

wiskobas bulletin



Jaargang 3, nr. 1
November 1973

Wiskobas-Bulletin

- Bulletin ter begeleiding van het experiment 'Wiskunde op de Basisschool'
- Verschijnt gedurende de derde jaargang 6 keer

JAARGANG 3, Nr. 1 – NOVEMBER 1973

REDAKTIE:

Drs. F. Goffree, Drs. R.A. de Jong (eindredacteur), G.H. Meijer, Drs. A. Treffers, Drs. E.J. Wijdeveld.

MEDEWERKERS:

Prof.Dr. F. van der Blij, J. van den Brink, W.M.F. Bronnenberg, J. van Bruggen, K. Frenay, Prof.Dr. H. Freudenthal, L. Gilissen, H. Jansen, H. ter Heege, D. Karman, Drs. K.B. Koster, C.P. Leenders, F. du Maine, E. de Moor, D.W. Oort, P. Scholten, L. Streefland.

LAY-OUT:

Ton Voortman.

CARTOON:

Hans de Boer.

REDAKTIEADRES:

INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE
ONDERWIJS
Tiberdreef 4, Utrecht.
t.a.v. R.A. de Jong.

ABONNEMENTENADMINISTRATIE:

STICHTING IVIO,
Postbu 37, Lelystad.
Voor aanmeldingen, adreswijzigingen,
betalingen, enz.

ABONNEMENTSPRIJS:

Per jaargang f 30,-.
Reduktietarief voor studenten P.A. en
wiskobas-kursisten f 20,-.
Gelieve uitsluitend te betalen met aksept-giro-
kaarten. Deze worden u toegezonden.

INHOUD

VAST BLOK

Redactioneel	2
Kolommen: H. Freudenthal	4
Wiskunst: F. van der Blij	6
Wiskobas en methoden: Henk Meijer	12
Problematika: Huub Jansen	13
Leerplanologie: Adri Treffers en Edu Wijdeveld	14
Berichten uit het binnenland: Louis Gilissen	16
Berichten uit het buitenland: Klaas Koster	19
Rechthoeken vullen en traplopen met de zoon van de goedzak: Huub Jansen	21
Enzovoorts, enzovoorts: Jan van den Brink	24
Onderwijs-televisie en wiskunde-onderwijs: Piet Scholen .	29
Wies Wiedes: Hans ter Heege	32
Skriptoteek: Huub Jansen	34
Wiskunde voor het lager beroepsonderwijs: Crit Leenders	36
Kleuters en wiskunde: Jes Melis en Henneke de Lorme- Bakker	38
Basje, een jonge onderzoeker: Dik Oort	39

VARIABEL BLOK

1.1 Inleiding en leeswijzer	44
1.2 Symboliseren: Jan van den Brink	46
1.3 Over optellen en aftrekken: Johan van Bruggen	55
1.4 Een mooie, rooie bus: Ans Zwiers, Simon Smaak, Dik Groote Haar en Hans ter Heege	64
1.5 De tijdmachine: Leen Streefland en Fred Goffree ..	70

RESPONSBLOK

1.1 Inleiding	86
1.2 Ordenend tellen (klas 1)	87
1.3 Ordenend tellen (klas 3)	93
1.4 Ordenend tellen (klas 5)	97

vast

blok

INHOUD

<i>Redactioneel</i>	2
<i>Kolommen</i>	4
H. Freudenthal	
<i>Wiskunst</i>	6
F. van der Blij	
<i>Wiskobas en methoden</i>	12
Henk Meijer	
<i>Problematika</i>	13
Huub Jansen	
<i>Leerplanologie</i>	14
Adri Treffers en Edu Wijdeveld	
<i>Berichten uit het binnenland</i>	16
Louis Gilissen	
<i>Berichten uit het buitenland</i>	19
Klaas Koster	
<i>Rechtboeken vullen en traplopen met de zoon van de goedgezak</i>	21
Huub Jansen	
<i>Enzovoorts, enzovoorts</i>	24
Jan van den Brink	
<i>Onderwijs-televisie en wiskunde- onderwijs</i>	29
Piet Scholten	
<i>Wies Wiedes</i>	32
Hans ter Heege	
<i>Skriptoteek</i>	34
Huub Jansen	
<i>Wiskunde voor het lager beroeps- onderwijs</i>	36
Crit Leenders	
<i>Kleuters en wiskunde</i>	38
Jes Melis en Henneke de Lorme- Bakker	
<i>Basje, een jonge onderzoeker</i>	39
Dik Oort	

redaktio- neel

ROB DE JONG

Anonieme beul: alles went, zelfs de galg.

Dat het babies lukt om aan de wereld te wennen vinden we vanzelfsprekend. Dat sommigen van ons iedere morgen opnieuw aan de dag wennen, lijkt op een wonder.

Tijdens ons leven moeten we aan een heleboel zaken, toestanden en personen wennen: schoonzoon, huwelijk, beroep, krant, bibliotheek, klas, leraar, spelregel, regering, melkboer, tante, onderwijsmethode, gebouw, vaderschap, directeur, vakantie, elkaar.

De geciteerde beul is een optimist. Alles went! Dat geeft de redactie aan het begin van deze nieuwe jaargang de hoop, dat de lezers er waarachtig ook nu wel weer in zullen slagen om te wennen. Ze staan hun mannetje, vrouwtje, krantje, zo is gebleken.

* * *

Een groot aantal abonnees is zo langzamerhand gewend aan het bulletin. Ze weten welke informatie ze kunnen verwachten en waar deze te vinden is. De nieuwe abonnees moeten nog even wennen. Misschien aan het eigen 'taaltje', aan opmaak, aan stijl, aan.....; ze kennen nog niet de rubrieken van het VAST BLOK, de formule van het VARIABEL BLOK, de achtergrondidee van het RESPONS BLOK.

Na twee jaargangen is de redactie aardig gewend aan de lezerskring. Ze weet aan welke informatie behoefte bestaat en hoe deze te presenteren. Het omzetten van dit weten in gedrag is overigens een andere en moeilijker zaak.

De redactie moet nog wat wennen aan het idee dat het Bulletin dermate hard aan het groeien is dat een professionele exploitatie dringend nodig wordt. Toen we twee jaar geleden startten kon niemand deze groei voorzien; het ging immers om een periodiekje voor een betrekkelijk kleine groep: kollega's op pedagogische akademies, geïnteresseerde studenten en kursisten.

Nu blijken er steeds meer buiten-abonnees te komen: ouders, adviesdiensten en leerkrachten die alleen door middel van het Bulletin — en niet tevens via kursussen, blokken e.d. — met ons verbonden zijn.

We vinden het een gunstige ontwikkeling, maar we moeten nog even wennen.

* * *

Vast staat dat abonnees en redactie vrij snel zullen wennen aan het ontbreken/ver-

minderen van administratieve vergissingen, alhoewel de boze telefoontjes en briefkaarten vooral in het begin toch gemist zullen worden.

* * *

De Stichting IVIO, die de exploitatie van het Bulletin gaat verzorgen, zal nog wel even aan ons moeten wennen.

Genoemde Stichting behoeft in onderwijsland nauwelijks geïntroduceerd te worden. Voor de meeste lezers is het noemen van de 'AO-boekjes' voldoende. Aan dat wat IVIO nog meer doet hopen we tijdens deze jaargang aandacht te schenken.

We zijn erg blij dat ons een jarenlange ervaring op het gebied van produktie, verspreiding en administratie ter beschikking komt.

* * *

Met elkaar zullen we nog wat moeten wennen aan kleine redactionele koerswijzigingen die gedurende de derde jaargang gerealiseerd dienen te worden. De reeds genoemde toename in buiten-abonnees betekent bijvoorbeeld dat het Bulletin gelezen moet kunnen worden, zonder dat men op de hoogte is van het binnen-materiaal (kurussen, blokken). Dit heeft duidelijke konsekwenties voor het RESPONS BLOK, dat goeddeels is opgebouwd uit reacties op het binnenmateriaal. Uiteraard mag deze respons niet verdwijnen. Wel zal de redactie een en ander regelmatig in een kader moeten plaatsen zodat ieder weet waarover het gaat. Reacties van P.A.-studenten en heroriënteringskursisten blijven derhalve welkom.

In het RESPONS BLOK zal daarnaast steeds plaats ingeruimd worden voor respons op de inhoud van het VARIABEL BLOK.

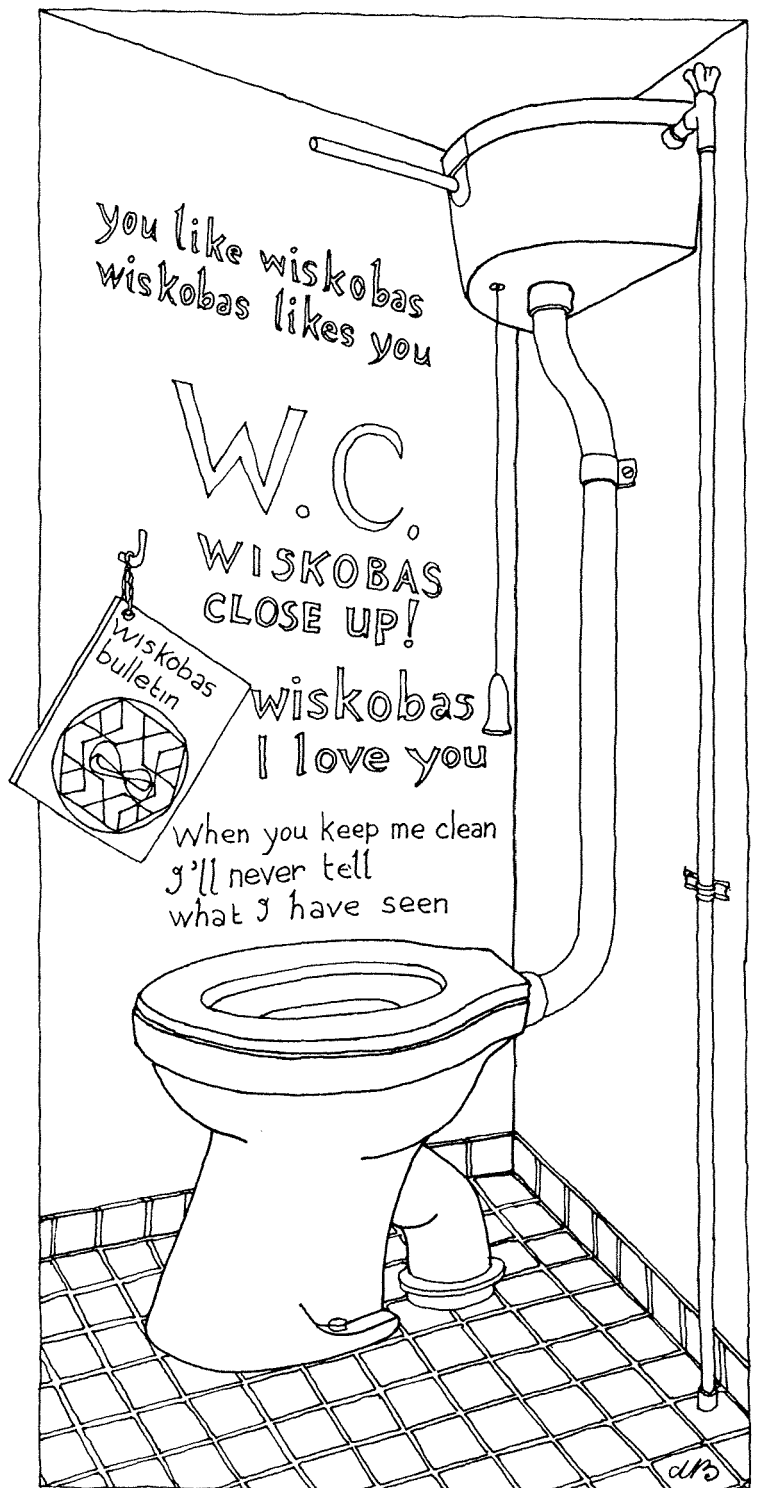
Laatstgenoemd blok zal voornamelijk samengesteld worden uit beproefde stukken onderwijs waarmee iedere leerkracht direkt met zijn klas aan het werk kan. De leerlingen kunnen aldus reeds nu profiteren van wiskunde-onderwijs zoals dat straks (1975/1976) ter tafel komt. Met elkaar kunnen we zo vast aan dit onderwijs wennen.

Voorts wordt het VAST BLOK met een tweetal rubrieken uitgebreid, te weten
— Berichten uit het binnenland,
— Wiskunde voor het lager beroepsonderwijs. De artikelenserie 'Wiskundewerkhoeken' verdwijnt uit het VAST BLOK, maar komt in een andere gedaante, verweven in de bijdragen van het VARIABEL BLOK, terug.

* * *

't Is allemaal nog wat onwennig. De beul geeft dan wel moed, nochtans moeten we wennen aan het werkwoord 'wennen'. (hier: kritisch, actief, creatief wennen)

Mochten in het jaar 2000 onderwijzers op de vraag 'waarom doe je dat zo en niet zo?', reageren met 'och dat ben ik nu eenmaal zo gewend bij wiskobas', dan is de zaak faliekant uit de hand gelopen en is een 'ontwenningkursus' geboden.



kolommen



SPELLETJES

H. FREUDENTHAL

Zeker kent u het volgende spelletje:

Het begint met 100. A mag er een geheel getal van aftrekken, ten minste 1, ten hoogste 10. Met de uitkomst mag B precies zo te werk gaan. A mag dit herhalen, dan B enz. Wie bij 0 aankomt, wint het.

Misschien kent u ook het maniertje.

A moet winnen als hij het goed speelt, wat B er ook tegen moege doen. A trekt een 1 af, zegt dus 99. En dan met tussenpozen, wat B ook moege zeggen, 88, 77, ..., 11, 0, en heeft het gewonnen. Lukt A dit werkelijk?

Kan hij werkelijk in de tegelrij 99, 88, ..., 11, 0 van elke tegel naar de volgende springen?

Ja! De afstand is 11.

Welk getal x door B ook wordt gekozen om af te trekken, A trekt dan $11 - x$ af, hetgeen samen 11 is. En ga na; als x een der getallen 1, ..., 10 is, dan is $11 - x$ een der getallen 10, ..., 1, dus aan de spelregels is voldaan.

Van een spel dat je door hebt, is de aardigheid af. We vinden een nieuw spel uit.

Het begint weer met 100, maar het mag ook enig ander getal zijn. Als aftrekkers laten we nu toe in plaats van de getallen 1, ..., 10, de machten van 2, dus:

1, 2, 4, 8, 16,...

Het is weer: wie op 0 uitkomt, wint. We kennen hier geen maniertje, moeten dus zelf trachten er iets op uit te vinden — een strategie, noemt men het ook.

Wie voor 1, 2, 4, 8, 16, ... komt te staan, heeft in een zet gewonnen; hij kan direkt 0 zeggen.

We noemen dit: hij staat op *winst-in-één-zet*.

Wie voor 3 komt te staan, staat beslist op verlies. Als hij 1 aftrekt wordt het 2, als hij 2 aftrekt wordt het 1, en in beide gevallen brengt hij de tegenstander in een winststand.

Met 5 daarentegen sta je op winst. Je trekt er 2 van af, maakt er dus 3 van en brengt de ander in de staat van verlies.

Met 5 sta je dus op winst in twee zetten.

Hoe is het met 6? Trek er 1, 2 of 4 van af; het wordt 5, 4 of 2, allemaal winststanden voor de ander.

We maken een tabel op:

winststand	verliesstand
1	3
2	6
4	9
5	
7	
8	

Ik heb er al 7, 8, 9 aan toegevoegd. Van 7 maak je door aftrekken van 1 of 4 naar keuze 6 of 3, dus een verliesstand voor de ander.

Dus is 7 een winststand – winst in 3 of 2 zetten. 8 is winst in een zet. Maar ben je op 9 en trek je 1, 2, 4 af, dan breng je altijd de ander in een winststand. Dus is 9 een verliesstand.

Hebt u door hoe het verder gaat, met 10, 11, 12, 13, ...?

Probeer het zelf.

* * *

Hebt u het geprobeerd? Dan is u zeker opgevallen, dat de verliesstanden 3, 6, 9, 12, ... zijn – de drievouden. Is dit een wet en zo ja, hoe bewijst je het?

Laten we nadenken! Stel we hebben al bewezen dat 3, 6, 9, 12, 15 verliesstanden zijn en de getallen er tussen in winststanden. Laten we nu 16 bekijken. Ik trek er 1 van af en breng de ander in de verliesstand 15; dus is 16 een winststand. Nu 17, ik trek er 2 van af, en weer komt de ander in de verliesstand 15, dus ook 17 is winststand. Nu 18. Het is een drievoud. Wil ik de ander 't verlies inwerken, dan moet ik naar 3, 6, 9, 12 of 15 toe, dus ook naar een drievoud. Maar dat speel ik niet klaar, want ik mag alleen machten van 2 aftrekken en daar valt geen drievoud onder te bekennen. Dus is 18 een verliesstand.

Wat ik met 16, 17, 18 gedaan heb, gaat algemeen. De techniek om zo iets te doen heet *algebra*:

Een drievoud schrijf je bijvoorbeeld op als $3a$, waarbij a een willekeurig natuurlijk getal is. Behalve drievouden zijn er dan nog de getallen, die bij deling door 3 de rest 1 of 2 laten. Die schrijf je op als $3a + 1$ en $3a + 2$ respectievelijk.

Stel nu, we weten tot $3n$ toe dat alle drievouden verliesstanden en alle andere winststanden zijn. We gaan die kennis uitbreiden tot $3n + 1$, $3n + 2$ en $3n + 3$ – het laatste kunnen we ook als $3(n + 1)$ schrijven en dan zou de cyclus opnieuw kunnen starten.

Allereerst $3n + 1$. Wie aan de beurt is, trekt er 1 van af en heeft de ander in 't verlies gemanoeuvreed. Dan $3n + 2$. Trek er 2 af met hetzelfde resultaat. Tenslotte $3n + 3$ oftewel $3(n + 1)$, dus een drievoud. Alle lagere verliesstanden zijn drievouden, dus wie de ander vanuit $3n + 3$ in 't verlies wil manoeuvreren, moet er een drievoud van aftrekken. Maar al hetgeen hij mag aftrekken zijn machten van 2 en daar komen geen drievouden onder voor. Dus is $3n + 3$ een verliesstand.

De wetenschap dat net de drievouden en geen andere verliesstanden zijn, is dus uitgebreid van de getallen tot/met $3n$ tot de getallen tot/met $3(n + 1)$ en daarmee zijn we klaar. Want aangezien dat voor elke n geldt, kunnen we net zo verder.

Met een wiskundige vakterm heet het beginsel uit de laatste alinea ook: *volledige inductie*. Ze diende hier om een strategie, waar we al probeerend op waren gekomen, echt te bewijzen.

Die strategie voor ons spelletje luidt nu: probeer de ander in de situatie van een drievoud te brengen. Dit lukt dan en slechts dan als je zelf niet op een drievoud staat.

* * *

Een ander spelletje van hetzelfde soort:

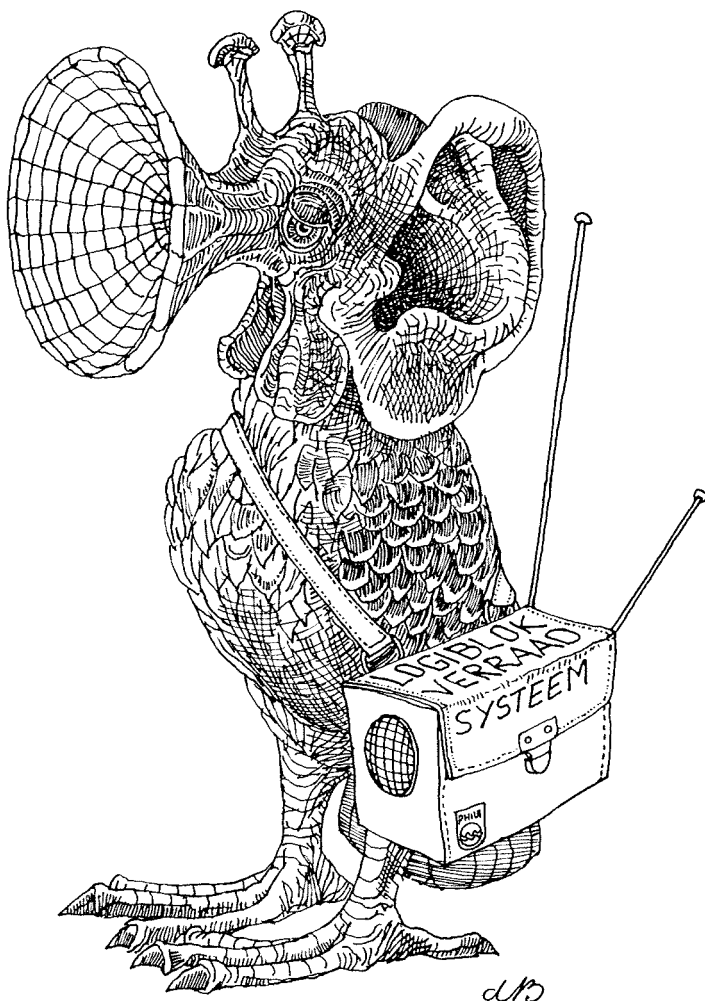
Men mag
1 of 4
aftrekken.

