders van Nu, Wageningen – 1972).
- Onderwijs en Opvoeding in Rusland – N. Grant
  (Aula 475, Utrecht – 1972).

Vanuit het Psychologische Laboratorium van de Rijksuniversiteit Utrecht wordt onder leiding van Prof. Van Parreren sinds ± 1967 de russische leer-, onderwijs-, ontwikkelingspsychologie in nederland grotere bekendheid gegeven. In Pedagogische Studiën verschenen bijvoorbeeld artikelen van Landa (1970) en Galperin (1972), terwijl Van Parreren zelf uitgebreid is ingegaan op Galperin's teorie in de herziene versie van zijn *'Psychologie van het leren'*. Zeer recentelijk verscheen in dit kader het boek *'Sowjetpsychologen aan het woord'* (eds. Van Parreren, C.F. en Carpay, J.A.M.) bij Wolters-Noordhoff (ca. *f* 35,–).
Vanwege de toespitsing van een deel van de russische psychologie (bijvoorbeeld Davydov, Obuchova, Karpova, Krutetskii) op onderzoektema's die vrij direkt betrekking hebben op het leren en onderwijzen van wiskunde, lijkt een kennismaking met dergelijke auteurs voor wiskunde-leraren en onderwijzers een nuttige zaak.



ED DE MOOR

KLAAR? GA MAAR SPELEN

Het begint er langzamerhand op te lijken, dat Wiskobas de vaste recensent van de Uitgeverij Malmberg wordt. Konden wij in de vorige aflevering Ger Janssen en Malmberg gelukwensen met het rekenaktiveringsprogramma van Janssen, ditmaal gaan onze komplimenten uit naar de voortreffelijke set werkkaarten van Jan Nieland m.m.v. Otto van Engelen, J. Gerringa en G. v.d. Molengraaf.

Toen Jan Nieland aan het slot van de Egmond-konferentie voor P.A.-wiskunde-pedagogen in 1971 een lezing hield over de *verlevendiging van het traditionele rekenonderwijs*, was zijn gehoor buitengewoon enthousiast. Nu zien wij die ideeën gerealiseerd in 112 werkkaarten, geschikt voor alle klassen van het basisonderwijs.
Als doelen van de set noemt Nieland:

* onderwijzer en kinderen in aanraking te brengen met nieuwe onderwijselementen op wiskundig en didaktisch gebied;
* tegemoet te komen aan de behoefte, die in den lande bestaat met betrekking tot het didaktisch gebruik van de veelsoortige leermiddelen.

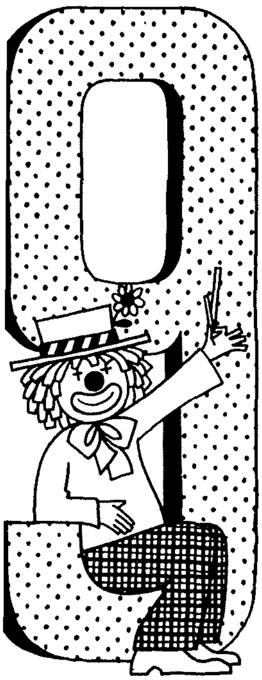
Dit lezen we in de uitgebreide begeleiding, die bij deze set behoort.
Deze begeleiding bevat een algemene toelichting, een overzicht van de benodigde leermiddelen en eventueel vervangende leermiddelen, een overzicht van de verdeling van de werkkaarten over de verschillende klassen en een behandeling van de afzonderlijke werkkaarten.
Het zal niet mogelijk zijn voor de onderwijzer om de set aan te schaffen en zonder meer aan de gang te gaan. Een uitvoerige en tijdige voorbereiding liefst in schoolteamverband, zal nodig zijn, alleen al om alle materialen (leermiddelen) aan te schaffen of te verzamelen. Hoeveel dozen Cuisenaire-materiaal, getallenkaartjes, spijkerborden, zullen niet ongebruikt in allerlei kasten staan? Het is nu eenmaal makkelijker volgens een boekje en klassikaal te werken. Met behulp van deze soft-ware is het mogelijk al deze leermiddelen ook te laten funktioneren in het onderwijs. Voor de onderwijzer(es) kan dit een bron van inspiratie betekenen, ook al omdat allerlei kaarten mogelijkheden bieden tot variaties, die de leerkracht zelf kan bedenken.

De set is geen afgerond geheel, doch zal in de toekomst gewijzigd en uitgebreid kunnen worden volgens dezelfde procedure, die ook Wiskobas voorstaat, namelijk door middel van respons van de gebruiker.
Bij de behandeling van de afzonderlijke werkkaarten is steeds de indeling gemaakt:
Hulpmiddelen,
Mogelijk doel,
Rond de oplossing,
Adviezen.

Nu moet mij wel van het hart, dat het onderdeel *Rond de oplossing* (enige wiskundige achtergrond van de opdracht) vaak zeer kompakt is geschreven en dat nogal eens aan wiskundige kennis wordt geappelleerd, waarvan ik me afvraag of elke onderwijzer die bezit. Degenen, die de HOO-kursussen van Wiskobas gevolgd hebben zullen daarbij veel herkennen, dat in de KO-boekjes aan de orde is geweest, waarmee ik maar weer eens het belang van heroriëntering wil onderstrepen.

Tot slot drukken wij hierbij één kaart met toelichting af.

47 Handig optellen



We gaan optellen: 1+2+3+4+5+6+7+8.
Dat doen we zo:
pak de rekenstokjes 1 tot en met 8 (van elk maar één).
Leg ze eerst op een rij achter elkaar.
Pak nu 1 en 8 en leg ze apart tegen elkaar.
Pak nu 2 en 7 en leg ze ook tegen elkaar onder 1 en 8.
Pak nu 3 en 6.
Tegen elkaar onder 2 en 7.
Ga zo door.
Klaar?
Zie je een manier om handig alles op te tellen?
Wat komt er uit?

Ga nu optellen:
1+2+3+4+5+6+7+8+9+10.
Doe dat net zo.

Ga nu optellen:
5+6+7+8+9+10+11+12 op dezelfde manier.

Vertel er eens wat van.
En nu opruimen.

klas: 1 2 **3** **4** **5** 6
groep: **1** **2** 3 allen

je hebt nodig
rekenstokjes

Hulpmiddelen — Colour factor of Cuisenaire.

Mogelijk doel — Het verband vinden tussen optellen en vermenigvuldigen.

Rond de oplossing — Op deze werkkaart komen *rijen* van *op elkaar volgende* getallen voor.
Dit soort rijen is een bijzonder geval van een 'rekenkundige rij', d.w.z. een rij van getallen, waarbij het verschil tussen een getal (term) van de rij en zijn onmiddellijke voorganger *constant* (altijd hetzelfde) is.
Bij de rijen op de werkkaart is dit verschil steeds 1.
Nemen we eens de rij: 3, 7, 11,...,43.
De eerste term van deze rij $a_1 = 3$.
Het constante verschil blijkt 4 te zijn. We schrijven $v = 4$.
D.w.z.:
$a_2 = a_1 + 4$; in het algemeen: $a_2 = a_1 + v$
$a_3 = a_1 + 4 + 4$; in het algemeen: $a_3 = a_1 + 2.4$
$a_4 = a_1 + 4 + 4 + 4$; in het algemeen: $a_4 = a_1 + 3.4$
De laatste term 43 blijkt nu te zijn: $a_1 + 10.4 = a_{11}$.
Het is dus de elfde term van de rij.

Tellen we de 11 termen van deze rij bij elkaar (m.a.w.: vormen we $3 + 7 + 11 + ... + 39 + 43$), dan krijgen we S_{11} (de som van de *eerste 11* termen).
Schrijven we nu onder elkaar:

$$\begin{array}{lcl} S_{11} & = & 3 + 7 + 11 + \ldots + 39 + 43 \\ \underline{S_{11}} & = & \underline{43 + 39 + 35 + \ldots + 7 + 3} \\ 2.S_{11} & = & 46 + 46 + 46 + \ldots + 46 + 46 \end{array} \quad \text{Tel op.}$$

$$2.S_{11} = 11 \times 46, \text{ waarin } 46 = a_1 + a_{11}.$$

Generaliserend kunnen we schrijven:

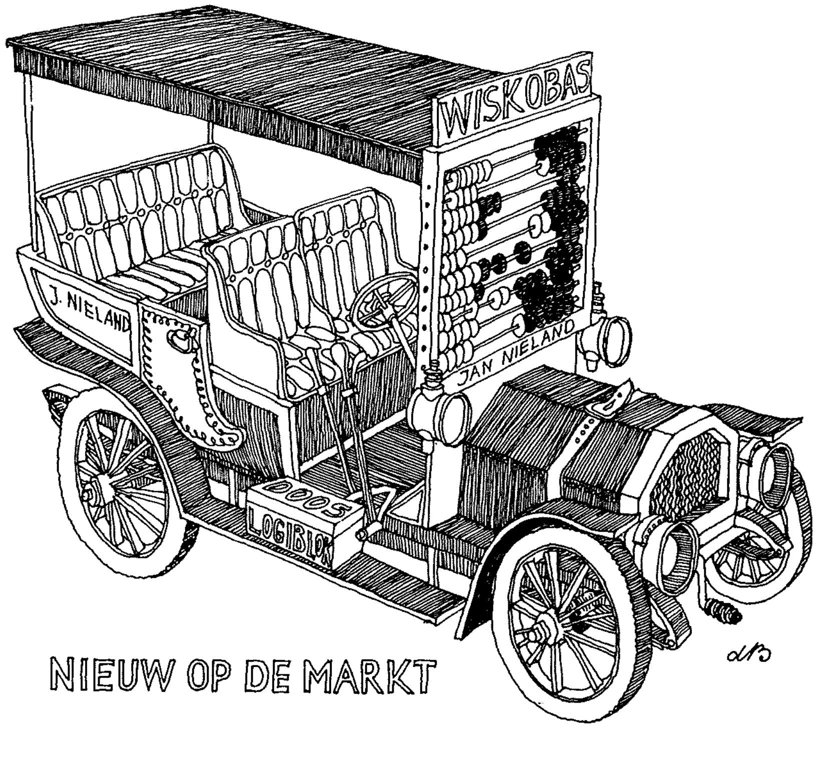
$$\begin{array}{lcl} 2.S_{11} & = & 11.(a_1 + a_{11}) \\ 2.S_n & = & n.(a_1 + a_n) \text{ of} \\ S_n & = & \frac{1}{2}\, n.(a_1 + a_n). \end{array}$$

Juist in verband met rijen, die een *oneven* aantal termen bevatten duiken er moeilijkheden op in het op de werkkaart voorgestelde procedé. Men kan het ondervangen door:

a. een *middelste* term te lenen;
b. met *twee* rijen te werken.

Adviezen

Laat de leerlingen eerst werken met rijen met een *even* aantal termen.
De werkkaart kan dan letterlijk gevolgd worden.
In verband met de hierboven gesignaleerde moeilijkheid moeten we het werken met rijen met een oneven aantal termen zien als een verzwaring van de opgave, om 'verband te vinden tussen optellen en vermenigvuldigen'.
Mogelijk kan dit als een differentiatie-opdracht beschouwd worden.



skriptoteek

JOHAN VAN BRUGGEN
HENK MEYER

Via Drs. J. Nieland ontvingen we van de P.A. 'Ludgerus' te Hilversum o.a. een skriptie van Gerard Derksen en Frans Vermeulen.
Deze beide derdejaars-studenten hebben zich bezig gehouden met het ontwerpen van een tiental series *opdrachtkaarten*, die dienen bij *het automatiseren van de tafels van vermenigvuldiging*, en die zijn geschreven voor tweede en derde klassers.

De opzet van hun werkstuk is als volgt:

* Een tweetal gesprekken met ervaren onderwijzeressen uit klas twee over hun metode bij het aanleren van tafels.
* Onderzoek van twee basisschoolmetoden naar de manier waarop tafels aangeleerd worden.
* Beschrijving van de eerste ideeën voor series opdrachtkaarten.
* Een uitvoerige weergave van het proces dat gevolgd moet worden om van het eerste idee te komen tot een goed hanteerbare opdrachtkaart. Deze weergave beslaat verreweg het grootste deel van de tekst en geschiedt pèr opdrachtkaart.
* Tips voor het gebruik van de opdrachtkaarten in de klassepraktijk.
* Een weergave van de definitieve versies.

Wat betreft de inhoud van de kaarten kunnen we kort zijn: het gaat om *oefenspelen*, waarin veel wordt gewerkt met losse kaartjes, die bij elkaar gelegd moeten worden,
bijvoorbeeld: $\boxed{3 \text{ x } 2}$ $\boxed{6}$
of : $\boxed{5 \text{ x} \boxed{6} = 30}$ (open bewering!)
Daarmee worden allerlei variaties bedacht. Het interessante van deze skriptie is echter vooral het zo duidelijk worden van de worsteling met taal, redaktie en lay-out om te komen tot een opdrachtkaart die voor de tweedeklasser begrijpelijk is, die zo is geschreven dat de opdracht ook uitgevoerd wordt, motiverend werkt en voor de onderwijzer(es) niet te veel organisatorische problemen geeft. Vooral de redaktionele- en lay-out-problemen krijgen veel aandacht, minder de organisatie van het werken met opdrachtkaarten in het algemeen en de plaats en funktie ervan in het didaktisch handelen van de onderwijzer(es).
Op grond van hun ondervindingen komen de schrijvers tot een aantal *aanbevelingen* die we graag doorgeven omdat ze van belang zijn, zowel voor onderwijzenden, die materiaal willen gaan maken, als voor P.A.-studenten die in het kader van een skriptie een serie opdrachtkaarten voor een bepaald onderwerp ontwerpen, uitproberen en herschrijven.

▸ Het werken met opdrachtkaarten kan het best geintroduceerd worden in een klassikale les, waarin àlle leerlingen met dezelfde kaart werken, die vrij simpel kan zijn. De bedoeling is ze te wennen aan de *'doe-taal'*. Een voorbeeld van de auteurs voor klas 2:

1 pak een rood vierkantje
2 pak een geel rondje
3 leg het gele rondje op het rode vierkantje

▸ In het begin kan het aanbeveling verdienen bij elk groepje een *'doe-dat-kind'* te zetten, dat er steeds op wijst dat een opdracht ook werkelijk gedaan moet worden.

▸ Gebruik voor de kaarten dun karton van verschillende kleur; gebruik eventueel vignetten; plastificeer de kaarten. Kleuren en vignetten vergemakkelijken korrektie en opbergen.

▸ Laat de leerlingen uitwerkingen maken in een speciale multoband of een speciaal schrift, niet op losse blaadjes.

▸ Voor het werken met bepaalde kaarten is vaak materiaal nodig, dat het best kan worden opgeborgen in doosjes (koelkastdozen, margarinekuipjes, sigarenblikjes) die dezelfde kleur (vignet, nummer) moeten krijgen als de kaart, waar ze bij horen.

▶ Bijna altijd is het nodig kaarten in een serie op te nemen. De auteurs ontwierpen met veel vallen en opstaan de volgende opbouw (voor een serie kaarten die dezelfde soort oefeningen met toenemende moeilijkheidsgraad geeft):

- *voorbeeldkaart* met vrij uitgebreide tekst, waarin geen enkele stap wordt overgeslagen; na elke opdracht volgt op dezelfde regel de uitroep: doe dat!

> met tafel van twee
> –
> We leggen nu alle kaartjes met tafelsommen *onder elkaar*. Doe dat!
> Leg nu de uitkomsten *achter* de tafelsommen. Doe dat!
>
> Zo nu zijn we bijna klaar.
> Pak *het schrift* dat op de tafel ligt. Doe dat!
> Schrijf de sommen van de kaartjes op. Doe dat!

- *vervolgkaarten*, waarop soortgelijke oefeningen worden gedaan, maar waar de tekst geleidelijk aan *komplekser* wordt en korter;

> met tafel van drie
> –
> Leg alle kaartjes met tafelsommen *onder elkaar*.
>
> Leg nu de uitkomsten *achter* de tafelsommen.
>
> Nu ben je bijna klaar.
> Pak *het schrift* dat op de tafel ligt.
>
> Schrijf de sommen van de kaartjes op.

> met tafel van vijf
> –
> Op deze kaartjes staan *uitkomsten*.
> Leg ze achter de kaartjes
> met de tafelsommen.
>
> Nu ben je bijna klaar.
> Pak het schrift dat op de tafel ligt.
>
> Schrijf *de sommen van de kaartjes op.*

> met tafel van 10
> –
> Pak nu zakje 18 uit het doosje.
> Leg de kaartjes achter de goede tafelsommen.
>
> Heb je dat gedaan?
> Goed. Schrijf de sommen van de kaartjes dan op in het schrift.

▶ Ook voor wat betreft de redaktie geven de schrijvers een aantal aanbevelingen:

- leesgemak
  - korte zinnen
  - afwisseling korte en iets langere zinnen
  - volgorde altijd: onderwerp, gezegde, bepalingen
  - geen woorden tussen lidwoord en zelfstandig naamwoord
  - geen te lange woorden
- direktheid
  - noem zonodig konkrete personen
  - hanteer de jij-vorm
  - gebruik uitroeptekens e.d. verlevendigingen
  - geef een individueel voorbeeld
- abstraktie-nivo
  - noem konkrete dingen en personen
  - weinig ontkenningen
  - liever twee zinnen dan een gedrongen zin
  - geef desnoods een uitvoerige beschrijving
  - vermijd onnodige informatie ('ruis')
- woordkeus
  - konkreet
  - korte woorden
  - geen vreemde woorden
  - ga uit van de aktieve woordenschat van de lezer
  - geen afkortingen
  - pas op met beeldspraak.

Kortom: een opdrachtkaart is gekenmerkt door een *doe-taal* en moet allereerst *duidelijk* zijn.
We wensen u veel sukses bij uw ontwerpaktiviteiten en houden ons aanbevolen voor een verslag ervan!

kleuters en wiskunde

JES MELIS
HENNEKE DE LORME-BAKKER

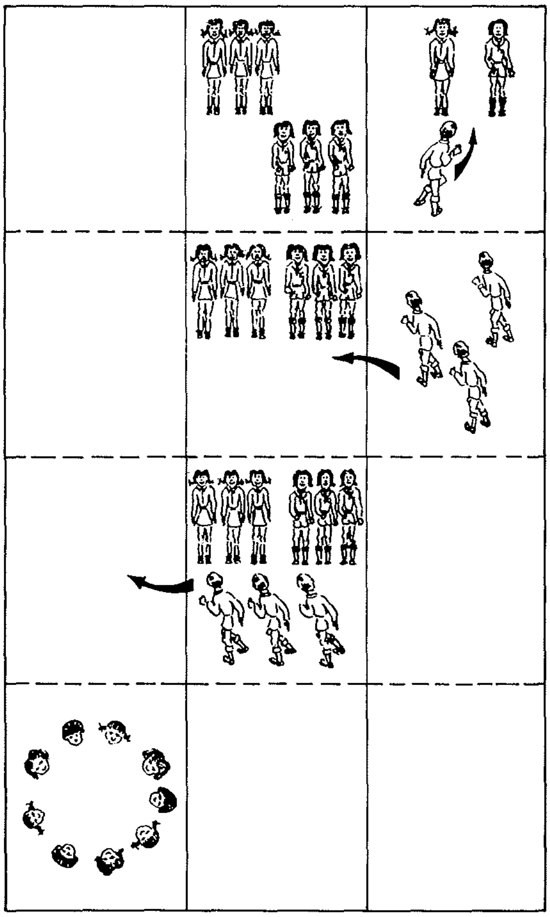
HET DRIESPEL

Het 'driespel' is een getalspel dat heel goed in de kleuterschool kan worden gespeeld. We hebben het op verschillende manieren gespeeld.

▸ **Een startmogelijkheid**

Een kleuter mag voor de klas komen. We zeggen: 'dit is een *los* kind'. Duidelijk moet verklaard worden waaròm we het woord 'los' gebruiken.
Een tweede kind mag naar voren komen.
'Wat hebben we nu?'
'Twee *losse* kinderen juf, want ze geven elkaar geen hand. Ze staan allebei los.'
'We maken een afspraak. Het plaatsje waar de kinderen nu staan, daar bij het kruisje, dat is het *plaatsje voor de lossen*. En we spreken ook af dat drie losse kinderen niet mag?'
De kinderen zoeken met elkaar naar een oplossing.
Zonder veel hulp van de juf komen ze met: 'Nou, dan geven we elkaar een hand en gaan in een kringetje staan.'
De derde kleuter mag naar voren komen. Nu wordt het spannend. Wat gaat er gebeuren?
'Het is een klein kringetje, er staan maar 3 kinderen?'
Hierover wordt even gepraat.
'Mogen zij nu blijven staan op het plaatsje van de 'lossen'?'
'Tuurlijk niet, want ik wil ook wel 'es.'
'Ja er zijn nog meer kinderen die mee willen doen. Het kringetje moet maar een plaatsje opschuiven. En dat plaatsje daar bij het rondje noemen we nu maar het *plaatsje voor de kleine kringetjes*. Hoeveel staan er nu op het plaatsje van de lossen?'
'Niets.' 'Geen.'
'Kun je dat ook anders zeggen?'
'Nul.'
Zo komen er steeds kleuters naar voren. Op een gegeven moment staan er 2 kleine kringetjes en 2 lossen. Wat nu?
'Ik denk dat er zo weer wat gaat gebeuren als het volgende kind komt. Wat denken jullie?'
Het is belangrijk om duidelijk van te voren te bespreken wat er moet gebeuren.

Drie lossen, dat mag niet. Drie lossen worden een kringetje en moeten van het plaatsje van de lossen verdwijnen. Er komen dan drie kleine kringetjes en dat mag ook al niet. Die moeten weer opschuiven naar de plaats van de grote kringen.



'We zullen eens kijken of het goed gaat. Als ze het goed doen dan mag je klappen en doen ze het fout dan trappel je met je voeten.'

Foutloos worden de handelingen vervolgens verricht.

▸ **Een andere mogelijkheid**

Dit 'driespel' kan ook op andere manieren gespeeld worden.
Een voorbeeld:
De groep zit bij elkaar, er tegenover enkele kinderen naast elkaar.
De leidster (of een van de kleuters) geeft met een zekere regelmaat blokken door aan 't kind dat naast haar zit. Zodra dit kind er drie heeft geeft hij/zij ze door aan nummer twee die er een *'weggetje'* van maakt. Heeft dit kind er drie van dan wordt door de volgende een groter stuk weg gelegd, enz.
De groep moet er op letten dat het doorgeven vlot gebeurt. Als dat niet goed gaat dan moeten ze door roepen of via een teken aanwijzingen geven.
De kinderen zijn dus allemaal bij dit 'spel' betrokken.

▸ **Opmerkingen kleuters**

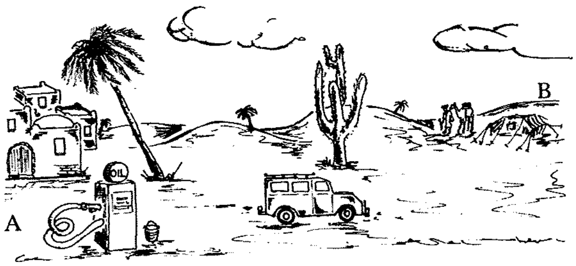
Uit de opmerkingen van de kinderen is op te maken dat ze heel wat van dit spel hebben geleerd.

* Bij 'twee is te veel' moet je hard werken zeg. Dat gaat vlug. Maar dan hoef je niet zo veel te tellen. Je hebt wel veel plaatsen nodig.
* 'Eén is te veel' kun je beter niet spelen. Je blijft aan de gang.
* 'Zestien is te veel' is leuk van de zomer op het plein met alle kinderen van de school. Nu gaat het niet. Zijn er te weinig.

4

Een woestijn kan voor kreatieve lieden een bron van wiskundige problemen zijn. Denkt u maar aan het berekenen van het aantal zandkorrels. Archimedes sukkelde daar in vroeger eeuwen al mee, of beter: zijn tijdgenoten. Zij vroegen zich af of er wel een getal bestond dat een dergelijke hoeveelheid kon aangeven!

Tegenwoordig worden we met meer technische problemen gekonfronteerd. Zoals bijvoorbeeld het probleem van de *woestijnreiziger* die met zijn landrover van de rand van de woestijn (A) naar een oase (B) in het midden van de woestijn moet rijden en van daaruit weer terug.



De afstand A-B is 200 km. In A is een benzinepomp. In de woestijn en ook in B zijn nog geen benzinemaatschappijen verschenen.

De mogelijkheid is nu dat ons autootje 1 op 1 rijdt, d.w.z. voor elke km precies 1 liter benzine verbruikt, terwijl in de tank, in jerrycans en flessen in totaal slechts 200 liter benzine meegenomen kan worden.
Onze chauffeur is echter niet voor een gat te vangen en bedenkt dat hij een eind de woestijn in kan rijden, een hoeveelheid benzine kan achterlaten, vervolgens terugrijden, weer benzine opnemen, een deel van de benzine weer op een punt langs de route achterlaten, weer terug rijden, enz.
Op deze wijze kan hij langs de route voorraadjes benzine aanleggen die het hem mogelijk maken van A naar B en terug te rijden.
We nemen daarbij maar aan, dat er geen toevallige passanten zijn, die de achtergelaten benzine ten eigen bate gebruiken.

Inmiddels voelt u waarschijnlijk reeds het probleem!

Wat is de minimale afstand die onze woestijnreiziger in zijn landrover moet afleggen om op deze wijze van A naar B en terug te rijden?

Wellicht wordt u bij het zoeken naar een oplossing gestimuleerd door de mededeling dat uw schrijver de oplossing ook niet weet.
M.a.w.: uw oplossingen worden in grote spanning tegemoet gezien!

een jonge onder basje zoeker

DIK OORT

SNEEUWWITJE EN DE KOMPUTER

Bas komt binnen met enige plastic drinkbekertjes.

Vader: Hoeveel bekers heb je daar, Basje?

Basje : Eens even tellen; zeventien.

Vader: Weet je hoe je dat aantal schrijft?

Basje : Wat denkt u nou van me, een 1 en een 7.

Vader: Zullen we het nu eens anders gaan noteren?

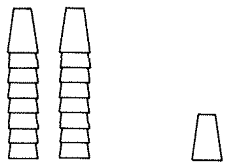
Basje : Kan dat dan?

Vader: Ja zeker, schuif zo vaak als je kunt acht bekertjes in elkaar.

Basje : Dat gaat twee keer en dan houd ik er één over.

Vader: Mooi, en nu zet je de torentjes van acht vlak bij elkaar, een eindje links van het losse bekertje.

Basje plaatst ze als volgt:



Vader: En dat noteren we als volgt: **2** **1**

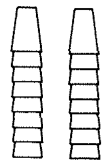
Basje : Maar 't zijn er toch zeventien en geen eenentwintig.

Vader: Je mag nu niet eenentwintig zeggen, maar wel:
twee torentjes van acht, en één los bekertje
of:
twee torentjes en één losse
of kortweg:
twee, één.

Basje : Moet je er altijd acht in elkaar schuiven?

Vader: Welnee, dat hebben we nu afgesproken; we spelen het achtspel. Haal nu eens een bekertje weg.

Basje neemt het losse bekertje weg en houdt over:



Vader: En hoe noteer je dat?

Basje schrijft op: **2**

Vader: En wat zeg je daartegen?

Basje : Twee torentjes, of gewoon: twee.

Vader: Is dat nu wel juist?

Basje begrijpt 't niet.

Vader: Als iemand alleen die 2 ziet staan, hoe weet hij dan dat het twee torentjes zijn en niet bijvoorbeeld twee losse?

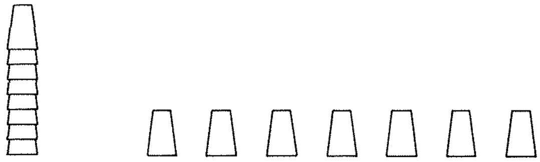
Basje : O ja, ik had moeten schrijven 20, dus daar zeg ik dan tegen:
twee, nul,
of: twee torentjes en nul losse.

Vader: Juist en haal er nu nog één af.

Basje : Dan moet ik een torentje aanbreken.

Vader: Inderdaad doe dat maar.

Basje krijgt nu:



Basje : Nu heb ik één torentje en zeven losse en dat schrijf ik als:

1 7

Vader: Dus als je van twee torentjes één bekertje afhaalt houd je over één torentje en zeven losse bekertjes.
Zou je dat kort kunnen opschrijven?

Basje, na diep nadenken:

20 − 1 = 17.

Basje : Daar zou ik op school een mooi cijfer voor krijgen.

Vader: Als je maar niet zegt dat twintig min één zeventien is. Maar als je 't achtspel speelt geldt 'twee nul' verminderd met 'één' is 'één, zeven'.

Basje : Spelen ze 't achtspel wel?

Vader: Jawel, maar meestal zegt men dan dat men noteert in het achttallig stelsel.

Basje : Kun je ook een ander spel spelen?

Vader: Jazeker, laten we het driespel maar spelen.

Basje : Dan moet ik van drie losse bekertjes een torentje maken; dat is dan wel een klein torentje.

Vader: Ja, dat is zo; het driespel is nu eenmaal niet 't achtspel.
Weet je ook wat er gebeuren moet als je drie torentjes hebt?

Basje : Die moet ik zeker ook weer in elkaar schuiven.

Vader: Heel goed.

Basje : Dat wordt een hoge toren; hoe moet ik die noemen?

Vader: Bedenk maar wat.

Basje : Die noem ik dan 'een toeter'.

Vader: Best; weet je nu hoeveel bekertjes er in een toeter zitten?

Basje : Drie torentjes van elk drie bekertjes; dus negen bekertjes.

Vader: Goed zo. Nu gaan we het driespel spelen; ik geef je er steeds een bekertje bij en jij moet ze goed neerzetten en 't meteen noteren.

Vader geeft de eerste beker.

Basje zet hem neer en noteert: **1**

Basje : Dat is één losse; ik heb nog geen torentje.

Vader: Je zou ook 01 kunnen noteren.

Basje : Nul torentjes en één losse.
Ik zou zelfs 001 kunnen schrijven; nul toeters, nul torentjes en één losse.

Vader: Inderdaad, maar laat die nullen nu even weg.

Vader geeft het volgende bekertje.

Basje plaatst het erbij en noteert: **2**

Vader: Hier heb je het volgende bekertje; pas op, we spelen het driespel.

Basje : Ik heb 't door; ik heb nu drie bekertjes, die schuif ik in elkaar en dan heb ik m'n eerste torentje.

Vader: Je moet dat torentje meer naar links plaatsen want nu staat 't op de plaats van de losse bekertjes.

Basje verplaatst het torentje

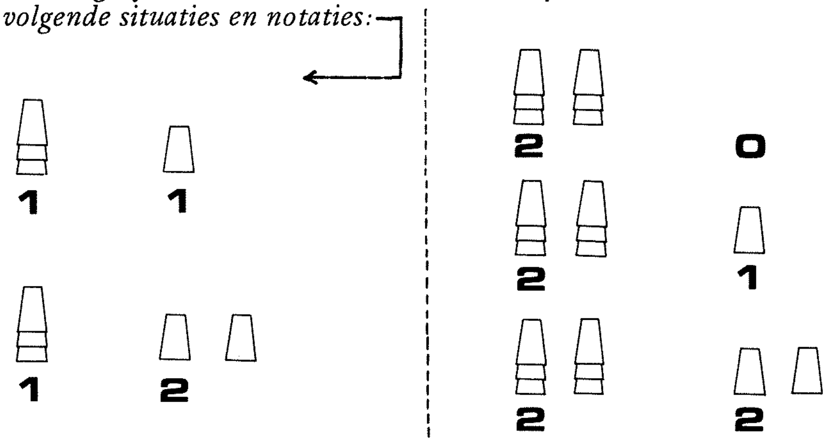
en noteert: **1 0**

Vader: Goed: één, nul.

Basje : 't Lijkt wel een voetbaluitslag.

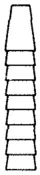
Vader: Als je 't maar uit je hoofd laat om tien te zeggen.

Vader geeft Bas steeds weer een bekertje en zo ontstaan achtereenvolgens de volgende situaties en notaties:



Vader: Nu wordt het spannend; ik geef je er nog een.

Basje : Ik zie al wat er gebeurt; ik heb nu drie losse bekertjes, dat wordt een torentje.
Dan heb ik drie torentjes en daar maak ik een toeter van.



Vader: Mooi en je zet 'm meteen op de goede plaats.
Hoe noteer je dat nu?

Basje : 1 0 0

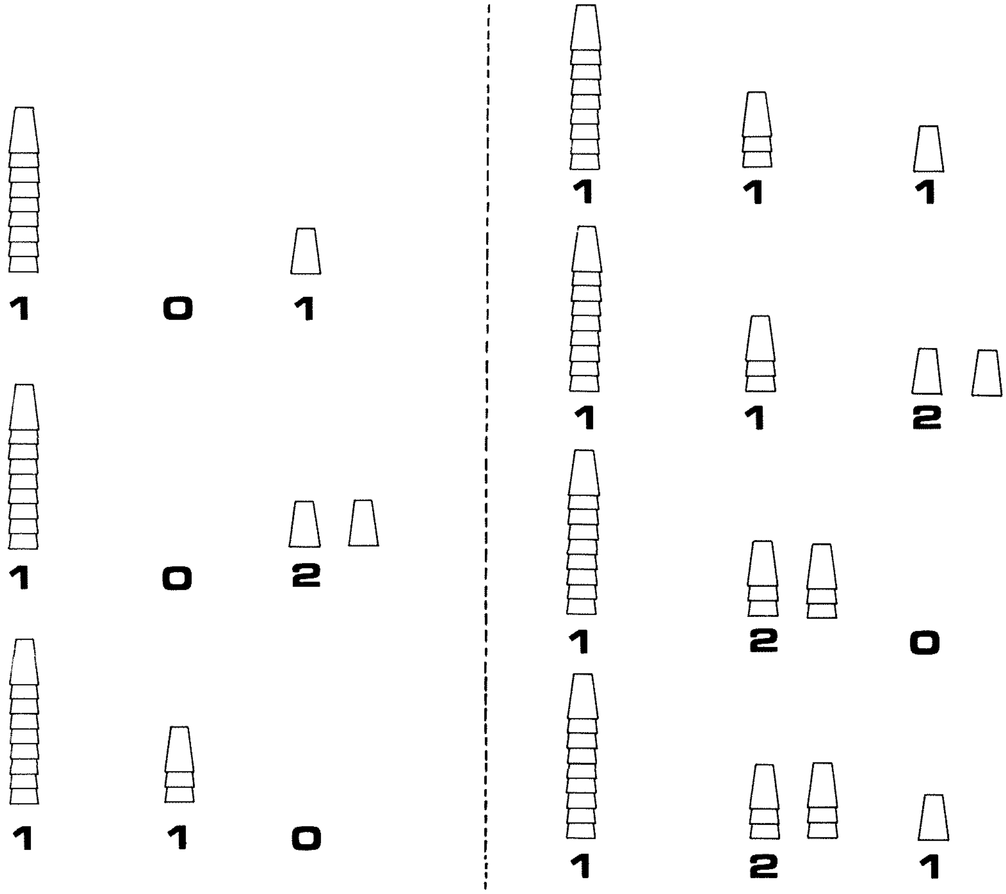
Vader: En wat zeg je daar tegen?

Basje : In elk geval niet honderd.

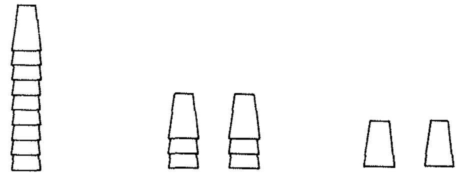
Vader: Wat dan wel?

Basje : Eén toeter, nul torentjes en nul losse, of: een, nul, nul.

Basje krijgt nu steeds weer een bekertje en krijgt achtereenvolgens:



Vader: Ziezo en hier komt de laatste.



Basje zet 't bekertje erbij en noteert: **1 2 2**

Basje : Maar 't zijn toch dezelfde zeventien bekertjes.

Vader: Natuurlijk, maar bij 't driespel, of mooier gezegd in 't drietallig stelsel noteer je dit aantal als 122. Zie je in dat het toch het aantal zeventien voorstelt?

Basje : Ja, want 'een, twee, twee' is één toeter van negen, twee torentjes van elk drie, en twee losse; negen plus zes plus twee is zeventien.

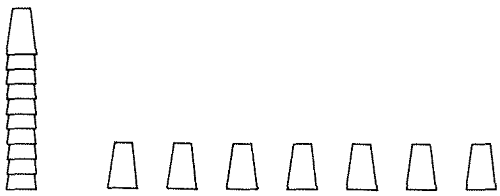
Vader: Heb je ook in de gaten hoeveel verschillende cijfers je bij het driespel nodig hebt?

Basje : Ja, de 0, de 1 en de 2; dat zijn er drie.
Bij het achtspel gebruikten we 0 tot en met 7, dat zijn er acht.
Deze spelletjes hebben we op school nooit gespeeld.

Vader: Ik denk dat je nu een beetje jokt. Laten we met de zeventien bekertjes nu maar even 't tienspel spelen.

Basje : Dan maak ik één toren van tien en dan heb ik nog zeven losse.

Basje zet ze als volgt neer:



Vader: En hoe schrijf je dat?

Basje noteert: **1 7**

Basje : Verhip, nu krijg ik wèl zeventien.

Vader: Je hebt eigenlijk genoteerd 'een, zeven', maar alleen als je 't tienspel speelt mag je er zeventien tegen zeggen.

Basje : Dus ik heb op school steeds 't tienspel gespeeld, zonder dat ik 't wist.

Vader: Precies, gewoonlijk noteren we de getallen volgens 't tienspel of, anders gezegd, in 't tientallig stelsel en we zeggen dan tegen 'een, zeven' zeventien en tegen 'twee, een' eenentwintig.

Basje : En 'een, nul, nul' noemen we honderd.

Vader: Juist maar denk er om; alleen bij 't tienspel.

Basje : Nu begrijp ik ook dat we tien cijfers nodig hebben. Waarom noteren we in 't tientallig stelsel en niet in een ander?

Vader: Denk maar goed na en wees daarbij eens handig.

Basje : O, zeker omdat we aan beide handen samen tien vingers hebben. Worden andere talstelsels veel gebruikt?

Vader: Ja, de komputer — weet je wat dat is?

Basje : Natuurlijk die kan heel grote berekeningen razendsnel maken en bovendien kan hij een heleboel getallen in zijn geheugen bewaren.

Vader: Ik hoor 't, je weet er al iets van. Nou de komputer speelt het tweespel, die noteert als het ware alle getallen met alleen maar de cijfers 0 en 1.

Basje : Waarom zo weinig?

Vader: Dat is nogal ingewikkeld, maar in 't kort komt het hier op neer: in de komputer zitten heel erg veel zeer kleine ringetjes die op twee manieren magnetisch kunnen zijn; de ene manier is de 0, de andere de 1. Je moet straks het tweespel nog maar eens met je bekers spelen.

Basje : Ja en dan probeer ik ook het éénspel.

Vader: Zou dat lukken, denk je?

Basje : Nee natuurlijk niet, want één los bekertje wordt dan meteen al een torentje en die meteen weer een toeter en dat zou steeds doorgaan. Ik zou niet weten waar ik met 't eerste bekertje terecht zou komen.

Vader: Dat heb je goed in de gaten; spelen met 't éénspel gaat niet.

Basje : En wie gebruikt nog andere talstelsels?

Vader: Toen de tekenfilm 'Sneeuwwitje' gemaakt werd heeft men, om tekenwerk uit te sparen, elk kaboutertje aan elke hand één vinger minder gegeven dan wij hebben.

Basje : Waarom niet nog minder, dan hadden ze nog minder tekenwerk.

Vader: Ze hebben 't geprobeerd met een klein stukje film, maar de kijkers hadden 't meteen in de gaten.

Basje : Dus de kaboutertjes uit die film hebben totaal acht vingers; dan schrijven die hun getallen in 't achttallige stelsel.

Vader: Ik vermoed van wel; als je één van die kereltjes spreekt moet je 't 'm tòch eens vragen.

INHOUD

3.1 Operaties 2 — 756
3.2 De rekenkundige bewerkingen — H. Freudenthal 757
3.3 Operaties op de getallenlijn — Leen Streefland 764
3.4 Automatiseren van operaties — Johan van Bruggen 779
3.5 Wat hoofdrekenen is, weet iedereen — Huub Jansen 784
3.6 Operaties op een band — Hans de Boer 787
3.7 Rekenen met machines — Dik Oort en Henk Meyer 790
3.8 Vermenigvuldigen — Huub Jansen en Fred Goffree .. 793
3.9 Operaties in het integratieplan — Adri Treffers 801

variabel blok

3.1 OPERATIES 2

3.2 DE REKENKUNDIGE BEWERKINGEN

OORSPRONG, ONTWIKKELING,
TOEPASSINGEN

H. FREUDENTHAL

De konkrete grondslag van bewerkingen
Van alle rekenkundige bewerkingen mag men stellen, dat hun oorsprong in de geschiedenis van het individu èn van het mensengeslacht duidelijk en onmiskenbaar is, maar tevens dat hun oorspronkelijke betekenis slechts één aspekt onder vele is.
Wat de bewerkingen ondergaat, zijn uiteraard de konkreet gegeven hoeveelheden of grootheden oorspronkelijk, en de bewerking zelf is een konkreet gebeuren – bij het optellen die van het samenvoegen, bij het aftrekken die van het wegnemen. 'Bij het vermenigvuldigen...' was ik haast doorgegaan, maar daar klopt het al niet meer. In 3 maal 5 knikkers vormen de knikkers nog een konkreet gegeven, maar wat is de '3' in 'driemaal'?

Het is opvallend hoe gemakkelijk en snel *het konkrete afslijt* van de getallen. De onderwijzer heeft er geen erg in, maar de kinderen hebben het evenmin. Van '5 knikkers en 3 knikkers' naar '5 + 3' is het een onmerkbare onbewuste stap. Toch is het niet zo eenvoudig. De 'knikkers' slijten er af, maar komt er iets nieuws voor in de plaats?
Wat wordt er nu eigenlijk samengevoegd om opgeteld te worden, als het geen knikkers zijn?
Wèl, '5 sekonden en 3 sekonden' of '5 meter en 3 meter' of als u wilt, '5 millioen en 3 millioen' – dat is geen moeilijkheid. De taalkundige struktuur van '5 knikkers en 3 knikkers' werkt lang genoeg door, om zo iets automatisch te laten funktioneren.

Maar nu: 'in de loop van de dag heb ik 5 gulden uitgegeven en ik heb nog 3 gulden; hoeveel had ik vanochtend?'
Wie ooit kinderen les heeft gegeven, weet dat er een sterke neiging bestaat, er '5 – 3 = 2 gulden' op te antwoorden – het woord 'uitgegeven' suggereert immers een aftrekking. Welke min of meer konkrete summanden moet je hier samenvatten? De 3 guldens die ik nog heb en de 5 die foetsie zijn – dus niet zo erg konkreet meer – om de 8 te herstellen die ik vanochtend had.
'Drie mensen zijn al geholpen en ik ben nu de vijfde; de hoeveelste was ik toen ik kwam?' – ook hier moet ik bij de mensen die nog wachten díe optellen die weg zijn.
Maar bovendien is er nog een andere komplikatie; naast hoofdtelwoorden komen er rangtelwoorden in het vraagstuk voor.
'Aan een regatta namen 75 zeilboten deel; na een uur waren er nog 48; hoeveel hadden het opgegeven?', was een vraagstuk, dat mijn oudste zoontje indertijd moest beantwoorden, en hij zei '48'.
'Hè?'
'Nou, als ze er na een uur nòg waren, konden ze het wel opgeven.'
De jongen had nog niet door, dat in een vraagstuk met twee getallen er in elk geval een bewerking op moest worden uitgevoerd.
Maar is dat nu een reëel standpunt? Waarom niet ook een keer een vraag zoals:
'27 kinderen maakten met hun juffrouw een schoolreisje; hoeveel kwamen er weer thuis?'
Wedden, als je dit vraagt, dat er geen een op 't idee komt 'een juffrouw en 27 kinderen'.
Geen bewerking is ook een bewerking – zou je kunnen zeggen – en het is bovendien degene die het vaakst wordt toegepast.

Getallen als nummers
Er is een soort getallen waarop principieel geen bewerkingen toepasselijk zijn: *telefoonnummers, kentekennummers, nummers van bankbiljetten, van wetsartikelen* – je kunt geen zinnige gevallen bedenken, waarbij je die zou moeten optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen.
Of toch wel?
Een komputer, die iets met aantallen auto's

moet doen, is misschien wel eens genoodzaakt, kentekennummers van elkaar af te trekken. Maar in 't algemeen zijn dit soort getallen niet eens nummers waarmee je iets op een rij zet, maar eenvoudig konventionele namen, waarmee je objekten onderscheidt en die je zonodig goed moet onthouden en naar behoefte ongewijzigd reproduceren.
'Ik heb haast je vader ontmoet'.
'Hoezo haast?'
'Je vader is toch tramkondukteur kraagnummer 273, is 't niet? Nou ben ik met nummer 272 op de tram gereden'.
Als u dit verhaal met de hoofdprijs van de Staatsloterij vertelt, klinkt het niet eens gek — waarom eigenlijk?

Huisnummers zijn al weer een ander geval. Ze vertellen je hoe ver je een straat moet aflopen om op 't gewenste adres te komen. Of je naar links of rechts gaat, hangt ervan af of het nummer dat je zoekt groter of kleiner is dan dat waar je voor staat. Hier doet *de orde der nummers* zich gelden; maar toch niet alleen de orde. Als ik wil weten hoeveel huizen ik nog voor de boeg heb, moet ik wel op huisnummers de bewerking van aftrekken toepassen.

Rapportcijfers zijn ook van die nummers waar het eigenlijk alleen op de orde aankomt. Maar stilaan ga je ze ook optellen, meestal niet terwille van de som die eruit komt, maar om de som door het aantal cijfers te delen, dus het gemiddelde te vormen.
Maar nu, rapportcijfers met elkaar vermenigvuldigen — komt dit ergens te pas?
Wèl, heel indirekt, bij statistische bewerkingen, korrelaties uitrekenen, zou dit zich nog voor kunnen doen.
De 3 van 3 kg en de 270 van *f* 2.70 kun je je daarentegen gemakkelijk in een verband van vermenigvuldigen en delen voorstellen, maar bepaald niet in een van optellen of aftrekken.

Naar zijn oorsprong in de realiteit kan men *aan het getal vele aspekten* onderscheiden; naar de realiteit van de bewerkingen, die men er op uitvoert, zijn het er nog veel meer.

Samenvoegen en tellen
Zoals ik reeds zei, ligt *aan de bewerking van optellen het samenvoegen ten grondslag.* Wat samengevoegd wordt, kunnen dan stapels geïsoleerde objekten zijn, en dat is het ook waarmee men het rekenonderwijs pleegt te beginnen: knikkers, bloemen, beestjes, potloden. Het zijn over het algemeen gescheiden stapels, waarop men de optelling beproeft, maar dit spreekt niet vanzelf: als de tweelingen Jan en Piet op hun verjaardag de een 6 en de ander 5 vriendjes hebben gevraagd kan dit samen van alles tussen 6 en 11 zijn.

5 appelen hier en 3 appelen daar zijn samen 8 appelen, maar hoe is het met 5 appelen en 3 peren?
Wel, waarvoor moet je die eigenlijk optellen?
Misschien om onder 4 personen te verdelen en te weten, hoeveel ieder krijgt. Ieder krijgt er 2.
Maar 2 wat?
2 stuks fruit, en dan mag hij tussen een appel en een peer kiezen, als hij de eerste of een der eersten aan de beurt is.
5 appelen en 3 peren samen zijn 8 stuks fruit. Akkoord?
Maar 8 stuks fruit hoeven natuurlijk niet 5 appelen en 3 peren te zijn.
Het werkwoord 'zijn' is hier niet de 'is' van '5 + 3 = 8', want die stelt dat links en rechts ervan precies hetzelfde is bedoeld, beide keer de hoeveelheid 8, alleen links wat omslachtiger en rechts meer beknopt aangeduid, zoals ook in
'Amsterdam is de hoofdstad van Nederland'
de 'is' twee omschrijvingen van hetzelfde objekt met elkaar verbindt.
Dus
geen 5 appelen + 3 peren = 8 stuks fruit.
Maar dan ook
geen 5 appelen + 3 appelen = 8 appelen.
Want wat door het plus-teken wordt verbonden, horen getallen of hoeveelheden te zijn, d.w.z wiskundige objekten en geen voorwerpen. Ik *voeg die appelen bij elkaar*, maar ik *tel hun aantallen op*. Wat ik samenvoeg, kunnen voorwerpen zijn, wat ik optel zijn matematische objekten.

Wat ik bij het optellen samenvoeg, zijn wel heel in 't begin echt stapels konkrete voorwerpen, maar spoedig worden het denkbeeldige. De knikkers van Jan en Piet die Lies moet optellen, leiden gauw een even papieren bestaan als hun eigenaars Jan en Piet, en het

samenvoegen van deze stapels wordt een puur denkbeeldige aktiviteit.
Maar al gauw worden ook dingen terwille van het optellen samengevoegd, die helemaal niet te stapelen zijn. Als twee staven van 5 m en 3 m respektievelijk, of twee wegen van 5 km en 3 km of twee vloeistof-hoeveelheden van 5 l en 3 l samen worden gevoegd, is er van stapels van 5 en 3 losse meters of kilometers of liters geen sprake. Dit moet men zich, dacht ik, goed realiseren, want wie zich door de taalkundige analogie van 5 + 3 = 8 naar 5 m + 3 m = 8 m laat leiden, behoeft nog lang niet te hebben begrepen, wat hier aan de hand is.

Grootheden
De uit het telproces voortgekomen getallen worden hier via een nieuwe aktiviteit, *het meten*, voor nieuwe doelen ingeschakeld, namelijk *om grootheden numeriek te vatten*, maar in beginsel is het meten en het werken met grootheden onafhankelijk van deze numerieke opvatting. Ik kan objekten door ze op elkaar te leggen ten aanzien van hun lengte vergelijken, door ze op een weegschaal te plaatsen ten aanzien van hun gewicht, door ze met elkaar te ritsen, ten aanzien van hun hardheid; ik kan schakers of worstelaars met elkaar vergelijken door ze met elkaar te laten strijden. Ik kan hierbij klassen van gelijke lengte, gelijk gewicht, gelijke hardheid, gelijke schaak- of worstelsterkte vormen en deze klassen onderling rangschikken naar toenemende kwaliteit.
Men komt zo werkende niet verder dan het *aanbrengen van een zekere orde*. Men kan meer bereiken als de te vergelijken objekten ook samengevoegd kunnen worden — twee lengtes tot een nieuwe lengte, twee gewichten tot een nieuw gewicht.
Preciezer: het moet een manier van samenvoegen zijn, waarbij de klasse van het samengestelde alleen van de klassen der samenstellende delen afhangt, dus als ik de twee objekten door even lange (even zware) vervang, moet het samengestelde even lang (even zwaar) blijven.

Zo'n systeem noemt men een grootheid. Wil men een grootheid numeriek vatten, dan moet men *een standaardmaat invoeren*, een standaardmeter of standaardkilogram bijvoorbeeld, zoals ze in Parijs liggen opgeborgen en waarvan er overal kopieën zijn te verkrijgen. Wat even lang (even zwaar) is als 5 van deze eenheden samen, heet een lengte van 5 m (een gewicht van 5 kg); tel ik twee lengtes van 5 m en 3 m (twee gewichten van 5 kg en 3 kg) op, dan denk ik nauwelijks meer aan de 5 losse meters (kg), waarmee de een en de 3 waarmee de ander is gemeten, noch aan enig samenvoegen ervan.
Ik ga trouwens verder — om kleine objekten te meten of om nauwkeuriger te meten, verdeel ik meter (kilogram) in decimeters (onsen), zodat 10 objekten van elk, een decimeter lang (een ons zwaar), samen er een van 1 m lang (1 kg zwaar) opleveren.
Wanneer ik dan van iets konstateer, dat het 153 dm lang (153 ons zwaar) is, dan denk ik in de verste verte niet meer aan 153 losse decimeters (onsen) waaruit zoiets zou zijn samengesteld. Ik meet en weeg trouwens niet eens met die losse eenheden, maar gebruik er naar behoefte kleinere en grotere voor — meten is geen tellen meer, maar een soms erg ingewikkelde *procedure, waarbij alle bewerkingen te pas kunnen komen*.

Bewerkingen met grootheden
Alle bewerkingen? Ja inderdaad, op grootheden is veelal niet alleen het optellen en aftrekken toepasselijk, ze worden ook onderling vermenigvuldigd en gedeeld. Denk maar aan oppervlakte, die als het om rechthoeken gaat, verkregen wordt door lengte en breedte te vermenigvuldigen, aan snelheid die als weg gedeeld door tijd verkregen wordt. Men ziet het ook aan de standaardmaten, m^2 d.w.z. meter maal meter voor de oppervlakte, m/sek., d.w.z. meter gedeeld door sekonde voor de snelheid.

Maar is er tussen grootheden ook van vermenigvuldigen sprake, alvorens standaardmaten zijn vastgelegd? Zeker, een rechthoek heeft nu eenmaal een bepaalde opppervlakte en of ik lengte- en breedtematen erbij haal om die te meten, doet er niet toe. Ze hebben nu eenmaal bepaald dat de standdaardoppervlakte een vierkant met zijde één meter is, maar ze hadden die ook willekeurig anders kunnen vaststellen en in de historie van de maten vóór het metrieke stelsel, zijn er heel wat oppervlakte- en inhoudsmaten, los van de lengtematen, geweest.

Maar waarin bestaat nu dit *vermenigvuldigings- en delingsverband tussen grootheden* als het niet al numeriek is uitgedrukt?
Wel, als ik van een vlak of ruimtelijk objekt alle lengte-afmetingen verdubbel, verdrievoudig, enz. wordt oppervlakte of inhoud met 4, 9,... resp. 8, 27,... vermenigvuldigd — algemeen krijgen bij vermenigvuldiging van de lengte-afmetingen met n de oppervlakten en inhouden een faktor n^2 resp. n^3 — los van de keuze van standaardmaten.
Een vierkant of kubus gaat bij verdubbeling van de ribbe in een grotere over die uit 4 resp. 8 van de oorspronkelijke is samengesteld. Het doet er niet toe, of en hoe lengtes, oppervlakten, inhouden numeriek zijn aangegeven — dit zijn feiten, die aan het numeriek uitdrukken voorafgaan.

Door een wat veraf liggend voorbeeld wordt dit misschien nog duidelijker.
Lichtbronnen op dubbele afstand zie je maar een kwart zo helder — door van hetzelfde soort lichtbron (bijv. een zaklantaarn) er één op de ene afstand en vier op de dubbele afstand te plaatsen (ongeveer in elkanders verlengden) kun je dit proefondervindelijk nagaan. Dus dubbele afstand — kwart van de helderheid.
Maar wat is deze helderheid? Natuurlijk zijn er tegenwoordig maten voor, maar behalve verlichtingstechnici zullen er niet velen zijn, die die maten kennen. De maten doen er echter niet toe. Helderheid is ook zonder maten een grootheid; ik kan helderheden vergelijken en — heel konkreet — optellen.
Ik kan helderheden ook vermenigvuldigen, te weten met afstanden in 't kwadraat en dat doe ik als ik lichtbronnen, op verschillende afstand gelegen, wil vergelijken, alsof ze zich op dezelfde afstand bevonden; wat n keer zo ver is krijgt er een faktor n^2 bij; waarvan de afstand het n-de deel is, dat wordt door n^2 gedeeld — zoals ik daarstraks, om de helderheden gelijk te maken, op dubbele afstand vier zaklantaarns plaatste.
Dat men snelheden door km/sek. of km/uur meet, is in het tijdperk van sport en auto welbekend. De breukstreep tussen de maateenheden wordt ook als 'per' gelezen, en dat mag natuurlijk, maar het idee er achter is toch echt dat van een deling — 240 km gedeeld door 3 uur is echt 80 km/uur. Maar ook dit kan los van alle maten. In dezelfde tijd de dubbele weg betekent dubbele snelheid, in de dubbele tijd dezelfde weg betekent halve snelheid — het is net of de weg in de teller en de tijd in de noemer van de breuk snelheid staat.

Waarom nu wel 5 m + 3 m = 8 m en niet 5 appelen + 3 appelen = 8 appelen?
In 't eerste geval tel ik *grootheden* op, en dat zijn matematische objekten, waarover vergelijken en optellen een zinvolle operatie is.
'Appel' is geen maateenheid voor wat dan ook, of je zou je een eiland moeten voorstellen waar iedereen met appels betaalt en 'appel' om zo te zeggen de geldeenheid is.