Nog een:

Men mag een ondeelbaar getal aftrekken (1 inbegrepen), dus:

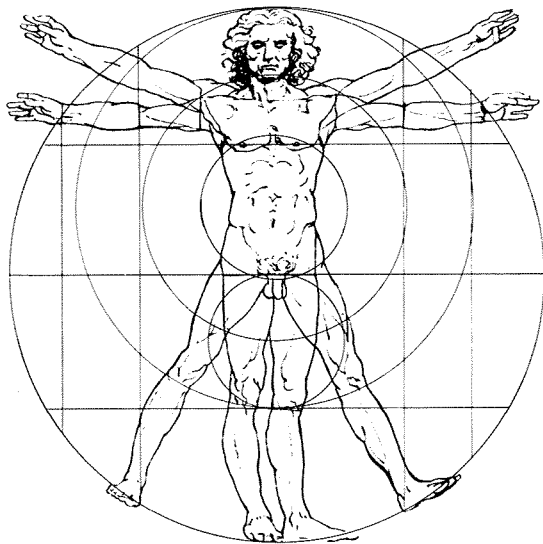
1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,

Ik verraad de strategieën niet. Probeer het nu zelf!



'de strategieverrader'

wiskunst



F. VAN DER BLIJ

We willen in dit artikel iets bespreken rond het werk van één kunstenaar, namelijk **Paul Klee**. Als materiaal hebben we dagboeken en enkele theorie-boekjes van zijn hand tot onze beschikking. Velen van ons zullen wel op een of andere plaats (bijvoorbeeld Unicef-kaarten) werk van hem gereproduceerd gezien hebben. Het is misschien niet duidelijk waarom Klee nu zo'n apart verhaal krijgt. Het theorieboek 'Modulor' van *le Corbusier* bijvoorbeeld bevat toch veel meer wiskunde, daar vinden we de gulden snede uitvoerig gedemonstreerd, etc. Toch kies ik Paul Klee voor dit nummer omdat we in zijn opvattingen over abstractie en spel de wiskundige denktrant heel mooi weerspiegeld vinden. Wel veroorloof ik me wat uitstapjes naar mechanica en techniek, maar mechanica is toch lang een onderdeel van de wiskunde geweest.

Paul Klee werd in 1879 bij Bern geboren en stierf in 1940 in Locarno. In 1920 werd hij leraar aan het Bauhaus te Weimar, een beroemd centrum van moderne kunst in die tijd. In 1925 publiceerde hij zijn *Pädagogisches Skizzenbuch*, waarin een samenstel van schetsen en korte raadgevingen voor de leerlingen. Deze aantekeningen lopen vanaf richtlijnen voor het perspectief, tot beschouwingen over de dynamische werking van pijlen (die we in veel van zijn werken tegenkomen) en kleur-evenwicht-theorieën.

Georg Schmidt zegt in een rede ter gelegenheid van de sterfdag van Paul Klee:

'De werkelijkheid eindigt bij Klee niet slechts met de wereld van de zichtbare en tastbare dingen, ze begint veeleer eigenlijk pas aan gene zijde van het zichtbare en tastbare. Ze omvat de gehele wederwereld van de in alle organische wezens en in alle anorganische dingen werkende krachten van opbouw, omvorming en vernietiging. De geometrische verhoudingen van vlak en ruimte, de mechanische plaatsveranderingen, de psychologische reacties van het individu op de gehele omgeving, die van de dingen zowel als van de mensen.'

Nog duidelijker zegt hij:

'De opvatting van Klee komt in dit opzicht overeen met de verst gevorderde natuurwetenschappelijke inzichten van onze tijd. Evenals de moderne natuurwetenschap slechts in staat is de wereld der dingen en de voor haar geldende wetten in de vorm van het wiskundig symbool, nooit volkomen naturalistisch voorgesteld in zich op te nemen, is ook de houding van Klee als beeldend kunstenaar van dien aard, dat hij de werkelijkheid niet in nabootsingen, maar in symbolen voorstelt, die sterker zijn, completer en echter dan ieder stuk nagebootste werkelijkheid.'

Genoeg over Paul Klee, we gaan verder wat meer *direkt* te werk.

We halen uit het bovenstaande: de betekenis van symbolen voor Klee, zijn liefde voor geometrische vormen, voor pijlen als krachts-indikaties.

Zijn vierkantjes-verdelingen hebben een matematische achtergrond, ik denk aan alle stadsplan-eksperimenten en mogelijke wiskunde-onderwijs-eksperimenten met ruitjespapier.

Of moeten we oppassen en leggen we dan zelf iets in Klee's werk wat er door de kunstenaar niet in bedoeld was?

Zijn blokjessteden kunnen ook geïnspireerd zijn door zijn reis naar noord-afrika in 1914, waar hij met Macke en Moillet onder andere tunesië bezocht. Dan komen zijn Kairuan schilderijen, waarin we heel duidelijk de blokjes zien.

Maar Joseph-Émile Muller noemt het deeltje dat in de kleine kunst-encyklopedie (F. Hazan) aan Paul Klee gewijd is: 'Tovervierkanten', en dan zijn we weer bij de wiskunde terug.

Trouwens we geven nog even een citaat uit de Bauhaus-prospektus (1929):

'We konstrueren en konstrueren en toch heeft de intuïtie nog zijn nut. Zonder deze kunnen we veel doen, maar niet alles. Als intuïtie verbonden wordt met eksakt onderzoek versnelt het de voortgang van eksakt onderzoek. Preciesheid, op de vleugels van de intuïtie, wint in eerste opzet. Maar daar eksakt onderzoek eksakt onderzoek is, kan dit voortgaan, wanneer we het tempo buiten beschouwing laten, zonder intuïtie. Het kan voortgaan als een zaak van principe zonder intuïtie. Het kan logisch blijven, het kan zichzelf konstrueren. Het kan de afstand tussen twee zaken overbruggen. Het kan een ordelijke houding in chaos bewaren. De kunst is ook voldoende ruimte gelaten voor eksakt onderzoek en soms zijn de poorten die daarheen leiden open geweest. Wat in het einde van de achttiende eeuw in de muziek gebeurd is, is nu tenslotte ook bij de beeldende kunsten begonnen. Wiskunde en natuurkunde leveren de middelen in de vorm van regels die of opgevolgd of overtreden moeten worden. In het begin is het heilzaam om met funkties bezig te zijn en de voltooidde vorm buiten beschouwing te laten. Studie van algebra, meetkunde en mechanika kenmerken een onderwijs dat gericht is op het essentiële, het funktionele, in tegenstelling tot het ogenschijnlijke. Men leert achter de façade te zien, greep te krijgen op de wortels van de dingen. Men leert de onderstromen te herkennen, de antesedenten van het zichtbare. Men leert om diep te spitten, om bloot te leggen, om oorzaken te vinden en te analyseren.'

Het betoog is wat zwaar aan citaten gewor-

den. Daarom als illustratie wat werken van Paul Klee, waarvan vaak de titel al een vingerwijzing naar het geteoretiseerde van bovenstaande regels is.



12 Exercises

(based on the Trichotomy):

- First organ active (brain).
- Second organ medial (muscle).
- Third organ passive (bones).

a) Waterwheel and Hammer (Fig. 25):

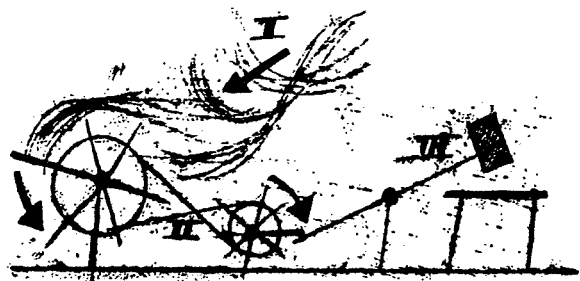


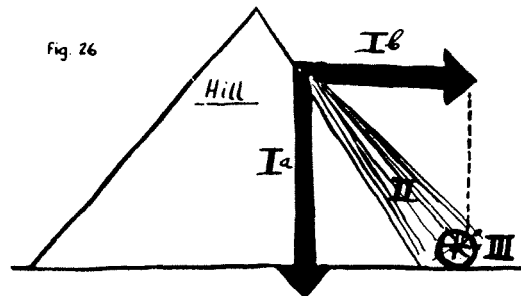
Fig. 25

- I The Waterfall (active).
- II Wheels (medial).
- III Hammer (passive).



b) The Watermill (Fig. 26):

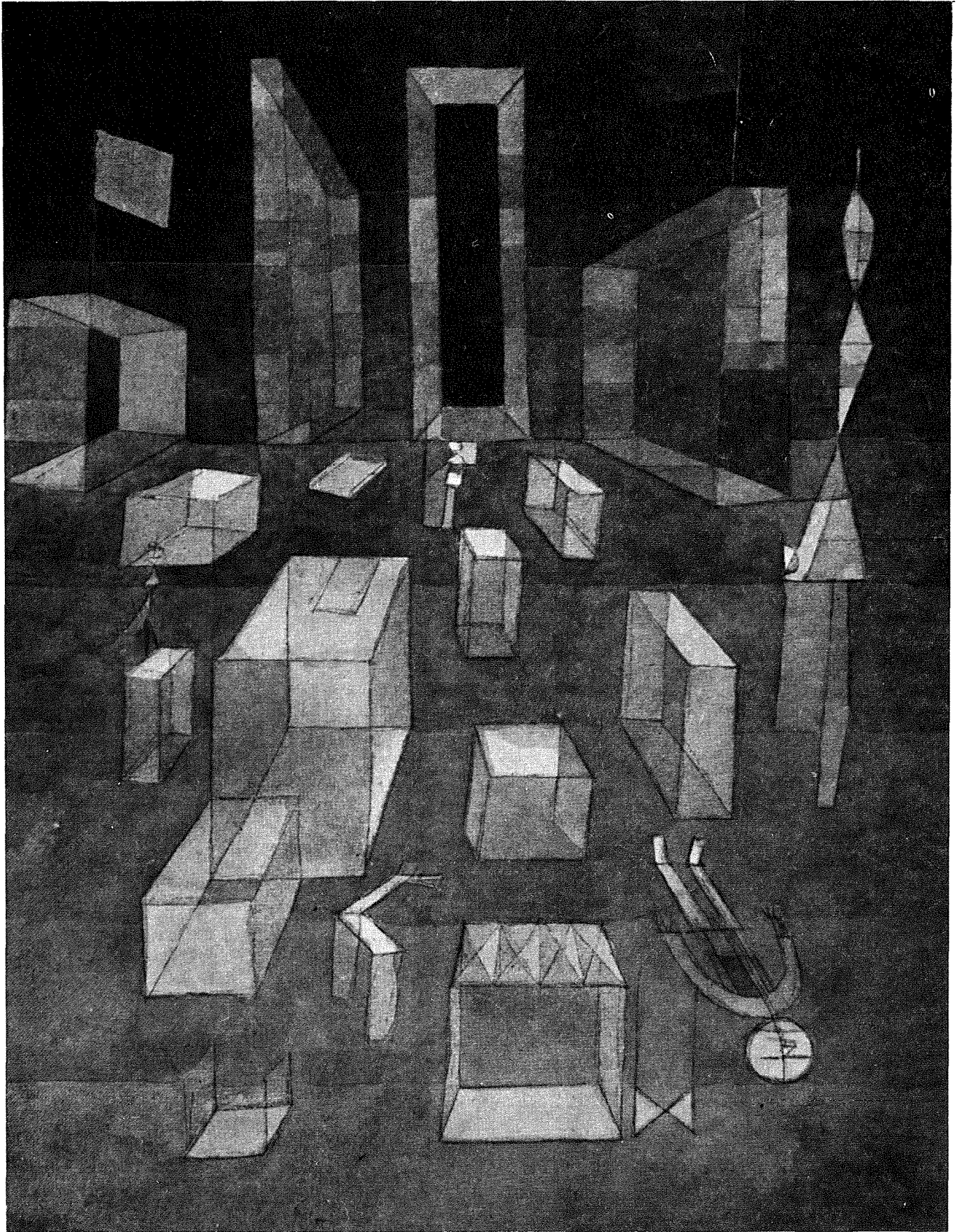
Fig. 26



- I Two energies: a) gravity, b) the obstructing mountain (active).
- II Diagonal force to energies 1a and 1b: The Waterfall (medial).
- III The turning wheel (passive).

afbeelding 1

Uit een engelse vertaling van het *Pädagogisches Skizzenbuch* (1925) kopiëren we twee bladzijden theoretische oefeningen, namelijk een door waterkracht gedreven hamer en een watermolen.

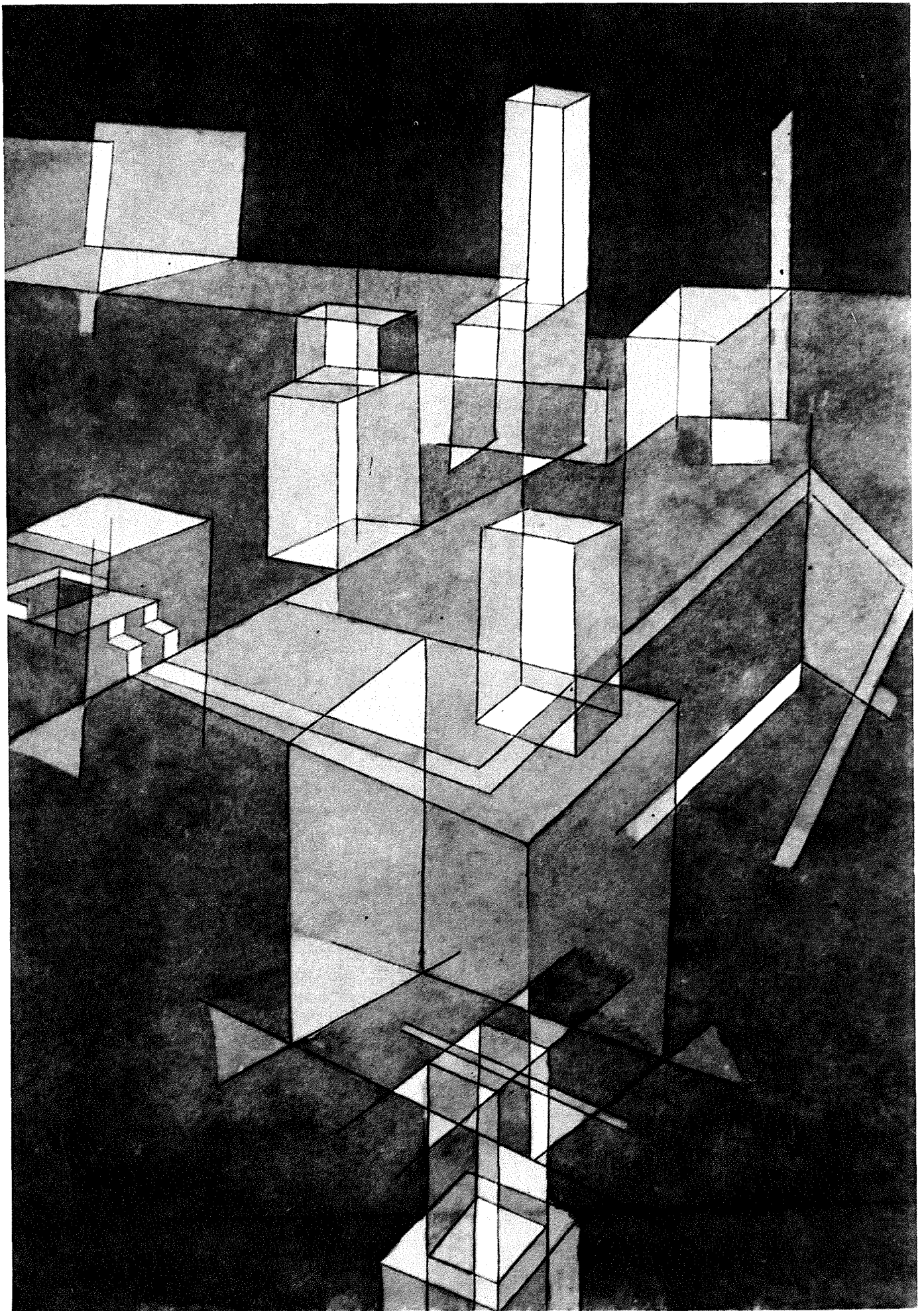


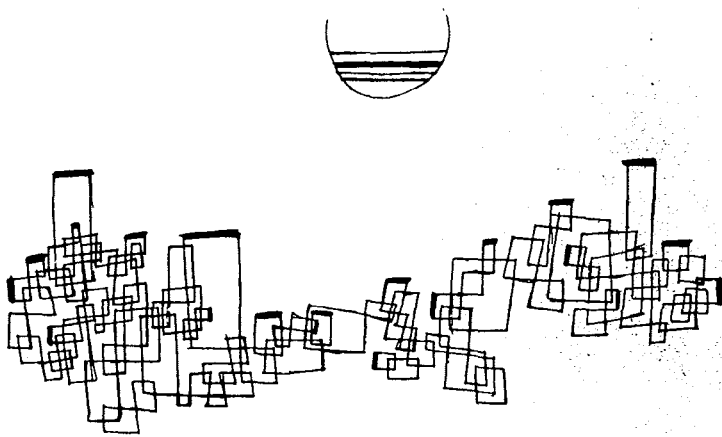
afbeelding 2

De beschrijvende meetkunde met uitslagen en de leer van het perspectief zijn niet onschuldig bij het waterverfschilderij met de (ter)neergeslagen man en de verbaasde hond.

In 'de italiaanse stad' van 1928 vinden we zelfde tendensen. (zie afbeelding 3)

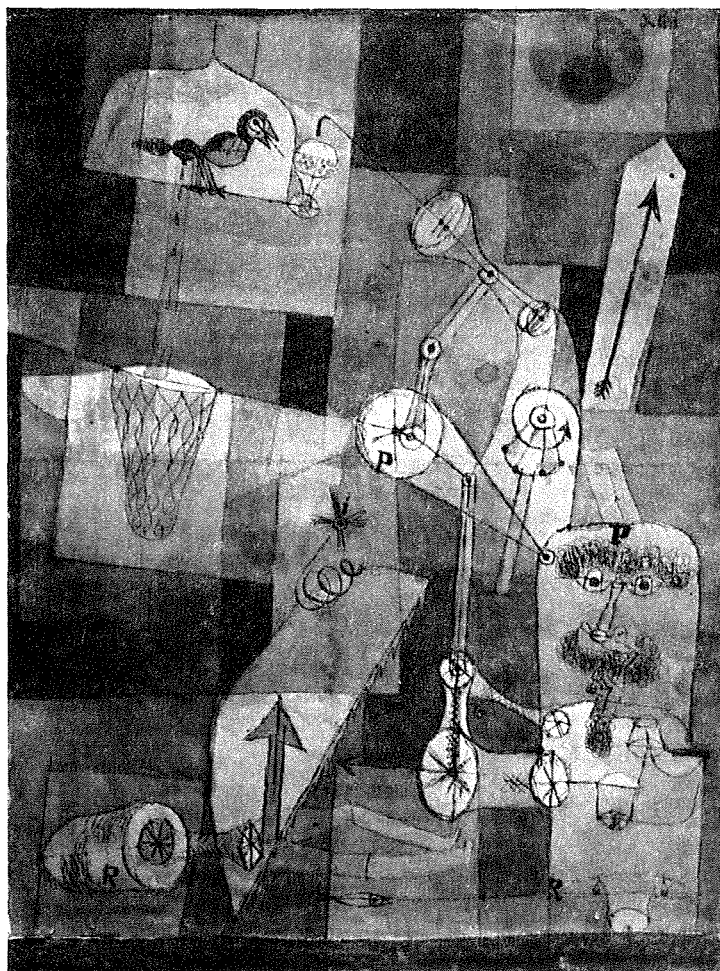
In het werk van Paul Klee spelen niet alleen geometrische en mechanische zienswijzen een rol. Heel andere gebieden van het menselijk leven worden eveneens gebruikt. Daarom vindt u in de afbeeldingen ook iets van deze variatie terug.



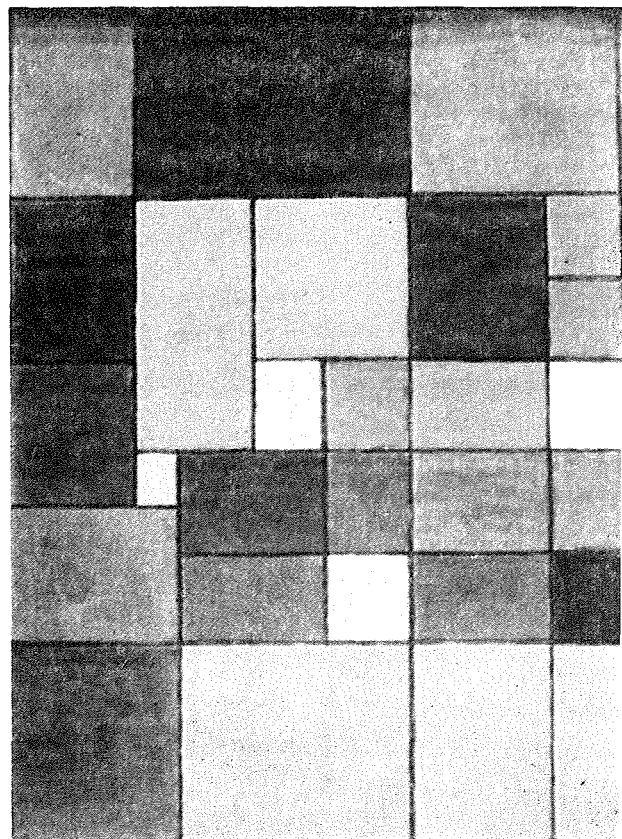


afbeelding 4
mécannique d'un secteur urbain (1928)

De afbeeldingen geven trouwens toch wel een eenzijdig beeld van het werk van Klee. Het 'onzichtbare' bij hem is niet alleen de wiskundige structuur maar ook een 'geheimzinnige' ondergrond. U moet zelf maar eens zijn betoverde tuin, zijn bezeten meisje, zijn verzengende wind, zijn schets 'wie is de schuldi-



afbeelding 5
analyse des diverses perversités (1922)



afbeelding 6
Ergens in het *Pädagogisches Skizzenbuch* staat toch de gulden snede $a : b = b : (a + b)$. Klee geeft numerieke benaderingen $2 : 3 = 3 : 5$ en $7 : 11 : 13 : 17$. De laatste kan ik niet direkt thuisbrengen, misschien u wel? U zou deze verhoudingen eens moeten opzoeken in 'Harmonie der nördlichen Flora' (1927), waarbij natuurlijk verwantschap met Mondriaan opvalt.

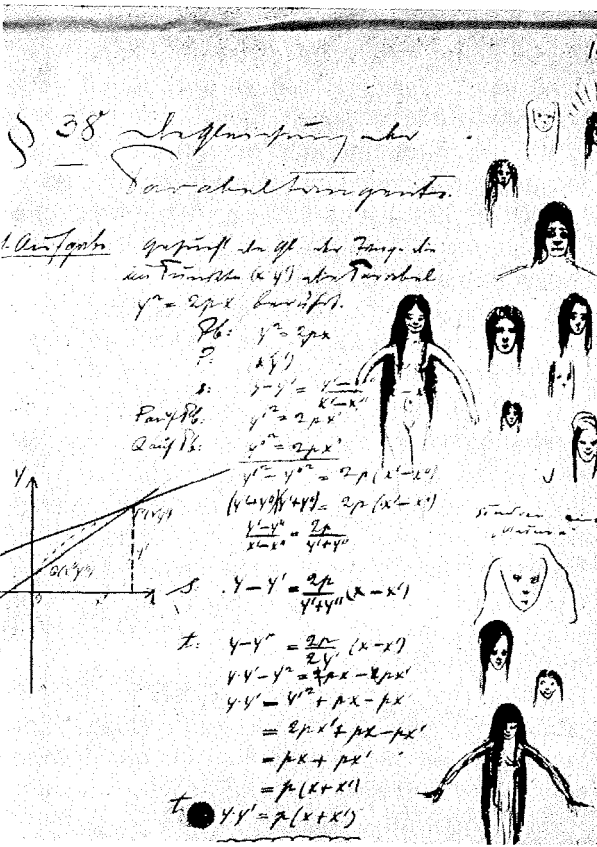
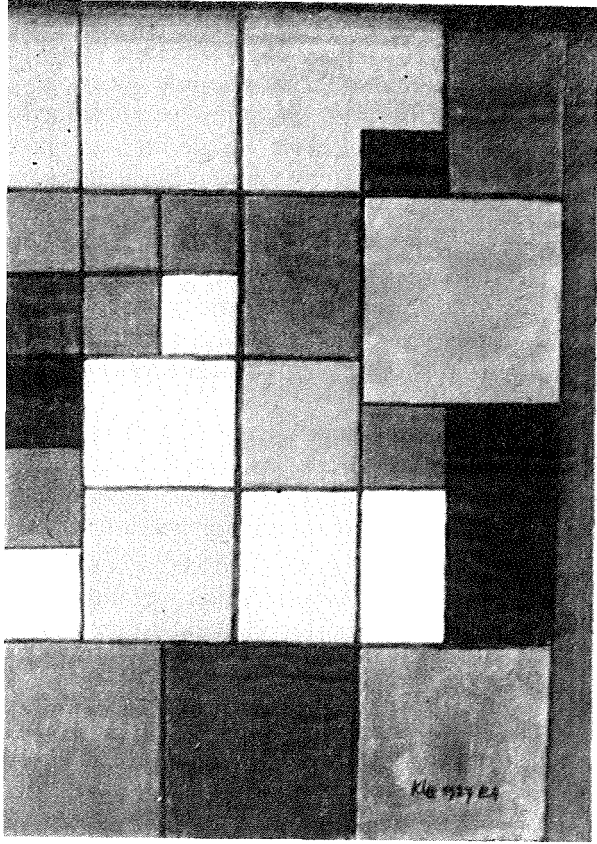
ge?', enzovoorts bezien om die andere kant te ontdekken.

Er zijn talloze kollekties reproducties, vele musea hebben tekeningen en/of schilderijen van Klee en van tijd tot tijd zijn er overzichtstentoonstellingen.

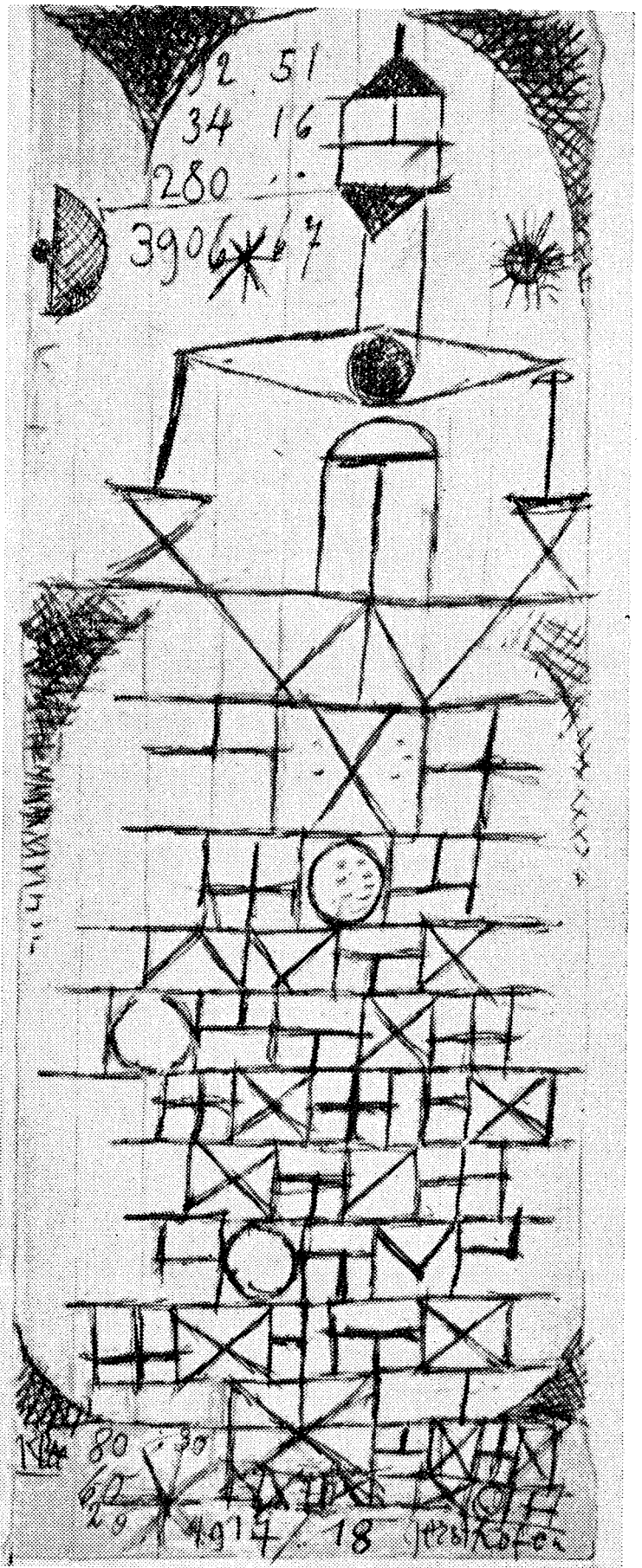
Ik kan u een betere en meer uitvoerige kennismaking met zijn werk, dan in het kader van dit verhaaltje kon, van harte aanbevelen!

Er zijn tekeningen van Paul Klee met titels als: beweegbare opa, machine om peren te destilleren, tsielp-apparaat, abstrakt schrift. We geven twee voorbeelden, namelijk 'mécannique d'un secteur urbain' (afbeelding 4) en 'analyse des diverses perversités' (afbeelding 5).

Deze laatste is een duidelijk voorbeeld van een door de mechanika geïnspireerde vormgeving, let u maar op de pijlen, op de machientjes, op de letters bij de objekten, enz.



afbeelding 7
 In de dagboeken van Paul Klee (DuMont Dokumente, 1957) vinden we een reproductie uit een wiskunde-schoolschrift van Paul Klee. Past u dus op als u een poppetjes-tekenende-leerling zou bestraffen....



afbeelding 8
 later kan er nog iets goeds uit groeien.

wiskobas en methoden

Hoe is de relatie tussen wiskobas en de methoden – de 'boekjes'?

Alhoewel reeds eerder in dit bulletin (jaargang 1, nummer 2/3) op enkele hiermee samenhangende vraagpunten is ingegaan, leek het ons goed om – gezien de vragen die ons regelmatig gesteld worden – een en ander nog eens duidelijk op een rijtje te zetten.

HENK MEIJER

In genoemde publikatie werd primair gesteld, dat een te grote heterogeniteit in leerstof, gevoegd bij een aantal ontbrekende voorwaarden tot realisering van een verantwoord reken-wiskunde-onderwijs (te denken is aan kadervorming, heroriëntering en begeleiding), een chaotische situatie op de nederlandse basisschool zou doen ontstaan. Op dezelfde plaats werd reeds ingegaan op de vraag van waaruit wiskobas het wiskunde-onderwijs beoordeelt en langs welke wegen getracht zou worden gestalte te geven aan vernieuwing van dat onderwijs.

In diverse afleveringen van het Wiskobas-Bulletin, alsmede in het 'handboek heroriëntering onderwijzers' (maTEMAtika) zijn intussen analyses en beschouwingen gepubliceerd.

Nu, eind 1973, is het feit van een in ontwikkeling verkerend integratieplan genoegzaam bekend. Dit onderwijsleerplan zal kunnen dienen als *vertrekpunt* voor te konsipiëren 'methoden', die dan uiteraard – met behoud van diversiteit van inhoud en benadering – binnen één omvattend kader zullen kunnen functioneren.

Dat vertrekpunt zal – het is bekend – omstreeks 1975 zijn.

In overeenstemming met onze visie op de ontwikkeling van vernieuwingsinhouden worden onze ervaringen u niet onthouden. Het Wiskobas-Bulletin speelt hierin uiteraard een grote rol. Fundamentele beschouwingen zullen in de komende jaren worden gepubliceerd, terwijl in het kader van een democratische leerplanontwikkeling ùw inbreng niet alleen mogelijk maar zelfs nodig is.

Het is evident dat voor het konsipiëren van een onderwijsleerpakket, het zinvol is al onze ontwikkelingen te volgen.

Wij achten het tot onze taak een *samenwerkingsvorm met schrijversgroepen* te realiseren, opdat van onze ervaringen en mogelijke inzichten gebruik kan worden gemaakt ten bate van het produkt en met de mogelijkheden tot pluriforme uitwerkingen binnen één wenselijke kontekst. Een dergelijke vorm van samenwerking zal na 1975 geïntensiveerd moeten worden.

Onze activiteiten in deze richting kunnen voorshands slechts beperkt zijn. Zoals voor een ieder die wil meedenken en meepraten, staat – binnen onze mogelijkheden – de deur van het instituut open.

In dit verband willen we graag duidelijk zijn: wij als leerplanontwikkelingsinstituut willen onze verworvenheden doorgeven, van onze inzichten blijk geven. Het is uiteraard niet onze taak en wens een methode, welke dan ook, van een fiat te voorzien.

leerplan^o logie

LEERPLANONTWIKKELING
EN -AFWIKKELING

ADRI TREFFERS
EDU WIJDEVELD

De zes leerstofvlakken, die men in moderne wiskunde-programma's voor de basisschool aantreft, zijn:

- het getsysteem
- meten
- meetkunde
- waarschijnlijkheidsrekening en statistiek
- relaties en functies (ordenen)
- logika en redeneren.

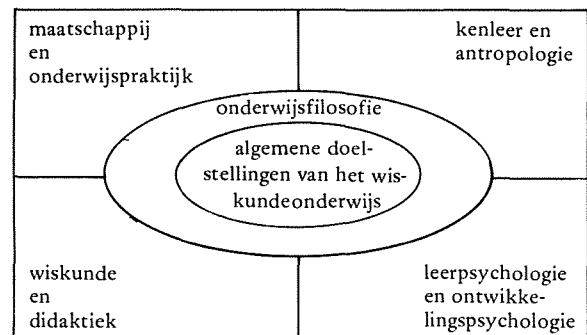
Ten aanzien van deze zes leerstofvlakken kunnen we de volgende vraag stellen:

Waarom ontlene de zes onderwerpen hun relevantie in verband met de uitgangspunten en algemene richtlijnen, zoals we die in het vorige artikel schetsten?

Het is duidelijk, dat de algemene doelstellingen een aantal richtlijnen bevatten voor leerstofkeuze. We noemen bijvoorbeeld het praktische nut en de voorbereidende waarde, die als algemene integrale doelen een duidelijke indicatie geven om de basisbewerkingen van de natuurlijke getallen te behandelen, om nu maar eens het meest triviale gebied te noemen.

Zo zijn er ook algemeen matematische doelen, die de keuze van bijvoorbeeld waarschijnlijkheidsrekening en statistiek motiveren. Toch leveren de uitgangspunten van mathematisch-didaktische aard met de richtlijnen van de algemene doelstellingen niet voldoende houvast om de maatstaf voor de leerstofkeuze met vaste hand aan te leggen.

Het volgende plaatje kan de kwestie wat verduidelijken:



De twaalf algemene doelstellingen van het wiskunde-onderwijs liggen ingebed in de onderwijsfilosofie, waarvan wij acht uitgangspunten van mathematisch-didaktische aard noemden. De onderwijsfilosofie, die zowel wenselijke als mogelijke aspecten van het wiskunde-onderwijs bevat, rust op zijn beurt weer op de kwadranten: filosofie, psychologie, didaktiek en onderwijspraktijk.

Willen we nu de keuze van een leerstofonderwerp motiveren, dan kunnen we argumenten uit deze vier sectoren aandragen. De structuur

van het kennisgebied, de structuur van het kinderlijke denken, de mogelijkheden voor didactische verwerking, het praktische nut, de verbinding met andere vakken, de haalbaarheid in de alledaagse schoolpraktijk e.d. kunnen wat van dergelijke argumenten opleveren. Sommige zijn van normatieve aard – het ‘zo en zo behoren te zijn’ is essentieel – en ontspruiten aan een bepaalde kijk op de mens, de samenleving en het vak; andere beweegredenen steunen meer op feiten – het ‘zo en zo zijn’ is wezenlijk – en worden ontleend aan gegevens uit de psychologie, didaktiek, onderwijspraktijk, e.d. Maar juist die normatieve aspecten kunnen de motivering geen objectief – in de zin van ‘voor allen geldend’ – criterium voor de keuze van een bepaald onderwerp bieden.

Deze niet-objectiviteit zou ertoe kunnen leiden, dat we de argumenten van filosofische, psychologische, mathematisch-didactische, maatschappelijke en onderwijspraktische aard laten voor wat ze zijn en ons beperken tot het hanteren van de *wip-wap-methode*, waarbij we de gegevens over hoe ‘men’ over de invoering van een bepaald stuk leerstof denkt (ja of nee) als beslissingselement voor het leerplanhandelen nemen, zonder dat de argumenten op z'ich gewicht in de schaal leggen.

Welnu, een sintese van deze beide benaderingswijzen vormt de oplossing van het criteriumvraagstuk: *doe het één en laat het ander niet!*

Dit betekent: laat de partisipanten het leerstofonderwerp mathematisch en didactisch verwerken, draag argumenten vóór en tegen de invoering aan, onderzoek de kwestie van de haalbaarheid in de onderwijspraktijk, verstrek gegevens over resultaten van relevant onderzoek, verander onder invloed van respons de leerstofdelen en pas onderwijs de wip-wap-methode toe. Acht een grote meerderheid van de geraadpleegden het onderwerp wenselijk en haalbaar, dan is dit een motief om het in het leerplan op te nemen, in het andere geval is er alle reden om te overwegen het onderwerp weg te laten. Blijkt het voor de leerplanontwikkeling een essentieel onderdeel van het leerplan te zijn, dan resteren in dit geval twee werkzaamheden:

- toelichten, waarom men het onderwerp perse wil handhaven,
- neem in de toelichting op, dat de meerderheid van de partisipanten erop tegen is.

Aangezien het leerplan een *maximaal beschrijvende ideeënbron* is, kan iedere school ook ten aanzien van een omstreden onderwerp zijn eigen keuze doen.

Ziehier de essentie van de leerplanontwikkeling:

ervaringen opdoen, argumenten beluisteren, respons leveren, leerstofdelen herzien of schrappen en beslissen over de plaats in het leerplan. Deze wijze van het wegen van deskundige en overwogen uitspraken lijkt ons de enig juiste weg. Het is echter goed om ons duidelijk te realiseren, dat we pas aan het begin van het pad zijn, dat naar een dergelijk criterium van leerstofkeuze moet leiden.

Het is echter ook goed om te bedenken, dat we in Nederland door de koppeling van de leerplanontwikkeling, kadervorming en (her-)scholing een unieke gelegenheid hebben om deze democratische leerplanprocedure uit te voeren.

Dit alles houdt in, dat het niet onmogelijk is, dat bijvoorbeeld het leerstofvlak ‘Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek’ diskutabel gesteld zal worden. De reden daarvan zal dan zeker niet van mathematische aard zijn: het structuuraspect, het taalaspect, de toepasbaarheid, de dynamiek en de specifieke benaderingswijze van de wiskunde worden immers volledig weerspiegeld in dit onderwerp. Ook de didactische mogelijkheden zijn niet gering: er is actief, gedifferentieerd, kwalitatief gefaseerd onderwijs realiseerbaar met dit onderwerp. De maatschappelijke relevantie lijkt evenmin een obstakel. Kortom, alle uitgangspunten en richtlijnen van de kubus lijken het leerstofvlak ‘Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek’ goed te kunnen dragen.

En toch,

We zullen na de ervaringen op kadervormingsbijeenkomsten en de cursussen aan P.A.-studenten al een positieve indruk omtrent het sen of inpassing in het nieuwe leerplan wel verantwoord is in verband met de realiseerbaarheid in de onderwijspraktijk.

In de jaren 1976-1978 zullen de definitieve weggingen plaatsvinden; in de voorafgaande periode is echter al grofweg duidelijk geworden wat bestaansrecht heeft in het leerplan. Zo geven bijvoorbeeld de kadervormingsbijeenkomsten en de cursussen aan P.A.-studenten al een positieve indruk omtrent het leerstofvlak ‘Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek’. Via heroriënteringscursussen en televisielessen zal het vlak wellicht nog vaster op de kubus getimmerd worden.