Bij al die veelvuldigheid van grootheden en hun onderlinge verhoudingen is het toch wonderbaarlijk — en tevens aangenaam — dat je ze numeriek kunt vatten en preciseren en dan met één en hetzelfde soort getallen.
De bewerkingen zijn in de realiteit, bij de verschillende grootheden, waarop zij worden toegepast, dus totaal verschillend van oorsprong en karakter, en toch — zodra een standaardmaat is geaksepteerd, wordt elke grootheid in een getal uitgedrukt en kom je er met hetzelfde soort bewerkingen in elk speciaal geval. Dit verklaart de enorme betekenis van de getallen en de bewerkingen met en op de getallen — een toepasbaarheid in zeer uiteenlopende situaties.
Je komt er met één werktuig. Je moet er mee kunnen omgaan, d.w.z. de bewerkingen feilloos kunnen uitvoeren — die taak wordt tegenwoordig veelal door komputers overgenomen — maar als je van het werktuig plezier wilt hebben, moet je toch ook weer de *verbanden tussen* de grootheden en de meer *konkrete bewerkingen òp* grootheden in de universelere taal van *getallen* en *rekenkundige bewerkingen* kunnen vertalen — en dat is een werk dat de komputers je niet direkt afnemen, maar waaraan we juist meer aandacht kunnen besteden, nu de last van het pure rekenen door de komputers wat verlicht wordt.
Aandacht hieraan te besteden is een stuk 'moderne wiskunde'.

Eigenschappen van bewerkingen

Je moet niet alleen de bewerkingen op getallen kunnen uitvoeren, je moet ook hun

eigenschappen overzien. Het zit eigenlijk dieper – je kunt de bewerkingen haast niet behoorlijk uitvoeren, als je hun eigenschappen niet behoorlijk kent.
Aan de eigenschappen van de bewerkingen – ook wetten genaamd – wordt in het moderne wiskunde-onderwijs méér en meer uitdrukkelijk aandacht geschonken dan in het traditionele onderwijs. Men stelt een aantal wetten voorop, waaruit de overige kunnen worden afgeleid. Vroeger legde men nogal nadruk – vooral in de algebra – op formules zoals

$$(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2,$$

een formule die in een aantal stappen is af te leiden, door namelijk eerst de distributieve wet en dan de kommutatieve wet toe te passen:

$$\begin{aligned}(a+b)\times(a-b) &= a \times (a-b) + b(a-b)\\ &= a \times a - a \times b + b \times a - b \times b\\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Aan zulke voor de hand liggende wetten als

$$\left.\begin{aligned} a + b &= b + a\\ a \times b &= b \times a\end{aligned}\right\} \quad \text{kommutativiteit}$$

$$\left.\begin{aligned}(a + b) + c &= a + (b + c)\\ (a \times b) \times c &= a \times (b \times c)\end{aligned}\right\} \quad \text{associativiteit}$$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad \text{distributiviteit}$$

besteedde men nauwelijks enige aandacht.
Zijn er gegronde redenen, om dit nu wel te doen? De kommutativiteit van het optellen ligt dankzij de konkrete oorsprong van het optellen als samenvoegen voor de hand, en het ligt voor de hand erop attent te maken als *berekeningen* door het gebruik van die eigenschap kunnen worden *vereenvoudigd*.
De kommutativiteit van het vermenigvuldigen is niet zó direkt in te zien, maar blijkt bizonder duidelijk met behulp van het rechthoeksschema voor gehele getallen of, zo men wil, uit de oppervlakte van een rechthoek waarvan de zijdenlengtes aan de faktoren beantwoorden.

b	ab = ba
	a

Ook de kommutativiteit van het vermenigvuldigen is iets, waar je uitdrukkelijk op attent maakt, wanneer dit voor het praktische rekenen is vereist.
Nog groter is de betekenis van de distributiviteit, waarop onder meer het cijferen berust; 37 x 5 wordt door middel van distributiviteit en associativiteit,

$$\begin{aligned}37 \times 5 = (30+7) \times 5 &= 30 \times 5 + 7 \times 5\\ &= (10 \times 3) \times 5 + 7 \times 5\\ &= 10 \times (3 \times 5) + 7 \times 5\end{aligned}$$

teruggebracht tot de tafel van 5, d.w.z.: de parate kennis van de produkten $k \times 5$ ($k = 0,1,\ldots,9$).
Zo doet de rekenaar het en ook de komputer.

Hoe ziet men de distributieve wet in? Ook weer met het rechthoeksschema of de oppervlakte van de rechthoek – zou ik zeggen.

c	ac	bc
	a	b

Zo'n aanschouwelijk beeld is duurzamer en overtuigender dan veel verbaal geredeneer. Zoiets is trouwens ook bij

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

een aangewezen middel.

Moet men dit soort wetten ook met zoveel woorden formuleren of zelfs met moeilijk uitspreekbare termen als kommutativiteit, associativiteit en distributiviteit belasten?
Het hangt natuurlijk van leeftijd en nivo af, maar in eerste instantie is het veel belangrijker, dat het kind deze eigenschappen al handelende doorkrijgt, dan dat het er een onberispelijke vorm of een moeilijke naam aan weet te geven.
In elk geval gaat *het doorhebben vooraf aan het onder woorden brengen*.

Het gewone rekenen kent vier bewerkingen en niet maar die twee die we tot nu bespraken. Van een hoger wiskundig standpunt kan men aftrekking en deling als afgeleide bewerkingen aanmerken, het aftrekken als het omgekeerde van het optellen, het delen als het omgekeerde van het vermenigvuldigen.
Om dit mogelijk te maken, moet je over meer wetten dan tot nu toe aangegeven beschikken, zoals bijvoorbeeld

als $a > b$, dan is er één c, zodat $a = b + c$,

en achteraf kun je deze c ook $a - b$ noemen.

Voor het elementaire rekenen zijn echter aftrekken en delen even oorspronkelijke bewerkingen als optellen en vermenigvuldigen. Dat 3 wegnemen en 3 toevoegen tegengestelde aktiviteiten zijn, die elkaar opheffen, is een

belangrijk inzicht, waaraan voldoende aandacht moet worden geschonken; je komt er niet met het aftrekken 'per definitie' tot het optellen terug te brengen. Je moet veeleer dit tegengesteld zijn als een merkwaardige konsekwentie van de konkrete betekenis van de bewerkingen beleven.
Het aan elkaar tegengesteld zijn van optellen en aftrekken doet zich zelfs nog op twee manieren voor: zowel

eerst 3 optellen en dan 3 aftrekken

als ook

eerst 3 aftrekken en dan 3 optellen

levert het oorspronkelijke.

Hoe breng je nu zoiets tot de eerder gegeven definitie terug, dus hoe bewijs je

$(a + b) - b = (a - b) + b$

(gesteld dat $a > b$ is)?
Wel, $a - b$ is dè c waarvoor

$a = b + c$,

$(a + b) - b$ is dè d, waarvoor

$a + b = b + d$;

noem dit e, dus

$a + b = e$,

$d + b = e$,

dus

$a = e - b$

$d = e - b$,

waaruit volgt: $a = d$.
Het is niet zo eenvoudig, en feitelijk doe je het ook in de hogere wiskunde niet zo. Het zou allemaal veel te ingewikkeld worden. Wat je feitelijk doet is het volgende:
Je formuleert al die wetten direkt voor een ruimer getallengebied, voor de gehele getallen – positieve èn negatieve – of zelfs direkt voor de rationale getallen – dus de breuken inbegrepen.
Dan gaan namelijk aftrekking en deling onbeperkt door en dat is in heel weinig wetten samen te vatten:

er is één getal genaamd 0, zodat

$a + 0 = a$,

er is één getal genaamd 1, zodat

$1 \times a = a$;

bij elk getal a is er één tegengestelde $-a$,

$a + (-a) = 0$,

bij elk getal a ($\neq 0$) is er één omgekeerde $\frac{1}{a}$,

$a \times \frac{1}{a} = 1$.

Met deze ekstra-wetten kom je inderdaad een heel eind. Je kunt aantonen dat de vergelijking

$a + x = b$

precies één oplossing heeft, te weten $x = b + (-a)$ en evenzo voor $a \neq 0$ de vergelijking

$a \times x = b$

te weten $x = \frac{1}{a} \times b$, maar aan een oplossing van

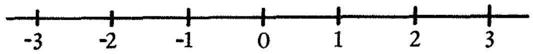
$x^2 = 2$

kunnen deze wetten je niet helpen; die oplossing moet je weer uit de aanschouwelijke werkelijkheid halen of eenvoudig abstrakt opeisen.

Naar algebra toe?
Het zit dus allemaal niet zo eenvoudig in elkaar. Of veeleer het zit *pas eenvoudig* in elkaar *als je het pure rekenen verlaat en je in de algebra begeeft*; dit is ook een van de redenen waarom algebra zo erg belangrijk is. De bewerkingen zijn pas goed te doorzien, als je ze onbeperkt kunt uitvoeren en niet geremd wordt door een '3 – 5 kan niet' of '3 : 5 kan niet'.
Ten aanzien van de breuken heb je hieruit op de basisschool vanouds de konsekwenties getrokken maar ten aanzien van de negatieve getallen niet.
Er zijn er tegenwoordig, die zich afvragen of het niet net omgekeerd had gemoeten, en er zijn ook goede redenen voor. De breuken zijn een didaktisch probleem waarmee al langer dan een eeuw geworsteld wordt. Iedere nieuwe generatie komt met nieuwe denkbeelden opzetten om het op te lossen, maar in feite zijn de denkbeelden niet zo nieuw. Ik meen dat er nog nooit een onderzoek is gedaan, waaròm breuken zo moeilijk zijn, maar ik maak me sterk dat het komt van de papieren wetten die de bewerkingen met de breuken beheersen en die in geen aanschouwelijk of redelijk verband zijn onder te brengen. Al deze wetten kunnen pas met algebraische metoden echt duidelijk worden, trouwens evenals de wetten voor het rekenen met negatieve getallen, dat, jammer genoeg, ook veel te rekenkundig wordt aangepakt.
Hoe dit moet, is een hoofdstuk op zichzelf.

De getallenlijn
Moeten we het goede begrip van de bewerkingen en hun wetten nu tot de algebra uitstellen?

Het hangt ervan af wat je algebra noemt.
Ik dacht dat men met een *goed mengsel van aanschouwelijkheid en algebraische abstraktie* het verste zal komen. Wat aanschouwelijkheid betreft, denk ik minder aan de interpretatie van getallen door konkrete hoeveelheden maar veeleer door grootheden — om het precies te zeggen — op de getallenlijn, waar je de getallen als het ware als mijlpalen, naar rechts positief, naar links negatief ziet opgesteld.



3 optellen betekent 3 stappen naar rechts, oftewel de lijn als een lineaal opschuiven tot de 0 bij de 3 is aangekomen.

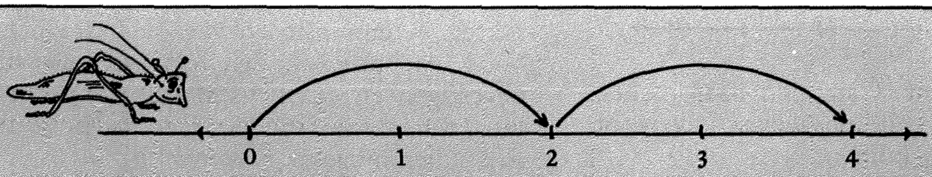
Van 3 aftrekken betekent de spiegeling waarbij 0 en 3 worden verwisseld, oftewel het omleggen van de lineaal waarbij 0 en 3 hun plaatsen verwisselen.
De vermenigvuldiging met 3 is een uitzetting van de lineaal, waarbij 0 vastblijft en 1 in 3 overgaat, deling door 3 is een inkrimping waarbij 0 vastblijft en 3 in 1 overgaat.

De bewerkingen en hun wetten krijgen op deze wijze een verrassend aanschouwelijk karakter — tenminste zo voel ik het aan en ik hoop dat proeven met kinderen dit zullen bevestigen en een behandeling van de bewerkingen met meer modern matematische metoden zullen mogelijk maken.

3.3 OPERATIES OP DE GETALLENLIJN

LEEN STREEFLAND

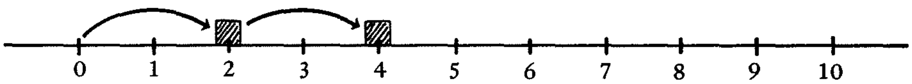
Optellen op de getallenlijn



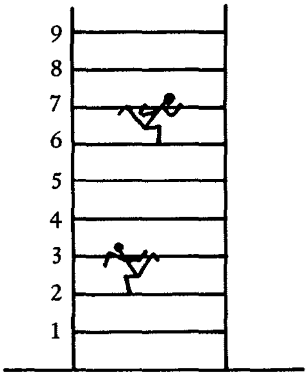
'De sprinkhaan maakt een sprong van 2 en nog een sprong van twee. Hoe groot zijn de sprongen samen?'

Variaties

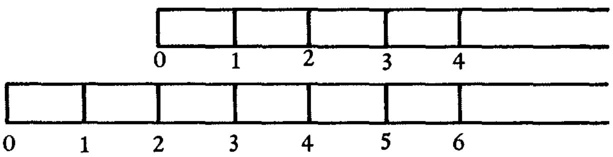
1 Getallenlijn op magnetisch (verkeers-)bord. Met een 'magnetische sprinkhaan' kan men het hele proces laten zien:



2 Optellen op een ladder:
De ladder heeft bijvoorbeeld 9 treden.
Om 3 + 4 te vinden 'klimt' een poppetje (van chenilledraad) eerst 3 treden omhoog en daarna nog 4.
Resultaat: 3 + 4 = 7.



3 Optellen met 'rekenlineaal'. Twee stroken papier (op karton geplakt) vormen de rekenlineaal:



Bijvoorbeeld: 3 + 2 =...
Schuif de bovenste lineaal zover, dat de 0 samenvalt met de 2 van de onderste.
Ga op de bovenste verder en lees het antwoord op de onderste af:
3 + 2 = 5.

KOMMENTAAR

Behalve het manipuleren (door de kinderen) met konkreet materiaal bij het introduceren en inoefenen van de operaties met natuurlijke getallen, is het aan te bevelen de geschetste 'getallenlijnmodellen' eveneens te gebruiken. Hiervoor bestaan diverse redenen.

We noemen:

* *Een veelzijdige benadering komt de* begripsvorming *ten goede.*
* *Bij de getallenlijn komt het getal behalve als* kardinaal-*(hoeveelheid) en* ordinaal-*(tel)*getal *ook naar voren in de aspekten* meetgetal *(het 'afleggen' van een bepaalde 'afstand' op de getallenlijn) en* rekengetal, *terwijl men bovendien door de getalnamen punten op de getallenlijn van een naam voorziet (getallen als* ordeningsmiddel*).*

  De getallenlijn is een 'machtig' visualiseringsmiddel.

Het eerstgenoemde impliceert tevens, dat het evenmin gewenst is eenzijdig in de sfeer van de gegeven voorbeelden te blijven werken.

Het uitgangsvoorbeeld biedt goede mogelijkheden de kommutatieve eigenschap *van de optelling te laten zien.*

Een voorbeeld:

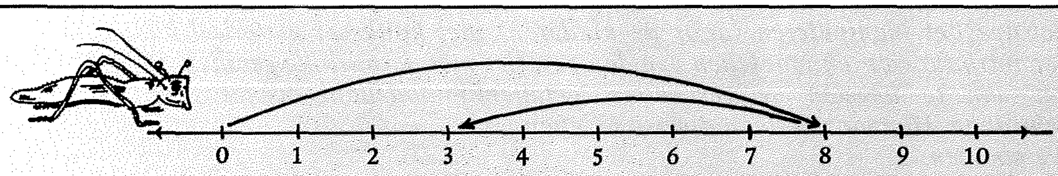
De sprinkhaan staat in 0, doet een sprong van 3 en daarna één van 4. Vervolgens omgekeerd. Waar komt hij in beide gevallen terecht?

De ladder (variatie 2) verhindert, dat al te eenzijdig met horizontale getallenlijnen gewerkt gaat worden.

Bij variatie 3 speelt de operatie duidelijker de rol van afbeelding, dan bij de andere voorbeelden:

> *Wanneer u de gegeven illustratie beschouwt, ziet u dat er sprake is van de afbeelding (+2). Wanneer de kinderen hiermee werken, zou hun aandacht gevestigd kunnen worden op het feit, dat niet alleen bij 3 twee is opgeteld, maar dat* alle getallen *van de bovenste getallenlijn dit lot hebben ondergaan, waarmee het meer algemene karakter van de (+2)-afbeelding uit de verf gekomen is.*

Aftrekken op de getallenlijn (1)

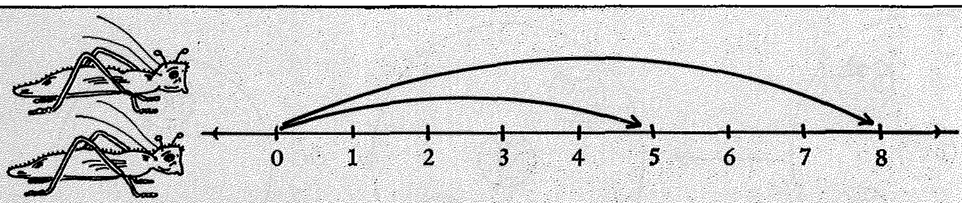


'De sprinkhaan maakt een sprong van 8. Keert zich om en maakt een sprong van 5 terug. Waar komt hij terecht?'

Variaties
Als 1, 2 en 3 van 'Optellen op de getallenlijn'.

KOMMENTAAR
In de eerste plaats verwijzen we naar hetgeen bij 'Optellen op de getallenlijn' gezegd is.
Vergelijken we het gegeven voorbeeld met het werken met konkreet materiaal, dan stemt dit overeen met bijvoorbeeld:
Je hebt 5 blokjes, neem er 2 weg. Hoeveel blijven er over?
Dat wil zeggen het gegeven voorbeeld berust op het 'wegneemmodel'.
Om ook de operatie aftrekken zo veelzijdig mogelijk aan de orde te stellen, bevelen wij u aan, behalve op de in het voorbeeld geschetste manier, de betrokken operatie ook via de volgende metode aan de orde te stellen:

Aftrekken op de getallenlijn (2)



'Eén sprinkhaan maakt een sprong van 8. Eén sprinkhaan maakt een sprong van 5. Welke is verder? Hoeveel?'

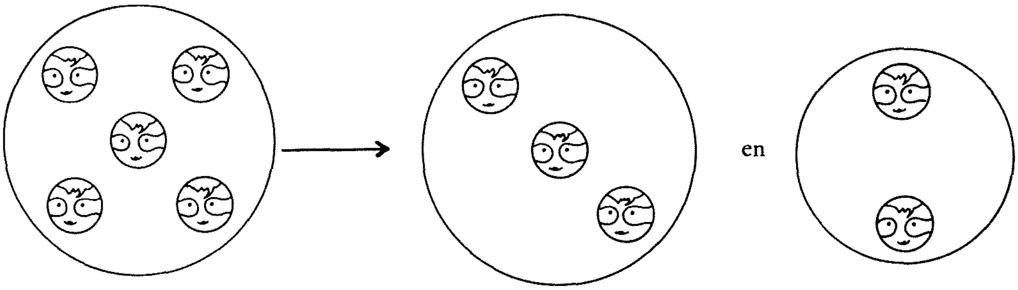
U zou dit een variatie op het eerder gegeven voorbeeld kunnen noemen. U zou eveneens van een nieuw geval kunnen spreken, omdat het voorbeeld nu berust op het *vergelijkingsmodel.*

KOMMENTAAR
Op grond van hetzelfde voorbeeld kan de vraag gesteld worden:
Welke sprong moet de tweede sprinkhaan nog maken om bij de eerste te komen?
Het antwoord kan gevonden worden via verder tellen. Hoewel we ons dan nog steeds in het 'vergelijkingsmodel' bevinden wordt het antwoord (mogelijk) op andere wijze bepaald.[1] *)*
Bovendien speelt de inverse relatie tussen optellen en aftrekken nu een rol. In het eerste voorbeeld gaat het immers om: $8 - 5 = \square$. *In het tweede eveneens om* $8 - 5 = \square$, *doch de variatie levert de opgave:* $5 + \square = 8$.
Ook hier kan onderzoek gedaan worden naar het al dan niet geldig zijn van de kommutatieve eigenschap.
Een voorbeeld:

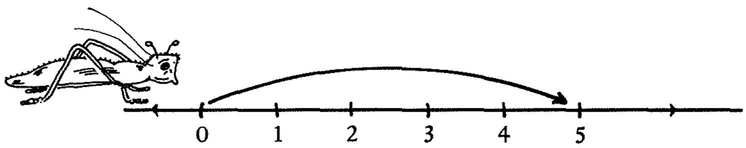
> *De sprinkhaan maakt een sprong van 5 en springt 3 terug,*
> *versus:*
> *De sprinkhaan maakt een sprong van 3 en springt 5 terug.*

In een (veel) later stadium kan dit een ingang zijn om tot de introduktie van negatieve getallen te geraken.
Aansluitend op het eerste voorbeeld kan nog opgemerkt worden dat de metode van het 'terugspringen' gebruikt kan worden om te komen tot formalisering van het uitsplitsen van hoeveelheden met konkreet materiaal.

Vergelijk in dit verband de volgende twee voorbeelden:



$5 = 3 + 2$

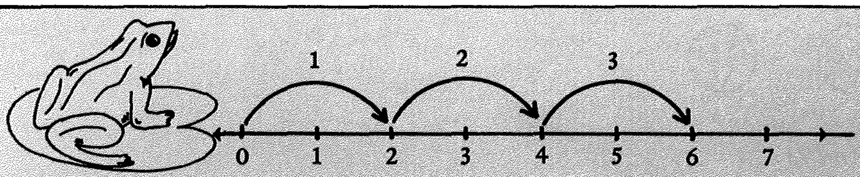


De sprinkhaan maakt een sprong van 5. Hij springt terug in 2 sprongen. Welke sprongen kunnen dit zijn?

---

[1]) Vergelijk in dit verband de gegeven voorbeelden van aftreksommen in 'Zeventien modellen' – Wiskobas-Bulletin, jaargang 2, no 2.

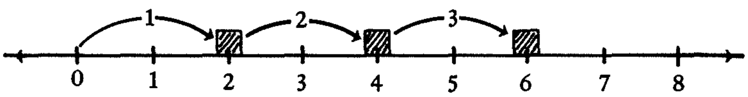
Vermenigvuldigen op de getallenlijn



**'De kikker maakt 3 sprongen van 2 achter elkaar.
Waar komt hij terecht?'**

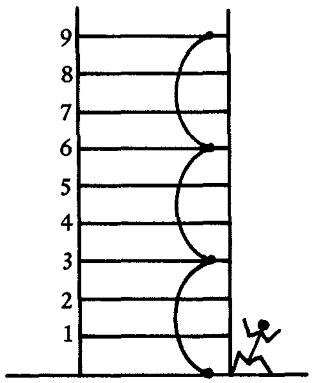
Variaties

1 Getallenlijn op magnetisch (verkeers-)bord.
Met een 'magnetische kikker' kan men het hele proces weer laten zien.



$2 + 2 + 2 = 6$
$3 \times 2 = 6$

2 Vermenigvuldigen op een ladder:
De ladder heeft bijvoorbeeld 9 treden.
Om 3 x 3 te vinden 'klimt' een poppetje (van chenilledraad) met drie treden tegelijk omhoog en herhaalt dit driemaal.



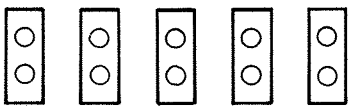
KOMMENTAAR
Met konkreet materiaal hebben de leerlingen het vermenigvuldigen (als herhaald optellen) al leren kennen.

Een voorbeeld:
Maak drie groepjes van drie knikkers:

Hoeveel knikkers samen?
3 + 3 + 3 = 9 en 3 x 3 = 9.

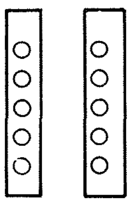
Aansluitend hierop of (min of meer) tegelijkertijd biedt de getallenlijn goede mogelijkheden een bijdrage tot de verdere begripsvorming bij de kinderen te leveren.
Anderzijds moeten we ook hier weer waken voor eenzijdigheid. Zowel met het konkrete materiaal als in het gegeven getallenlijn-voorbeeld is slechts sprake van vermenigvuldigen als herhaald optellen.
We zullen nog laten zien, dat voor een zo ruim mogelijk begrip van de operatie vermenigvuldigen ook het hanteren van andere modellen gewenst (en mogelijk) is.
De geschetste voorbeelden passen geheel in de introduktiefase van het aanleren van de tafels van vermenigvuldiging.
Daarbij is gebruikmaken van het reeds geleerde steeds het devies.
Ter toelichting enkele konkrete voorbeelden:

* *Tijdens de introduktie van de tafel van 2.*
  Maak 5 groepjes van 2 knikkers:

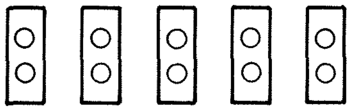


2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 *òf:*
5 x 2 = 10.

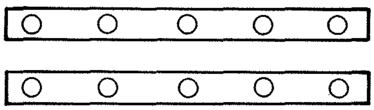
* *Tijdens de introduktie van de tafel van 5 (we veronderstellen nu dat de tafel van 2 aan de orde is geweest).*
  Maak 2 groepjes van 5:



De leerlingen zullen voor een deel het aangegeven patroon niet eens nodig hebben, doch uit:



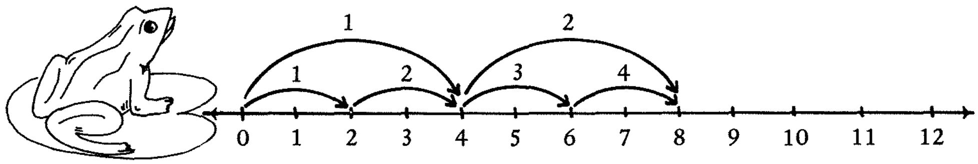
besluiten tot:



$5 + 5 = 10$

$2 \times 5 = 10$ *en* $5 \times 2 = 2 \times 5.$

* *Soortgelijke opdrachten met behulp van de getallenlijn.*
De leerlingen 'zien' net als in het gelegde patroon met de konkrete voorwerpen, de kommutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging voor zich.

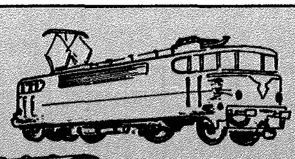


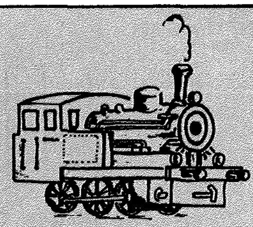
De kikker maakt 4 sprongen van 2. Waar komt hij terecht?
De kikker maakt 2 sprongen van 4. Waar komt hij terecht?

$$\left.\begin{array}{l} 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \Rightarrow 4 \times 2 = 8 \\ 4 + 4 = 8 \Rightarrow 2 \times 4 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \times 2 = 2 \times 4.$$

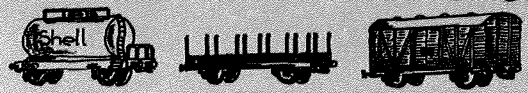
Vermenigvuldigen als het bepalen van het cartesisch produkt (van twee verzamelingen)

'Jan heeft elektrische treinen. Hij is er erg trots op.
Hij heeft 2 lokomotieven





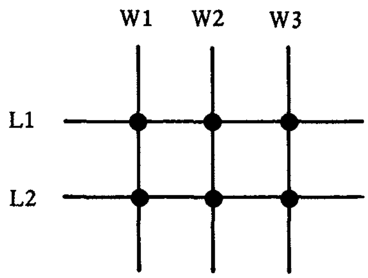
en 3 wagons



Hoeveel verschillende treinen van 1 lokomotief en 1 wagon kan hij maken?'

KOMMENTAAR
Bij 'vermenigvuldigen op de getallenlijn' werd al opgemerkt dat vermenigvuldigen als herhaald optellen alleen niet voldoende is om deze operatie 'volledig uit de verf te doen komen'.
Het zal u weinig moeite kosten om in te zien, dat ons getallenlijnmodel voor het bovenstaande voorbeeld volledig faalt. We dienen hier andere middelen te hulp te roepen om tot een oplossing te komen.
De ervaring leerde, dat het oplossen van probleempjes als het bovenstaande met behulp van konkreet materiaal goed haalbaar is. De lokomotieven en wagons dienen dan wel duidelijk van elkaar te kunnen worden onderscheiden. Om te komen tot een bepaalde wijze van schematiseren, kan men als volgt te werk gaan:

* *We noemen de wagons en lokomotieven gemakshalve achtereenvolgens W1, W2, W3, L1 en L2:*



representeer de lokomotieven en wagons door lijnen; de respektievelijke snijpunten geven de mogelijke gevraagde kombinaties aan.