De geschetste procedure zal ertoe leiden, dat de eerste leerplanpublicatie intern zal geschieden. Al degenen, die bij het ontwikkelingsproces betrokken zijn geweest zullen de gele-

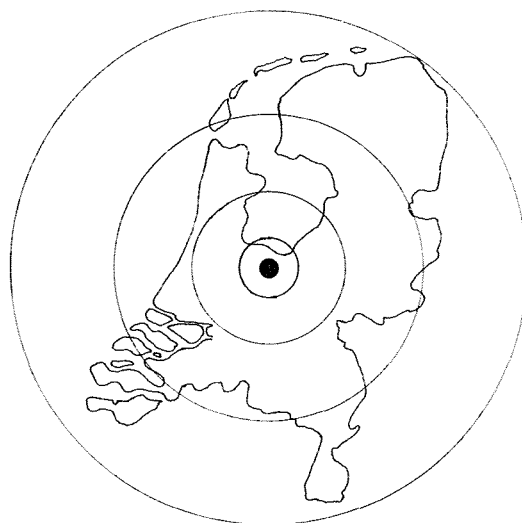
genheid moeten hebben om zich over het produkt uit te spreken. Dit zal voor een deel op werkbijeenkomsten kunnen geschieden, die landelijk, regionaal of plaatselijk georganiseerd worden. In de loop van 1975 zullen we een gedetailleerd plan voor deze *leerplanafwikkeling* publiceren.

Na de interne publikatie volgt dan een meer definitieve versie, waarop het (her)scholings- en begeleidingsprogramma voor de (a.s.) onderwijzer afgestemd is.

We hopen en verwachten dat vanaf 1977/78 nieuwe leerstofpakketten (c.q. 'methoden') in de geest van het nieuwe leerplan de basisschool zullen binnenkomen.

Voorlopig worden we tot juni 1975 volledig in beslag genomen door het werk op de ontwerpschool. De kontakten 'naar buiten' — hoe belangrijk die ook zijn — moeten daarom voorlopig gereguleerd worden. Deze regels, die we begin oktober schrijven, worden dan ook niet in Egmond aan Zee op papier gezet, *belaas!*

berichten uit het **binnenland**



Een nieuwe rubriek, die gewijd zal zijn aan verslagjes van, aantekeningen over en kanttekeningen bij activiteiten van allerlei aard, die binnen het kader van het wiskobas-project uitgevoerd zijn c.q. worden.

Deze keer komen de verschillende konferenties die in het jaar 1973 door wiskobas zijn georganiseerd aan de orde.

LOUIS GILISSEN

1 Noordwijkerhout

Van 19-22 maart werden in het Leeuwenhorst Congres Center te Noordwijkerhout gelijktijdig twee konferenties gehouden, te weten een studiekonferentie voor docenten pedagogiek aan pedagogische akademies en onderwijskundige medewerkers van schooladviesdiensten en een studiekonferentie voor docenten methodiek en pedagogiek aan opleidingsscholen voor kleuterleidsters.

Deze gelijktijdigheid was een kwestie van efficiency. Beide evenementen werden belangrijk genoeg geacht om de aandacht en aanwezigheid van het hele wiskobas-team te vereisen. Van de andere kant woekerde in deze periode iedere wiskobas-medewerker met zijn tijd. De voorbereidingen voor de integratieplan-werkzaamheden, die in augustus 1973 zouden starten, waren in volle gang. Daarom is gekozen voor de gelijktijdigheid; het hele wiskobas-team kon op deze wijze in Noordwijkerhout aanwezig zijn, en door middel van een goede taakverdeling is het gelukt bij beide konferenties de nodige mankracht in te zetten.

1.1 De studiekonferentie voor *docenten pedagogiek aan pedagogische akademies en onderwijskundige medewerkers van schooladviesdiensten* was de tweede van deze aard. Net als bij de conferentie in het voorjaar van 1972 was ook hier het hoofddoel: overleg omtrent leerplanontwikkeling en leerplanontwerp.

In de eerste conferentie stond naast de werkwijze voor leerplanontwikkeling in de brede zin (gedemonstreerd aan het onderwerp 'Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek') vooral het doelstellingendenken centraal.

In de tweede conferentie, die zich afspeelde in een periode waarin de eksploratiefase (1971-1973) zijn einde naderde en het begin van de integratiefase (1973-1975) op handen was, vormden de wijze van konstruktie van een schoolwerkplan voor het wiskunde-onderwijs op de basisschool en de eisen die aan een dergelijk schoolwerkplan gesteld worden, het thema. Om de uitwisseling van gedachten omtrent dit thema zo optimaal mogelijk te doen verlopen werd de problematiek aangepakt vanuit een vrij beperkt leerstofgebied, dat wiskundig belangrijk is en bovendien aan elke conferentie-deelnemer redelijk bekend was. Dit leerstofgebied betrof de operaties, met het aksent op vermenigvuldigen (in relatie met telproblemen).

Aan het eind van de conferentie kon gesteld worden dat de conferentie-deelnemers een konstruktieve bijdrage hadden geleverd aan het leerplanontwikkelingswerk voor het wis-

kunde-onderwijs van de basisschool. In een nog te verschijnen verslag van deze konferentie zal op het een en ander nader worden ingegaan.

1.2 Van geheel andere aard was de simultaan verlopende studiekonferentie voor *docenten methodiek en pedagogiek aan opleidingsscholen voor kleuterleidsters*.

We hadden hier te maken met een groep die tot op dat ogenblik niet in het wiskobaswerk was ingeschakeld en over het algemeen niet of in slechts geringe mate van de ontwikkelingen op dit gebied op de hoogte was. Van de andere kant bestond er bij de wiskobas-medewerkers wel een know-how op het gebied van het wiskunde-onderwijs in de basisschool, maar niet ten aanzien van mogelijke wiskundige activiteiten in het kleuteronderwijs. Tijdens de conferentie was deze beginsituatie in een tweerichtingsverkeer ingebouwd. Vanuit wiskobas werd informatie gegeven over wiskunde (praktikum op eigen nivo), wiskunde-onderwijs (uitgangspunten en achtergronden) en leerplanontwikkeling. Een en ander werd toegespitst op de twee eerste leerjaren van de basisschool. De konferentie-deelnemers brachten hun deskundigheid op het gebied van het kleuteronderwijs in bij de discussie over het totstandkomen van een eerste aanzet van een KLOS-blok, een leerstofpakket voor de opleidingsscholen van kleuterleidsters.

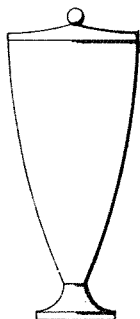
De bedoeling van deze conferentie was *niet* het ontwikkelen van een zwaar wiskunde-programma voor kleuterschool en opleiding, maar om het denken op gang te brengen over het eerste gedeelte van een leerplan wiskunde. Een leerplan, waarin de activiteiten zodanig op een rij zijn gezet dat ze afgestemd zijn op de ontwikkelingsfase, waarin het kind (de leerling) zich bevindt. Elk kind kan aldus een continue lijn van 'wiskundige activiteiten' vanaf zijn entree in het kleuteronderwijs tot het verlaten van het sekondair onderwijs doorlopen. Voor de leeftijdsgroep 4-7 jaar betekent dit dat de activiteiten gericht op het verkennen van allerlei kwantitatieve, ruimtelijke en temporele aspecten van de werkelijkheid bewust in die lijn geplaatst dienen te worden.

Als hoogtepunt van de conferentie kan beschouwd worden de activiteit gericht op de produktie van het KLOS-blok. Na een korte inleiding over de mogelijke inhoud en hoofdstukkenindeling ging voor ieder hoofdstuk een groep deelnemers intensief aan het werk. Het blok bestaat (zal bestaan) uit de volgende hoofdstukken:

- doelstellingen
- praktikum
- kijk naar kleuters
- kleuters in de schoolsituatie
- een projekt
- psychologische informatie
- wiskunde in het bewegingsspel
- zelf in de kleuterschool
- analyse van materiaal
- maak materiaal voor deze kleuters in deze situatie.

Duidelijk is dat dit blok niet gereed is gekomen op de conferentie. Dat was ook niet de bedoeling. Wel hebben de verschillende werkgroepen ná de conferentie hun activiteiten voortgezet.

2 SPELEN OM DE CUP



De jongens van WISKOBAS is weleens verweten dat ze teveel sport in de wiskunde stoppen. Voetballen en zo.

Neem het ze niet kwalijk. Het zijn jonge, gezonde boys en die willen wel eens wat.

Wij doen ditmaal met onze problemen met ze mee en gaan een tennistoernooi organiseren. Er zijn 111 deelnemers en gespeeld wordt volgens afvalsysteem. Wie eenmaal verliest, doet niet meer mee.

De vraag is nu hoeveel wedstrijden er in totaal gespeeld moeten worden, voordat de beker en de prijzenpot aan de uiteindelijke winnaar uitgereikt kan worden.

Het is een kort probleempje en ook de oplossing kan via een korte redenering gevonden worden.

Als u de goede redenering te pakken hebt, kunt u ook zonder ekstra moeite bepalen hoeveel wedstrijden nodig zijn om via het afvalsysteem de kampioen van 14.937 tennisers aan te wijzen.

Resultaat: enkele hoofdstukken zijn in 0-de versie gereed en zullen op korte termijn in een aantal opleidingsscholen worden uitgeprobeerd. Met betrekking tot de andere hoofdstukken zijn de activiteiten nog in volle gang. Wij hopen het hele blok begin volgend studiejaar in 0-de versie gereed te hebben.

De conferentiegangers zullen worden uitgenodigd voor een bijeenkomst op het instituut op 25 januari 1974.

2 Lochem

Van 1-3 mei werd in Lochem een conferentie gehouden voor leden van de *rijksinspectie van kleuter-, basis- en buitengewoon-onderwijs*.

Het eerste deel van de conferentie stond in het teken van informatie omtrent de uitgangspunten van het wiskunde-onderwijs. In het tweede deel werd informatie verstrekt over de planning voor de nabije toekomst, met name ten aanzien van het integratieplan. Het grootste gedeelte van de gedachtenwisseling tussen IOWO en inspectie (die overigens in plenaire besprekingen en discussies in de wandelgangen gedurende alle drie de dagen plaats vond) ging over die planning en de te voeren strategie.

Na afloop van de conferentie kon gezegd worden dat de doelen in alle opzichten zijn bereikt dankzij de bereidwilligheid van de deelnemers en deelnemers om mee te denken en mee te spreken over de taak van wiskobas: de leerplanontwikkeling van het wiskunde-onderwijs voor 4- tot 12-jarigen.

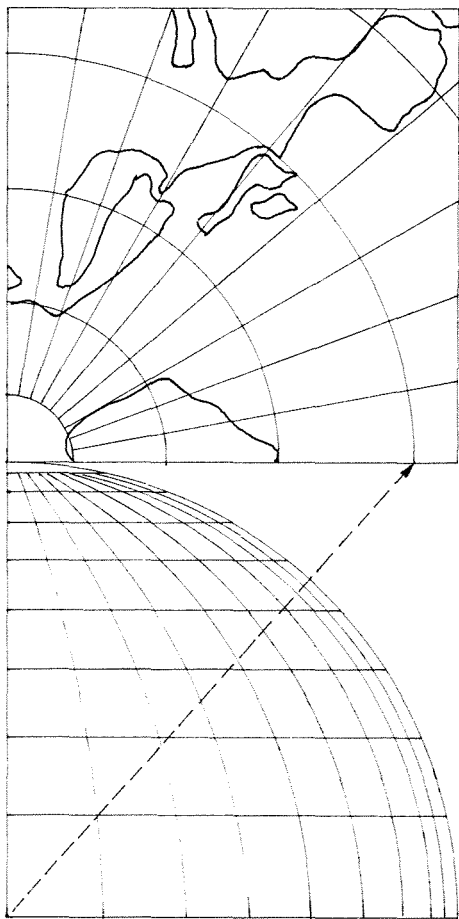
3 Mammoet-konferentie

Er is dit jaar geen Egmond-konferentie georganiseerd (voor docenten wiskunde-didaktiek en andere leden van de wiskobas-werkgroepen). Dit in verband met de werkzaamheden voor het integratieplan in de eerste periode. Dat wil niet zeggen dat deze groep docenten in de steek wordt gelaten. In de maand november zijn weer net als verleden jaar zogenaamde 'P.A.-dagen' georganiseerd.

Verder is het de bedoeling om op 25 t/m 28 maart 1974 een Mammoet-konferentie te organiseren voor:

- docenten wiskunde-didaktiek van pedagogische akademies
- docenten pedagogiek van pedagogische akademies
- docenten metodiek en pedagogiek van opleidingsscholen voor kleuterleidsters
- onderwijskundige medewerkers van schooladviesdiensten.

berichten uit het buitenland



ONDERZOEKSTEMA'S
VOOR HET WISKUNDE-ONDERWIJS

KLAAS KOSTER

Tien jaar geleden verscheen het eerste 'Handbook of Research on Teaching' onder redactie van N.L. Gage. Daarin ontbrak een hoofdstuk over het wiskunde-onderwijs op de kleuter- en basisschool. Dit verzuim is hersteld in het 'Second Handbook of Research on Teaching', dat in de loop van dit jaar bij Rand McNally (Chicago) verscheen onder redactie van R.M.W. Travers.

Hoofdstuk 35 van het tweede handboek bevat een overzicht van de 'Research on the teaching of Elementary School Mathematics', geschreven door C. Alan Riedesel en Paul C. Burns.

Na een opsomming van vooral amerikaans onderzoek op het gebied van het wiskunde-onderwijs in de kleuter- en basisschool, noemen de auteurs aan het eind van hun artikel een aantal research-tema's, die naar hun opvatting in de toekomst meer nadruk moeten hebben.

Het lijkt ook voor de nederlandse situatie van belang op de hoogte te zijn van de te verwachten ontwikkelingen in het onderzoek van het wiskunde-onderwijs. Bij ieder van de door Riedesel en Burns genoemde thema's worden kanttekeningen geplaatst over de nederlandse onderzoeken op het betreffende gebied.

Achtereenvolgens noemen Riedesel en Burns de volgende thema's:

► *Onderzoek naar onderwijsteorieën*

Meer aandacht vragen de auteurs voor het onderzoek dat gericht is op het in kaart brengen van het onderwijsgedrag tijdens de wiskunde-lessen. Dit soort onderzoek zou kunnen leiden tot uitspraken als: leerkracht A kan onderwerp X aan leerling Z het beste leren met onderwijsmethode C.

In de literatuur is dit soort onderzoek bekend als Aptitude Treatment Interaction (ATI) onderzoek. Het jaarverslag over 1972 van de Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs vermeldt op pag. 15 dat in nederland 10 door SVO gesubsidieerde projekten zich met deze problematiek bezighouden. Vooral aan de universiteit van nijmegen wordt veel ATI onderzoek verricht.

► *Attitude onderzoek*

Belangrijk is dat er goede instrumenten ontwikkeld worden om attitudes van leerlingen te meten, zodat het mogelijk wordt aan te geven waarom de houding ten opzichte van het wiskunde-onderwijs vaak negatief is. Met behulp van specifieke informatie over de oorzaken van die houding kunnen vervolgens leerformen en leermaterialen gekonstrueerd worden, die de negatieve houding verbeteren.

Op dit gebied is nog maar weinig onderzoek verricht, zowel in de Verenigde Staten als in Nederland.

► *Bepalen van de volgorde van de onderdelen in een leerplan/schoolwerkplan.*

Op basis van empirisch materiaal zou men in staat moeten zijn onderwijs- en leehierarchieën op te stellen. Het werk van Gagné is hiervan een voorbeeld. In het Research and Development Center van Pittsburg worden veel hiërarchie-onderzoeken uitgevoerd. Voorzover bekend vindt in Nederland op dit punt nauwelijks onderzoek plaats. Wel kan men verwachten dat binnen de projecten, die zich met het maken van beheersingstoetsen belast hebben, leehierarchie-problemen aan de orde komen.

► *Piagetiaans onderzoek*

Zowel voor de verbetering van evaluatieprocedures in de school, als ook voor een betere afstemming van het wiskunde-onderwijs op de cognitieve vaardigheden van de leerlingen, is meer informatie nodig over de manier van redeneren van kinderen in een bepaald ontwikkelingsstadium. Ook de individuele verschillen in cognitief functioneren moeten worden verhelderd.

In vrijwel alle landen doet zich een hausse voor in dit onderzoek. Ook in Nederland is de belangstelling voor Piaget's werk groeiende. Voorbeelden van gebruikmaking van gegevens van Piagetiaans onderzoek binnen de leerplan-konstruktie treft men aan in de P.A. blokken van het IOWO over 'Waarschijnlijkheid en Statistiek'.

► *Vergelijkend methoden-onderzoek*

Welke onderwijsmethode is beter: methode A of methode B?

Deze vraag heeft geleid tot een groot aantal studies, die over het algemeen weinig rendement hebben opgeleverd. Riedesel en Burns wijzen er op dat ook de vraag gesteld kan worden: is methode A effectiever? is methode B effectiever?, zonder daarmee onmiddellijk een vergelijking tussen de twee methoden te maken.

Tevens suggereren ze dat door de faktor onderwijstijd bij de verschillende methodes te variëren meer informatie over de verschillen tussen methoden beschikbaar komt. Zoals bekend worden de onderzoeken tot dusver meestal zo opgezet dat de onderwijstijd/trainingstijd per methode gelijk blijft. Wanneer de variabele *tijdsduur* ook in de opzet van het onderzoek wordt betrokken, kan bijvoorbeeld blijken dat de ene methode sneller tot bepaalde leerresultaten leidt dan de andere.

In Utrecht is een door SVO gesubsidieerd

onderzoek uitgevoerd naar de effecten van drie soorten trainingen op het getalbegrip van 5- en 6-jarigen.

► *Verband tussen de verschillende soorten leerprocessen*

Dit onderzoek moet gericht worden op de vraag welke soort leerkonditie het beste past bij het realiseren van bepaalde leerresultaten. In welk geval is zelfontdekkend activiteiten-onderwijs het meest geschikt en wanneer een meer door de onderwijzer gestuurd hiërarchisch-geordend soort onderwijs? Voor het leren van vaardigheden is de laatste onderwijsvorm mogelijk meer van toepassing dan voor het verwerven van inzichten. De ontwikkelings-psychologische discussie tussen Galperin en Piaget over de wijze van beïnvloeding van de cognitieve ontwikkeling is voor dit research-tema van betekenis.

In Nederland hebben Van Parreren en G.A. Kohnstamm over dit onderwerp gepubliceerd. Ook in het kader van de ATI-onderzoeken duikt dezelfde problematiek op.

► *Verhouding van wiskunde-onderwijs tot andere vakken*

Riedesel en Burns noemen hier onderzoek naar de relaties tussen het natuurkunde- en wiskunde-onderwijs, maar men kan dit uiteraard ook naar andere vakken uitbreiden. In Nederland wordt door Kees van Baalen via een vorm van projektonderwijs sterk de nadruk gelegd op het verband tussen wiskunde en andere vakken.

► *Onderzoek naar de wijze waarop de toepassing van researchgegevens in onderwijssituaties kan worden verbeterd*

De auteurs geven hierover weinig informatie. Wel noemen ze bij een ander thema het feit dat onderzoek naar het leren van specifieke onderwerpen (bijvoorbeeld: het leren van de optel-algoritme) in het verleden de grootste betekenis voor de onderwijspraktijk heeft gehad. Aan de ene kant moet de keuze van research-tema's aansluiting kunnen vinden bij de praktijk van het onderwijs, aan de andere kant moet in het veld de bereidheid bestaan onderzoeksgegevens in het werk te verdiskontereren.

Voor de planning van in de toekomst uit te voeren onderzoek zou het nuttig zijn als er een lijst met research-tema's kwam, die binnen de IOWO-filosofie van belang zijn om in Nederland in onderzoek te nemen. Op die manier kunnen ontwikkelings- en onderzoekswerk beter op elkaar worden afgestemd.

rechthoeken vullen en traplopen met de zoon van de goedzak



In het vorige nummer van dit tijdschrift hebben wij u in 'problematika 3'¹⁾ het volgende probleem gepresenteerd:

op hoeveel verschillende manieren is een 2 bij n-rechthoek op te vullen met een 2 bij 1-rechthoek?

Een schema:

2 bij n-rechthoeken:	aantal opvullingen:
2 bij 1	1 mogelijkheid
2 bij 2	2 mogelijkheden
2 bij 3	3 mogelijkheden
2 bij 4	5 mogelijkheden

Al die tekeningen gaan nogal wat ruimte in beslag nemen. Bovendien wordt het bij toenemende n steeds moeilijker zekerheid te verkrijgen of alle oplossingen gevonden zijn. Wel ontstaat regelmaat in het aantal opvullingen dat mogelijk is:

- 2 bij 1-rechthoek: 1 verdeling
- 2 bij 2-rechthoek: 2 verdelingen
- 2 bij 3-rechthoek: 3 verdelingen
- 2 bij 4-rechthoek: 5 verdelingen
- 2 bij 5-rechthoek: 8 verdelingen.