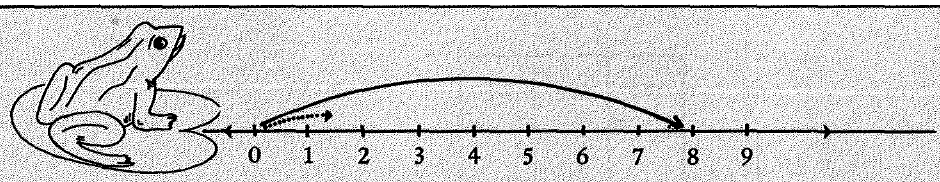
* *Men kan ook een tabel met twee ingangen kiezen:*

	W1	W2	W3
L1			
L2			

Er zijn 6 kruisjes in de tabel mogelijk, dus er kunnen 6 verschillende treinen – bestaande uit een lokomotief en een wagon – worden samengesteld.

Het voorgaande viel buiten het kader van de eerder gegeven getallenlijn-voorbeelden en had ten doel te aksentueren, dat we bedacht dienen te zijn op het gevaar van eenzijdigheid.
Nu weer even terug naar de getallenlijn.

Vermenigvuldigen op de getallenlijn (inverse relatie vermenigvuldigen – delen)

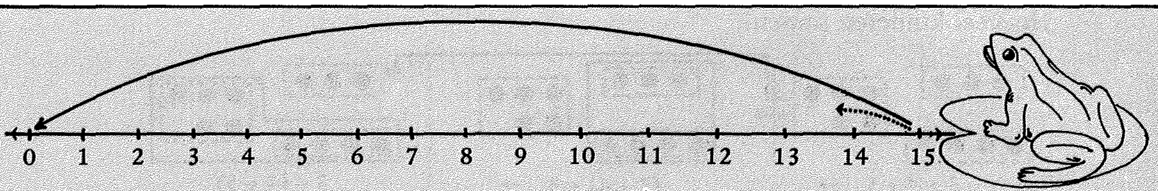


'De kikker maakte 4 gelijke sprongen. In één sprong zou hij in 8 gekomen zijn. Hoe groot was elk van de 4 sprongen?'

Variaties
Als 1 en 2 bij 'Vermenigvuldigen op de getallenlijn'.

KOMMENTAAR
Bij het bovenstaande voorbeeld wordt nog een nieuw aspekt van de operatie vermenigvuldigen belicht, namelijk de inverse relatie met de operatie delen.
Het gaat hier om de opgave $4 \times \square = 8$, *waarmee een (eerste) stap gezet wordt op weg naar de operatie delen.*
Een nadeel bij dit type voorbeelden is, dat het kind dat de boogjes voor de gelijke sprongen bij de getallenlijn moet plaatsen, in feite van tevoren over de oplossing moet beschikken. Een gemaakte fout is moeilijk te herstellen, tenzij men de kinderen toestaat meerdere getallenlijnen per opgave te tekenen. Met konkreet materiaal bestaat deze moeilijkheid niet, omdat gemaakte fouten onmiddellijk gekorrigeerd kunnen worden.
Men kan de opgave nog wat gekompliceerden maken door slechts als informatie te verschaffen, dat de kikker enkele gelijke *sprongen gemaakt heeft en in 8 is terechtgekomen.*
De vraag
'Welke sprongen zouden dit geweest kunnen zijn?',
voert dan tot de ontbinding van 8 in faktoren.
Bijvoorbeeld:
$8 = 8 \times 1$; $8 = 4 \times 2$; $8 = 2 \times 4$; $8 = 1 \times 8$.
Dat hierbij inzicht in de kommutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging tot snelle oplossingen voert – de leerlingen hoeven dan slechts de 'helft' van de antwoorden te vinden – behoeft nauwelijks betoog.

Delen op de getallenlijn



'De kikker staat in 15. Hij wil naar 0. Hij maakt telkens een sprong van 3.
Hoeveel sprongen maakt hij?'

Variaties
Met getallenlijn op magnetisch (verkeers-)bord of ladder.

KOMMENTAAR
Wanneer we het gemaakte onderscheid tussen verhoudings- en verdelingsdeling[1]*) betrekken op het bovenstaande voorbeeld, dan dient dit aangevuld te worden met:*

'De kikker staat in 15. Hij gaat naar 0 en maakt 5 gelijke sprongen.
Hoe groot is elke sprong?'

Overigens geldt voor de gegeven voorbeelden hetzelfde bezwaar als al opgemerkt in het stukje over de inverse relatie tussen vermenigvuldigen en delen. De kinderen 'komen' bij het maken van dit soort opdrachten alleen maar 'goed uit', wanneer ze van te voren al over het antwoord beschikken. Bij verdeelproblemen met konkreet materiaal is de mogelijkheid tot herstel van vergissingen tijdens het maken van opgaven veel duidelijker aanwezig.
Toch raden we aan om (ver-)deelproblemen in bovenstaande vorm te geven. Bij verdeelproblemen met konkreet materiaal blijkt zich in de praktijk bij de kinderen een steeds duidelijker gevoel voor schatten *te gaan ontwikkelen. De eis om bij voorbeelden als het bovenstaande 'goed uit te komen' kan dan aan dat schatten nog een ekstra dimensie geven.*
Bij het gegeven voorbeeld is sprake van delen als herhaald aftrekken, namelijk:

$$15 - \underbrace{3 - 3 - \ldots\ldots - 3}_{5 \text{ maal}} \Rightarrow 15 = 5 \times 3.$$

[1]) Zie: Wiskobas-Bulletin, jaargang 2, no 2, pag. 676.

Enige slotopmerkingen

In het voorgaande is niet ingegaan op de associatieve eigenschap van zowel optellen als van vermenigvuldigen.

De distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging over de optelling is eveneens buiten beschouwing gebleven.

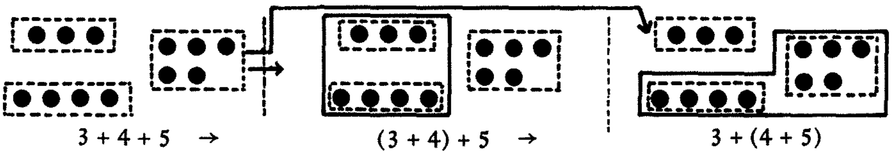
We menen, dat deze eigenschappen zinvoller in andere situaties dan met behulp van de getallenlijn, aan de orde kunnen komen.

We illustreren elk van de genoemde eigenschappen met een voorbeeld.

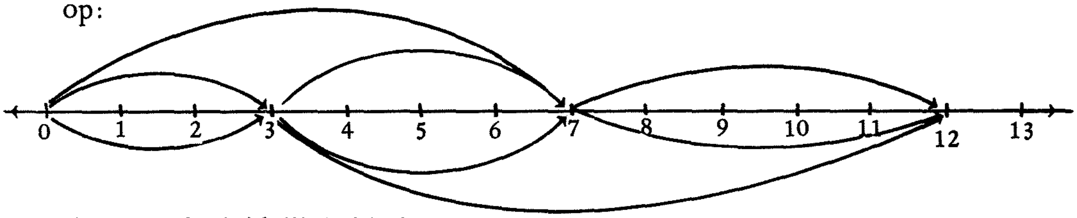
- *Associatieve eigenschap van de optelling*

In drie gezinnen zijn 3, 4 en 5 kinderen.

Hoeveel kinderen samen?



Op de getallenlijn komt het visualiseren van het gegeven voorbeeld neer op:

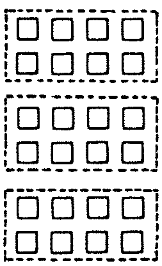


hetgeen de duidelijkheid niet ten goede komt.

- *Associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging*

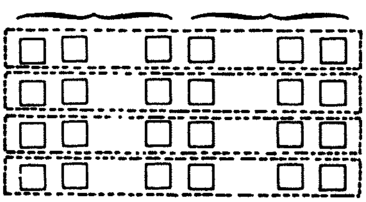
$(4 \times 2) \times 3 = 4 \times (2 \times 3)$.

Het linker lid van deze gelijkheid kan gevisualiseerd worden door blokjes in het volgende patroon te leggen:



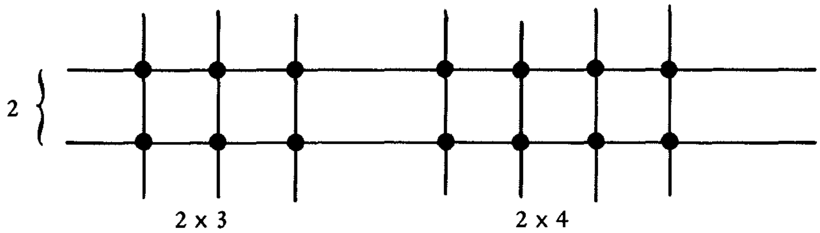
3 rijen van elk 4 x 2 blokjes.

Dit patroon, een kwartslag gedraaid geeft:



4 rijen van elk 2 x 3 blokjes.

▸ *De distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging over de optelling*
$2 \times (3 + 4) = 2 \times 3 + 2 \times 4$.
Schematisch kan dit als volgt worden voorgesteld:



$2 \times 7 = 2 \times (3 + 4) = 2 \times 3 + 2 \times 4$.

Tenslotte

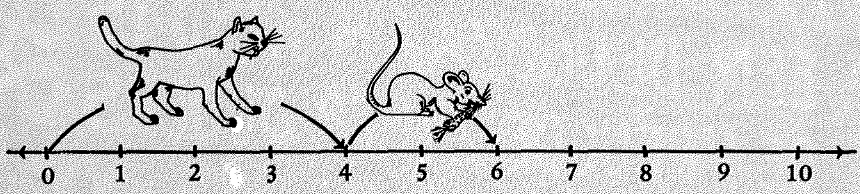
Een dierenspel op de getallenlijn [1]

De schildpad	doet 'stapjes' (of 'sprongen') van 1
De muis	doet 'stapjes' (of 'sprongen') van 2
De marmot	doet 'stapjes' (of 'sprongen') van 3
De poes	doet 'stapjes' (of 'sprongen') van 4
De hond	doet 'stapjes' (of 'sprongen') van 5
De vogel vliegt 'stapjes' van	6

* Heen en weer lopen (vliegen) volgens opdrachten, eventueel bepaald door een dobbelsteen met dierbeelden i.p.v ogen.

* Als hij op .... staat, is hij met de volgende stap op ....

* De marmot en de hond doen stapjes vanuit 0. Op welke velden komen beide terecht?



* Waar kan de poes de muis pakken?

[1] *Naar een idee van H. Freudenthal*


OPERATIE
DEUGDZAAMHEID
EEN DEUGDZAAM KIND IS
DE VREUGDE ZYNER OUDERS

3.4 AUTOMATISEREN VAN OPERATIES

JOHAN VAN BRUGGEN

Vrijwel iedereen zal het er over eens zijn, dat kinderen die het basisonderwijs verlaten, de vier hoofdbewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen) moeten kunnen uitvoeren met natuurlijke getallen (gewone of tiendelige breuken laten we hier buiten beschouwing).
Soms moet dat 'uit het hoofd' gebeuren:
18 + 7, 100 – 35, 5 x 150, 1200 : 6.
Soms moet er 'gecijferd' worden:

2987	28906	539	48
3809	7889–	36x	: 6528
596			
12898+			

Bij dat cijferen worden bepaalde *algoritmen* gebruikt, die de kinderen (meestal) op school leren (niet in alle landen worden eksakt dezelfde algoritmen geleerd!).
Zo'n algoritme is een 'rekenwijze', een 'recept' waarin een keten van handelingen wordt verricht, die – mits op de juiste wijze uitgevoerd – zonder veel nadenken of kreativiteit voert tot de uitkomst van de operatie. Het verzameling-teoretische model van de operatie zelf (het bij-elkaar-leggen, het samenvoegen van gelijke groepjes, het wegnemen, het herhaaldelijk wegnemen van dezelfde hoeveelheid) is er in geautomatiseerd, dat wil zeggen *zonder dat men zich bewust is van het proces zelf.*

Laten we als voorbeeld eens nemen een vrij willekeurig probleem uit het Wiskobas-Bulletin (jaargang 2, nr. 1-blz. 562):

PROBLEEM 6
- ▶ Tel op 10 achtereenvolgende schooldagen het aantal fietsen in de fietsenstalling van je school.
- ▶ Zijn er verschillen?
- ▶ Kun je ze verklaren?
- ▶ Zijn er verschillen tussen de aantallen als je 's morgens telt of 's middags?
- ▶ Maak een grafiek van de 10 dagen.
- ▶ Wat is het gemiddelde aantal fietsen per dag?
- ▶ Onderzoek bij een fietsenwinkel wat de gemiddelde prijs is van het soort fietsen, dat je in de fietsenstalling vindt.
- ▶ Bereken voor hoeveel geld er in de fietsenstalling gemiddeld staat.
- ▶ Bereken ook voor hoeveel geld er per vierkante meter staat.
- ▶ Doe dat laatste ook voor de auto's, brommers en fietsen van de onderwijzers van je school.
  Voor hoeveel geld zetten zij per vierkante meter neer?
- ▶ Is er verschil tussen het bedrag per m^2 van de leerlingen en dat van de onderwijzers?

Neem de vraag: 'wat is het gemiddelde aantal fietsen per dag?'
Om deze vraag te kunnen beantwoorden, moet de leerling twee operaties uitvoeren, nl.
* het optellen van een rij van 10 getallen, elk tussen 50 en 200 bijvoorbeeld;
* het delen van een getal tussen 500 en 2000 door 10 (zoiets zou natuurlijk ook een deling door bijvoorbeeld 12 kunnen zijn).

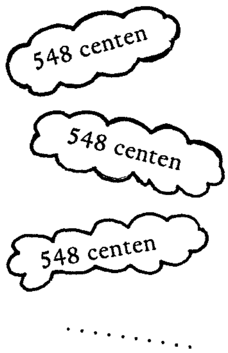
Zo is het ook bij de andere vragen:

gemiddelde prijs	→	rubriceren in soorten en typen, opvragen van prijzen en daarna: rij optellen en resultaat van de optelling delen door klein getal;
geldbedrag	→	vermenigvuldigen (gemiddelde prijs maal gemiddeld aantal);
geldbedrag per m^2	→	vaststellen oppervlakte, resultaat delen op geldswaarde.

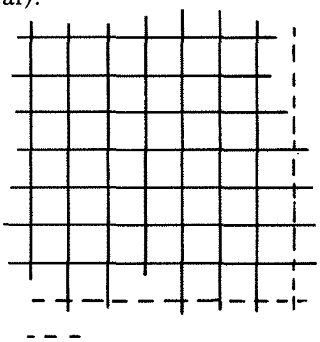
We hebben hier steeds te maken met een vaardigheid (kunnen uitvoeren van de operatie optellen, vermenigvuldigen ..).
Deze vaardigheden kunnen op allerlei nivo's worden uitgevoerd; de vermenigvuldiging 839 x 548 bijvoorbeeld kan o.a. op de volgende manieren worden uitgevoerd:

A Leg 839 maal een hoop(je) van 548 centen neer, veeg ze bij elkaar, tel ze en noteer het resultaat. (handelingsnivo)

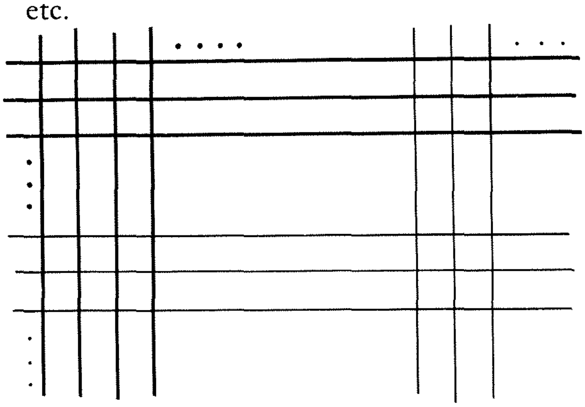
B Teken 839 maal een groep van 548 centen, etc.



C Teken 839 vertikale lijnen en 548 horizontale en tel de snijpunten (zie: BAS-boek Tel-op-Tal).

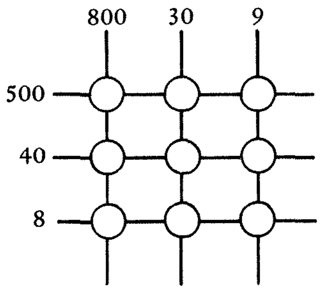


D Teken 83 dikke en 9 dunne vertikale lijnen, etc.



E Teken alleen nog lijnen voor honderdtallen, etc.

(In BAS-boek Tel-op-Tal zijn deze nivo's nauwkeuriger geschetst; met name tussen D en E zitten nog subnivo's). Vul in de rondjes de deelprodukten in en tel de kolommen (of rijen) op. Sommeer de kolomtotalen (of rijtotalen).



400.000	15.000	4.500		
32.000	1.200	360		
6.400+	240+	72+		
438.400	16.440	4.932	→	459.772.

(De nivo's B t/m E vormen een – toenemend – schematisch handelingsnivo).

F De bekende werkwijze: '9 x 8 = 72, twee opschrijven, zeven onthouden ...'. (schematisch nivo)

G We gaan voorbij aan werken met rekenlineaal, rekenmachine of logaritmentafel.

Ook voor de andere operaties op basisschoolnivo (optellen, aftrekken, delen) kan men dergelijke nivo's in het uitvoeren van de operaties aanwijzen. Belangrijk is de vraag, welk nivo men als eindnivo voor de basisschool aanwijst. In het algemeen stelt men als einddoel: het kunnen uitvoeren van de schematische algoritmen ('cijferend optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen'). We gaan nu voorbij aan een ander belangrijk doel: het kind moet – gegeven een bepaald probleem – zélf vaststellen welke bewerkingen moeten worden uitgevoerd en in welke volgorde (hoewel dit minstens zo belangrijk is als het vlot uitvoeren van de algoritme zelf).
Om op het algoritme-nivo te kunnen werken zijn twee dingen nodig:
– het 'recept' van het algoritme kennen,
– beschikken over voldoende basiskennis.

De basiskennis bestaat uit:

1 het *weten* van alle uitkomsten van optellingen met getallen van 0 t/m 9;

2 het *weten* van alle – positieve – uitkomsten van aftrekkingen met een aftrektal van 1 t/m 20 en een aftrekker van 0 t/m 9;
3 het *weten* van alle uitkomsten van vermenigvuldigingen met getallen van 0 t/m 10;
4 het *weten* van alle uitkomsten van opgaande delingen met een deeltal van 0 t/m 100 en een deler van 1 t/m 10, voor zover de deeltallen uitkomsten van de in 3 genoemde te memoriseren vermenigvuldigingen zijn (dus niet bijvoorbeeld 64 : 4, wel 64 : 8);
5 het *weten* van de waarde van een cijfer in een getal op grond van voldoende *inzicht* in de opbouw van het positiestelsel is een voorwaarde bij het leerproces, niet meer bij het algoritmisch werken zelf.
(Zie voor dit onderdeel de leergang 'Talstelsels' in het BAS-boek 'Tel-op-Tal').

De basiskennis, genoemd onder **1** t/m **4**, berust in wezen slechts op het uit het hoofd geleerd hebben van een aantal 'sommetjes'. We zouden hierbij dan ook liever spreken van *memoriseren* i.p.v. automatiseren.

Toelichtingen:

1 De te leren honderd uitkomsten kunnen worden teruggebracht tot vijftig, door gebruikmaking van de kommutativiteit (3 + 4 = 4 + 3).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0				3				7		
1				4				8		
2				5				9		
3				6				10		
4				7				11		
5				8				12		
6				9				13		
7				10				14		
8				11				15		
9				12				16		

Maar: die moeten feilloos gekend worden! Na voldoende voorbereiding op konkreet nivo en met tekeningetjes en meer schematisch materiaal (Cuisenaire, Stern, Creatief Rekenen en dergelijke) zal er dan ook een vrij lange periode van oefening nodig zijn, waarin lotto's, domino's en andere oefenspelen zinvolle diensten bewijzen, evenals bijvoorbeeld het elke rekenles vijf minuten 'klassikaal' afvragen van de 100 uitkomsten.

2 Er zijn 164 uitkomsten te leren, die ontstaan door in de opteltabel 'andersom te lezen': 7 + 8 = 15, geeft 15 – 7 = 8 èn 15 – 8 = 7 (opgaven als 3 – 7 zijn weggelaten). Men kan er over twisten of opgaven van het type 16 – 4 of 18 – 8 e.d. meegeteld moeten worden; doet men dat niet, dan zijn er 100 uitkomsten te leren.

N.B.
Het inoefenen van de onder **1** en **2** genoemde uitkomsten hoeft beslist niet een geïsoleerd gebeuren te zijn; het kan verbonden zijn met allerlei andere aktiviteiten op de gebieden van grafische verwerking, meten, tellen, getalpatronen, relaties, open beweringen, enz. In de diverse BAS-boekjes en in artikelen in het Wiskobas-Bulletin zijn daarvan reeds zeer vele voorbeelden gegeven.

3 Uit de vermenigvuldigtabel blijkt, dat er 11 x 11 = 121 uitkomsten te leren zijn. Vanwege kommutativiteit zijn ze terug te brengen tot (110 : 2) + 11 = 66 uitkomsten.

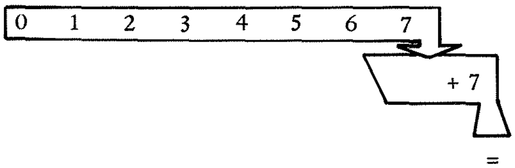
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1					6				
2	0		4				12				
3	0			9			18				
4	0				16		24				
5	0					25	30				
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0						42	49			
8	0						48		64		
9	0						54			81	
10	0						60				100

4 Uit de tabel blijkt, dat er 110 opgaande delingen geleerd moeten worden (namelijk 100 'gewone' en '0' gedeeld door 1 t/m 10).

Samenvattend blijkt dus, dat er zo'n drie- tot vijfhonderd uitkomsten (afhankelijk van de wijze van telling) van 'sommetjes' moeten worden *gememoriseerd* alvorens we kunnen

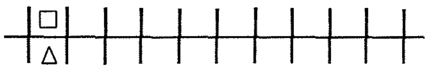
zeggen dat er voldoende basiskennis ('basic facts') aanwezig is om de vier algoritmen te kunnen gaan leren.
Dit memoriseren wordt volgens de leerpsychologie vergemakkelijkt door een aantal faktoren:

- de *zinvolheid* van het memoriseren *voor de leerder* (d.w.z. dat het kind moet hebben ervaren dat het gemakkelijk en handig is de uitkomsten – bijvoorbeeld van de tafels van vermenigvuldiging – uit het hoofd te kennen, doordat het herhaaldelijk wordt geplaatst voor konkrete probleempjes);
- het passen van het te memoriseren feit in een samenstel van feiten, bijvoorbeeld



of: □ + △ ⩾ 4
met als keuzeverzameling
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

oplossingsverzameling:



of: hoeveel rechthoeken en welke kun je op het spijkerbord maken met 24 hokjes?;

- korte, vaak herhaalde, perioden van oefening werken effektiever dan langere, ver uit elkaar liggende, perioden (wet van Jost).

Bij het leren van het algoritme zijn een aantal faktoren van belang

1 De leerling moet tijdens het leerproces het algoritme herkennen als een – nogal geformaliseerde – vorm van het uitvoeren van de operatie zelf. Daartoe lijkt het noodzakelijk de leerling opeenvolgende nivo's van algoritmisch werken te laten doorlopen (zoals boven geschetst voor het cijferend vermenigvuldigen) waarin de leerling als het ware zelf het algoritme ontwikkelt (hij moet 'de slag te pakken krijgen').
Dit formaliseringsproces behoeft niet voor alle leerlingen even snel te verlopen.
Neem bijvoorbeeld de volgende deling: 4464 : 36 = 124.

We plaatsen naast elkaar een aantal (denkbeeldige) algoritmen, zoals die bijvoorbeeld aan het begin van het vijfde leerjaar zouden kunnen worden aangetroffen:

❶
```
36|124
  4464
   360  10
  4104
   360  10
  3744
   360  10
  3384
   360  10
  3024
   360  10
  2664
   360  10
  2304
   360  10
  1944
   360  10
  1584
   360  10
  1224
   360  10
   864
   360  10
   504
   360  10
   144
    36   1
   108
    36   1
    72
    36   1
    36
    36   1 +
     0
        [124]
```

❷
```
36|124
  4464
   360  10
  4104
   720  20
  3384
   720  20
  2664
  1440  40
  1224
   720  20
   504
   360  10
   144
    72   2
    72
    72   2 +
     0
        [124]
```

❸
```
36|124
  4464
  3600  100
   864
   360   10
   504
   360   10
   144
    72    2
    72
    72    2 +
     0
        [124]
```

❹
```
36|124
  4464
  3600  100
   864
   720   20
   144
   144    4 +
     0
        [124]
```

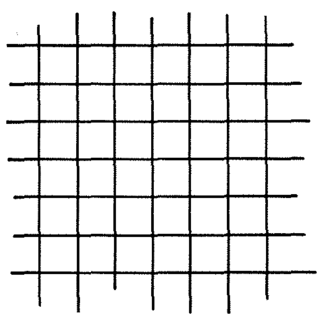
❺
```
36|100+20+4=124
  4464
  3600
   864
   720
   144
   144
     0
```

❻
```
36|124
  4464
  36
   86
   72
   144
   144
     0
```

Alle vormen van het algoritme voldoen aan de eis dat het verzamelingteoretische model van de operatie (delen als herhaald aftrekken) zichtbaar blijft. Behalve uiteraard in vorm ❻, waarin het schematische van het algoritme zo sterk is geworden, dat de handeling zelf moeilijk is terug te vinden. Maar op het algoritmische nivo is dat ook niet meer nodig en soms zelfs ongewenst. De zes vormen duiden dus nivo's van algoritmisch werken aan, die tevens fasen in het leerproces kunnen zijn.
Daarbij geldt, dat de vormen ❶ en ❷ voor een vijfdeklasser teveel tijd vragen. De vormen ❸ t/m ❻ kunnen echter alle akseptabel zijn.

2 De leerling moet begrijpen dat het algoritmisch werken noodzakelijk is uit een oogpunt van (tijd, papiergebruik, materiaalbeschikbaarheid, fouten) efficiency.
Bij de introduktie van volgende nivo's van algoritmen lijkt het dan ook verstandig te werk te gaan volgens het *'deep-end-principle'* (Dienes): plaats de leerling voor een moeilijke opgave die hij met de ter beschikking staande middelen nauwelijks kan oplossen.

Een voorbeeld:
In klas 1 en 2 is het vermenigvuldigen geleerd in hoofdzaak met het verzamelingenmodel (8 maal een groepje van zes blokjes) en het struktuurmodel (stadsplan, spijkerbord), waarin kruispunten geteld moesten worden.



Van daaruit kon het systematisch memoriseren van de vermenigvuldigingsuitkomsten gemotiveerd worden (zie boven).
Eind tweede klas wil men een begin maken met het algoritmisch werken; het is zinvol om dan de leerlingen enkele malen vermenigvuldigingen als 28 x 64 geheel te laten uittekenen in het struktuurmodel. Vanuit het vele werk dat dat meebrengt en de grote kans op telfouten is het zoeken naar verkorte tekenwijzen (groepjes van tien lijnen samennemen of door één dikke lijn voorstellen; gebruikmaken van tafelprodukten) een heel natuurlijke zaak.

3 Bij het aanleren van automatismen (schrijven, fietsen, autorijden) blijkt volgens leerpsychologische eksperimenten het vermijden van fouten belangrijk te zijn, omdat foute handelingen gemakkelijk ingeslepen raken. We kennen ook in het rekenonderwijs dit verschijnsel. Een zeer geleidelijke opbouw van het algoritme in verscheidene 'nivo's van verkorting' kan hier waarschijnlijk zeer gunstig werken, omdat de leerling steeds wéét wat hij doet en eventueel even naar een net-verlaten nivo kan terugkeren.

Voor konkrete uitwerkingen van de beschreven uitgangspunten moeten we – gezien de beperkte ruimte – de lezer verwijzen naar het BAS-boek 'Tel-op-Tal' [1]), waarin ook voor cijferend optellen en aftrekken de uitgangspunten zijn gekonkretiseerd.

Tenslotte wijzen we nog op een belangrijke konsekwentie van het als 'toenemende schematisering' te kenschetsen principe bij het leren van algoritmen: de leerling brengt in principe zèlf een toenemende schematisering in het uitvoeren van de operatie aan. Dat betekent dat de leerling een matematiseringsproces doormaakt waarin hij zèlf verkorte werkwijzen ontwikkelt en een steeds 'abstraktere' wiskunde-taal gaat gebruiken. Daardoor wordt het 'onderwijzen van algoritmen' veel méér dan het aanleren van een aantal recepten of technieken, en is het eveneens dienstbaar aan het bereiken van meer algemene doelstellingen voor wiskunde-onderwijs.
Als men de 'nivo's van verkorting' op voorgeschreven wijze en tijden laat volgen en te weinig ruimte laat voor eigen schematiseringsvormen, verdwijnt het matematiseren voor een groot deel uit het leerproces.