En het vermoeden ontstaat dat het zo door-
gaat. Dus:

- 2 bij 6-rechthoek: 13 verdelingen
- 2 bij 7-rechthoek: 21 verdelingen
- 2 bij 8-rechthoek: 34 verdelingen
- : 55 verdelingen
- : 89 verdelingen
- : 144 verdelingen
- enz.

U ziet dat de rij getallen
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, op een
eenvoudige manier gekonstrueerd is. Ieder
getal uit de rij – behalve de twee eerste
getallen – is de som van de twee voorgaande
getallen:

$$\begin{aligned}
 3 &= 1 + 2 \\
 5 &= 2 + 3 \\
 8 &= 3 + 5 \\
 13 &= 5 + 8 \\
 &..... \\
 &.....
 \end{aligned}$$

Algemener kunnen we de zaak noteren door
het aantal verschillende opvullingen van een 2
bij n-rechthoek aan te geven met a_n .
Dan is:




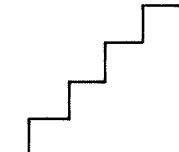
$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1 \\
 a_2 &= 2 \\
 a_3 &= a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3 \\
 a_4 &= a_2 + a_3 = 2 + 3 = 5 \\
 a_5 &= a_3 + a_4 = 3 + 5 = 8.
 \end{aligned}$$

En het reeds gesignaleerde vermoeden kunnen
we formuleren:

voor ieder natuurlijk getal $n \geq 2$ geldt klaarblijke-
lijk

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}.$$

Oplettende kursisten van de heroriënterings-
kursus wiskobas hebben inmiddels opgemerkt
dat deze getallenrij al eerder is opgetreden. In
een van de blokken komt namelijk de vraag
voor op hoeveel verschillende manieren 'n
trap met n treden op te huppelen is, wanneer
zowel stappen van één en stappen van twee
treden genomen mogen worden.

	aantal manieren:
1 trede: 	1
2 treden: 	2
3 treden: 	3
4 treden: 	5
5 treden:	8
6 treden:	13
.....	..
.....	..
.....	..

Nu is de getallenrij 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, geen uitvinding van wiskobas. Het is zelfs een beroemde en reeds lang gekende rij, die bekend staat als de *rij van Fibonacci*.

Deze Fibonacci, wiens naam betekent 'zoon van de Goedzak', heette eigenlijk Leonardo Pisano (L. van Pisa). In 1202 publiceerde hij het boek van de abakus 'Liber Abbaci'. Dit boek heeft grote invloed gehad op onze wiskunde. Fibonacci hield erin een pleidooi voor het gebruiken van arabische cijfers en hij toonde aan dat met de — van arabische oorsprong zijnde — algebra, allerlei problemen uit het dagelijkse leven konden worden opgelost. Ook wordt het beroemde konijnenprobleem er in behandeld.

Stel dat een — theoretisch! — konijnenechtpaar iedere maand één nieuw konijnenechtpaar produceert en elk nieuw konijnenechtpaar op zijn beurt gaat na twee maanden op dezelfde wijze konijnenparen voortbrengen. Dan kunnen we het aantal paren per maand gaan tellen:

- 1^e maand: 1 paar
- 2^e maand: 2 paren
- 3^e maand: 3 paren
- 4^e maand: 5 paren
- 5^e maand: 8 paren
- 6^e maand: 13 paren
- enzovoort.

Rekent u maar na!

U ziet: met rechthoeken vullen, traplopen en konijnen fokken krijgen we steeds dezelfde rij getallen.

Inmiddels zijn we u nog een bewijs verschuldigd. In het oorspronkelijke rechthoekenprobleem ontstond het vermoeden, dat voor iedere $n \geq 2$, het aantal mogelijke opvullingen van een 2 bij n -rechthoek door een 2 bij 1-rechthoek gevonden werd uit:

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}.$$

Het bewijs hiervoor is niet zo moeilijk te vinden. Een 2 bij n -rechthoek opvullen eindigt met:

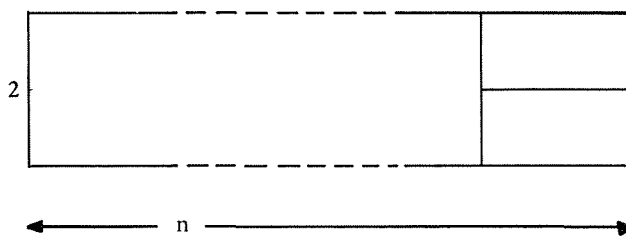


fig. 1

of met:

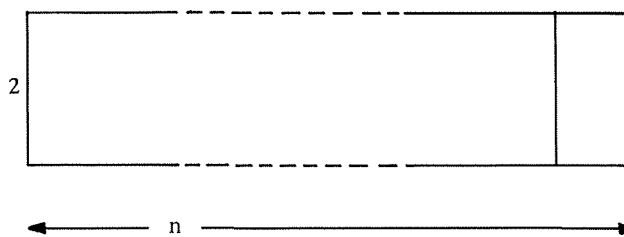


fig. 2

In fig. 1 houden we in het linker deel een 2 bij $n-2$ -rechthoek over. Dit deel is op a_{n-2} manieren op te vullen. In fig. 2 houden we links een 2 bij $n-1$ -rechthoek over. Dit deel is op a_{n-1} manieren op te vullen.

Het aantal mogelijke opvullingen van een 2 bij n -rechthoek is dus de som van het aantal mogelijkheden om fig. 1 te verkrijgen én het aantal mogelijkheden om fig. 2 te verkrijgen; dus inderdaad geldt:

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}.$$

Vervolgens kost het u hopelijk niet teveel moeite om in te zien dat ons traploop- en konijnenprobleem met een overeenkomstige redenering is aan te pakken. Het voorkomen van dezelfde getallenrij in onze drie problemen is simpelweg een gevolg van het feit dat deze problemen dezelfde structuur bezitten, ofwel *isomorfe problemen* zijn.

enzovoorts enzovoorts

ITERATIE EN VOLLEDIGE INDUKTIE BIJ KINDEREN

Enige tijd geleden had ik een kort gesprek met een jongetje van vier jaar. 'Ik ben geboren uit mijn moeder's buik', vertelde hij, 'en mama is geboren uit oma's buik. En oma...'

Het was even stil.

'Alle mensen zijn uit iemands buik geboren', stelde hij vast, maar vervolgde met 'behalve de eerste, die kan niet uit iemands buik geboren zijn'.

En hij vroeg: 'Waar komt die eerste eigenlijk vandaan?'

Voordat ik had kunnen antwoorden, dat ik dat ook niet precies wist, gaf hij zijn oplossing: 'Die is uit zichzelf geboren'.

JAN VAN DEN BRINK

Wat mij bij genoemde oplossing vooral frappeerde, was, dat het idee van 'de herhaalde geboorte' zo sterk tot hem sprak, dat zelfs de eerste mens eraan moest geloven.

In 'het dagelijks leven' zijn overigens vele van dit soort *enzovoortsproblemen* te ontdekken:

- twee spiegels in een ijssalon die tegenover elkaar zijn geplaatst
- het bekende cacaopakje¹)
- tijdens een televisie-uitzending komt soms een monitor in de studio op het scherm waarop hetzelfde verkleinde beeld is te zien.

► *Wat hebben nu deze 'enzovoorts-problemen' met wiskunde te maken?*

Laten we, om deze vraag te beantwoorden enkele ervaringen met kinderen bespreken.

PROBLEMEN EN ERVARINGEN

1 Het servetje

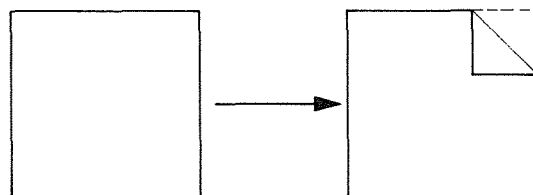
Aan Karin uit de eerste klas gaf ik een servetje.

'Hoeveel hoekpunten heeft het?'

'Vier', antwoorde ze.

'Kun je er vijf hoekpunten in vouwen?'

Ze vond deze oplossing:



'Kun je er ook zes hoekpunten in vouwen?'

'En zeven?'

Het was geen probleem meer voor haar – élk aantal hoekpunten is te bereiken (mits het servetje groot genoeg is!),

'want', zei ze, 'je wisselt steeds één hoekpunt in voor twee'.

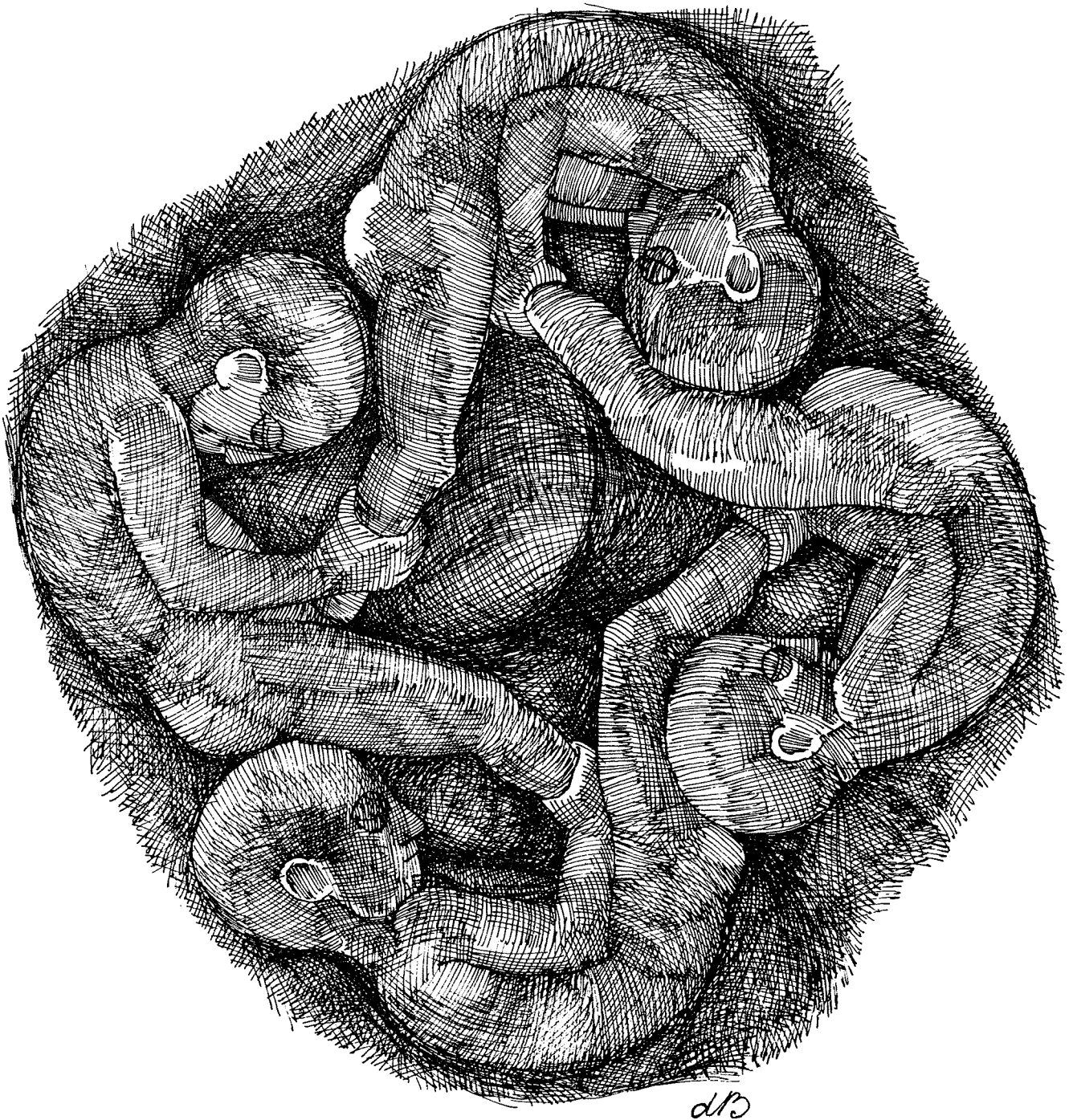
In dit voorbeeld wordt een 'bewerking' herhaald toegepast en tevens wordt die herhaling geformuleerd ('je wisselt steeds één hoekpunt in voor twee').

Zodra dit laatste is gedemonstreerd, behoeven de bewerkingen niet meer uitgevoerd te worden, omdat de leerling het probleem heeft 'gegeneraliseerd'.²)

In de wiskunde vormen de begrippen *iteratie* (herhaald toepassen van een bewerking) en *oneigenlijke limiet* (elk aantal hoekpunten kan worden bereikt) de equivalenties van wat door Karin werd ontdekt.

¹) Zie: Wiskobas-Bulletin 6 (2^e jaargang), pag. 974.

²) Zie: *Matematika*, pagina 183 (IOWO-Utrecht).



'de berbaalde geboorte'

2 De rij poppetjes



'Kun je het eerste poppetje wegpakken?'

Bart (4 jaar) pakte het eerste poppetje weg, maar liet het daar niet bij.

Tot verbazing van zijn vader pakte hij daarna één voor één alle poppetjes: het tweede, het derde, enz.

Als Bart het eerste poppetje heeft weggenomen, is namelijk het poppetje dat aanvankelijk tweede was in de rij, eerste geworden en moet dus ook weggenomen worden, enzovoorts!

Het verschijnsel, dat het tweede poppetje 'eerste kan worden', dat zijn plaats in de rij *variabel* is, is een noodzakelijke voorwaarde om tot herhaald toepassen van een bepaalde handeling (iteratie) te komen.

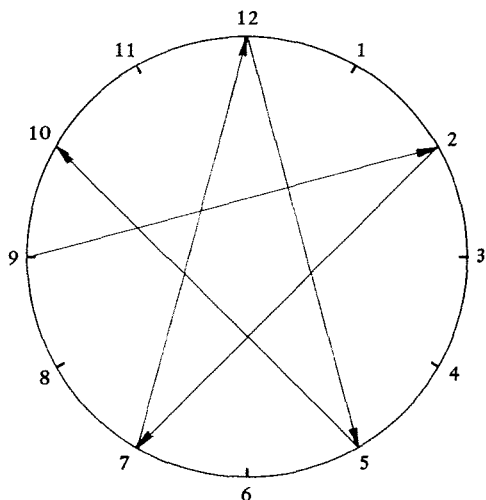
3 Vertrektijden

Kees (10 jaar) legden we het volgende probleem voor:

Een boot vertrekt om 9 uur en dan steeds 5 uur later – dag en nacht!

Zoek eens uit op welke uren er nooit een boot zal vertrekken.

Kees tekende de klok op deze manier:



en wilde de lijn niet verder trekken, omdat hij nu al wist, dat tenslotte op *elk* uur een boot zou vertrekken.

‘Ik kan van 9 uur naar 10 uur komen’, zei hij, ‘maar ik had ook om 10 uur kunnen beginnen en was dan in 11 uur gekomen. Ik kan dus in elk uur komen.’

Deze redenering berust op het inzicht, dat het te kiezen beginuur (‘...ik had ook om 10 uur kunnen beginnen...’) geen invloed heeft op de bewerking (het trekken van lijnen over de klok).

Op grond van die ‘uren-variabiliteit’ kan de bewerking herhaald (geïtereerd) worden vanaf elk beginuur. Op deze manier ontdekte Kees dat elk uur bereikt kon worden.

Variabiliteit, iteratie en volledige inductie¹⁾ zijn begrippen die gezien hun formele definitie in de wiskunde het meest met de paradigmatische ideeën van Kees overeenstemmen.

4 De toren van Hanoi

Aan dit ‘spel’²⁾ (leermiddel?) zijn verschillende *enzovoorts-problemen* te ontdekken.

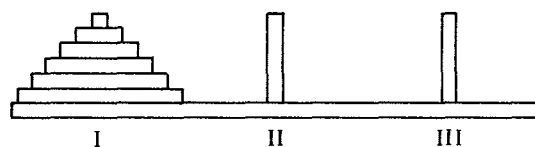
¹⁾ Zie: Inductie en iteratie – Prof. Duparc, pag. 9 (Groningen, 1968).

²⁾ In plaats van de plastic schijven, zoals op de afbeelding is te zien, kunt u ook munten van verschillende grootten gebruiken.



We zullen enige ervaringen, die we met een groepje kinderen hadden, bespreken en van commentaar voorzien.

Allereerst de *spelregels*:



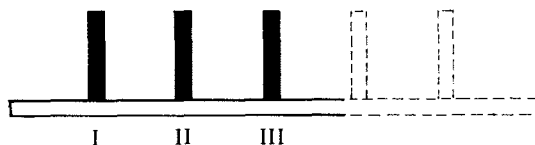
- de bedoeling is de toren te verplaatsen van staaf I naar II of III
- slechts één voor één mogen de (plastic) schijven worden verplaatst van de ene naar de andere staaf
- een schijf wordt *nooit* op een *kleinere* schijf gelegd!

Leerlingen vanaf de tweede klas hebben geen moeite om zich aan deze spelregels te houden. Ze zullen na enige tijd sterk door het materiaal gebiologeerd zijn.

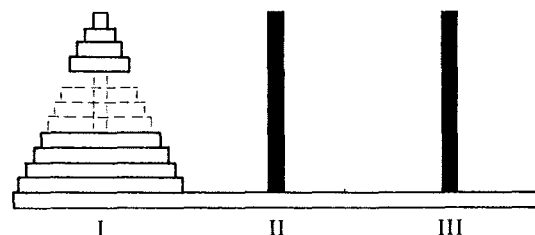
Kleuters en eerste klassers ‘zondigen’ vooral tegen regel c. Voor hen is het spel *zonder regel c* al moeilijk genoeg!

We kunnen nu op twee enzovoorts-problemen aansturen, namelijk

– ‘enzovoorts-problemen’ die ontstaan bij het vergroten van het aantal *staven* en

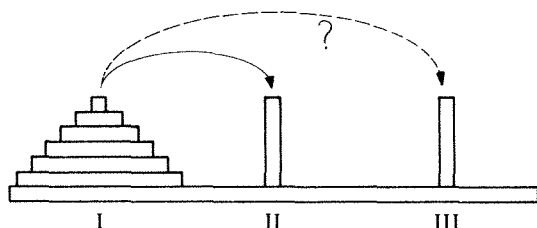


– ‘enzovoorts-problemen’ die ontstaan bij het vergroten van het aantal *schijven*.



* *Enzovoorts-problemen ten aanzien van de staven.*

Nadat de kinderen de toren van staaf I om staaf II hadden gebracht (met inachtneming van de spelregels) vroegen we of ze nu direkt wisten dat je de toren van staaf I naar III kon brengen.

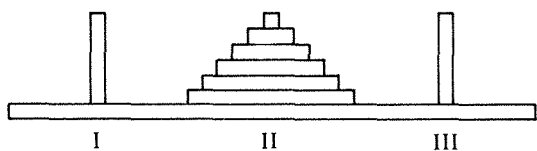


Wie verwacht zou hebben, dat staaf II en III in het spel als 'gelijkwaardig' zouden worden beschouwd, komt bedrogen uit.

De kinderen zijn zo bij het spel betrokken, dat ze entoesiast opnieuw beginnen te bouwen, en niet gaan redeneren.

Een mogelijke redenering zou zijn: je kunt de toren van staaf I naar II verplaatsen, dus ook van II naar III (je hebt slechts de staven andere 'namen' gegeven). Maar dan kun je van staaf I naar III (namelijk via staaf II). (Een andere redenering wordt in het volgende commentaar gegeven.)

Om nu de 'variabiliteit' van de staven te beklemtonen, plaatsten we de toren om de middelste staaf (II),

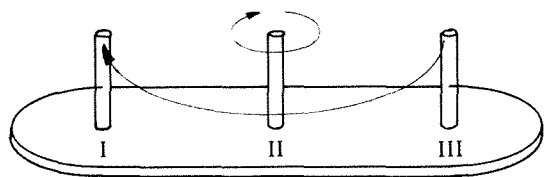


en vroegen:

'Zou je de toren van staaf II naar staaf I kunnen brengen?'

Dit moet mogelijk zijn: 'Je bent van I naar II gegaan, dus moet je ook terug kunnen', redeneerden de kinderen.

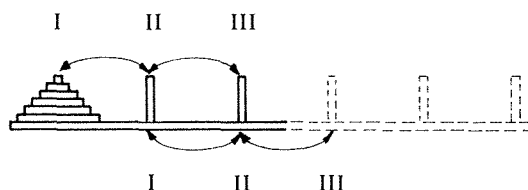
'Maar zou je dan ook de toren van II naar III kunnen verplaatsen?'