---

[1]) Blok voor de Heroriënteringskursus, no. 7.

3.5 WAT HOOFDREKENEN IS, WEET IEDEREEN

HUUB JANSEN

Op zaterdagmorgen met boodschappen zeulen in de supermarkt van ... Nee, namen noemen we niet. In dit tijdschrift maken we alleen reklame voor Wiskobas, of beter, voor goed wiskunde-onderwijs op de basisschool.
Inmiddels loopt u nog in de winkel met in het mandje 8 blikken appelmoes voor de weggeefprijs van 98 cent.
Op de kassa slaat de winkeljuffrouw, pardon cassière, 8 keer achtereen 98 cent aan.
'Zou dat mens nooit behoorlijk hoofdrekenen gehad hebben?', is de vraag die bij u — ervaren schoolmeester — opkomt.

Hoe het gesteld is met het vroegere hoofdrekenonderwijs van uw cassière, weten wij natuurlijk ook niet. Wel delen wij u mee, dat zij stipt haar opdracht uitvoert. Ook al kan zij wellicht best snel uit het hoofd uitrekenen dat 8 maal 98 cent gelijk is aan 8 gulden min 16 cent, oftewel *f* 7,84.
Inmiddels rijst de vraag:
Wat is dat eigenlijk, 'hoofdrekenen'?

Hebt u enige tientallen jaren geleden de lagere school doorlopen, dan bent u misschien niet in staat een goede definitie als antwoord op deze vraag te geven, maar wel weet u nog te vertellen hoe het ging:

> De meester voor de klas, de kinderen met potlood en papier gereed. De meester noemde een som en op zijn teken — een tik met de lineaal op tafel bijvoorbeeld — schreef ieder het gevonden antwoord op en na het tweede teken werden de potloden neergelegd en kwam de volgende opgave.
> In vele klassen was dit een welhaast ceremonieel gebeuren waar kinderen en onderwijzer hun dagelijkse schoolaktiviteiten mee begonnen.

Van een dergelijke gedisciplineerde aanpak moeten wij tegenwoordig niet zoveel meer hebben, maar wij horen sommigen denken:
'Ze leerden zo in ieder geval wel rekenen, kom daar vandaag-de-dag eens om!'
Een tegenopmerking is gauw gevonden. Vandaag-de-dag is gisteren niet en dat geldt ook voor het rekenen.
Toen de winkeljuf nog geen kassa had, de komputer nog slechts bestond in de fantasie van enkelen en de boekhouder zonder rekenmachine zijn dagelijkse arbeid verrichtte, toen was het van belang met grote vaardigheid te kunnen rekenen en al hoofdrekenend leerde je dat het best.
Toen stelde ook het voortgezet onderwijs op dit punt zijn eisen zoals oude toelatingseksamens ons nog laten zien. Goed kunnen hoofdrekenen immers was van belang voor allerlei vakken, van natuurkunde tot boekhouden en een vaardig rekenaar werd ervan verdacht ook wiskundige knobbels te bezitten.
Ter illustratie enige voorbeelden van hoofdrekenopgaven voor toelatingseksamens uit nog niet zo lang vervlogen tijden:

$2\frac{5}{8}\ \text{m}^3 + 0{,}16\ \text{hl} \qquad = \ldots .\ \text{l}$

$\frac{3}{15} : 0{,}003 \qquad = \ldots .$

$20.000 - \frac{3}{100} \qquad = \ldots .$

$\frac{2}{3} - \frac{3}{7} \qquad = \ldots .$

13% van *f* 88,– $\qquad = \ldots .$

$\frac{15\ \text{liter}}{5\ \text{dl}} \times \frac{8\ \text{jaar}}{8\ \text{maanden}} = \ldots .$

het k.g.v. van 16, 18 en 20 is . . . .

Snel en foutloos was hierbij het parool en hoè de kandidaatjes aan het antwoord kwamen en of de opgaven zìnvol waren, dat waren vragen van minder belang.

Inmiddels zijn we ook met ons rekenonderwijs in de tweede helft van de 20e eeuw terechtgekomen. Het snel en daarbij foutloos kunnen rekenen heeft een andere waardering gekregen en men is er ook wel achtergekomen dat èlk rekenen met het hoofd gebeurt, maar dat 'uit het hoofd' kunnen rekenen wellicht een in de verte lonkend doel van het rekenonderwijs is. Andere zaken zijn echter minstens zo belangrijk.
'Welke zaken', zult u vragen.
Niet gemakkelijk te beantwoorden, maar in het kader van dit artikel beperken we ons tot het wiskunde-onderwijs op de basisschool en daarvan nog speciaal het reken-, of zo u wilt, het getalaspekt.
We vertellen daarbij niets nieuws als we stellen dat het gaat om *inzicht*.
'Inzicht waarin?', is dan de volgende vraag.
We worden konkreet:

79 + 25 = ...

Voor onze leerlingen geen moeilijke opgave. Ze kunnen het wel.
Op papier:

$$\begin{array}{r} 79 \\ \underline{25} \\ 104 \end{array} +$$

Of uit het hoofd:

9 + 5 = 14, 14 onthouden,
70 + 20 = 90, dit wordt bij elkaar 104.

De goede uitkomst op twee manieren, zoals u ziet, maar een ander doet het zo:

75 + 25 = 100, da's duidelijk en nu nog 4 erbij – want 79 is 75 + 4 – dat wordt 104.

Wellicht heeft u het gevoel dat deze laatste aanpak nog zo slecht niet is.

Een ander voorbeeld uit de tijd dat de ober nog 15% fooi van het verteerde bedrag moest uitrekenen:

15% van *f* 7,80.

Het kan als volgt:

$$\begin{array}{r} 0{,}078 \\ \underline{15} \\ 390 \\ \underline{780} \\ 1{,}170 \end{array} \times$$

Resultaat: *f* 1,17.

Maar ook:

10% van *f* 7,80 is 78 cent en 5% is daar weer de helft van, dus 39 cent. Samen geeft dit 80 + 40 = 120 en daar nog 3 van af. Uitkomst *f* 1,17.

Tegenwoordig is alles voor de ober reeds uitgerekend, maar iemand, die geld op zijn spaarbankboekje heeft, kan misschien wel rekenen op $6\frac{1}{4}$% rente en een berekening verloopt dan gemakkelijker als hij inziet dat $6\frac{1}{4}$ te splitsen is in 5 en $1\frac{1}{4}$, dat 5 de helft is van 10 en dat vervolgens $1\frac{1}{4}$ het vierde deel van 5 is.

Iedere onderwijzer is in staat veel meer van dergelijke voorbeelden te vinden.
Waar gaat het nu om?
In de opgaven 79 + 25, $6\frac{1}{4}$%, enz., is het van belang in te zien dat 79 te splitsen of te struktureren is in 75 + 4 en dat $6\frac{1}{4}$ gelijk is aan 5 en daarbij nog het vierde deel van 5. Anders gezegd: bij het (hoofd-)rekenen wordt een beroep gedaan op het inzicht in de *struktuur van de getallen*.

Er is nog meer.
Bij 79 + 25 is de splitsing 79 = 75 + 4, niet zo maar willekeurig gebeurd. Er wordt gebruik gemaakt van de 'mooie' betrekking die bestaat tussen 75 en 25, nl. 75 + 25 = 100.
Kortweg gezegd: de *relatie tussen de getallen* speelt een grote rol.
Nog een voorbeeld:

24 x 25.

Met een beetje ervaring kan iedere leerling dit uit het hoofd:

4 x 25 = 100 en 20 x 25 = 500; samen 600;

of:

4 x 25 = 100, 24 = 6 x 4,
zodat het antwoord 600 volgt uit 6 x 100;

of ook:

24 x 25 = 12 x 50 = 6 x 100 = 600

Nog anders:

25 x 25 = 625;
onze leerling heeft dit antwoord paraat en gaat verder met:
24 x 25 = 625 – 1 x 25 = 600.

Hier komt een ander essentieel kenmerk van hoofdrekenen om de hoek kijken. Bij goed hoofdrekenonderwijs heeft een leerling *meerdere oplossingsmogelijkheden* tot zijn beschikking en hij kan daaruit een keuze maken.

Fraai gezegd: *hoofdrekenen is een fleksibel en kreatief gebeuren.*

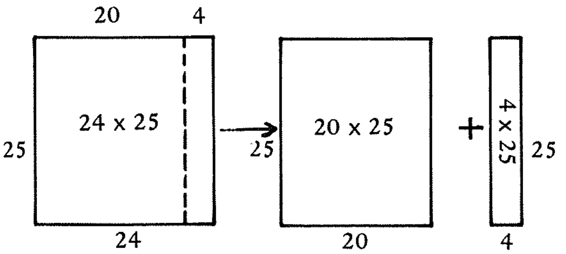
Nog een aspekt: bij de oplossingsmetode

$24 \times 25 = (4 \times 25) + (20 \times 25)$

wordt, behalve van de struktuur van de getallen en de relaties tussen de getallen onderling, gebruik gemaakt van een belangrijke eigenschap uit het rekensysteem, nl.

$(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$.

Aanschouwelijk voorgesteld:



En bij de oplossingsmetode

$24 \times 25 = (2 \times 12) \times 25 = 12 \times (2 \times 25) =$
$= 12 \times 50 = \ldots\ldots = 600$

leert een nader onderzoek ons, dat er gebruik gemaakt wordt van twee eigenschappen, die in ons rekensysteem voor de bewerking vermenigvuldigen gelden, nl.

$2 \times 12 = 12 \times 2$, ofwel $a \times b = b \times a$,

en ook:

$(12 \times 2) \times 25 = 12 \times (2 \times 25)$, ofwel
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

Ook bij de verduidelijking van deze eigenschappen kan een meetkundige voorstelling ons weer helpen. In het rekenonderwijs dienen we dergelijke eigenschappen met goed gekozen voorbeelden en op aanschouwelijke wijze voor onze leerlingen 'zichtbaar' te maken, zonder ze met formules zelf lastig te vallen.

Inzicht in deze eigenschappen en vooral het kunnen *gebruiken van de eigenschappen* bij het oplossen van rekenproblemen is kenmerkend voor goed hoofdrekenen.

Nog minstens één faset van het hoofdrekenen hebben we vergeten: *het schatten.*

Wanneer we voor ons zelf nagaan hoe we in het leven van alledag van onze rekenkennis gebruik maken, dan zal blijken dat dikwijls een preciese uitkomst ons niet interesseert, maar dat we tevreden zijn met een 'ongeveer'-uitkomst, die al schattend is verkregen.

Kunnen schatten doet niet alleen een beroep op de rekenkundige kennis van onze leerlingen, maar vereist bovendien een mentaliteit die aangeleerd moet worden.

We geven een voorbeeld:

In een gesprekje met een paar kinderen, die onderzocht hadden dat in hun leesboek op de 500 letters 72 keer de letter 'e' voorkwam, bleek, dat zij op de vraag 'welk deel of welk percentage van de letters uit de letter 'e' bestond', na langdurig gereken kwamen op 14,4%.

Niemand wist snel als antwoord te geven: ongeveer $\frac{1}{7}$ deel, of ongeveer 14%, terwijl deze laatste antwoorden in het kader van hun onderzoekje veel zinvoller geweest zouden zijn.

Al hebben we enige aspekten van het hoofdrekenen aangeduid, het antwoord op de vraag wat hoofdrekenen nu eigenlijk is, is nog niet gegeven. Misschien is dit ook wel niet zo belangrijk, al geeft de uitspraak:

hoofdrekenen heeft te maken met fleksibel en kreatief rekenen, waarbij gebruik gemaakt wordt van de verschillende, in dit artikel genoemde aspekten,

wel ongeveer aan wat wij bedoelen.

Hiermee zijn we tot een laatste vraag gekomen:

Langs welke weg bereiken we het inzicht waar het ons om te doen is?

Niet op de wijze waarop onze kollega's uit vroeger tijden te werk gingen. U weet nog wel: uit het hoofd en met een tik op tafel.

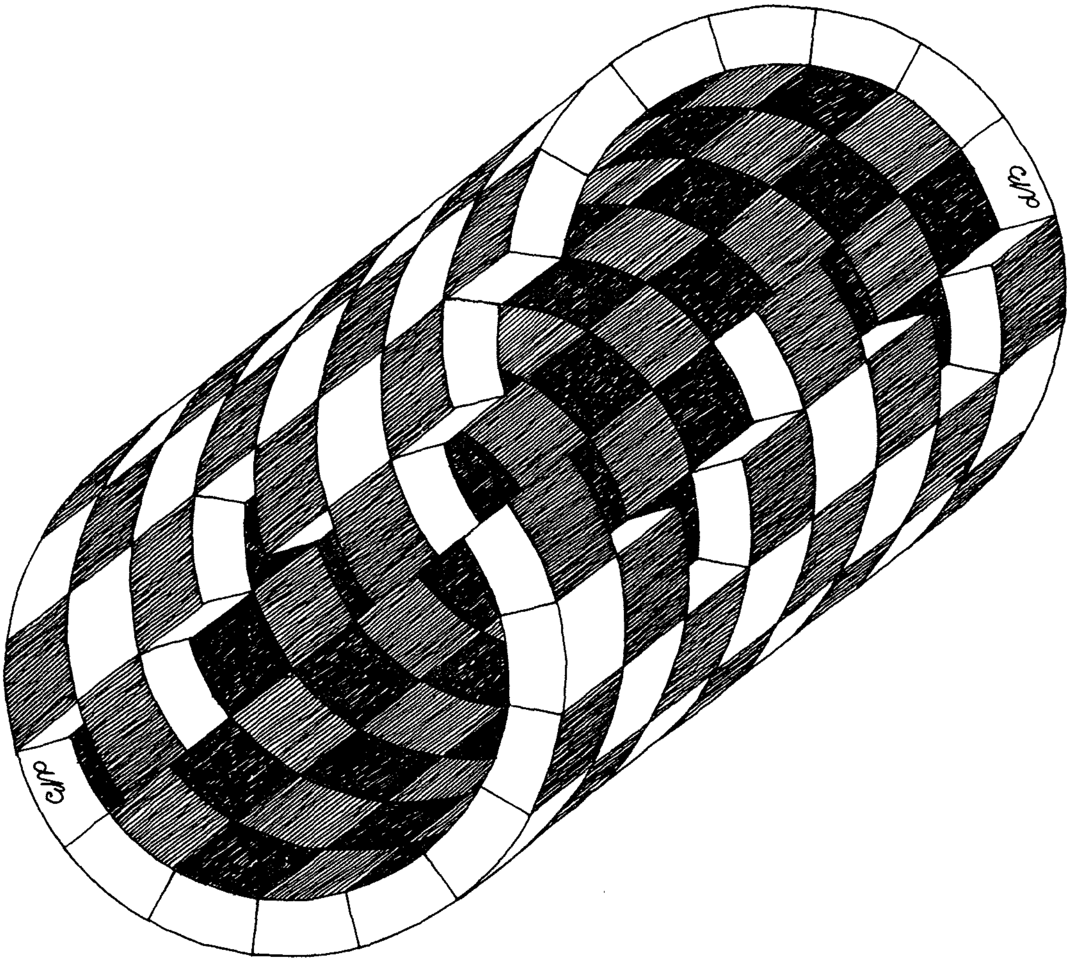
Maar ook niet volgens de metode, die in ons rekenonderwijs tegenwoordig veel gehanteerd wordt, waarbij iedere leerling individueel zijn taken doorwerkt; taken die bestaan uit vele rijtjes sommen, waarbij alleen het antwoord telt.

In ons onderwijs moeten wij onze leerlingen stimuleren naar verschillende oplossingsmetoden te zoeken. Zij moeten daarbij onder woorden kunnen brengen – in een klassegesprek of aan medeleerlingen die aan dezelfde opdracht werken – wat zij gedaan hebben, welke oplossingsmetode gekozen is en waaróm dat gebeurd is.

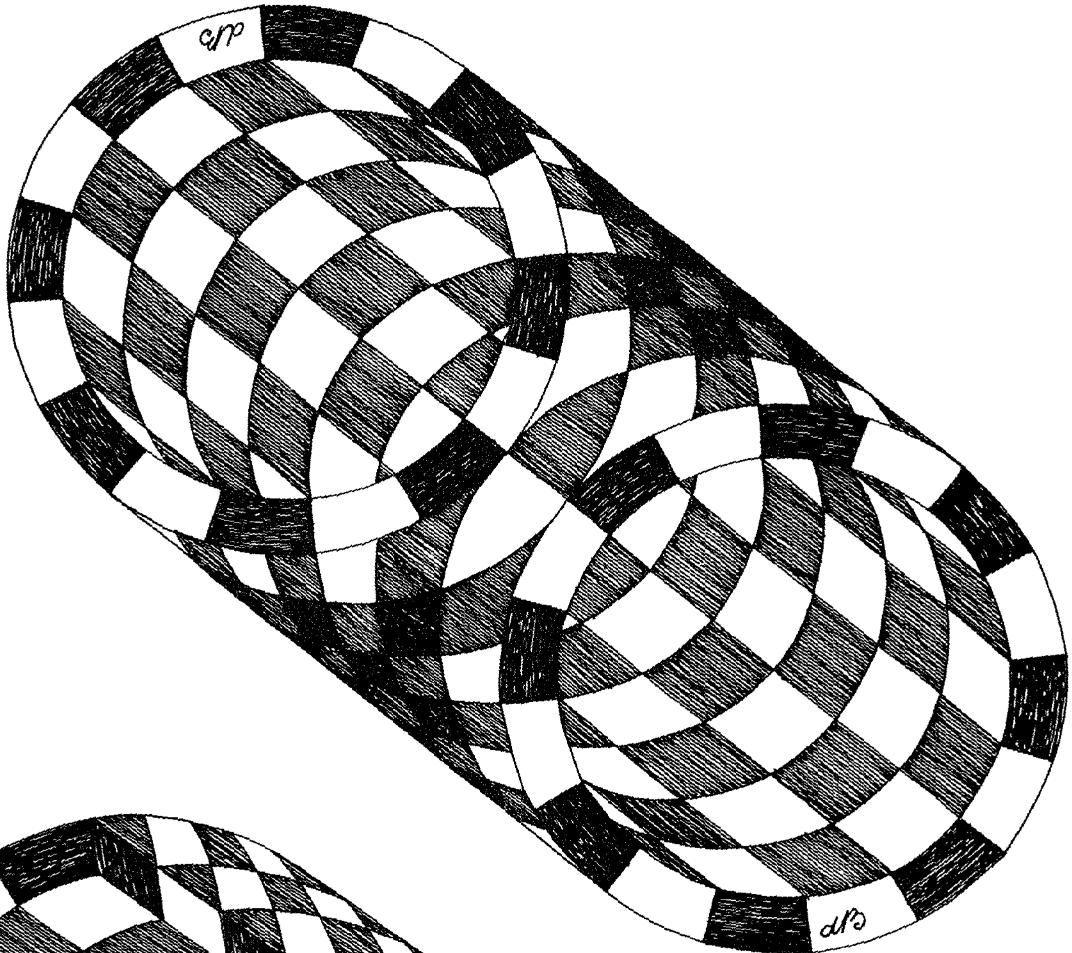
De onderwijzer moet daarbij zorgen voor zinvolle opgaven, waarbij het niet in de eerste plaats gaat om de uitkomst, maar veel meer *om de weg die bewandeld is om tot een oplossing te komen.*

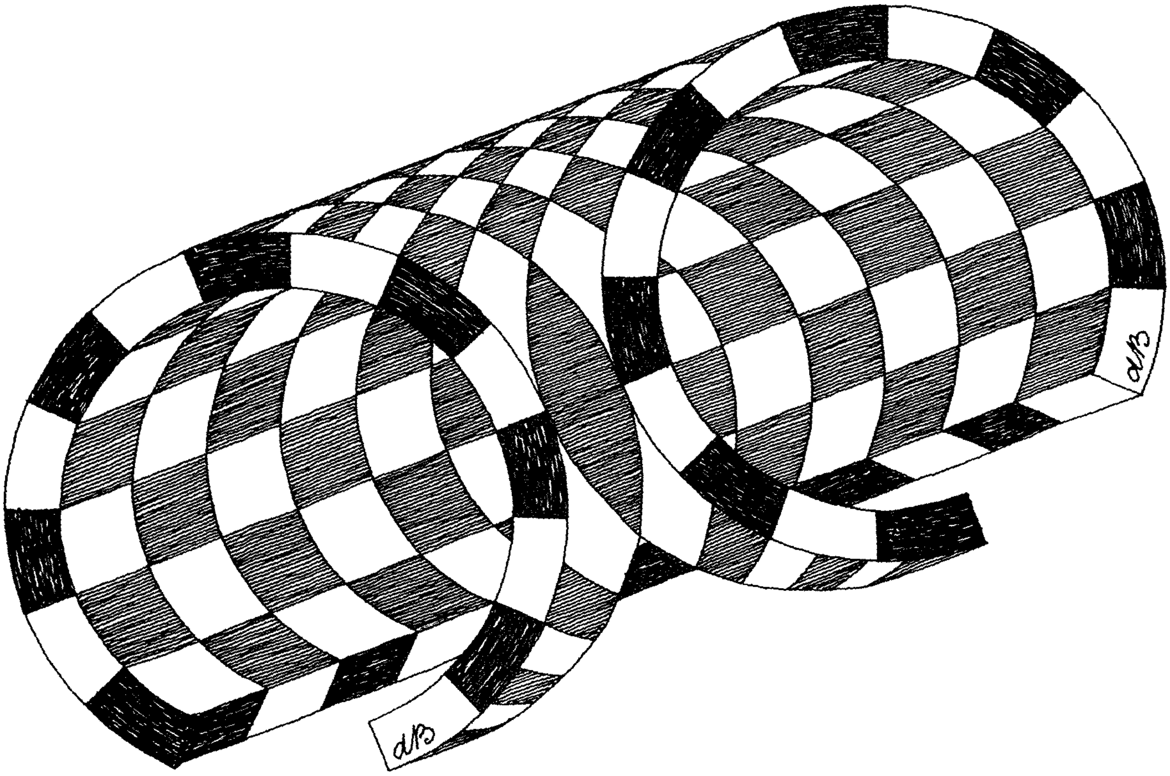
3.6 OPERATIES OP EEN BAND

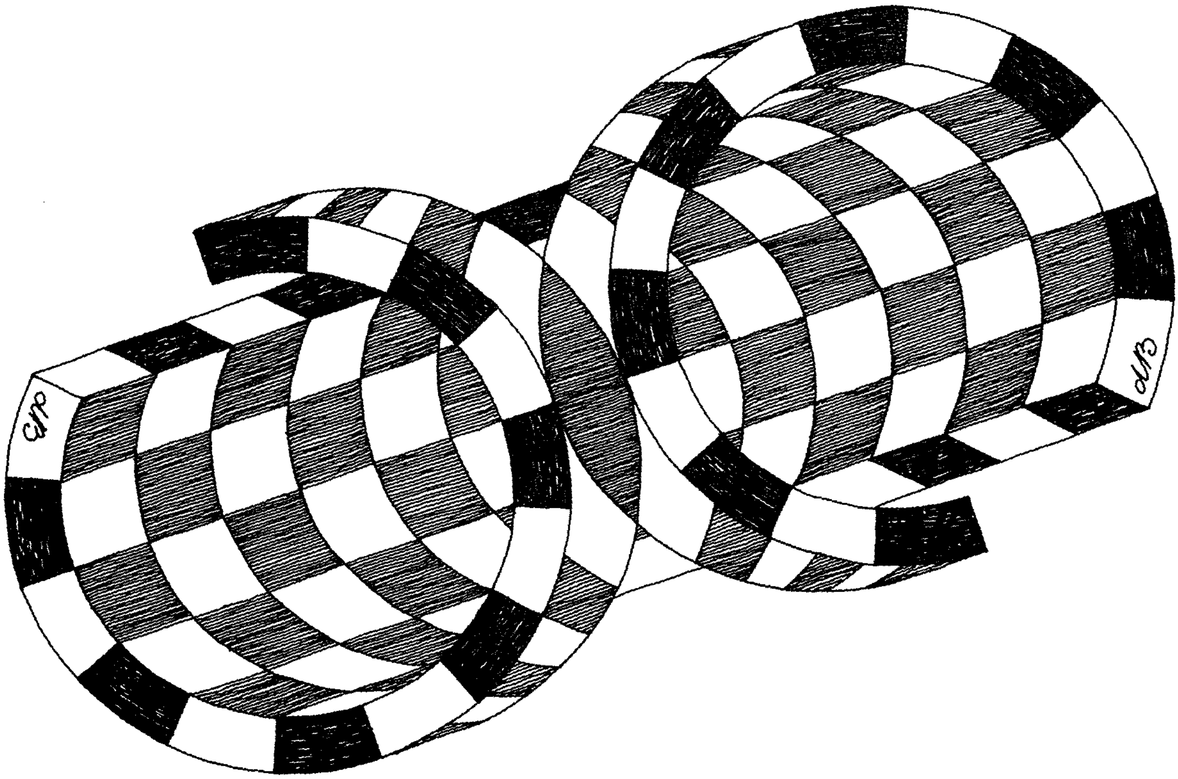
HANS DE BOER



De lezers van dit Bulletin kennen allemaal het bekende IOWO-symbool, de band van Möbius. Hans de Boer 'opereerde' deze band en tekende vervolgens enkele variaties.







3.7 REKENEN MET MACHINES

DIK OORT
HENK MEIJER

Als we rekenmachines op de basisschool gebruiken zal dat vooralsnog niet gebeuren met de bedoeling de leerling voor te bereiden op 't werken met deze machines in z'n latere leven, maar zal het vooral in dienst staan van de rekendidaktiek. Bijvoorbeeld ter ondersteuning van het rekenen met algoritmen (cijferen), 't ontdekken van getalrelaties die bij het hoofdrekenen gebruikt kunnen worden en 't voorbereiden van onderwerpen als gemeenschappelijk veelvoud, k.g.v. en verhoudingen.
Hierbij is de betekenis van de machine vooral dat hij duidelijk en op de goede plaats afdrukt en met name de eerste tijd bij de kinderen motiverend werkt. We laten hier enige voorbeelden volgen.

- We kunnen een getal tien maal afdrukken en daarna sommeren.
De leerling ontdekt dat vermenigvuldigen met 10 bereikt wordt door een 0 rechts van het getal te plaatsen.

```
   56
   56
   56
   56
   56
   56
   56
   56
   56
   56
  560 T
```

- Daarna geven we de opdracht een getal op de machine (die niet kan vermenigvuldigen) met 9 te vermenigvuldigen.

De leerling zal dat in eerste instantie oplossen door het getal negen keer onder elkaar te plaatsen.
Dan vragen we hem uit te zoeken of dit niet veel korter kan. Gebleken is dat betrekkelijk jonge kinderen vinden, dat ze 't getal kunnen aanslaan met een 0 er achter en van dit getal 't eerste getal aftrekken:

9 x 37 = 10 x 37 – 37
(hoofdrekenen!)

```
   37
   37
   37
   37
   37
   37
   37
   37
   37
  333 T
```

```
  370
   37 -
  333 T
```

- *Optellen of aftrekken onder elkaar* kunnen de kinderen op de machine doen, vooral als ze moeite hebben de cijfers goed onder elkaar te plaatsen.

```
1.47
 .56
2.03 T
```

```
2.34
 .89 -
1.45 T
```

▸ Bij gebruikmaking van de toets voor *sub-totaal* kunnen de leerlingen een getal bij zichzelf optellen en zo voortgaande steeds de som weer met dat getal vermeerderen.
Ze krijgen dan bijvoorbeeld de vermenigvuldigingstafel van dat getal.

```
.05
.05 S

.05
.10 S

.05
.15 S

.05
.20 S

.05
.25 S

.05
.30 S

.05
.35 S

.05
.40 S

.05
.45 S

.05
.50 S
```

▸ Indien ze dit voor twee getallen doen en de telstroken naast elkaar leggen kunnen de leerlingen de *gemeenschappelijke veelvouden* aanstrepen en zo ook het k.g.v. vinden.

```
.06        .08
.06 S      .08 S

.06        .08
.12 S      .16 S

.06        .08
.18 S      .24 S

.06        .08
.24 S      .32 S

.06        .08
.30 S      .40 S

.06        .08
.36 S      .48 S

.06        .08
.42 S      .56 S

.06        .08
.48 S      .64 S

.06        .08
.54 S      .72 S

.06        .08
.60 S      .80 S
```

▸ Laatstgenoemde manier geeft ook een mogelijkheid te beschikken over getallenparen die *dezelfde verhouding* hebben en zou dus kunnen dienen ter voorbereiding van 't werken met verhoudingsblokken.
Eventueel zou ernaast nog een derde telstrook gelegd kunnen worden met de veelvouden van de som van eerstgenoemde getallen.

.05 .05 s	.03 .03 s	.08 .08 s
.05 .10 s	.03 .06 s	.08 .16 s
.05 .15 s	.03 .09 s	.08 .24 s
.05 .20 s	.03 .12 s	.08 .32 s
.05 .25 s	.03 .15 s	.08 .40 s
.05 .30 s	.03 .18 s	.08 .48 s
.05 .35 s	.03 .21 s	.08 .56 s
.05 .40 s	.03 .24 s	.08 .64 s

▸ Bij vermenigvuldigen onder elkaar kan de *algoritme* worden *ondersteund* met een telstrook waarbij 't antwoord verkregen is door enige malen het getal met z'n tienvouden en honderdvouden, overeenkomstig de opgave te sommeren.

1.27	1.27
1.25	1.27
	1.27
	1.27
6.35	1.27
25.40	12.70
127.00	12.70
	127.00
	158.75 T
158.75	

Gebleken is, dat bij gebruik van machines èn de leerlingen èn de onderwijzer steeds andere mogelijkheden ontdekken.
Ongetwijfeld zijn bovengenoemde nog slechts een eerste aanzet.
De opdrachten voor de leerling kunnen verstrekt worden op opdrachtkaarten, waarbij de leerling ook inderdaad aan het *zelf-ontdekken* gezet wordt.

3.8 VERMENIGVULDIGEN

HET RESULTAAT VAN WAT GERAFEL

HUUB JANSEN
FRED GOFFREE

In het begin van dit jaar heeft het IOWO een aantal bijeenkomsten georganiseerd voor docenten wiskunde-didaktiek aan Pedagogische Akademies. Tijdens die bijeenkomsten is geprobeerd enige struktuur aan te brengen in de ontwikkeling van didaktisch handelen van a.s. onderwijzers tijdens de opleiding.
Om niet in vaag geteoretiseer te vervallen zijn we uitgegaan van een, voor docenten, studenten en onderwijzers op oefenscholen, bekend leerstofgebied namelijk HET VERMENIGVULDIGEN.

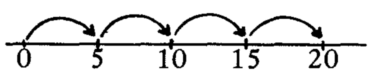
We hebben dit leerstofgebied daartoe uiteengerafeld in de verschillende fasen, die in de basisschool aan de orde komen.
Hieronder vindt u het resultaat van ons 'gerafel'. Het leek ons nuttig ook de lezers van het Bulletin hiervan in kennis te stellen, omdat een dergelijk eksposee van belang kan zijn voor ieder die zich met de rekenkundige operaties bezighoudt in de basisschool. En over deze operaties gaat dit Bulletin.

Wel een paar opmerkingen vooraf.
* *De verschillende fasen geven geen zuiver chronologische volgorde van de leeraktiviteiten zoals die op school plaatsvinden. U zult merken dat verschillende onderdelen ook in eerdere of latere fasen aan de orde komen.*
* *Naar volledigheid is niet gestreefd. Iedere onderwijzer met enige ervaring zal in staat zijn de lijst verder uit te breiden.*
* *Een dergelijke doorlichting van een leerstofgebied is natuurlijk ook mogelijk voor andere gebieden van het rekenonderwijs. Wij nodigen u hierbij uit iets dergelijks te ondernemen met bijvoorbeeld optellen, breuken, oppervlakte en inhoud, enz.*
  Voor resultaten houden wij ons aanbevolen!

Al met al hopen wij dat onderstaande opsomming u wat meer zicht geeft op een deel van de rekenaktiviteiten van uw leerlingen.

Voorbereidende fase

* Tellen met gelijke sprongen, heen en terug — 2, 4, 6, 8, ...
  30, 25, 20, 15, ...
* Invullen van een rij — 4, 8, 12, $\square$, 20
* Ritmisch tellen — 1, 2, $\square$, 4, 5, $\square$, 7, 8, $\square$, ..
* Gebruiken van de getallenlijn



* Getallen als 'getalfiguren'

O O O
O O O
O O O
O O O

12 is 4 rijtjes van 3

---

* Splitsen (struktureren) van getallen

$8 = 4 + 4$
$6 = 2 + 2 + 2$

---

* Toepassingen in konkrete situaties

- de 7 dwergen hebben ieder 2 schoenen
- Jan, Piet en Theo kopen ieder een reep van 10 ct.
- 3 auto's hebben . . wielen

Aanleren

* Het begrip 'maal' (keer)

- er wordt 3 maal op de deur geklopt (tijd)
- er staan 4 maal 2 bloempotten in de vensterbank (plaats)

---

* Vermenigvuldigen als herhaald optellen: notatie

$4 + 4 + 4 = 3 \times 4$

---

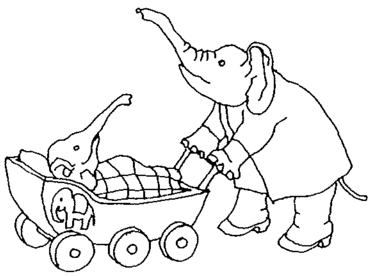
* Inpassen in bestaande kennis

O O
O O
O O

$2 + 2 + 2 = 3 \times 2$

---

* 'Maal' in allerlei (kwantitatieve) situaties



- flessenrek

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

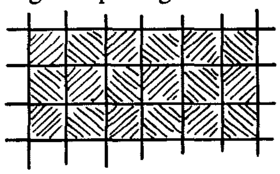
$4 \times 6 = 24$
$6 \times 4 = 24$

- eierdoos

. . .
. . .

$2 \times 3 = 6$

- tegels op de grond



6×3

---

* Introduktie en opbouw van een tafel

$2 + 2 = 2 \times 2 = 4$
$2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$
$2 + 2 + 2 + 2 = 4 \times 2 = 8$
— — — — — — — — — — — —
— — — — — — — — — — — —

* De tafels in vaste volgorde

1 x 3 = 3
2 x 3 = 6
3 x 3 = 9
– – – – –
10 x 3 = 30

* Maken van een 'tafelkaart'

1 x 4 = 4
2 x 4 = 8
3 x 4 = 12
– – – – –
– – – – –

* Leren van paren: 5 x 3 → 15

4 x 3 = 12 | 2 x 4 = 8 | 5 x 2 = 10

* Oefening met spel
  5 x 3 ↔ 15

4 x 4 = | 3 x 2 = | 5 x 3 = | 6 | 20 | 15

* Omkeringen

. x 9 = 36 8 x . = 24

* Een tafel op de getallenlijn

4 8 12 –––––– 40

* Tafelpatronen in een honderdveld

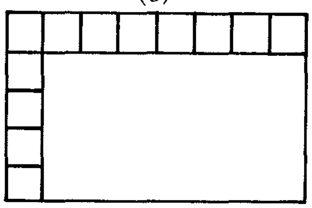
	2		4		6	7	8		10
			14						
21									

* Toepassen van de tafels van vermenigvuldiging

- 1 potlood kost 5 ct
  7 potloden kosten ....
- een week heeft 7 dagen
  4 weken ....
- in 8 schoenendozen zitten ... schoenen
- met hoeveel tegels kunnen we deze figuur beleggen?

(8)

(5)



* Uitrekenen van de tafels van 11, 12, 20, 40, 70, ...

1 x 12 = 12
2 x 12 = 24
3 x 12 = 36
– – – – –

---

* Maken van een vermenigvuldigtabel

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	–	–	–	–	–
2	2	4	6	–	–	–	–	–	–
3	3	6	–	–	–	–	–	–	–

Eigenschappen van de vermenigvuldiging

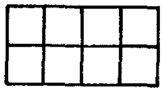
* Ontdekken

3 x 2 = 6
2 x 3 = 6   en dus ......

---

* Inzien

4 x 2



2 x 4

---

* Toepassen

8 x 11 = 8 x 10 + 8 x 1
8 kwartjes is 2 maal een gulden

---

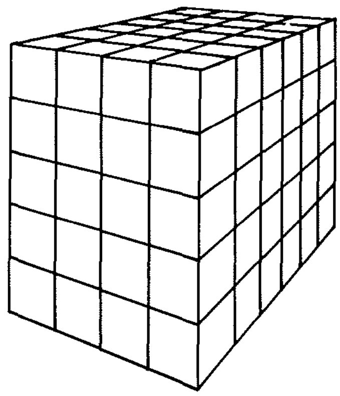
* Kommutatieve eigenschap

4 x 6 = 6 x 4

---

* Associatieve eigenschap

(3x4) x 2 = 3 x (4x2)

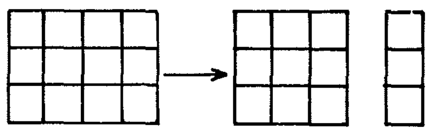


(4x5) x 6 = ...

---

* Distributieve eigenschap

3 x 4 = 3 x 3 + 3 x 1



---

* Bizondere gevallen

1 x 5 = 5   0 x 7 = 0
5 x 1 = 5   7 x 0 = 0

* Toepassingen

$7 \times 99 = 7 \times 100 - 7 \times 1 = \ldots$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \underline{12} \times \\ 54 \\ \underline{270} \\ \ldots \end{array}$$

Cijferend vermenigvuldigen: algoritmiek

* De schrijfwijze

$$3 \times 7 \rightarrow \begin{array}{r} 7 \\ \underline{3} \times \end{array}$$

* Uitbreidingen

$$\begin{array}{r} 39 \\ \underline{6} \times \\ 54 \\ \underline{180} \\ \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43 \\ \underline{5} \times \\ 215 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \underline{17} \times \\ \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r} 504 \\ \underline{16} \times \\ \ldots \end{array}$$

* Vermenigvuldigen met kommagetallen

$$\begin{array}{r} 247 \\ \underline{38} \times \\ \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}47 \\ \underline{3{,}8} \times \\ \ldots \end{array}$$

* Schattingen

$1{,}002 \times 1{,}003$
$\approx 1{,}005$

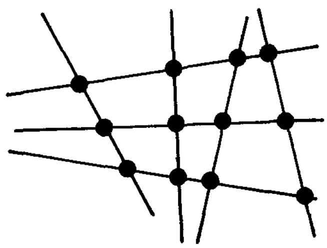
* Afrondingsfouten

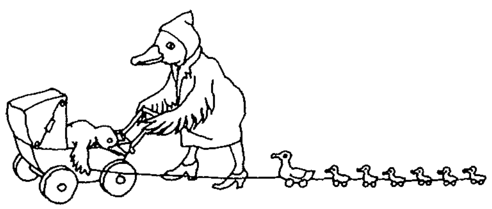
$100 \times 9{,}83 \approx$
$100 \times 9{,}8 = 980$

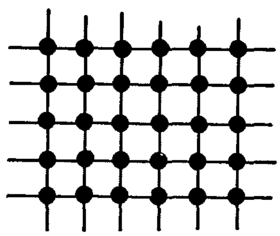
Toegepast vermenigvuldigen in het rekensysteem

* 'Slim' tellen

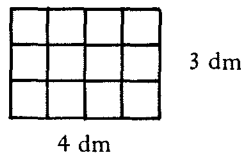
x x x x x
x x x x x
x x x x x



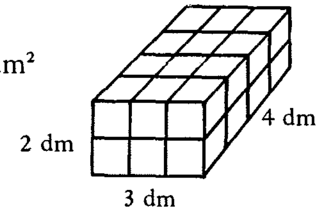




* Oppervlakte/inhoud



oppervlakte: 3 x 4 dm²

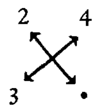


inhoud: 2 x 3 x 4 dm³

* Metriek Stelsel — 7 m = 7 x 10 dm

* Procenten — 5% van *f* 200,– = 5 x *f* 2,–

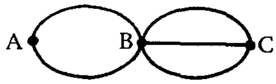
* Verhoudingen/evenredigheden — 2 : 3 = 4 : ..



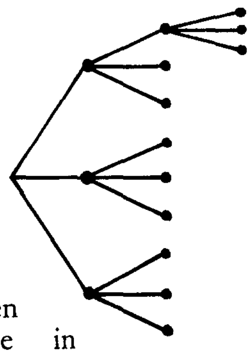
* Schaal — 1 cm → 10 km
  5 cm → 5 x 10 km

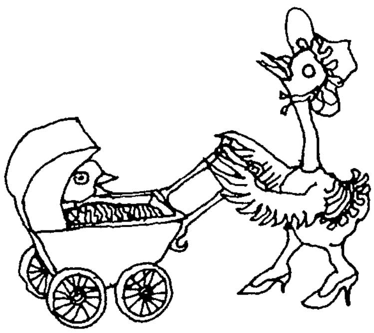
* Kansen — P (dubbel zes) = $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$

* Machten — $2^4 = 2x2x2x2$
  $2743 = 2x10^3 + 7x10^2 + 4x10 + 3x1$

* Kombinatoriek
  - 

  - 5 voetbalklubs spelen een kompetitie
  - aantal diagonalen in een n-hoek
  - een boomdiagram





  - de voetbaltoto
  - er woont een jongen / meisje / mijnheer in dat witte / bruine huis
  - aantal wegen op het stadsplan
  - het bestuur met een voorzitter en sekretaris

Vermenigvuldigen en delen

* Verdelen in gelijke porties	• 18 centen leggen in stapeltjes van 3 • hoe kan je 24 in gelijke porties verdelen? welke mogelijkheden?
* Verdelen in n gelijke porties	verdeel 12 in 3 gelijke porties
* 'Omkering' van de tafelprodukten	. x 3 = 15 7 x . = 14
* Kontroleren van een deling	36 : 4 = 9, want 9 x 4 = 36
* Vermenigvuldigen bij het maken van een staartdeling	• 17/573\21 ↓ 3 x 17 = 51 4 x 17 = 68 en dus ... • 625 : 19 gaat ruim 30 keer • 13/285\21 26 25 13 12 → 285 = (21x13) + 12

Vermenigvuldigen en breuken

* Gelijknamig maken	$\frac{2}{5} = \frac{3\text{x}2}{3\text{x}5} = \frac{6}{15}$
* Geheel getal, breuk	$7 \text{ x } \frac{2}{3} = \frac{7\text{x}2}{3} = \ldots$
* Breuk, geheel getal	$\frac{3}{4} \text{ x } 8 = \frac{3\text{x}8}{4} = \ldots$
* Breuk, breuk	$\frac{2}{5} \text{ x } \frac{3}{4} = \frac{2\text{x}3}{5\text{x}4} = \ldots$
* 'Samengestelde' breuken	$2\frac{1}{4} \text{ x } 4\frac{1}{4} = \ldots$

Getallen als produkt van faktoren

* Ontbinden in faktoren	6 = 2 x 3
* Machten	$144 = 2^4 \text{ x } 3^2$
* Fakulteit	1 x 2 x 3 x 4 = 4! = 24
* Verzameling delers	$D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$

* Gemeenschappelijke delers (doorsnede) — $15 = 5 \times \underline{3}$; $21 = 7 \times \underline{3}$

* Verzameling veelvouden — $V_8 = \{8,16,24,32,...\}$

* Gemeenschappelijke veelvouden (doorsnede) — 7–14–21–28 ———; 4–8–12–....28....

* Priemgetallen

Toepassingsgebieden in het dagelijks leven

* Tijd – weg – snelheid

* Vermenigvuldigen op de kassamachine

* Rekenen met vreemd geld

* Vermenigvuldigen in de supermarkt

* Grote getallen — $5{,}2 \times 10^6$ (5,2 miljoen)

* Schatten van .....
  - tegels van 30x30 cm
    grondoppervlakte ongeveer 9 m x 4 m
    aantal tegels: ...
  - vuistregel voor radiatoren in verband met inhoud huis

* Kombineren

* Formules met evenredige grootheden

* Kaart lezen op schaal

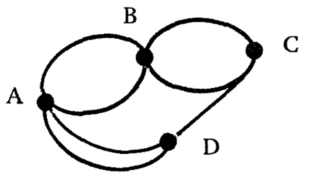
* Werktekening op schaal maken

3.9 OPERATIES IN HET INTEGRATIEPLAN

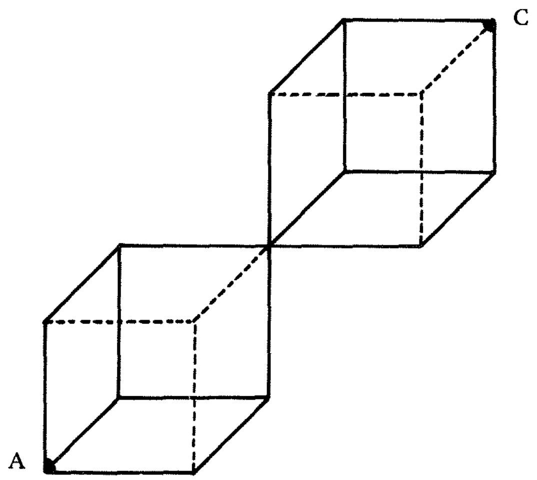
ADRI TREFFERS

We geven u in dit bestek een kort overzicht van de aksenten, die wij in het integratieplan gaan plaatsen wat betreft de operaties met getallen.

* We leggen méér nadruk op het *ordenend tellen*. We maken daarbij gebruik van het spijkerbord, het stadsplan, meetkundige figuren, tekeningen, e.d. Het tellen wordt daarbij verbonden met optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, meten en het voortzetten van getalpatronen.
Hierbij gaat het dus niet in de eerste plaats om het inoefenen van algoritmen; de toepásbaarheid van de algoritme is problematisch.
Een bekend voorbeeld:



Hoeveel verschillende wegen lopen er van A naar C?
Een soortgelijk probleem:



Andere voorbeelden:
- oppervlakte, inhoud,
- wegen op 't stadsplan,
- diagona!en van een vierhoek,
- handdrukken van n personen,
- telproblemen bij de abakus,
- kombinatorische spelen (kombinaties, permutaties, variaties),
- betaalproblemen,
- voortzetten van een getallenrij.

Literatuur:
Tel-op-Tal (KO- en BAS-boek).[1])
Operaties in ℕ.[2])
Wiskobas-Bulletin, jaargang 1, no 5.[3])

* Er wordt, in verband met de operaties, veel aandacht besteed aan het begrip *plaatswaarde*. Allerlei positiespelen worden gedaan, waarbij inwisselmateriaal, de abakus en de positiekaart gebruikt worden.
In de hoogste klassen van de basisschool wordt er ook in andere talstelsels gerekend.
Literatuur: Tel-op-Tal.

* Er worden vele *modellen* gebruikt voor het aanleren en toepassen van operaties:
getallenrechte, staafjes, ladder, opteltabel, honderdveld, machientjes, rooster, wegen, boomdiagram, waterkolommen, grafieken, e.d.

* Ter voorbereiding van het automatiseren van de basisbewerkingen maken we gebruik van een aantal *oefenspelen:*
dominospelen, rekenkwartet, snapspel, ganzenbordspel, e.d.
Literatuur: Klaar? Ga maar spelen.[4])

* Bij het aanleren van algoritmen wordt uitgegaan van het principe van de *toenemende schematisering*.
De strategieën, die ontwikkeld worden bij vermenigvuldigen, staartdelingen e.d. worden in *blokschema's* (stroomdiagrammen) gezet.

---

[1]) Blok voor de Heroriënteringskursus.
[2]) Blok voor de Pedagogische Akademie.
[3]) Bladzijde 385-389, 397-401.
[4]) Een serie werkkaarten van Jan Nieland e.a. (uitg. Malmberg, Den Bosch).

Literatuur: Automatiseren van operaties. [5])

* Bij de inkleding van operatieproblemen maken we gebruik van *frames in open beweringen*.
De relatietekens die daarbij gebruikt worden zijn: $= \neq > <$.
Voorbeelden:

$3 + \square = 12$
$\square \times \square = 16$
$\Delta + \square = 16$
$7 \times \square = 0$

Varieer de keuzeverzameling en de relatietekens!
Literatuur: Open Beweringen.[6])

* We maken gebruik van *machientjes*, die
- optellen, aftrekken,
- halveren, verdubbelen,
- vermenigvuldigen, delen.

Het schakelen van machientjes, die de basisoperaties samenstellen of de werking van een andere machine 'neutraliseren' (de rol van 0 en 1).
Telproblemen bij machientjes die tweetallen ordenen en de strategie die bij deze ordening gevolgd wordt.
Literatuur: In Orde.[7])

* We gaan vanaf het begin *opereren met grootheden*:
lengte-oppervlakte-inhoud, wegen, snelheid, geld, tijd, temperatuur, lichtsterkte, enz.
Literatuur: De rekenkundige bewerkingen.[8])
Meten.[9])
Meten.[10])

* Er wordt *geopereerd met 'niet-getallen'*:
draaiingen, spiegelingen, kleurveranderingen (transformaties).
En er worden vreemdsoortige bewerkingen uitgevoerd met getallen. Bijvoorbeeld de bewerking '*', die het volgende tot stand brengt: $a * b = a^2 + ab$.

* Er wordt — mede in verband met het hoofdrekenen — aandacht besteed aan de kommutatieve, de associatieve en de distributieve *eigenschappen* in verband met optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
Ook komt het begrip geslotenheid ten aanzien van deze bewerkingen in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ ter sprake.
Literatuur: Operaties in $\mathbb{N}$.
Tel-op-Tal.
Wat hoofdrekenen is, weet iedereen.[11])

* Bij de operaties zoeken we naar voorbeeldige visualiseringsmiddelen, die de weg naar de *generalisering* (algebra) open houden.
Voorbeelden:
het roostermodel bij vermenigvuldigen en optellen (distributieve eigenschap), de getallenrechte voor de basisoperaties, fysische hulpmiddelen voor het bijeenvoegen van waterhoeveelheden, e.d.
Ook trachten we betrekkingen weer te geven in formulevorm.

* Er zal onderzocht worden in hoeverre het *rekenen met kansen* mogelijk is op de basisschool.

Tenslotte noemen we nog eens de begrippen, die we onderscheiden hebben, om de operaties reliëf te geven:
- ordenend tellen (toepasbaarheid),
- plaatswaarde,
- gebruik van modellen,
- oefenspelen,
- samenstellen van blokschema's (stroomdiagrammen),
- gebruik van frames in open beweringen,
- gebruik van machientjes,
- opereren met grootheden (meetgetal),
- opereren met niet-getallen,
- eigenschappen van operaties,
- generalisering van betrekkingen,
- rekenen met kansen.

---

[5]) Artikel van Johan van Bruggen in dit Bulletin.
[6]) Blok voor de Heroriënteringskursus.
[7]) Blok voor de Heroriënteringskursus.
[8]) Artikel van Prof. Freudenthal in dit Bulletin.
[9]) Blok voor de Pedagogische Akademie.
[10]) Blok voor de Heroriënteringskursus.
[11]) Artikel van Huub Jansen in dit Bulletin.

INHOUD

3.1 Inleiding en leeswijzer 804
3.2 Open beweringen in klas 1 805
3.3 Is dat toevallig? 808
3.4 Een onderwijsleerpakket 'Open beweringen' 810
3.5 Tel-op-tal-cijfers 813
3.6 Van kabouters naar de tweede kamer 815
3.7 Vervolg op 'De fietsenstalling' 819
3.8 Reaktie op 821
3.9 Koncentratie aan het spijkerbord 823

MEDEWERKERS AAN DIT BLOK:
V. Harskamp, Rob de Jong, Harm Jongsma, Daan Karman, Alda Kolste, I. Meyer, Hervormde School Onstwedde, Pierre Knops, Leen Streefland, Hubert Winters.

respons blok

3.1 INLEIDING EN LEESWIJZER

Eigenlijk doen we dat toch wel vaak, dat we ons licht onder de korenmaat zetten. De ervaringen die we hebben opgedaan houden we meer of minder angstvallig voor ons.
'Het stelt toch niks voor', zeggen we dan, of 'dat kan iedereen wel'.
En bescheidenheid siert de mens.
Maar toch?
We hebben elkaar nodig. We kunnen en moeten van elkaars ervaringen profiteren. Moeten alle 40.000 onderwijzers steeds alle problemen op eigen houtje oplossen, alles zelf uitprakkizeren, voortdurend op het nul-punt starten? Of kunnen ze zetjes krijgen, op gang gebracht worden?
Misschien moeten we wel leren om 'mededeelzaam' te worden en dient hieraan aandacht te worden besteed tijdens de onderwijzersopleiding.
We kunnen ons niet de luxe permitteren om ons licht onder de korenmaat te zetten, want de kwaliteit van het onderwijs heeft er mee te maken.
En heus, ook uw ervaringen zijn belangrijk.

Op het moment dat dit Bulletin u bereikt, zullen de meeste kursisten begonnen zijn met 'Het Spijkerbord' (eerstejaarskursussen) of met 'Statistiek en Waarschijnlijkheid' (tweedejaarskursussen).
Enkele ervaringen van kollega's met deze onderwerpen hebben we opgenomen.
3.3 Een student van een pedagogische akademie uit Arnhem heeft een onderzoekje gedaan naar de mate waarin begrippen als 'zeker', 'waarschijnlijk' en 'toevallig' bij leerlingen uit de hogere leerjaren van een basisschool gevuld zijn. De in zijn bijdrage geciteerde uitspraken van leerlingen zijn zowel vertederend als illustratief. We hopen op verdere reakties én van studenten die met het eksperimentele blok 'De Teerling is geworpen' hebben gewerkt én van tweedejaars-kursisten. Het veld is immers nog vrijwel onontgonnen!

'Het Spijkerbord' komt in twee artikelen aan de orde.
In **3.6** treft u een verzameling bijdragen aan die afkomstig is van de Hervormde School te Onstwedde. Uit het door hen samengestelde 'Spijkerbordboek' hebben we enkele fragmenten gelicht.
Leen Streefland reageert in **3.8** op een artikel dat J.E.F. van Onzen in het voorgaande Respons-Blok schreef. Gewezen wordt op de differentiatie-mogelijkheden die zinvolle opdrachten in zich dragen.

Harm Jongsma, onderwijzer aan de openbare basisschool 'De Ekkel' te Eelde, maakte een fotoreportage van zijn leerlingen (4^{e} klas), werkend met het spijkerbord (**3.9**).

Voorts zijn twee bijdragen over *'Open Beweringen'* gekozen.
Een inleidende les in klas 1 wordt door Alda Kolste beschreven (**3.2**). Duidelijk is hoe in deze fase taal en wiskunde nog onscheidbaar zijn.
Uit Hoogvliet ontvingen we van mevrouw V. Harskamp een uitvoerig onderwijsleerpakket 'Open Beweringen' voor de zesde klas (**3.4**). We vragen uw aandacht voor de opbouw: van verschijnselen uit de omgeving van het kind via gestruktureerd materiaal (logiblokken) naar de operaties met getallen.

3.5 bevat getallen over het blok *'Tel-op-Tal'*. Mej. I. Meyer stuurde ons leerlingenmateriaal. We hebben onderzocht welke opgaven makkelijk/moeilijk voor de leerlingen zijn.

We kregen van Pierre Knops uit Limburg een serie problemen die een aanvulling betekenen van een artikel dat Johan van Bruggen en Edu Wijdeveld voor aflevering 1 van deze jaargang schreven (**3.7**).

Niet alles wat geschikt is hebben we kunnen opnemen. Voor de volgende aflevering ligt al klaar:
– een werkstuk van de heer A. Bisschop uit Appingedam,
– spijkerbordervaringen van de kursus Eelde/Paterswolde,
– verslag van een breukenenquête uit Breda.

3.2 OPEN BEWERINGEN IN KLAS 1

ALDA KOLSTE

Alda Kolste, onderwijzeres aan de Mr. G.J. van Heuven Goedhartschool te Zandvoort, heeft op 2 november 1972 van 9-10 uur in de eerste klas een inleidende les over 'Open Beweringen' gegeven.[1]*)*
In deze klas zitten 13 jongens en 14 meisjes.

Doel van de les
Een inleidende les over beweringen, die WAAR of NIET WAAR kunnen zijn en de invoering van het <-teken.

Beginsituatie
Omdat de leerlingen pas drie maanden op school zijn, zijn ze nog niet in staat om via begrijpend lezen een opdracht uit te voeren. Heel eenvoudige woordjes kunnen worden gelezen.
Het getalbegrip van de getallen 0,1,2,3,4 en 5 is in meer of mindere mate aanwezig.