Plotseling draaide Ada (6e klas basisschool) het geheel een halve slag om, zodat de plaats van staaf I door III werd ingenomen en de plaats van III door staaf I en zei toen, dat je nu direkt kon zien dat de toren van staaf II naar III te verplaatsen was, omdat je hem ook van II naar I kon verplaatsen.

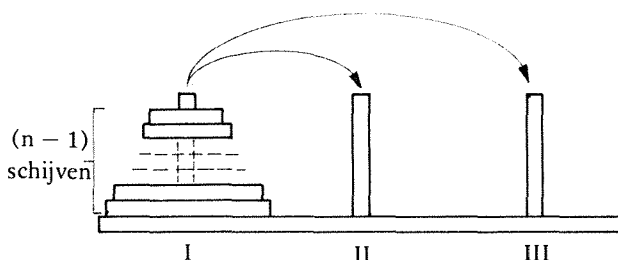
Opmerkelijk is dat het symmetrisch aspect zowel in de *redenering* ('je bent van I naar II gegaan, dus moet je ook terug kunnen') als in de *meetkundige opstelling* van de toren (namelijk in het midden) een belangrijke bijdrage leverde tot het idee dat de staven 'variabel' zijn (d.i.: gelijkwaardig met betrekking tot het bouwen).

Het was voor de kinderen daarna geen probleem meer, dat elke staaf vanuit elke andere staaf bereikt kon worden en dat dit ook gold als je het aantal staven zou uitbreiden: je kon immers élk drietal staven weer I, II en III noemen!



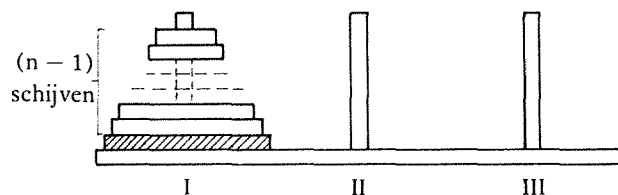
* *Enzovoorts-problemen die ontstaan bij het vergroten van het aantal schijven,*
vormden een tweede categorie vraagstukken ('Zou je een toren van zes schijven van staaf I naar staaf II kunnen verplaatsen?').

We hadden hierbij de volgende redenering op het oog:

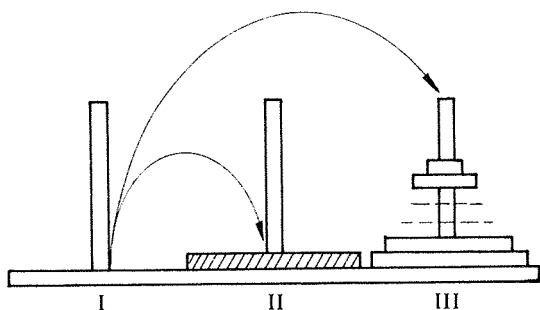


stél dat we een toren van $n - 1$ schijven kunnen verplaatsen ($n = 2, 3, \dots$) (voor de 'toren' van één schijf geldt dit zeker), kunnen we dan bewijzen dat we een toren van n schijven kunnen verplaatsen? Wel, schuif onder de toren van $(n - 1)$ schijven een grote schijf (gearceerd in de tekening).

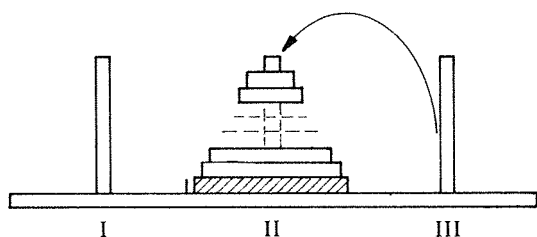
We hebben dan een toren van n schijven.



Verplaats de toren van $(n - 1)$ schijven naar staaf III (dat kàn!) en leg de vrij gekomen gearceerde schijf om II.



Daarna bouwen we de toren van $(n - 1)$ schijven boven op de gearceerde schijf om staaf II.



Bekijken we nu het resultaat, dan is, omdat de toren van $(n - 1)$ schijven verplaatsbaar is, ook de toren van n schijven verplaatsbaar. Maar dan is *elke* toren van een eindig aantal schijven verplaatsbaar. Dit is het principe van de volledige inductie.

Er zijn minstens twee voorwaarden nodig om aan de Toren van Hanoi dit principe te ontdekken.

– Ten eerste moeten de kinderen inzien dat de staven I, II en III *gelijkwaardig* zijn ten aanzien van de bewerking die de toren ondergaat, *ofwel* dat ze hebben ontdekt dat je vanuit elke staaf uiteindelijk naar elke (andere) staaf kunt komen: van I naar II, van II naar III, dus van I naar III.

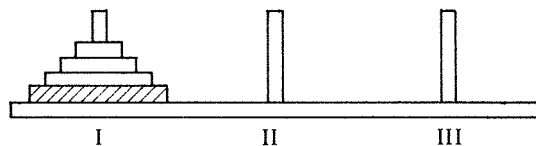
(We merken hierbij op, dat dit twee aparte benaderingen kunnen zijn die leiden naar het begrip variabiliteit).

– De tweede voorwaarde tot de beoogde volledige inductie is, dat de kinderen de toren van $(n - 1)$ schijven als *één* geheel zien.

Voor de basisschoolleerling is deze laatste voorwaarde vrijwel niet te bereiken! Steeds weer gaan de kinderen de *bele* toren afbreken en trachten, in de ban van de drie spelregels, de toren om een andere staaf op te bouwen.

Ook bij het geleidelijk opbouwen van de toren (eerst een toren van 2 schijven verplaatsen, dan van 3 schijven, enz.) is het moeilijk de kinderen tegen spelregel b ('slechts één voor één mogen de schijven worden verplaatst') te

laten zondigen.



'Hier is een toren van 4 schijven. We hebben al gezien dat een toren van 3 schijven te verplaatsen is; we kunnen dus het torentje, bestaande uit de bovenste drie schijven alvast verplaatsen – dat is makkelijker.'

Dergelijke aanwijzingen worden niet serieus genomen.

We kunnen hier slechts konkluderen, dat de iteratie die door de drie spelregels wordt bepaald, het principe van de volledige inductie verduistert.

KONKLUSIES

Voorlopige konklusies:

- * De iteratie (de herhaling van een bepaalde bewerking) staat wellicht door zijn spelkarakter 'dichterbij' de kinderen dan het meer formele begrip volledige inductie.
- * De formulering van de iteratie is een voorwaarde om tot generalisatie te komen.
- * Als men dat wil kan men voor vele begrippen uit de kinderlijke wereld equivalente konsepties aanwijzen uit wiskundige theorieën (denk bijvoorbeeld aan 'oneigenlijke limiet').
- * Belangrijker is echter de sterke analogie tussen verschillende 'kinderlijke' redeneringen, die tot een oplossing van een probleem leiden en verschillende wiskundige denkwijzen (we wijzen op de twee verschillende manieren om het begrip 'variabiliteit van de staven' te introduceren).
- * Het symmetrisch aspect in zowel logische, als geometrische zin schijnt door de kinderen vroeg te worden beheerst. We kunnen dit aspect als belangrijk didactisch hulpmiddel gebruiken bij ons onderwijs.
- * Soms bemoeilijkt het materiaal het tot stand komen van een begrip (volledige inductie op de Toren van Hanoi).

onderwijs televisie en wiskunde onderwijs

TEL VOOR TWEE

Een onderwijsleerpakket wiskunde voor klas 2 van de basisschool, samengesteld uit:

- 4 televisielessen
- 2 informatieprogramma's
- 40 werkbladen
- een onderwijzersboek
- 4 posters.

PIET SCHOLTEN

Opbouw

Het project *TEL VOOR TWEE* is opgebouwd uit 4 blokken, verdeeld over 8 weken (half februari – half april 1974).

Blok 1 (week 1–2):
activiteiten voorafgaande aan televisieles 1, televisieles 1, werkbladen 1–10.

Blok 2 (week 3–4):
televisieles 2, werkbladen 11–20.

Blok 3 (week 5–6):
activiteiten voorafgaande aan televisieles 3, televisieles 3, werkbladen 21–30.

Blok 4 (week 7–8):
televisieles 4; werkbladen 31–40.

Korte karakteristiek van de onderdelen van het onderwijsleerpakket

► *Televisieles*

- op speelse wijze, met behulp van beelden uit de werkelijkheid en de belevingswereld van 7–8 jarigen en met gebruikmaking van animaties, aansluiting zoeken bij de activiteiten in de klas,
- het zichtbaar maken van de relatie die er bestaat tussen de werkzaamheden in de klas en bepaalde aspecten van het leven van alle dag,
- motiveren tot en stimuleren van de activiteiten die volgen op de televisieles,
- duur 15–20 minuten,
- aantal: 4.

► *Informatieprogramma*

- achtergrondinformatie over het project: stofkeuze, samenhang en doelstellingen,
- relatie tussen rekenen en wiskunde,
- preview gedeelten televisieles,
- activiteiten in de klas,
- doelmatig gebruik van de werkbladen,
- gebruik van leer- en hulpmiddelen,
- duur: 30 minuten,
- aantal: 2,
- tijdstip: zendtijd is aangevraagd voor uitzending om 16.15 uur, zodat schoolteams, die dat wensen, in hun geheel kunnen kijken.

► *Werkbladen*

- bedoeld voor gebruik na de televisieles; niet noodzakelijk in de twee weken na de televisieles, ook later in het schooljaar mogelijk, afhankelijk van eigen werkplan,
- afwisseling in werkvormen mogelijk: klassikale, groeps- of individuele verwerking,
- mede aksenten op het taalaspect,

– stimuleren van een ontdekkende werkwijze.

► *Onderwijzersboek*

- wiskunde op de basisschool, wat bedoelt men daarmee?
- kort overzicht van de inhoud van de televisielessen,
- lesvoorbeelden en suggesties voor activiteiten voorafgaand aan de televisielessen 1 en 3,
- aanwijzingen bij elk werkblad,
- suggesties voor verdere verlevendiging van het rekenonderwijs,
- materialen, leermiddelen, literatuur.

► *Posters*

- om onderdelen van de televisieles in de herinnering te kunnen terugroepen op het moment dat dit past in het eigen werkplan,
- mogelijk uitgangspunt voor een klasse- of leergesprek en andere activiteiten.

Inhoud

Blok 1:

getallen in allerlei alledaagse situaties, beklemtoning van het tel- en aantalaspect, ordenen, de getallenlijn.

Blok 2:

getalmachientjes, de schrijfwijze van onze getallen, eenvoudig te maken leermiddelen, tabellen met dubbele ingang.

Blok 3:

vergelijken en ordenen van tijdduren, de getallenlijn als tijdlijn, de klok, de kalender.

Blok 4:

de supermarkt, rekenen met geld, getalpatronen.

Toelichting

Het project *TEL VOOR TWEE* sluit nauw aan bij het bestaande rekenprogramma van klas 2 en kan gebruikt worden naast elke methode.

De bedoeling is zeker niet in de eerste plaats het introduceren van nieuwe leerstof, wel *het geven van een aantal impulsen die kunnen leiden tot verlevendiging van het rekenonderwijs*.

Kenmerkend voor wiskunde-onderwijs is onder andere het activiteitskarakter ervan. Wiskunde betekent actief, ontdekkend bezig zijn. En dat willen we graag met behulp van dit project stimuleren. Niet alleen in de periode

van aanbidding half februari-half april; we hopen op doorwerking in andere perioden.

In het traditionele rekenonderwijs werd (wordt) veel aandacht besteed aan akkuratesses en snelheid bij het rekenen. Het huidige rekenonderwijs omvat echter veel meer dan het werken met getallen. Meer nadruk wordt gelegd op inzicht in de structuren van de wiskundige werkelijkheid. Vandaar ook de voorkeur voor de naam *wiskunde* boven rekenen.

Behalve het reeds genoemde *activiteitskarakter* is onder meer kenmerkend voor dit wiskunde-onderwijs:

* *de toepasbaarheid*

wiskunde als middel om vat te krijgen op de ons omringende werkelijkheid;

* *het taalaspect*

wiskunde als middel om de omringende wereld te beschrijven;

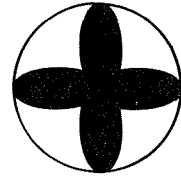
* *gevarieerde leersituaties*

om de wiskundige essentie van een abstracte bewerking te kunnen inzien; nodig hierbij is het gebruik van gevarieerd materiaal; veel van dergelijke materialen zijn met eenvoudige middelen en weinig kosten zelf te maken; suggesties hiervoor worden opgenomen in het onderwijzersboek.

Voorbeeld van een werkblad

Op pagina 31 ziet u een voorbeeld van een werkblad uit de serie *TEL VOOR TWEE*, zoals gebruikt bij het uitproberen op zes basisscholen.

knikkers • bammen • supers



Houden jullie ook van knikkeren? Nou, wij wel hoor
 We doen dat met gewone knikkers en ook wel met grote knikkers
 Die grote knikkers noemen we bammen.
 En heel grote knikkers noemen we supers.
 Een bamm is bij ons evenveel waard als 5 knikkers.
 En een super is evenveel waard als 10 knikkers.
 Ik stop nu met schrijven, want mijn vriendjes komen me halen
 We gaan knikkeren.

Dag, groetjes van Mark.

A

3 bammen	=	<input type="text"/>	knikkers
4 supers	=	<input type="text"/>	knikkers
25 knikkers	=	<input type="text"/>	bammen
20 knikkers	=	<input type="text"/>	supers
4 supers	=	<input type="text"/>	bammen
6 bammen	=	<input type="text"/>	supers

B

1 super	=	<input type="text"/>	bammen	=	<input type="text"/>	knikkers
<input type="text"/> supers	=	4	bammen	=	<input type="text"/>	knikkers
<input type="text"/> supers	=	<input type="text"/>	bammen	=	50	knikkers
<input type="text"/> supers	=	6	bammen	=	<input type="text"/>	knikkers
10 supers	=	<input type="text"/>	bammen	=	<input type="text"/>	knikkers
<input type="text"/> supers	=	<input type="text"/>	bammen	=	60	knikkers

C

	supers	bammen	knikkers
Mark	4	2	11
Gerard	1	1	13
Ronald	4	10	16
Jaap	5	6	3

<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>

wies wiedes

HANS TER HEEGE

Er is uitverkoop! Aan de winkelramen hangen grote papieren.
Er staat op

ALLES MOET WEG!!!!

en

Spotprijzen

Wies fietst door de winkelstraat.
Ze denkt: 'Heb ik wat nodig? Nee, eigenlijk niet. Ik heb handdoeken genoeg en Wim heeft pas nog een nieuw overhemd en een paar sokken gekregen.'

Toch wil Wies maar wat graag iets kopen in de uitverkoop!



En zo zien we Wies 's middags in De Winkel van Sinkel. Ze heeft een tientje uit haar spaarpot gehaald en die wil ze uitgeven. Wies dringt en duwt om maar alles te kunnen zien.

'Mooie sokken, rode, witte en zwarte', staat er op een bord geschilderd.

Daar gaat Wies op af. Er staan veel vrouwen om een grote ton. In de ton zitten de sokken. De vrouwen graaien in de sokken. Soms kijken ze elkaar boos aan en zeggen: 'Blijf toch af, die is van mij.'

Wies probeert bij de ton met sokken te komen. Dat lukt haar niet.

Wacht eens. Ze kan tussen twee dikke vrouwen door net haar hand in de ton steken. Ze trekt en trekt. Dan schiet het los. Ze heeft een witte sok te pakken.

En nu jullie:

Hoeveel keer moet Wies in de ton graaien om er zeker van te zijn dat ze één paar (bij elkaar passende) sokken heeft? ¹⁾



3 EEN PARTIJTJE PING PONG



Twee tafeltennisclubs gaan een wedstrijd spelen. De organisatoren hebben problemen vooraf.

Elke club bestaat uit drie spelers. Iedere speler van club I moet een partijtje spelen tegen iedere speler van club II. Geëist wordt – en terecht! – dat een speler nooit twee wedstrijden achtereen speelt. En er is slechts één tafel.

Er wordt een wedstrijdrooster opgesteld:

	klub II:		
	X Y Z		
klub I:	A	1	
	B		2
	C		3

A, B en C zijn spelers van club I en X, Y en Z van club II. De cijfers geven het nummer van de wedstrijd aan. Dus de 1^e wedstrijd gaat tussen A en X, enz. Het rooster verder afmaken, kost u niet zoveel moeite.

Ons probleem zit in de volgende drie tabellen, die gedeeltelijk voor u ingevuld zijn:

	X Y Z			
A	9			tabel 1
B	1			
C	4		6	

	X Y Z			
A	3	5		tabel 2
B		7		
C		9	6	

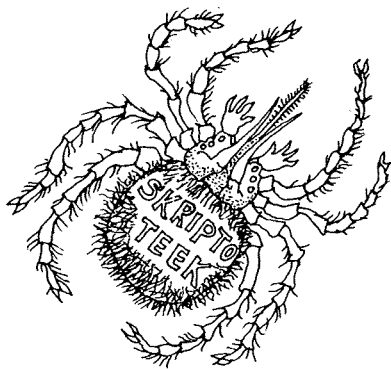
	X Y Z			
A	1			tabel 3
B	4	9	2	
C			5	

De vraag is nu: welke van deze tabellen kan tot een fatsoenlijk wedstrijdrooster verder ingevuld worden?

Fatsoenlijk, dat wil zeggen: een speler speelt nooit twee wedstrijden achtereen. En vergeet niet dit probleem aan uw 5^e of 6^e klassers voor te leggen.

Terwijl uw leerlingen dan aan het werk zijn, kunt u ondertussen bepalen hoeveel verschillende roosters de organisatoren eigenlijk wel kunnen bedenken.

skriptoteek



HUUB JANSEN

'*Verlevendiging van de metriek*' is de titel van een omvangrijke (103 pagina's) skriptie, vorig cursusjaar geproduceerd door Jan Huitema en Nard Verbey, twee studenten van de R.K. pedagogische akademie te Hilversum. Deze studenten hebben in hun specialisatiejaar een traditionele rekenmethode, te weten '*Naar Zelfstandig Rekenen*' tot onderwerp van een uitvoerige analyse gemaakt, waarbij het aksent gelegd werd op de leerstof die met meten en metriek in verband staat.

Tevens werd, vanuit een theoretische beschouwing, de noodzaak verduidelijkt om tot verandering en verlevendiging van het rekenonderwijs in het algemeen en de metriek in het bijzonder te komen. Vervolgens werden lessen en lesmaterialen ontworpen en in de praktijk getoetst.

Doel hierbij was vooral om te onderzoeken welke mogelijkheden een onderwijzer heeft om, werkend met een traditionele methode, zijn onderwijs te verlevendigen.

De skriptie bevat tot slot een aantal evaluatief bedoelde opmerkingen over de verrichte theoretische studie en de werkzaamheden in de praktijk.

Aldus in vogelvlucht de opzet van een werkstuk, waarvan vooral de doordenking van zowel theoretische en praktische problemen uit het rekenonderwijs te waarderen valt.

In het korte bestek van onze bespreking willen we een aantal *opmerkingen en konklusies van de makers* vermelden.

De auteurs wijzen erop dat in de door hen geanalyseerde methode wel een grote hoeveelheid leerstof, in de vorm van sommen en problemen, wordt aangeboden en ook dat er in de handleiding wel enkele algemeen-didaktische aanwijzingen en vage doelomschrijvingen zijn vermeld, maar dat specifieke en concrete richtlijnen betreffende het gebruik van leer- en hulpmiddelen, planning en organisatie van het onderwijs ontbreken.

De gedachte wordt uitgesproken dat dit in de onderwijspraktijk tot gevolg heeft dat de onderwijzer 'terugvalt op de boekjes, zonder meer'.

Een van de konklusies van het onderzoek is ook dat de gepresenteerde leerstof 'niet parallel (is) opgebouwd met het verloop van de denkontwikkeling bij kinderen' en dat geen rekening wordt gehouden met de wijze, waarop het leerproces bij kinderen verloopt.

Aangegeven wordt in hoeverre de rol van de onderwijzer in een gemoderniseerd wiskundeonderwijs verandert:

'Hij moet rekenboeksommetjes kunnen omzetten in experimenten..... Hij moet situaties kunnen creëren die problemen oproepen.'

'Hij moet kunnen vaststellen, welke vorderingen zijn gemaakt en in hoeverre de gedane experimenten van belang zijn geweest voor de wiskundige vorming.'

In hun skriptie gaan de schrijvers uitvoerig in op de speel- en experimenteerdrift van kinderen, die juist bij een onderwerp als meten van groot belang is.

Ook aan materiaalgebruik, groepswork, gebruik van opdrachtkaarten, het wiskunde-werklokaal wordt aandacht besteed.

Wat de opbouw van zinvolle leerstof aangaat, wordt gebruik gemaakt van het oriënterend schoolwerkplan van Jan Nieland en diens werkkaartenserie 'Klaar? Ga maar spelen!' en van de *Wiskobasblokken* over meten (P.A.-blok en heroriënteringsblokken).

Uiteraard zijn er *kritische opmerkingen* bij deze skriptie te plaatsen. Bij de analyse van de rekenmethode wordt nogal kritiekloos een beoordelingsmodel van Langermans gehanteerd, terwijl een matematicisch-didactische door-denkning binnen het leerstofgebied 'Meten' ontbreekt.

Toch menen wij dat dit werkstuk een aantal belangrijke aspecten bevat, die aantonen dat — en we citeren voor het laatst de auteurs —

'dit jaar specialisatie rekenen voor ons, als toekomstige onderwijzers, bijzonder waardevol is geweest.'

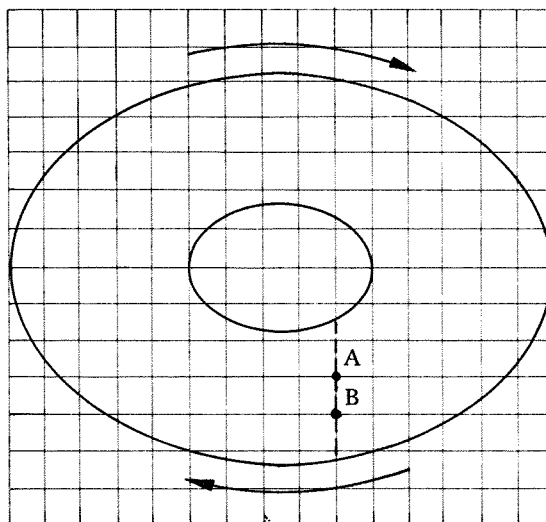
Wij besluiten met een *verzoek aan kollega's*. Uit amsterdam, hilversum, utrecht en middelburg ontvingen we een aantal skripties, die in deze rubriek besproken kunnen worden. In de rest van ons landje zijn nog tientallen pedagogische akademies te vinden, waar ook skripties, eventueel waard om er aandacht aan te schenken, geproduceerd zijn.

4 LANGE AFSTAND LOPEN VOOR LUIE LIEDEN



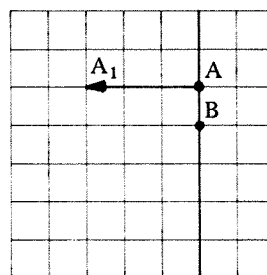
Een wedstrijd voor jong en oud. En u wordt er niet moe van, al moet het koppie-koppie er bij blijven.

We tekenen met vlotte hand een sintelbaan inclusief startstreep op een vel ruitjespapier.



Spelers A en B staan op de startlijn opgesteld en gaan rechtsom lopen (linksom mag ook). Wie als eerste rond is, heeft gewonnen.

A en B leggen om beurten een afstand af. Voor de verdere regels moet u goed opletten. A begint met een horizontale zet van A naar A₁ :



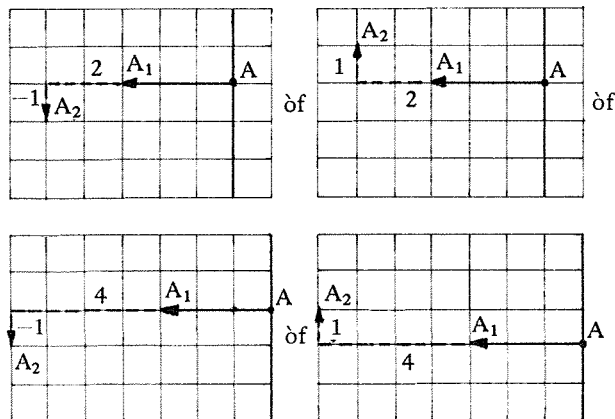
Deze zet van A is een trek van 3 afstandjes horizontaal en 0 vertikaal. (0 vertikaal als beginzet is verplicht, de horizontale beginzet mag vrij gekozen worden.)

Als B op overeenkomstige wijze gestart is, volgt de tweede zet van A. De eis is nu dat A een horizontale beweging maakt die 1 meer of minder is dan de vorige horizontale beweging en ook een vertikale beweging, die 1 meer of minder is.

Als tweede zet van A in ons voorbeeld komt nu in aanmerking:

Stuur ons een kopie, we zijn er blij mee!

wiskunde voor het lager beroeps onderwijs

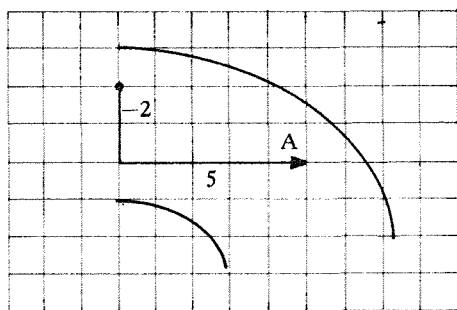


Welke zet A doet, moet hij zelf weten, MAAR hij mag nooit de binnen- of buitenrand aanraken of overschrijden.

Bovendien mag nooit een zet eindigen op een plaats waar de tegenstander reeds staat.

De aardigheid is nu dat een speler klem kan komen te staan. In dat geval moet hij drie beurten overslaan en daarna met een willekeurige horizontale beweging verder gaan.

Een voorbeeld:



De volgende zet van A moet nu gekozen worden uit:

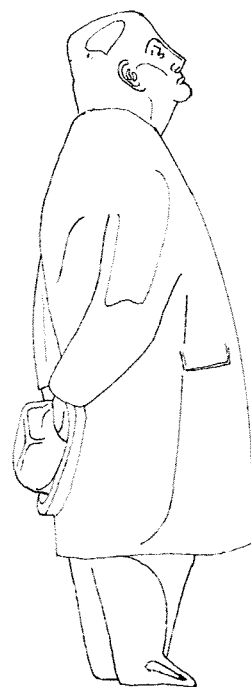
6 horizontaal, -3 vertikaal,

genoteerd als: $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, òf uit: $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

In al deze gevallen overschrijdt A de rand en dat is verboden. A slaat nu drie beurten over en B kan een fraaie voorsprong nemen.

Proberen! En denk om de regel: de volgende zet is altijd horizontaal en vertikaal 1 meer of minder.

Een ideaal spel zoals u ziet: sportiviteit, strategie, coördinaten, optellen, aftrekken, negatieve getallen en zelfs vektoren!



U kent deze beer nog niet?

Het is de 'maskotte' van de afdeling lager- en middelbaar beroepsonderwijs (l/mbo) van het IOWO.

Dit 'lbo-mannetje' zal uw gids zijn bij publikaties die u (in dit nummer van het wiskobas-bulletin voor het eerst) op de hoogte gaan houden van ontwikkelingen binnen het wiskunde-onderwijs voor het lbo.

CRIT LEENDERS

Voor deze categorie van vervolgonderwijs is bij het opstellen van leerplannen vaak een procedure gevolgd waarbij men, uitgaande van het leerplan wiskunde voor het algemeen voortgezet onderwijs door aanpassing het leerplan lbo afleidt. Daarnaast kent men de procedure van het 'verrijkte' rekenprogramma. Tussen de resultaten van beide procedures ligt een ruime kloof. Voegen we daarbij de nieuwe situatie van het vierjarig worden van het lbo met de uitbreiding van de (algemeen vormende) brugperiode tot twee jaar, dan zult u ongetwijfeld met ons eens zijn dat een hernieuwde doordenking van het wiskunde-onderwijs geboden is.

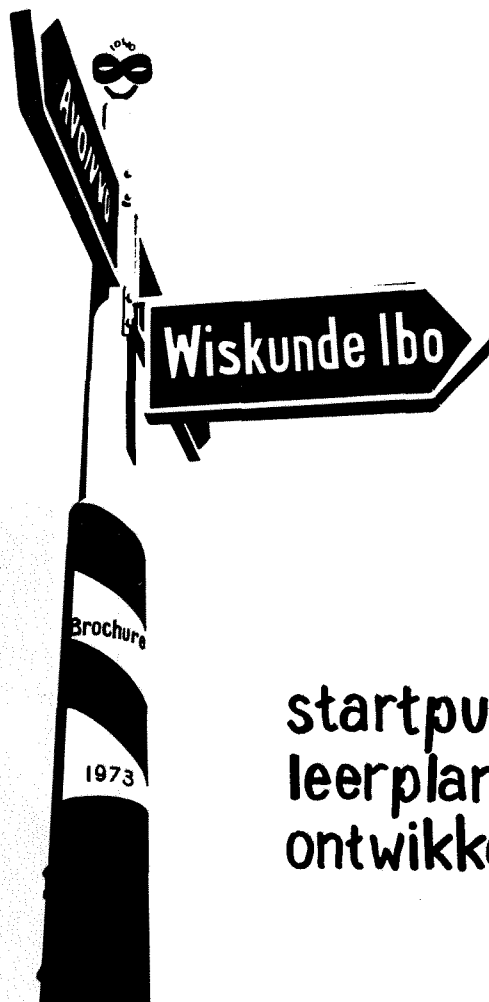
De ontwikkelingen binnen het basisonderwijs die door wiskobas worden geïnitieerd, zullen zeker ook bij de overgang naar het vervolgonderwijs de nodige problemen opleveren.

Door de medewerkers van de afdeling l/mbo is deze doordenking met hulp van alle andere IOWorkers op gang gebracht. Een neerslag hiervan is vastgelegd in de Brochure 1973: *wiskunde lbo, startpunt voor leerplanontwikkeling*.

Naast een aantal onderwijskundig/didactische uitgangspunten die o.a. voortbouwen op wiskobasideeën over wiskunde-onderwijs, bevat deze brochure een vrij uitgebreide inventarisatie van leerstofeenheden, die behalve de omschrijving van een stukje leerstof ook de hierop betrekking hebbende afdrukken uit binnen- en buitenlandse methoden bevat.

De brochure is aangeboden aan mede-ontwikkelaars die plannen hebben om vernieuwd wiskunde-onderwijs in het lbo te realiseren. Reeds een royaal aantal betrokkenen bij (lbo) wiskunde-onderwijs hebben de brochure besteld.

Via deze rubriek hoopt de groep die bezig is met de verdere leerplanontwikkeling ten behoeve van het lbo en mogelijk van hieruit *algemeen voor de leeftijdskategorie 12-16 jaar*, aan de lezers van het wiskobas-bulletin een verder inzicht in de inhoud van de brochure te geven, een overzicht te geven van de reacties die de brochure oproept en verslag te doen van ervaringen die bij de verdere uitwerking worden gedaan.

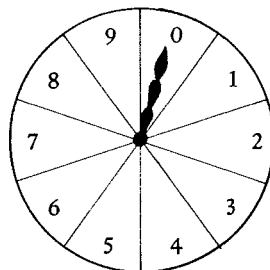


kleuters en wiskunde

SPELEN MET CIJFERS

JES MELIS
HENNEKE DE LORME-BAKKER

Op een ronde ijsdoos plakten we een grote cirkel (rond vouwblaadje) met de hieronder aangegeven cijferindeling:



In het midden werd slechts één wijzer opgeprikt. De kleuters meenden eerst dat het een klok was, maar na even de doos bekeken te hebben, wisten ze toch al gauw de verschillen op te noemen.

‘Maar één wijzer.’

‘Minder cijfers.’

‘Er staat ook nog een 0 bij.’

Eerst mochten de kleuters de wijzer draaien en de cijfers opnoemen.

Daarna werd een cijfer gedraaid (bijvoorbeeld 6).

Dit moest goed onthouden worden.

Opnieuw werd gedraaid, maar nu met de ogen dicht. Het werd 4.

Is 4 meer of minder dan 6?

Hoeveel cijfers staan er tussen 4 en 6?

Hoeveel moet je erbij doen om van 4 naar 6 te komen?

En als je van 6 naar 4 wilt, hoeveel moet er dan weggenomen worden?

Herhalen met andere cijfers. De stand kan ook gelijk zijn.

Heel wat begrippen kunnen dus met dit eenvoudige spel de revu passeren.

De kleuters noemden het een *sommetjesspel*.

Tot slot mocht ieder voor zich in 't klein zo'n spel maken van een boterkuipje, waarna het spel spontaan in groepjes werd gespeeld.



BASJE

een jonge onder- zoeker

KAARTJES LEGGEN
EN 'T AANTAL ZEGGEN

DIK OORT

Als vader binnenkomt legt Basje met losse kaarten figuren.

Vader: Zó, ben je weer eens vierkanten aan 't maken?

Basje : Ja, ik heb honderd kaartjes. Ik kan er alle kwadraten tot en met 100 mee leggen.

Vader: Maar je kunt er ook andere figuren mee maken.

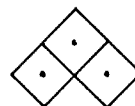
Basje : Welke dan?

Vader: Nou, bijvoorbeeld driehoeken.

Basje : Hoe gaat dat dan?

Vader: Ik zal je een voorbeeld geven.

Vader legt:



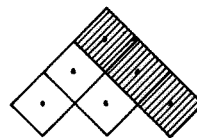
Basje : Is dat dan een driehoek?

Vader: Als je op de stippen let wèl.

Basje : En als ik nu verder ga?

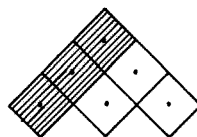
Vader: Dan moet je er drie bijleggen.

Basje : O ik zie het al, je kunt ze er rechtsboven naast leggen:

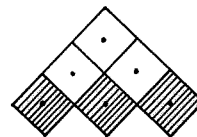


Vader: òf?

Basje : Ik kan ze er ook linksboven naast leggen:



of eronder:



In elk geval krijg ik er 6.

Vader: Juist, dus eerst had je 't driehoeksgetal 3 en daarna?

Basje : 6 en de volgende is 10 want nu moeten er 4 bij.

Vader: En de daaropvolgende?

Basje : Die is 15, want dan komen er nog 5 bij.

Dat is leuk, het is dus:

$$3 + 3 = 6$$

$$3 + 3 + 4 = 10$$

$$3 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

Vader: Misschien kan het nog mooier opgeschreven worden.

Basje : Ik zou niet weten hoe?

Vader: Breek de driehoek maar weer af.

Basje : Dan krijg ik er weer 10.

Vader: En dan?

Basje : Dan 6 en daarna 3.

Vader: Kan 't nog verder?

Basje : Ja, dan moet ik er twee afhalen; maar dan houd ik er één over.

Vader: Nou, èn?

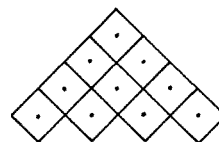
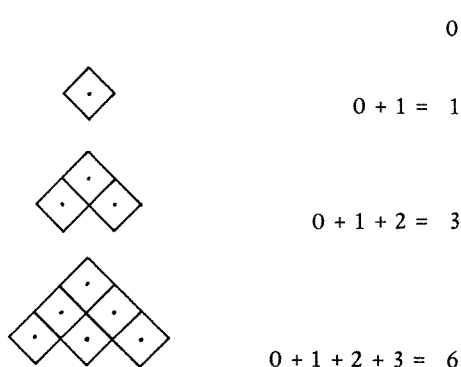
Basje : Dat is toch geen driehoek meer?

Vader: Van mij mag je zeggen dat dit de kleinste driehoek is.

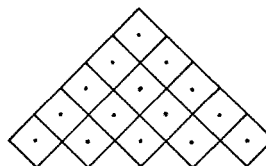
Basje : Als dat mag, durf ik de laatste ook nog wel weg te halen; en dan heb ik als kleinste driehoek een driehoek van 0 kaartjes.

Vader: Afgesproken! Wel, we gaan 't nu weer opbouwen en noteren daarbij wat we doen.

Basje legt de volgende figuren en schrijft de berekening ernaast:



$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

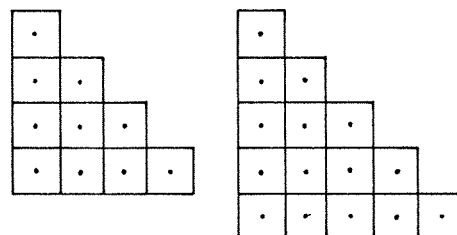
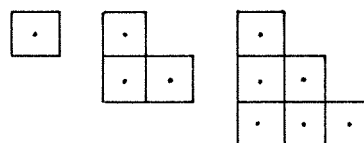


$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

Basje : En zo kan 't steeds doorgaan.
Ik had de kaartjes ook anders kunnen leggen.

Vader: Hoe dan?

Basje legt achtereenvolgens:



Vader: Is dat veel anders?

Basje : Ik heb ze wel iets anders opgebouwd, maar 't zijn dezelfde figuren als de eerste keer.

Vader: Juist, en kun je me nu zeggen hoeveel kaartjes je hebt als de onderste rij uit 10 kaartjes bestaat?

Basje : Dat moet ik even uitrekenen:
 $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 10.$
Dat is 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45...
Samen is dat 55.

Vader: Mooi, 't is maar goed dat ik niet gevraagd heb hoeveel kaartjes er liggen als de onderste rij er 20 heeft.

Basje : Dan had ik nog even doorgeteld.

Vader: Maar 't kan veel handiger.

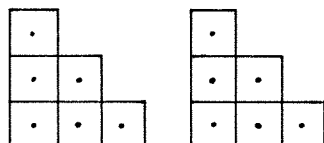
Basje : Hoe dan?

Vader: Leg eens twee keer 't driehoeksgetal 6. De onderste rij heeft dan hoeveel kaartjes?

Basje : Drie.

Vader: Goed zo, leg ze maar neer.

Basje legt:



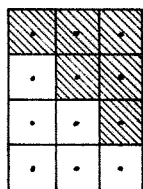
Basje : En wat nu?

Vader: Die moet je op een mooie manier tegen elkaar schuiven.

Basje : Wat bedoelt u met mooi?

Vader: Je hebt gelijk, ik moet duidelijker zijn. Kun je ze zó tegen elkaar schuiven dat 't een rechthoek wordt?

Na enig proberen krijgt Bas de volgende figuur:



Basje : Dat past mooi.

Vader: En hoeveel kaartjes heb je nu?

Basje : Ik zie 't. De onderste rij van de driehoek bestond uit 3 kaartjes. De korte kant van de rechthoek heeft 3 kaartjes, de lange 1 meer. Er zijn dus $3 \times 4 = 12$ kaartjes.

Vader: En wat is het aantal kaartjes van één driehoek, dat je hebt gebruikt?

Basje : $\frac{3 \times 4}{2} = 6$, dus 6 kaartjes, maar dat wisten we al.

Vader: En als ik nu vraag: uit hoeveel kaartjes bestaat de driehoek met als onderste rij 10 kaartjes?

Basje : Ha, ik snap 't! Dan neem ik in gedachten twee van die driehoeken, leg ze tegen elkaar en dan krijg ik een rechthoek met 10×11 , dus met 110

kaartjes. Dat moet ik dan nog door 2 delen. Dus elke driehoek heeft 55 kaartjes. Nu kunt u me elke driehoek laten uitrekenen.

Vader: Goed: een driehoek met als onderste rij 12.

Basje : Dan moet ik eigenlijk uitrekenen:
 $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$.

Vader: Juist, ga je dat nu achtereenvolgens allemaal optellen?

Basje : Ik kijk wel uit; ik neem 12×13 , dat is — even kijken — 12×12 is 144; 12×13 is dus 156. En dat deel ik door 2. De uitkomst is 78.

Vader: Goed zo!

Basje : En nu een heel moeilijke?

Vader: Die kan ik niet meer bedenken.

Basje : Probeer 't eens?

Vader: Nou vooruit: het driehoeksgetal waarvan de laatste rij van de driehoek 100 kaartjes bevat.

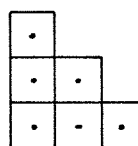
Basje : Dat is dus $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ en zo steeds doorgaan tot en met ... + 100. Makkelijk hoor! Dat is 100×101 en dat gedeeld door 2. Dat is 50×101 ; dus 5050.

Vader: Mooi zo!

Basje : Weet u nog meer mooie figuren?

Vader: Er zijn er nog veel meer maar daarover een volgende keer. Nu nog een kleinigheidje. Leg eens het driehoeksgetal 6.

Basje legt:



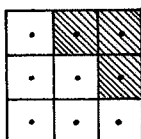
Vader: Je hebt gezien dat als je dezelfde figuur nog een keer legt, je van beide figuren een rechthoek kunt maken.

Basje : Ja, waarvan de lange kant één vierkantje meer bevat dan de korte.

Vader: Precies, maar wat kun je er nou bijleggen zodat je een vierkant krijgt?

Basje : Ik zie 't, dan moet je de driehoek met drie kaartjes er bij leggen.