De opbouw van de les

* Een gesprek over het gedichtje: *'Het kippetje Ukkepuk'* van Annie M.G. Schmidt.
  Wat doet het kippetje allemaal en wanneer?
* Welke dag is het vandaag?
  ....donderdag, 2 november.
  Is dat waar?
  Hoe kunnen we dat zien?
  Kijk maar op de kalender.
* Het klopt.
  Wat jullie hebben verteld is dus WAAR.
  Wie kan nog een zinnetje bedenken, dat waar is? Voorbeelden.
* Iedereen krijgt nu een kaartje, waarop we het woordje 'waar' schrijven. Zelf een groot voorbeeld laten zien!
* 'Wij zitten in de tweede klas'.
  Is dit waar? Nee, dit is NIET WAAR.
  Wie bedenkt nog meer voorbeelden, die niet waar zijn.
* Nu krijgt iedereen ook een kaartje (andere kleur), waarop we 'niet waar' schrijven. Voorbeeld laten zien!

  waar **niet waar**

* In spelvorm komen nu de ware en niet-ware beweringen aan de orde. Ik zeg telkens een zin (bewering). Als het waar is, steken de leerlingen het kaartje met WAAR omhoog. Is de bewering niet waar, dan gaat het kaartje met NIET WAAR omhoog.
  Later moeten de leerlingen dit ook enige keren met dichte ogen doen. Leren luisteren!
  Probleem: onthouden in welke hand het kaartje met WAAR is en in welke hand het andere kaartje. Eerst even met 'links' en 'rechts' oefenen.

Voorbeelden van beweringen
- Wij zitten op de Mr. G.J. van Heuven Goedhartschool.
- Het is middag.
- Het bord is rood.
- Gisteren was het zondag.
- Er is iemand op bezoek in de klas.
- Een augurk is erg zout.
- Het water in de zee is zuur.
- Een driehoek heeft drie hoeken.
- Een cirkel is vierkant.
- De helft van vier is twee.

* Nu gaan we eens kijken of de volgende zin WAAR is:

een $\boxed{}$ **is een dier**

Wie kan er een woord invullen? Voorbeelden.
Jullie krijgen enkele kaartjes en daar gaan we woorden op schrijven. Daarna kijken we of die woorden wel of niet in de zin passen.

| huis | boom | poes | tol |

Ieder kind schrijft deze kaartjes na.
Nu eksperimenteren!
Welk woordje past, welk niet?
Leg de kaartjes in het frame en probeer maar.
De kinderen krijgen een – gedeeltelijk voorgeschreven – blad papier met dit voorbeeld.
Als een woordje past, is de zin waar. Anders niet.

* We schrijven dat zo op.
Dit wordt eerst op het bord gedaan.
De woordjes 'tol', 'boom' en 'huis' passen niet. Het woordje 'poes' past wel. Dan is de zin WAAR. Het woordje 'poes' komt er zo onder te staan (in een hokje, de andere hokjes blijven leeg):

| poes | | |

* Vervolgens een bewering, waarbij twee woorden kunnen worden ingevuld om de bewering waar te maken.
Denk weer aan de dagen van de week.
Opnoemen!
De namen schrijven we op losse kaartjes.

| maandag | dinsdag | woensdag |

| donderdag | vrijdag |

| zaterdag | zondag |

op ☐ gaan wij met de bus

| donderdag | vrijdag | | |

De kinderen schrijven dit antwoord ook zo op.

* We gaan de rekenblokjes erbij nemen.
Pak eens 2 blokjes.
Nu ook eens 5 blokjes.
Wat kun je nu zien?
Voorbeelden: groter, kleiner, lager, hoger, korter, langer, samen 7, enz.
Neem weer je kaartjes met WAAR of NIET WAAR.

2 blokjes zijn langer dan 5 blokjes
. . . . niet waar

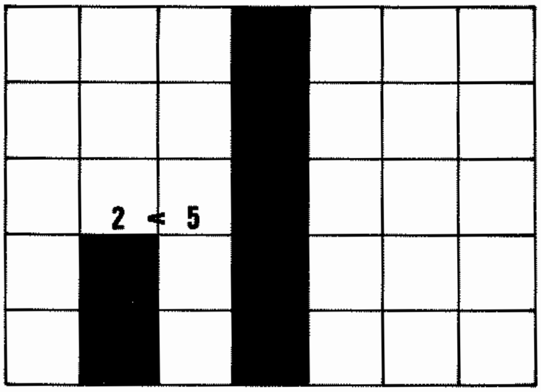
5 blokjes zijn hoger dan 2 blokjes
. . . . waar

2 blokjes zijn evenveel als 5 blokjes
. . . . niet waar

2 blokjes zijn 3 minder dan 5 blokjes
. . . . waar

2 blokjes zijn kleiner dan 5 blokjes
. . . . waar

* We tekenen de blokjes na op het geruite papier (ruitjes van 1 cm bij 1 cm).
Ieder blokje past precies in een hokje.
Op het bord wordt het voorgedaan.
Kunnen we zeggen 2 = 5?
Nee, dat is niet waar.
Dat mogen we dus hier niet bij schrijven.
Wel: '2 is kleiner dan 5'.
Het begrip *kleiner dan* ook even laten zien met behulp van twee kinderen voor de klas.
Zeg de goede zin erbij.
Bijvoorbeeld: Niels is kleiner dan Roelof.
Nu met twee dobbelstenen, een grote en een kleine.
Laat het verschil met potloden aanduiden.
Het teken voor 'kleiner dan' ontstaat.



Ook de eerste letter van het woord '*K*leiner' kunnen we nemen.
Een stukje ervan is het goede tekentje:

k   <

We zetten dit tekentje tussen de 2 en de 5.
Lees het maar op: *2 is kleiner dan 5.*

* Wie kan er zelf nog een voorbeeld bedenken?
Dat gaan we ook samen tekenen.

Daarna het onderschrift. Misschien is een leerling in staat om geheel zelfstandig iets uit te tekenen.
Voorbeelden:

$1 < 2$ $\quad$ $4 < 5$

$2 < 3$ $\quad$ $1 < 5$

$3 < 4$ $\quad$ $2 < 4$

SAMENVATTING
Door een les 'goed voorbereid' te geven ontdek je met welke moeilijkheden een kind worstelt.
De kinderen waren enthousiast. Maar ook van de ouders kregen we allerlei leuke reakties.

---

[1]) Mej. Kolste neemt deel aan de heroriënteringskursus te Santpoort, kursusdocenten: H.M.M. Klein en W.J. de Tombe (wiskundigen) en A. Pilon (pedagoog).

3.3 IS DAT TOEVALLIG?

HUBERT WINTERS

Hubert Winters, student aan de pedagogische akademie INSULA DEI (Arnhem), stuurde ons onderstaande ervaringen. In de drie hoogste leerjaren van de basisschool 'De Berkhaag' te Herwen en Aerdt nam hij een test af teneinde na te gaan hoe leerlingen zouden reageren op begrippen als 'zeker', 'waarschijnlijk', 'toevallig'. Zijn onderzoekje leverde gegevens op die van belang kunnen zijn bij overwegingen rond de eventuele invoering van 'Statistiek en Waarschijnlijkheid' op de basisschool.
Zoals u wellicht weet is er voor de heroriënteringskursus van onderwijzers een blok 'Statistiek en Waarschijnlijkheid' ontwikkeld, terwijl op een aantal pedagogische akademies (waaronder 'Insula Dei' te Arnhem) met een eksperimenteel blok 'De Teerling is geworpen' wordt gewerkt.

Om de lezer tegemoet te komen hebben we achter het juiste alternatief een pijltje geplaatst.

Kijk niet af!
Je buurman of buurvrouw
kan ook fouten maken!

A

1 Een gezin bestaat uit vader, moeder en vijf kinderen: allemaal jongens
- O toevallig ←
- O niet toevallig

2 Eerste paasdag valt op zondag
- O toevallig
- O niet toevallig ←

3 In een gezin zijn vader, moeder en twee kinderen allemaal in december jarig
- O toevalig' ←
- O niet toevallig

4 Eerste kerstdag valt op een zaterdag
- O toevallig ←
- O niet toevallig

5 In onze tuin zijn de dennebomen het hele jaar 'groen'
- O toevallig
- O niet toevallig ←

6 Uit onze klas gaan later alle kinderen naar de H.A.V.O.
- O toevallig ←
- O niet toevallig

7 Vorig jaar was 1972. Dit jaar 1973
- O toevallig
- O niet toevallig ←

8 Ik gooi zes keer met een dobbelsteen. Ik gooi drie keer 'n zes, twee keer 'n twee en één keer 'n drie
- O toevallig ←
- O niet toevallig

9 Elke avond is Ti-Ta-Tovenaar op de televisie
- O toevallig
- O niet toevallig ←

10 Zondag win ik de voetbaltoto
- O toevallig ←
- O niet toevallig

B Verzin *zeer waarschijnlijke* gebeurtenissen.
Bijvoorbeeld:
Als iemand in een auto rijdt, heeft hij een rijbewijs.
Of:
Als ik twintig keer met een dobbelsteen gooi, gooi ik wel een keer 'n zes.

1 ....
....
2 ....
....
3 ....
....

Uitspraken van leerlingen

Klas 4: – Als er voetbal is, dan wint Herwen.
– Als ik vijf partijen gevoetbald heb, maak ik een goal.

Klas 5: – Als iemand lacht, zal hij wel een ander gezicht trekken.
– Als ik ga steppen, moet ik de verkeersregels kennen.
– Als ik een muis zie, piept hij.
– Als ik 4 kg vergif eet, ben ik toch niet ziek.
– Als ik drie keer op een goal schiet, zet ik er wel één in.
– Ik ben schatrijk.

Klas 6: – Als je met bijvoorbeeld taal er met de pet naar gooit, dan krijg je geen voldoende op je rapport.
– Ik ben altijd lief.
– Wat in de krant staat, is waar.
– In Herwen vliegen veel vogels. Tien van de negen zijn huismussen.

C Verzin *zekere* gebeurtenissen.
Bijvoorbeeld:
Als het regent, worden de daken nat.
Of:
Als ik 10 kilometer hard loop, dan heb ik 10.000 meter gelopen.

1 ....
....
2 ....
....
3 ....
....
4 ....
....
5 ....
....

Uitspraken van leerlingen

Klas 4: – Als ik jarig ben, vier ik feest.

Klas 5: – Elke leraar krijgt koffie.
– 1 + 1 = 2.
– Als je naar een lachfilm gaat, moet je lachen.
– Ik hou van mijn moeder.
– Als ik in de lucht spring, kom ik weer op de grond terecht.
– Als ik in de modder duik, ben ik smerig.
– Als ik in het water duik, wordt mijn zwembroek doorzichtig.
– Als je een hond kittekat geeft, lust hij 't niet.
– Als tante haar baby te eten geeft, dan heeft ze geen honger meer.

Klas 6: – Als een koe bestaat, bestaat een kalf ook.
– Als een kat voor je staat en je pakt een geweer en je houdt het tegen de buik en je schiet, dan is hij dood.

D Probeer hieronder eens met je eigen woorden te vertellen wat het woord 'toevallig' betekent.

Uitspraken van leerlingen

Klas 4: – Als een kind dezelfde fouten heeft als een ander, zegt de meester: 'da's toevallig, dat is raar'.
– Toeval is bijvoorbeeld dat pasen op zondag is, dat is veel leuker dan op dinsdag.
– Als je moeder een baby krijgt, maar ze weet niet dat het een drieling is, dus dat is toevallig.

Klas 5: – Ik wist niet dat er vijf kinderen geboren werden.
– Toevallig betekent: toevallig in het water liggen.
– Als je een auto-bestuurder vraagt 'heeft u een rijbewijs?', en de auto-bestuurder zegt 'nee', dan is dat toevallig.

Klas 6: – Dat het wel waar is dat bijvoorbeeld pasen op zondag valt en zaterdag op 6 januari valt en dat toevallig betekent, dat het misschien waar is.
– Toevallig betekent dat het eigenlijk niet elke dag gebeurt; dat je hoofdpijn krijgt van een proefwerk is niet toevallig bijvoorbeeld want dat weet je misschien van te voren al. Maar dat je een tweeling krijgt is wel toevallig, want dat gebeurt niet zo vaak.

3.4 EEN ONDERWIJSLEERPAKKET 'OPEN BEWERINGEN'

MEVR. V. HARSKAMP

Onlangs ontvingen we een uitvoerig onderwijsleerpakket, bestaande uit materiaal voor de leerkracht (transparanten voor de overheadprojector, lessuggesties) en leerlingenmateriaal (verschillend gekleurde kartonnen kaarten waarop keuzeverzamelingen en open beweringen, doosjes met getallen).
Dit pakket voor zes lessen over Open Beweringen, is samengesteld door mevr. V. Harskamp[1]) uit Hoogvliet, onderwijzeres van de 6e klas der Canteclaerschool.

Les 1
Beginsituatie
Het begrip 'verzameling' is bekend.
Doel
Aanbieding van het begrip 'keuzeverzameling'.
Leren werken met 'frames'.
Uitwerking
Via de overhead-projector worden de namen Rembrandt, Jan Steen, Vondel, Hooft, Hals gepresenteerd.
'Dit is een verzameling personen.'
Op de projector verschijnt nu:
'$\boxed{}$ is een schilder.'
'Wat zou je kunnen invullen?'
'Rembrandt, Jan Steen, Frans Hals.'
'Uit een rijtje personen heb je dus een keuze gedaan. We noemen zo'n rij waaruit je kiest *een keuzeverzameling*, en dat schrijven we zo:
K = {Rembrandt, Jan Steen, Vondel, Frans Hals, Hooft}'
Na nog een voorbeeld op de overhead-projector krijgen de kinderen opdracht om zélf keuzeverzamelingen en open beweringen te bedenken.
De meeste leerlingen schrijven de oplossing in het frame, hetgeen toegelaten wordt.
Voorbeeld:

K = {Bee-Gees, [illegible], Marlène Dietrich, Sint Nicolaas, Mireille Mathieu, Mungo Jerry, Buster Keaton, Alberda, Kaa-roots, Pamela von Rosum, Jean Bernet, de drie van Munchen.} komt niet uit Nederland.

De instruktiefase duurde ongeveer 7 minuten; de periode van de zelfwerkzaamheid varieerde van 20 tot 45 minuten.

Les 2
Doel
Het begrip 'variabele' te laten ontdekken.

Uitwerking
Een paar dagen te voren is de opdracht gegeven:
'Verzamel foto's van groepen personen, die bekend zijn van bijvoorbeeld de sport, de politiek, de kunst, enz.'
Iedere groep — er wordt in groepen gewerkt — heeft, wanneer de les begint, een verzameling personen alsmede een stapel rode kaarten met open beweringen.

Rode kaarten
- ☐ is het grootst
- ☐ is het kleinst
- ☐ is een zwemmer of zwemster
- ☐ komt uit engeland
- ☐ is erg beroemd
- ☐ komt uit nederland
- ☐ verschijnt wel eens op de televisie
- ☐ zingt het mooist
- ☐ is een zanger
- ☐ is 40 jaar of ouder
- ☐ stond de vorige week nog in de krant
- ☐ heeft een eerste prijs gewonnen
- ☐ komt niet uit nederland, niet uit engeland, niet uit de v.s.
- ☐ is iemand uit de politiek

De personen die in de open bewering zouden kunnen passen, worden bij de kaart gelegd. Spoedig blijkt dat veel foto's bij verschillende kaarten passen, zodat de behoefte ontstaat om per kaart de passende oplossing te noteren. Het blijkt tevens nodig te zijn om de personen steeds weer terug te leggen.
De leerlingen worden vrijgelaten in de notatie. Eén groep herinnert zich de notatie van de eerste les.
Voorbeelden:

K {N.A.C, sparta, feyenoord, f.c Den Haag, Ajax}
feyenoord, ajax zijn de beste voetbal clubben

K = {Ravensprong, Berend, Bouwdewijn, Eenvandaag en voor ...}
Berend Bouwdewijn eenvandaag ... dit zijn de leukste quizes.

K. {teaset, golden Earring, sweet, Middle of the road}
teaset golden Earring zijn de beste groepen

K. {springt, gelopen, fietst, vraagt, gewerkt}
Een voltooid deelwoord is gelopen, gewerkt

Les 3
Doel
Als bij les 2.

Uitwerking
Zelfde opzet, alleen is de keuzeverzameling nu door mij bepaald: een doos logiblokken.
De instruktie sluit aan bij de gegevens van de tweede les:

- 'Bij het nakijken is het gewenst dat ik kan lezen waaruit je kon kiezen en dat was niet op de blaadjes te vinden.'
  Konklusie van de leerlingen: dan moeten we voortaan de keuzeverzameling erbij zetten.
- 6 'Sommige kinderen moeten wel tien of meer namen in een frame schrijven.'
  Op de overhead-projector worden voorbeelden getoond.
  Konklusie van een leerling: die zin klópt ook niet, is meervoud.

Hierop volgend wordt via de projector een schrijfwijze aangeboden:

K = {Rembrandt, Vondel, Hooft, Hals, Steen}
△ is een schilder
○ = {Rembrandt, Hals, Steen}.

Iedere groep krijgt nu op gele kaarten zijn keuzeverzameling en open beweringen en gaat beginnen.

Gele kaarten	
○	is groot èn rood èn rond
○	is klein
○	is niet blauw
○	is blauw en dun
○	is driehoekig en/of geel
enz.	

Spoedig blijkt dat nog lang niet alle kinderen op de aangegeven wijze noteren.

De inleiding van de les duurde ongeveer 5 minuten, de zelfwerkzaamheid 1 à $1\frac{1}{2}$ uur.

Les 4
Een spelletje

* Een kind noteert één van de logiblokken. De anderen moeten er door het stellen van vragen achter zien te komen welk blok het is.
  'Je mag alleen vragen stellen, die met ja of nee beantwoord kunnen worden.'
* Opdracht:
  Schrijf eens op hoe de doos in elkaar zit, uit welke blokken je kunt kiezen. De kinderen noteren:

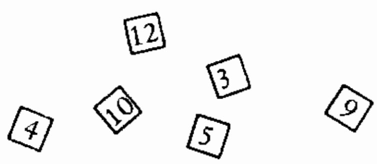
groot	dik	rood	vierkant
klein	dun	geel	rechthoek
		blauw	driehoek
			cirkel.

* Herhaling van het eerste spelletje.
  'Wie het weet, schrijft de oplossing op. Wie het niet weet, mag doorvragen?'
  Het spelletje wordt hierna 5 à 6 keer herhaald.
* Schrijf op in hoeveel keer je de oplossing kunt raden als je geluk hebt.
  Schrijf op in hoeveel keer je de oplossing kunt raden als je pech hebt.
  Konklusie: Je raadt het in minimaal 4 keer en in maksimaal 7 keer.

De les duurde ongeveer 35 minuten.

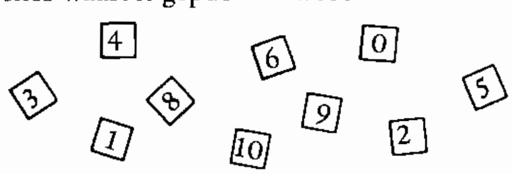
Les 5
Doel
Toespitsing van het begrip variabele in het rekenonderwijs.

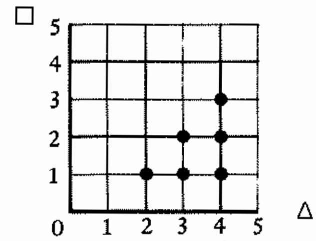
Uitwerking
Individueel of met z'n tweeën wordt aan de rode, blauwe en lila kaarten gewerkt. Geen instruktie nodig, de kaarten spreken voor zichzelf.
Bij de kaarten horen fiches waarop cijfers staan. Na plaatsing van een fiche in een frame kan vastgesteld worden of de regel 'waar' of 'niet-waar' is:



□ : 6 = 2

We geven de laatste (lila) kaart weer, met de fiches waaruit geput kan worden:





Hierboven staan de oplossingen.
Hieronder de open beweringen.
Kunnen deze open beweringen waar zijn?

Δ < □
Δ > □
Δ = □
Δ ≠ □

≠ betekent: is niet gelijk aan.

Les 6
Spelletje als bij les 4, maar nu met getallen.

Slotopmerking
Op de kursus vonden de kursisten het nodig dat de leerlingen de tekens voor 'groter dan' en 'kleiner dan' zelf ontdekten. Ik ben het daar niet mee eens. Wel wil ik dat ze begrijpen wat het betekent, maar dan zo: groter dan schrijven we op deze manier '>'.

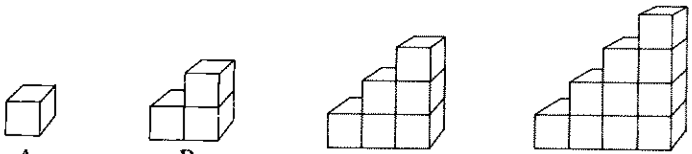
---

[1]) Deelneemster heroriënteringskursus te Rotterdam, docenten Gerrit van Eijsden (wiskundige) en Kees Koolhaas (pedagoog).

3.5 TEL-OP-TAL-CIJFERS

Van mej. I. Meyer, deelneemster aan de heroriënteringskursus te Eindhoven [1] *) en onderwijzeres aan de gemeentelijke onderwijsgemeenschap 'Corn. Jetses', ontvingen we leerlingenwerk. Het gestencilde werkblad (fig. 1), geïnspireerd op een serie werkbladen uit het BAS-boek 'Tel-op-Tal', is door de leerlingen van de derde klas zonder hulpmiddelen gemaakt.*
Wel hebben de kinderen van te voren kwadraten leren kennen met behulp van ruitjespapier en hebben ze 'ruimtelijk' geoefend met de witte Cuisenaire-staafjes.

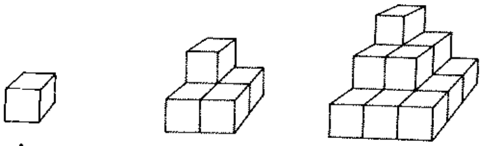
We zijn eens nagegaan welke resultaten de leerlingen behaalden.



? ? ? ?

A B C D E F G H

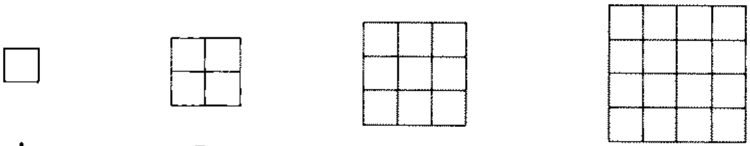
figuur	A	B	C	D	E	F	G	H
aantal blokjes	1	2	3	4	5	6	7	8
blokjes erbij	—	9	10	11	12	13	14	15



? ?

A B C D E

figuur	A	B	C	D	E
aantal blokjes	16	17	18	19	20
blokjes erbij	—	21	22	23	24



? ?

A B C D E F

figuur	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
aantal blokjes	1	4	25	26	27	28	29	30	31	32	33
sommetje	1.1	2.2	34	35	36	37	38	39	40	41	42
blokjes erbij	—	3	43	44	45	46	47	48	49	50	51

$1^2 = \square \cdot \square = \boxed{52}$

$2^2 = \square \cdot \square = \boxed{53}$

$3^2 = \square \cdot \square = \boxed{54}$

$4^2 = \square \cdot \square = \boxed{55}$

$5^2 = \square \cdot \square = \boxed{56}$

$6^2 = \square \cdot \square = \boxed{57}$

$7^2 = \square \cdot \square = \boxed{58}$

$8^2 = \square \cdot \square = \boxed{59}$

$9^2 = \square \cdot \square = \boxed{60}$

$10^2 = \square \cdot \square = \boxed{61}$

Van de 35 leerlingen maakten

4 leerlingen	:	0 fout
10 leerlingen	:	1 fout
8 leerlingen	:	2 fout
3 leerlingen	:	3 fout
1 leerling	:	4 fout
3 leerlingen	:	5 fout
1 leerling	:	6 fout
2 leerlingen	:	8 fout
1 leerling	:	9 fout.

Gemiddeld aantal fouten: 2, 4

Hoe zijn deze fouten over de opgaven verdeeld?
We hebben de opgaven genummerd en van elk nummer het aantal fouten genoteerd. Op de niet genoemde opgaven zijn geen fouten gemaakt.

opgave no	aantal keren fout
6	1
10	1
19	1
20	1
22	1
23	2
24	2
25	1
28	1
29	7
30	6
31	3
32	2
33	19
46	1
47	1
48	1
49	2
50	3
51	6
52	1
54	4
55	2
56	1
57	1
58	4
59	6
60	2
61	2

Dat op opgave 33 zoveel fouten gemaakt zijn, is niet zo moeilijk te verklaren. In een derde klas zal in het algemeen de tafel van 11 nog niet aangeleerd zijn.
Het lijkt ons de moeite waard om zoveel mogelijk cijfermateriaal uit allerlei leerjaren te vergelijken.
Mocht u met werkbladen uit 'Tel-op-Tal' hebben gewerkt, wilt u ons dan de resultaten zenden?

---

[1]) Kursusdocenten: Jan Meyer (wiskundige) en Jaap Duynhouwer (pedagoog).

3.6 VAN KABOUTERS NAAR DE TWEEDE KAMER

HERVORMDE SCHOOL ONSTWEDDE

Kollega's van de Hervormde School te Onstwedde [1]) hebben hun leerlingen intensief met het Spijkerbord laten werken. Van hun ervaringen in de verschillende leerjaren hebben ze een boekwerkje samengesteld.
Het boekje zit boordevol ideeën en is opnieuw een bewijs dat er ongelooflijk veel kreativiteit in de nederlandse basisscholen aanwezig is.
We laten u kennismaken met enkele ideeën en ervaringen.

* * *

Klas 2
In deze klas is een serie van 5 lessen gegeven, waarbij het tellen – in allerlei variaties – met behulp van het spijkerbord centraal staat.
Tijdens de vierde les wordt een verhaaltje verteld over een kabouter die een stuk grond wil kopen om er een huisje op te bouwen.
'Eerst ziet hij een heel mooi stukje. Hij gaat er omheen lopen om te kijken of zijn huisje daarop kan staan.'
Op het ruitjesbord wordt een stukje grond van 2 x 2 getekend.
De kinderen maken het na op hun spijkerbord.
'Lopen jullie er ook maar eens omheen.'
De leerlingen tellen 8 stapjes.
'De kabouter wil echter nog verder kijken en hij vindt een ander stukje grond van 3 x 1.'
Dit wordt weer op het bord getekend en de kinderen maken het na.
'Loop er maar weer omheen.'
'Ook 8 stapjes.'
'Welk stuk zal hij nu kopen, denk je?'
In koor wordt geantwoord: 'Het eerste stuk, want daar heb je een hokje meer.'
De kinderen nemen de figuur over op ruitjespapier.
Nog enige problemen worden opgegeven. (fig. 1)
In de figuren met het grootste oppervlak moet een kruisje worden gezet.

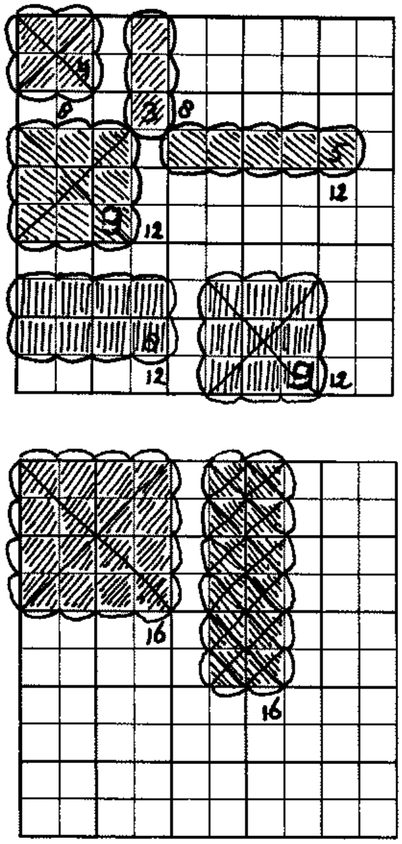


fig. 1

Tijdens de vijfde les wordt het spijkerbord niet meer gebruikt. De leerlingen werken nu aan een gestencild werkblad. (fig. 2)

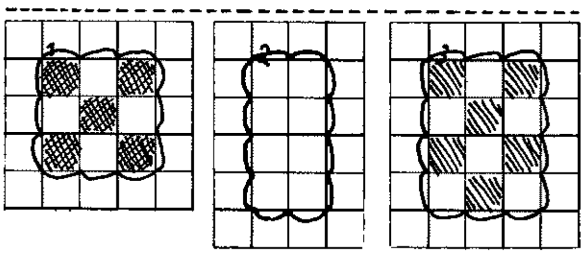
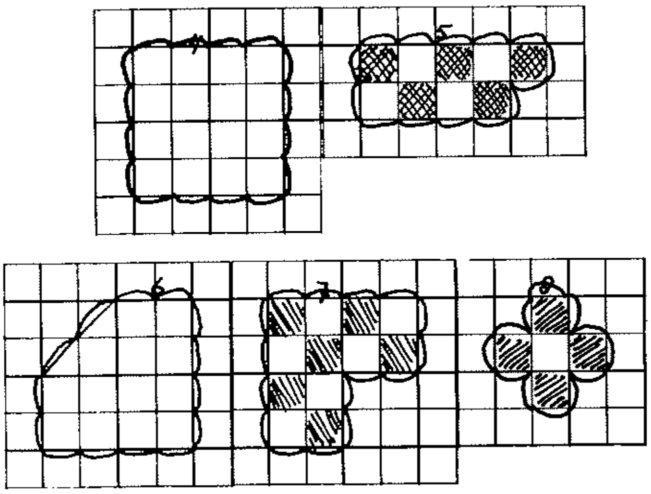


fig. 2

[1]) Deelnemers aan de heroriënteringskursus te Emmen, docenten: Keimpe Kuipers (wiskundige) en Kees Nijdam (pedagoog).



Ik loop er ombeen	*Ik leg er vierkantjes in*
1 *12* stapjes [1])	1 *9* vierkantjes
2 *12* stapjes	2 *8* vierkantjes
3 *14* stapjes	3 *12* vierkantjes
4 *16* stapjes	4 *16* vierkantjes
5 *14* stapjes	5 *9* vierkantjes
6 *14* stapjes	6 *15* vierkantjes
7 *16* stapjes	7 *12* vierkantjes
8 *12* stapjes.	8 *5* vierkantjes

Pas op:
Geef de figuurtjes die even groot zijn dezelfde kleur!

fig. 2

Opdracht 6 leverde nogal wat problemen op.

* * *

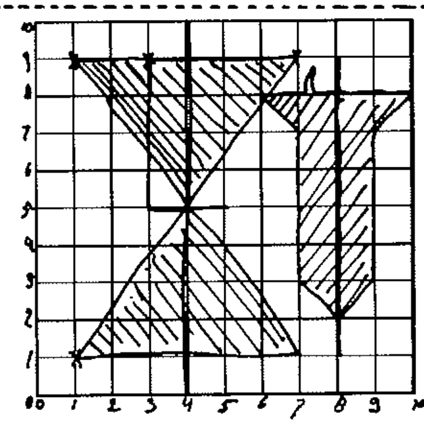
Klas 3

Een drietal lessen zijn gegeven:
- kennismaken met het spijkerbord,
- werken met oppervlakte en omtrek,
- iets over symmetrie.

De inleiding op de *tweede les* sluit aan bij een aktueel plaatselijk gebeuren.
'Nog niet zo heel lang geleden kon je overal witte bordjes zien staan. Deze bordjes werden gebruikt om vanuit de lucht foto's te maken van het land in en om Onstwedde.'
Achtereenvolgens komt aan de orde: ruilverkaveling, zoveel mogelijk rechte wegen en sloten, al het land opnieuw verdelen, om dit eerlijk te doen moeten we precies weten hoeveel er is.
'We gaan nu eens onderzoeken of we met het spijkerbord kunnen nagaan hoeveel land er is.'

Allerlei afspraken worden gemaakt, alvorens de leerlingen aan de gestencilde werkbladen beginnen.

De *symmetrie-les* wordt ingeleid met:
'De stiefmoeder van Sneeuwwitje staat graag voor de spiegel. Je hoeft echter niet voor een spiegel te staan om gelijke dingen te zien.'
Na een klassegesprekje, en na uitvoering van allerlei opdrachten (doorsnijden appel, blaadje vouwen, enz.), krijgen de leerlingen een werkblad waarop o.m. de volgende opdrachten (fig. 3):



- Maak de volgende figuur:
  ga van (1,1) naar (7,1)
  van (7,1) naar (4,5)
  van (4,5) naar (7,9)
  van (7,9) naar (1,9)
  van (1,9) naar (4,5)
  van (4,5) naar (1,1).
  Kijk of er ook 'spiegellijnen' in zitten en teken ze dan.
- Maak ook de volgende figuur:
  ga van (8,2) naar (9,3)
  van (9,3) naar (9,6)
  van (9,6) naar (10,7)
  van (10,7) naar (6,7)
  van (6,7) naar (7,6)
  van (7,6) naar (7,3)
  van (7,3) naar (8,2).
  Kijk of er 'spiegellijnen' in zitten en teken ze.
  Hoeveel stukjes er omheen? ☐
  Hoeveel hokjes er in? ☐
  Geef alles een leuk kleurtje!

fig. 3

U ziet hoe het Stadsplan hier funktioneert.

[1]) De antwoorden van één der leerlingen zijn in kursief gezet.

Klas 4
De leerlingen van deze klas hebben diverse opdrachten uitgevoerd, waarbij gestreefd is naar een *integratie* van 'Stadsplan', 'Grafische Verwerking' en 'Spijkerbord'.

* * *

Klas 6
Ook in deze klas worden 'Stadsplan' en 'Spijkerbord' met elkaar in verband gebracht, en wel binnen een projekt over de verkiezingen voor de Tweede Kamer.
We lichten uit dit projekt het inleidende gedeelte.

De uitslag van de op 29 november 1972 gehouden 2e Kamerverkiezingen.

partij	zetels
P.v.d.A.	43
K.V.P.	27
V.V.D.	22
A.R.P.	14
C.H.U.	7
P.P.R.	7
C.P.N.	7
D.S.'70	6
D'66	6
S.G.P.	3
B.P.	3
G.P.V.	2
P.S.P.	2
R.K.P.N.	1
totaal	150 zetels

Kleur de hokjes als volgt:
- rood kruis
- geel kruis
- groen kruis
- bruin kruis
- bruin-geel kruis
- rode streep
- rode +
- blauw kruis
- paars kruis
- oranje kruis
- twee paarse stippen
- oranje stip
- rood open rondje
- zwart kruis

Aan de hand van een foto van de Tweede Kamer krijgen de leerlingen een indruk hoe de kamer is ingedeeld.

Opdracht
- Stel dat jij de Kamervoorzitter bent en dat je alle kamerleden een 'goed' plaatsje moet aanwijzen.
  Je moet dan rekening houden met:
  — kamerleden van dezelfde partij willen graag bij elkaar zitten;
  — er zijn 'linkse en rechtse partijen' (partijen die links en rechts van de voorzitter zitten); denk eraan dat je ± 75 zetels links en ± 75 zetels rechts hebt.

Maak nu de volgende verdeling

linkse partijen	zetels			rechtse partijen	zetels
P.v.d.A.	43			K.V.P.	27
C P N	7			A R P	14
P P R	7			C H U	7
D. '66	6			V V D	22
D S '70	6			S G P	3
P S P	2			B P	3
				G P V	2
				R K P N	1
totaal	71			totaal	79

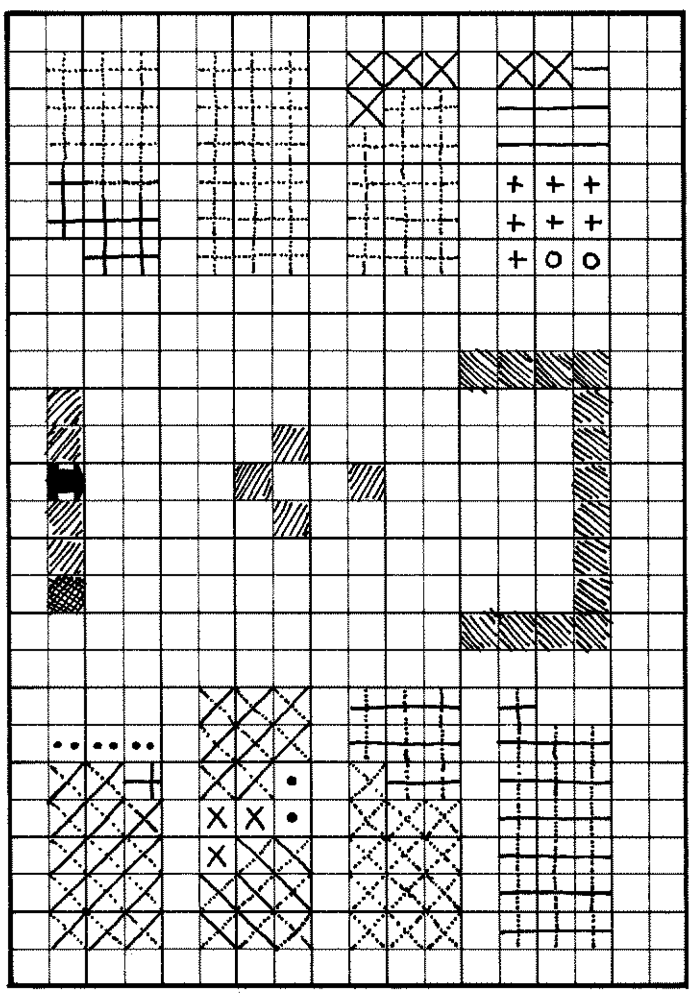
Oplossing van een leerling.

---

* Aan de hand van de nu verkregen verdeling gaan we samen (klassikaal) een plattegrond van de Tweede Kamer maken.
  Behalve de 150 zetels voor de kamerleden, reserveren we ook ruimte voor:
  de regering (hokjes blauw kleuren) 14 hokjes
  de griffie (bruin kleuren) 4 hokjes
  de kamervoorzitter en onder-voorzitters 5 hokjes
  spreekgestoelte 1 hokje

* Ga nu alle hokjes kleuren (zie ook de partijkleuren).
  Laat alle looppaden wit.

  Denk er om dat je bij 'links' en 'rechts' redeneert vanuit de gezichtshoek van de kamervoorzitter.



Oplossing van een leerling.

3.7 VERVOLG OP DE FIETSENSTALLING

In de eerste aflevering van deze jaargang schreven Johan van Bruggen en Edu Wijdeveld een serie problemen rond de fietsenstalling.
Van Pierre Knops uit Heerlen ontvingen we een vijftal aanvullingen, waarvan we er 2 opnemen.

PROBLEEM 1

prijscourant

Vanaf 1-6-'71

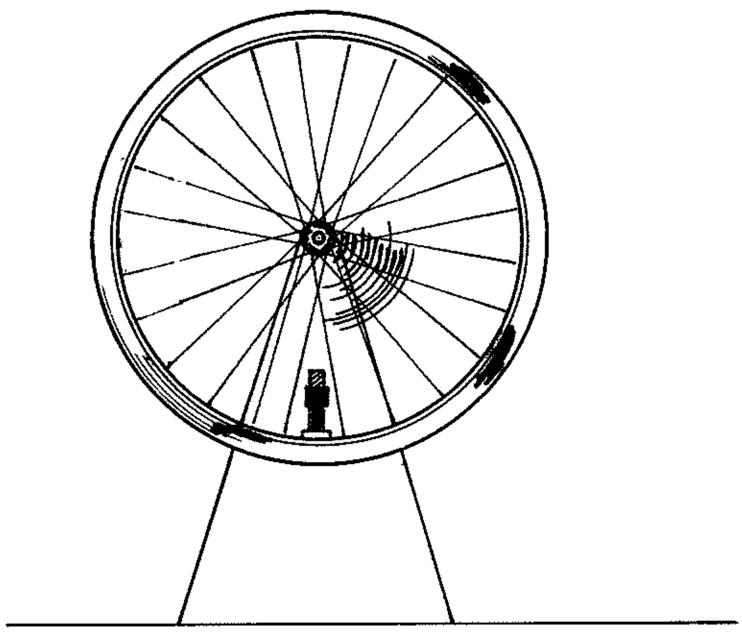
Groei en vouwfietsen

Groeifiets Bandenmaat: 20 x 1-3/4", tweekleur-banden, inklusief verlichting	**145.50**
City Camping Bandenmaat: 20 x 1-3/4", stuur en zadel gemakkelijk verstelbaar, inklusief verlichting	**163.75**
Elite Bandenmaat: 20 x 1-3/4", met zwaar verchroomde spatborden en veiligheidssluitingen voor zadel en stuur, inklusief verlichting	**174.–**
Populair Bandenmaat: 20 x 1-3/4", met aangelaste drager, prijs inklusief verlichting	**143.40**
Vouwfiets-luxe Bandenmaat: 20 x 1-3/4", ekstra verzwaard frame, kompleet met verlichting	**155.85**
Vouwfiets superlux Bandenmaat: 20 x 1-3/4", met speciale voorvork en aangelaste drager, verstelbaar stuur, inklusief verlichting	**174.75**
Mini-vouw Bandenmaat: 18 x 1-3/4", aangelaste drager, progressieve vormgeving voor	**111.25**

In de 'prijscourant' vind je de bandenmaat vermeld.

- Probeer eens te achterhalen wat $20 \times 1\frac{3}{4}$ wil zeggen? [1]
- Ga eens bij verschillende fietsen na hoeveel spaken er in een wiel zitten?
- Als in zo'n wiel 36 spaken zitten, hoeveel gaatjes zijn er dan in de velg? En hoeveel in de naaf aan elke kant?
- In een voorwiel zitten spaken met dikte 14; in een achterwiel spaken met dikte 13.[2] Welke spaken zouden dikker zijn en waarom?

PROBLEEM 2



'... draaien maar...'

Voor een bazar maken we van een fietswiel een *rad van avontuur.* Eén van de jongens merkt op:
'Meneer, dat is geen 'eerlijk' rad van avontuur'.

- Heeft deze jongen gelijk en waarom? Denk hierbij aan: ventiel, dikte van de velg, profiel van de band, kogeltjes in de naaf, etc.
- Aan elke spaak hangen we een nummer van 1 tot en met 6, om de beurt. Hoeveel keer kunnen we dat doen? [3]
- Welke kans hebben we op: 1,2,3,4,5,6? Draai eens 100 keer en kijk of het ongeveer klopt.
- Vergelijk dit rad van avontuur eens met een dobbelsteen. Hoe liggen de kansen hier?

Voor de onderwijzer:

[1] De '20' heeft betrekking op de diameter, de '$1\frac{3}{4}$' op de dikte van de band van velg tot loopvlak.

[2] De spaken in het achterwiel zijn altijd dikker.

[3] Fietswielen hebben in het algemeen 36 spaken.

3.8 REAKTIE OP...

ENKELE OPMERKINGEN BIJ 'EEN ERVARING IN ARNHEM'

LEEN STREEFLAND

In het vorige nummer van het Wiskobas-Bulletin schreef J.E.F. van Onzen over zijn ervaringen met het spijkerbord. Hij ging met name nogal uitvoerig in op het praktikum 'Spijkers en Oppervlakte'.[1])
Allereerst wil ik mijn waardering uitspreken voor de kritische kanttekeningen, die Van Onzen maakte. Dat de aan het eind van zijn artikel geuite wens geen loze kreet is, moge blijken uit deze reaktie.
Vervolgens wil ik ingaan op wat meer algemene doelstelingen, die men ten aanzien van het gememoreerde praktikum zou kunnen formuleren, om van daaruit te komen tot gedetailleerde opmerkingen met betrekking tot de opdrachten in het betrokken praktikum. Opdrachten die voor de leerlingen van Van Onzen nogal wat moeilijkheden opleverden. Op bladzijde 77 van het BAS-boek staat opgemerkt — ik citeer letterlijk —: 'Het gaat niet om het eventuele belang van die formule (van Pick), maar wel om het proces: op induktieve wijze vinden van een bepaalde regelmaat.'
Men zou kunnen stellen dat twee algemene doelstellingen van dit praktikum zijn:

- het op induktieve wijze vinden (ontdekken) van een bepaalde regelmaat;
- het plaatsen van het begrip oppervlakte in een ruimer kader.

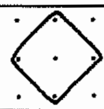
In dit verband zij nog eens verwezen naar het aansluitende praktikum 'Omtrek — Oppervlakte'.[2])
Het gaat erom, dat de leerlingen gaan inzien, dat oppervlaktebepaling veel meer inhoudt dan het veelal gebruikelijke 'lengte maal breedte'.
Komen we nu tot de 'problematische opdrachten' in het praktikum, dan is een opmerking ten aanzien van *differentiatieproblematieken* op zijn plaats en wel omdat de door Van Onzen gesignaleerde problemen hiertoe terug te voeren zijn. Veel zinvolle opdrachten binnen het wiskunde-onderwijs dragen inhoudelijk gezien een mogelijkheid tot differentiatie in zich.
Een voorbeeld: kinderen in klas 2 bereiden zich voor op de tafels van vermenigvuldiging. Ze beschikken over konkreet materiaal en voeren de volgende opdracht uit:

> Neem 9 blokjes.
> Maak er groepjes van 3 van.
> Hoeveel groepjes vind je?
> In wiskundetaal: $9 = 3 + 3 + 3$; $9 = 3 \times 3$.
> Zoek nog eens meer getallen, die je met drieën kunt schrijven.
> Je mag de blokjes gebruiken.

(Merk op: de inverse relatie tussen de operaties vermenigvuldigen en delen in deze opdracht is een belangrijk gegeven.)
Het behoeft geen betoog, dat voorgaande opdracht verschillende nivo's van oplossingen toelaat en dat het aantal oplossingen per leerling binnen een gestelde tijd kan variëren.
De opdrachten in verband met het spijkerbord, die Van Onzen citeerde, dragen meer het karakter van 'wel-of-niet-vinden', zoals door zijn ervaringen bevestigd werd.
Zouden we onszelf ten doel stellen, dat alle leerlingen de gegeven opdrachten tot een goed einde brengen, dan zullen we er voor moeten zorgen, dat *iedere leerling op zijn eigen wijze aan het gestelde probleem kan werken.*
Hiermee dienen we bij de aanbieding rekening te houden.

In het vervolg wil ik hiertoe een aantal mogelijkheden schetsen.

Opdracht 6 (pag. 79/3)
Teken nu zelf het vierkant, dat opviel.



Hoe groot is de oppervlakte? ☐ cm².

[1]) BAS-boek 'Het Spijkerbord' (pag. 79/1-79/18).
[2]) BAS-boek 'Het Spijkerbord' (pag. 80/1-80/13).

Het zou jammer zijn van te voren over het verdelen van het betrokken vierkant met de leerlingen te spreken, omdat dan de mogelijkheid tot een eigen kreatieve oplossing aan een bepaalde kategorie leerlingen ontnomen wordt. Differentiatie betekent immers, dat ook de kategorie van de betere leerlingen aan zijn trekken dient te komen.
Ik zou de gegeven opgave onverkort willen handhaven, doch een aantal alternatieven willen bieden voor de leerlingen die er in eerste instantie niet uitkomen. Ik ga er daarbij vanuit, dat ze wel ontdekt hebben, dat een vierkant ook 'scheef kan liggen' op het spijkerbord.

Eerste variatie op opdracht 6

a Teken nu zelf het vierkant dat opviel.

b Hoe groot is de oppervlakte van dit vierkantje:

 ? cm².

c Vergelijk deze figuurtjes: 
Hoe groot is de oppervlakte van het driehoekje? cm².

d Hoe groot is nu de oppervlakte van het vierkant bij a?
(Gebruik b en c hierbij!) cm²

Het is duidelijk, dat in bovenstaande opdracht nog veel eigen initiatief aan de leerlingen gelaten wordt. Ze zullen de verdeling van het eerstgenoemde vierkant zelf nog 'moeten zien', doch ze zijn een eindje op weg geholpen.
Indien de geboden handreiking aan de leerlingen door het wat sterker struktureren van de opdracht nog steeds ontoereikend blijkt, zou men kunnen overgaan tot het aanbieden van een andere variatie.

Tweede variatie op opdracht 6

a Teken nu zelf het vierkant dat opviel.

b Hoe groot is de oppervlakte van dit vierkantje:  ? cm².

c Vergelijk deze twee figuurtjes 
Hoe groot is de oppervlakte van het driehoekje? cm².

d Hoeveel van deze driehoekjes zie je in het vierkant?

e Hoe groot is nu de oppervlakte van het vierkant? cm².

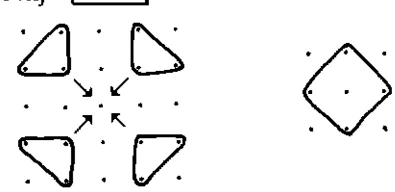
Een derde mogelijkheid van gewijzigde aanbieding van de betrokken opdracht 6 zou kunnen zijn:

Derde variatie op opdracht 6

a Teken nu zelf het vierkant dat opviel.

b Hoe groot is de oppervlakte van dit vierkantje:  ? cm²

c Vergelijk deze twee figuurtjes: 
Hoe groot is de oppervlakte van het driehoekje? cm²

d 

Vergelijk beide tekeningen heel goed.
Vul in: 'kleiner dan', 'even groot als', 'groter dan'.
De vier driehoekjes zijn samen het vierkant.

e Hoe groot is de oppervlakte van het vierkant? cm².
(Gebruik c en d!).

Het voorgaande pretendeert niet alle mogelijke variaties op de opdracht uitputtend behandeld te hebben, doch geeft slechts enkele mogelijkheden aan.
Het is duidelijk, dat de tweede en derde variatie voor de leerlingen veel minder te raden (ontdekken) laat.

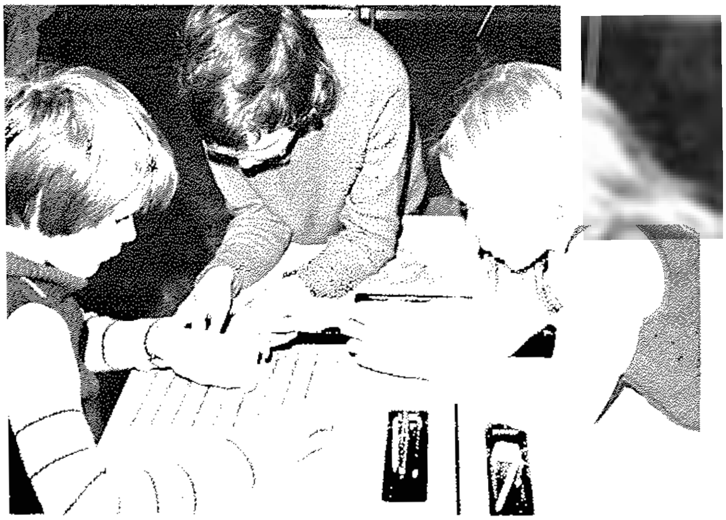
De overgang van de ene eenheid (cm^2) naar de andere (spijkerbordhokje) zou men in plaats van een bezwaar, ook een voordeel kunnen noemen. Immers, in de hele ontwikkeling van het meetproces[1]) speelt de keuze van een eenheid, die herhaald uit een te meten objekt wordt 'uitgeschept' een belangrijke rol. Overgang van 'papieren opdrachten' naar opdrachten, waarbij het spijkerbord gebruikt wordt, maakt de vraag naar de te kiezen eenheid aktueel, waarbij zich de eenheid 'spijkerbordhokje' automatisch opdringt.
Indien de leerlingen bij verschillende grootheden het volledige didaktische proces van het meten hebben ervaren, zal het werken met verschillende eenheden meer vertrouwd voor hen zijn.

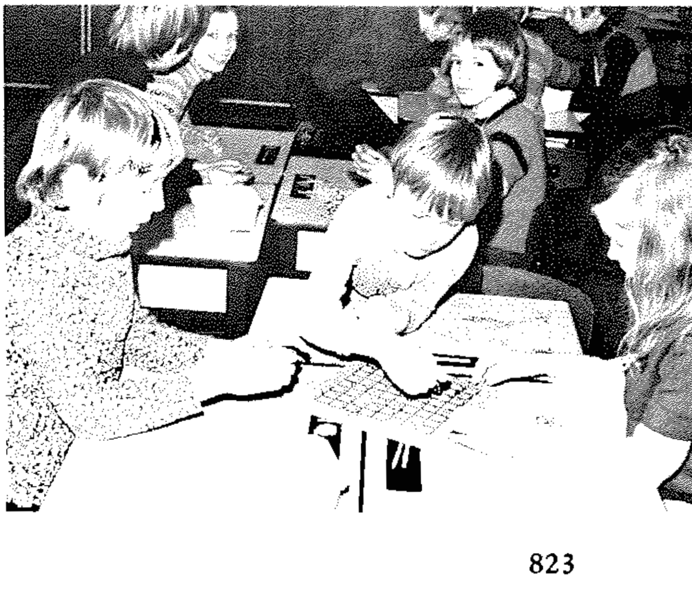
Wat in het voorgaande over opdracht 6 gezegd is, kan ook gesteld worden ten aanzien van opdracht 14[2]), zodat ik hierop niet verder in ga.
De suggesties aan het eind van het verslag van Van Onzen zijn zeker de moeite waard om nader uitgewerkt te worden.
Voor wat de eerste suggestie betreft:
'Bij breuken: breuken van gelijke waarde liggen op een lijn',
zou ik willen verwijzen naar de werkbladen in Wiskobas-Bulletin no. 5 (jaargang 1) 'Breuken in het Stadsplan'.

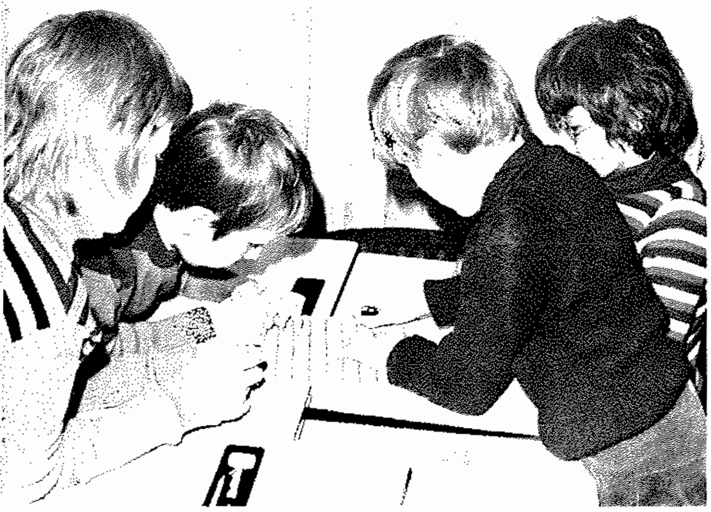
---

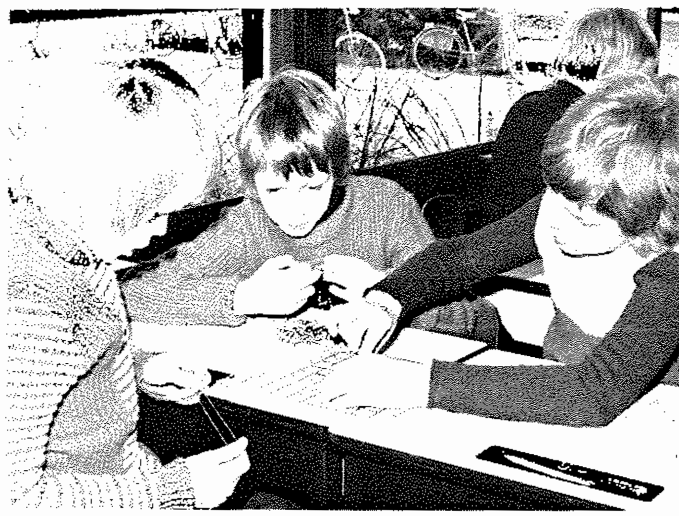
[1]) Zie in dit verband vooral het BASboek 'Meten'.
[2]) BASboek 'Het Spijkerbord' (pag. 79/7).

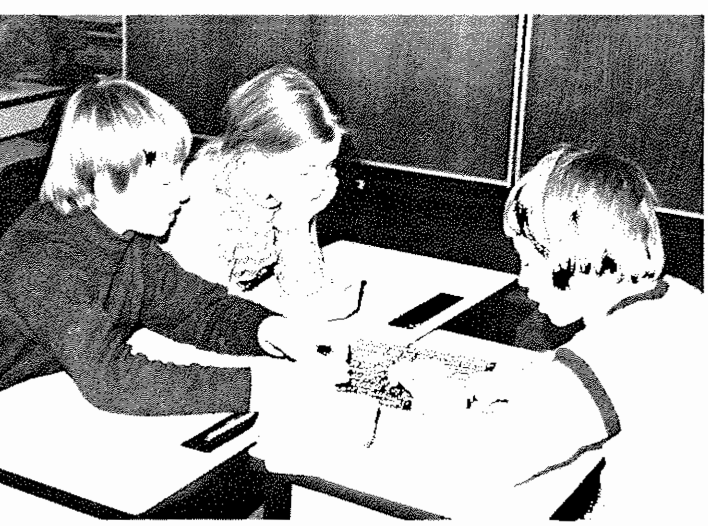
3.9 KONCENTRATIE AAN HET SPIJKERBORD











Omslag: Hans Gauw
Druk: De Gulden Pers N.V.