Bas legt:

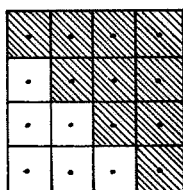


Vader: Ik weet niet of dat moèt, 't kan in elk geval wel.

Basje : Ja, en 't klopt: $6 + 3 = 9$ en dat is een kwadraat.

Vader: Probeer bij die eerste driehoek met 6 kaartjes ook nog eens een andere driehoek te voegen zodat je een vierkant krijgt?

Na enig proberen krijgt Bas de volgende figuur:



Basje : Ik heb 't door; je krijgt een kwadraat als je bij een driehoeksgetal 't vorige of 't volgende driehoeksgetal optelt.

Vader: Kun je dat korter zeggen?

Basje : (*na enig proberen en met steun van vader*)

De som van twee op elkaar volgende driehoeksgetallen is een kwadraat.

Vader: En daar gaan we nu een overzicht van maken voor de eerste driehoeksgetallen.

Met vereende krachten maakt men dit overzicht:

driehoeksgetallen	kwadraten
0	0 + 1 = 1
0 + 1 = 1	1 + 3 = 4
0 + 1 + 2 = 3	3 + 6 = 9
0 + 1 + 2 + 3 = 6	6 + 10 = 16
0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10	10 + 15 = 25
0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15	15 + 21 = 36
0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21	21 + 28 = 49
0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28	

Basje : 't Zit weer mooi in elkaar.

Vader: Verbaas je je daarover?

Basje : Eigenlijk niet zo erg meer; 't zit geloof ik altijd mooi in elkaar.

Oplossing Wies Wiedes (pag. 33)

Wies Wiedes komt thuis. Ze vraagt Wim om het antwoord.

Wim zegt (slim zoals altijd): 'Vind je rooie sokken mooi, Wies?'

Wies antwoordt dat zij één paar sokken wilde hebben.

'Rooie, witte of zwarte, dat kan me niet schelen.'

'O', zegt Wim. 'dan moet je in het ongunstigste geval vier keer in de ton graaien.'

'Ja, vier keer. Maar vraag me niet hoeveel keer ik moet graaien om één paar rode sokken te krijgen. Misschien zat er nog maar één rode sok in de ton.'

En daarmee toont Wies dat zij het antwoord van Wim begrepen heeft.

variaabel

blok

INHOUD

- 1.1 *Inleiding en leeswijzer* 44
- 1.2 *Symboliseren* 46
Jan van den Brink
- 1.3 *Over optellen en aftrekken* 55
Johan van Bruggen
- 1.4 *Een mooie, rooie bus* 64
Ans Zwiers, Simon Smaak,
Dik Groote Haar en Hans ter Heege
- 1.5 *De tijdmaschine* 70
Leen Streefland en Fred Goffree

1.1 inleiding en leeswijzer

Nog niet zo lang geleden hebt u een woning betrokken in deze nieuwe stadswijk. Gisteravond wilde u voor de eerste maal in deze buurt een brief op de post doen. Waar de brievenbus precies staat, wist u niet. Van voorgaande fietstochtjes herinnerde u zich echter nog vaag de plaats: die straat uit, bij het hoge gebouw links en

Nu je er over nadenkt was het toch verder dan je verwacht had. Zou er niet een bus dichterbij in de buurt te vinden zijn? Je vraagt je af hoe de posterijen de plaats van de bussen zullen bepalen. Men houdt vast rekening met de bewoners. Tenslotte moeten alle mensen in de wijk redelijkerwijs hun post op de bus kunnen doen.

Als je in de wijk loopt komt alles vrij chaotisch op je af. Straten, boulevards, pleinen, parkeerplaatsen, een plantsoen in aanleg, je kunt er moeilijk enige structuur in aanbrenghen.

Toen, op het gemeentehuis, was dat trouwens anders. Vele nieuwe wijkbewoners waren destijds gast van het gemeentebestuur. De kennisgeving met elkaar en met de wijk werd vergemakkelijkt door de prachtige makette, die door de afdeling stadsplanning was ontworpen. Alles staat daar ook werkelijk – op schaal – op: flatgebouwen, beplanting, openbaar vervoer, winkelcentra, parkeerplaatsen,

Toch zou je vooreerst genoeg hebben aan een plattegrond van de wijk. Eigenlijk heb je daar meer aan dan aan de foto van de makette, die destijds uitgereikt werd. De hoofdzaak is uiteindelijk de structuur van straten en lanen. Op enkele punten aan de buitenkant van de wijk zijn dergelijke plattegronden geplaatst. Bij nadere beschouwing valt het niet mee om het brievenbussenprobleem met behulp van deze plattegrond direkt op te lossen. De uitgebeelde situatie is nog erg kompleks, en je kunt niet direkt een begin maken.

Daarom besluit je de zaak wat eenvoudiger aan te pakken.

De wijk wordt verschaald tot een plaatje op ruitjespapier. Om de gedachten te bepalen laat je slechts huizen en brievenbussen toe op de roosterpunten. Met dit denkmodel lijkt het mogelijk tot een eerste oplossingspoging te komen Als je nu eens één brievenbus op die plaats projekteerde, wat zouden dan de konsekventies voor de bewoners zijn? Je kunt nu de afstanden tot die ene hypothetische brievenbus gebruiken om deze konsekventies te kwantificeren.....

In het leerstofpakket 'Eén mooie, rooie bus' (1.4) kan de lezer kennismaken met de onderwijskundige vertaling van bovengenoemde problematiek.

Voor diegenen, die gewend zijn om niet slechts in termen van leerstof over onderwijs te denken, hebben we de problematiek op de hiervoor geschetste wijze naar voren gebracht. Activiteiten, waarbij de mens een probleem ontmoet, het als zodanig ervaart, er ordening in brengt, een poging doet om een structuur te herkennen, symbolen ontwerpt voor elementen en zelfs voor configuraties van elementen, een denkschema ontwikkelt en daarin een wiskundige 'model'-oplossing aanzet, zijn zowel menselijk als wiskundig van aard. Bij het doorlezen van de volgende hoofdstukken in dit Variabel Blok zult u bovenstaande elementen in elk der verslagen kunnen herkennen.

Jan van den Brink (1.1) geeft op het nivo van de zesjarigen een zeer fundamentele aanzet tot wiskundige activiteiten. Vanuit een open probleemstelling komen de kinderen daarbij op eigen initiatief vaak tot symboliseren en structureren op diverse nivo's.

Het feit dat de oplossing niet uniek hoeft te zijn, en reeds a priori slechts aan de leerkracht bekend, kan een open benaderingswijze van de kinderen stimuleren.

Johan van Bruggen (1.2) beschrijft de wijze, waarop de kinderen een matematiseringspro-

ces doorlopen met betrekking tot een gebied, waarop dit onwaarschijnlijk mag lijken: het cijferen.

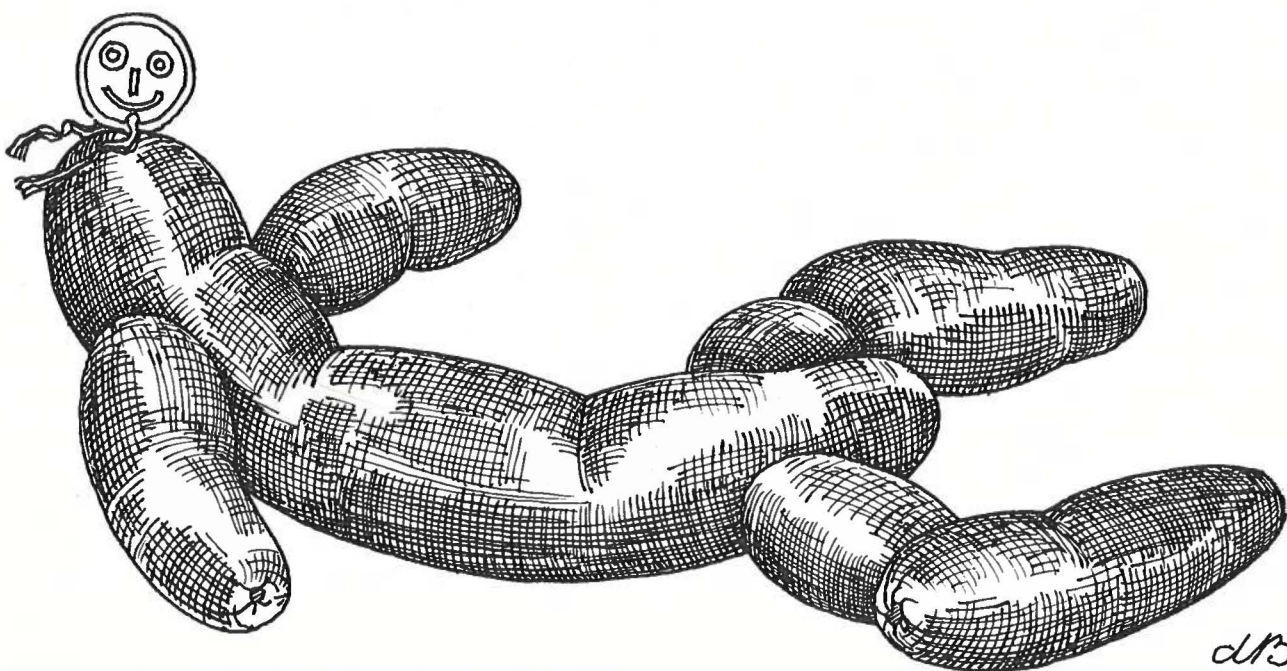
Door de mogelijkheid van eigen ontdekkingen aan het didactische hulpmiddel bij uitstek, de abakus, kunnen de leerlingen van de derde klas de waarde van het symboliseren – in verband met ons talstelsel – zelf naar waarde leren schatten.

Een eerste nivoverhoging wordt mogelijk gemaakt door een analyse van het algoritmisch proces. De kinderen trachten stap voor stap te beschrijven wat er gebeurt als bijvoorbeeld twee grote getallen cijferend worden opgeteld. Het analyseren van soortgelijke processen levert dan een eerste inzicht in de waarde van algoritmen op breder vlak.

Na het werken aan de algoritmen zelf, het maken van cijfersommen – hopelijk in een relevante kontekst – kan het moment komen om de zaak vanuit een beschouwend standpunt te benaderen.

Leen Streefland en Fred Goffree (1.5) laten zien hoe vijfdeklas leerlingen, de historische ontwikkelingen rond het positionele stelsel volgend, hun inzicht hierin verdiepen.

Hier pas komt er een moment van waardering in het onderwijs, waarin de 10 á 11-jarige iets ervaart van *de menselijke worsteling* om structuur te brengen in een – voorheen – chaotische wereld van vormen, aantallen, configuraties, bewegingen, afstanden, tekens, en stadsplannen.



1.2 simbo- liseren

SIMBOLISEER-AKTIVITEITEN IN
KLAS 1, ERVARINGEN EN
OPMERKINGEN

JAN VAN DEN BRINK

Bij de ontwikkeling van een schoolwerkplan voor de drie eerste klassen van de ontwerp-school wordt de volgende procedure gevolgd. De onderwijzeressen, een 'zwevende' onderwijzer en een medewerker van het instituut bereiden het onderwijs voor door lessuggesties en werkbladen te ontwerpen.

Het onderwijsgebeuren in de klassen wordt hierna minutieus geregistreerd.

Tenslotte worden werkbladen en andere suggesties toegevoegd.

In die veelheid van gegevens worden aldus *hoofdpijnen* zichtbaar. Een apart probleem hierbij is dat een werkkaart of les vaak niet precies binnen één bepaalde lijn valt — allerlei andere aspecten spelen mee —.

Toch meent de ontwerpgroep, geleid door observaties van het leerlinggedrag, zeven hoofdpijnen te kunnen aangeven:

- * symboliseren
- * één-één-relaties leggen
- * vergelijken van kollekties door middel van groeperen
- * indelen en verdelen
- * ordenen
- * taalaspecten
- * meetkundige aspecten.

De volgorde in deze lijst is willekeurig; het betreft noch een prioriteitenschema, noch een temporeel schema. Het is niet mogelijk alle lijnen uitvoerig te bespreken. Zelfs geldt dit voor elke lijn afzonderlijk. We zullen dus een keus moeten doen. Die keuze laten we gedeeltelijk bepalen door *problemen* die elke onderwijzeres in de eerste klas zal (her)kennen.

- ① In de eerste plaats blijken kinderen (overigens niet alleen zij!) het moeilijk te vinden om zich een opdracht te realiseren. 'Wat bedoelt de juf nou?'
- ② Bij het leesonderwijs (en dat is toch het vak dat in het begin van de eerste klas centraal staat) worden *woorden als symbolen* voor allerlei dingen aangeboden.
- ③ De onderwijzeres ziet zich geplaagd voor problemen bij het laten schrijven van symbolen; het *schrijven* als een *techniek*.

Al deze onderwijssituaties hebben iets te maken met het *symboliseren*. Het symboliseren is echter méér dan hetgeen onder ①, ② en ③ is genoemd.

Met behulp van voorbeelden uit de schoolpraktijk hopen we u dit duidelijk te maken.

- **HET ZICH REALISEREN VAN EEN OPDRACHT**
Probeer eens de volgende opgave (nivo lezer) tot een oplossing te brengen:

Toen de autobus wegreed waren er 27 passagiers in de bus.
Hoeveel stonden er bij de halte?
Hoeveel zijn er in- of uitgestapt?

BUSHALTE
1-5-6
7-8-A

165

Als u de moeite hebt genomen om de 'draagwijdte' van dit probleem na te gaan, bent u van de ene verrassing in de andere gerold. Steeds zult u zich de situatie hebben gereali-

seerd en beargumenteerd.

Dergelijke opdrachten zijn ook op lager niveau te geven. Twee voorbeelden:

*** Een tekenopdracht**

'Tekenen 8 ballonnetjes en maak de helft zwart.'

De meeste kinderen tekenen:

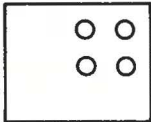


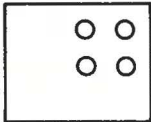
Slechts enkelen vinden:



*** Opdracht:**

'In ieder bokje mag je vijf rondjes kleuren. Niet meer dan 5! Geen 6, geen 3, maar 5 rondjes.'



Bram: 'Die  kleur ik niet, want er staan er geen vijf op.'

Ronald tekent er nog een rondje bij.
'Waarom?'

'Want in ieder hokje moet ik er vijf kleuren.'

Uit deze enkele voorbeelden blijkt, dat de kinderen goed moeten luisteren, zich moeten realiseren wat de opdracht betekent en ten slotte argumenten moeten aandragen voor hún oplossing (de opgave heeft immers níet precies één oplossing).

Het kind zal op zijn manier de draagwijdte van een opdracht gaan onderzoeken.

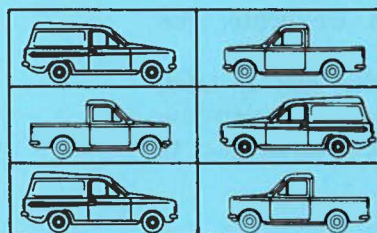
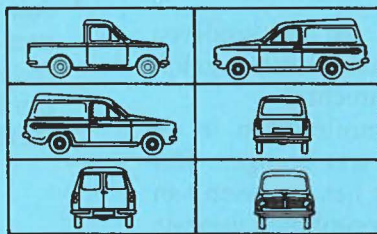
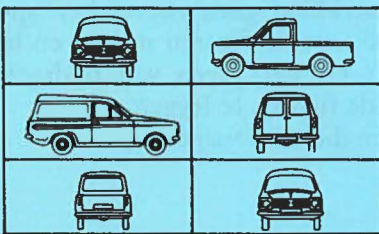
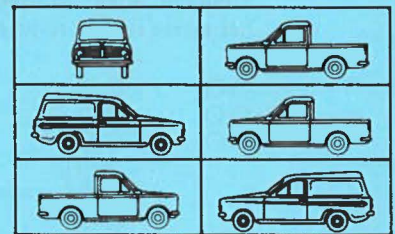
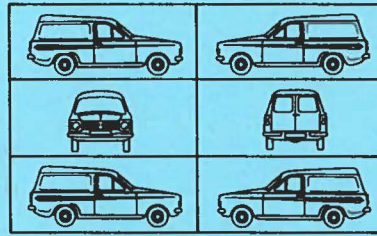
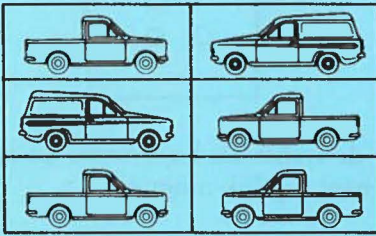
Achter elke wiskundige formule gaat een 'wereld' schuil die alleen door onderzoek kan worden ontdekt.

► **WOORDEN ALS SIMBOLEN**

Symboliseren houdt méér in dan het *toevoegen van symbolen aan dingen*.

Dit blijkt uit het volgende verslag.

In de ontwerpschool maken we gebruik van 'fiches' — ronde plakjes hout waarvan de bovenkant rood en de onderkant geel geschilderd is —. Ze worden gebruikt om de auto's op een parkeerterrein te symboliseren.



Het doel van de les is om de kinderen direkt te laten zien dat het aantal auto's per parkeerterrein gelijk is.

Een verslag van de les in een der klassen:

Agent bij een parkeerplaats (gesprekje over parkeermeter en kwartjes).

Agent: 'Ik wil wel eens weten hoeveel auto's er nu staan', en hij klimt op een hoge toren. Links en rechts liggen de parkeerterreinen.

Een opmerking er tussen door: 'Zijn die auto's wel zo groot?'

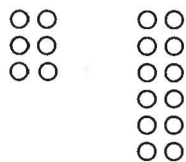
'Op welk parkeerterrein staan *de meeste auto's*?'

'Overall zes', zegt een leerling.

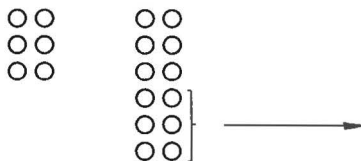
'Nee hoor,' meent een ander.

Vrijwel alle kinderen vinden dat op het bovenste terrein de meeste auto's staan. Slechts één leerling vindt op het onderste terrein de meeste.

'We gaan eens kijken. Voor iedere auto leg je een *ronde op je tafel*. Maak nu het onderste parkeerterrein na op je tafel.'



Het bovenste parkeerterrein wordt door sommige kinderen direkt gevonden door *een gedeelte* van het eerste terrein *te verschuiven!*



Daarna wordt opgemerkt dat op beide terreinen evenveel auto's staan.

Aanvankelijk meenden we dat de kinderen direkt zouden zien dat het aantal auto's gelijk is op beide terreinen. Ten onrechte!

We vermoeden dat de formuleringen in de opdracht de kinderen in de war brengen. Het is echter duidelijk dat voor het oplossen van het probleem de fiches — als symbolen voor de auto's — een centrale rol hebben gespeeld.

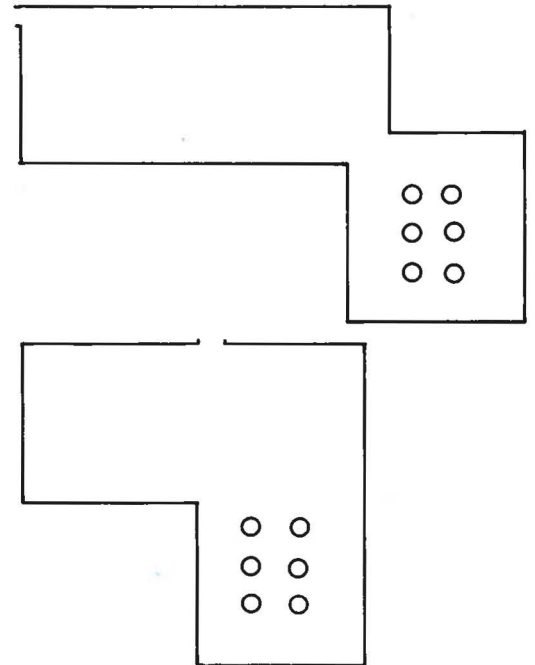
In een parallelklas hebben we echter *een andere ervaring* gehad.

De onderwijzeres laat de fiches niet op tafel, maar op het werkblad leggen om de één-één-verbinding tussen auto en fiche duidelijker te maken.

Eén terrein wordt volgelegd.

De kinderen gaan hier *niet* spontaan over tot het verschuiven van een gedeelte, maar leggen de fiches al tellend op het andere terrein.

Slechts moeizaam komen de kinderen tot de oplossing, met uitzondering van één meisje.



Zij legt de fiches als boven neer en ziet direkt dat het aantal gelijk moet zijn.

Symboliseren houdt blijkbaar niet alleen in dat bijvoorbeeld elke auto wordt gerepresenteerd door een fiche, maar dat de gehele configuratie wordt geschematiseerd.

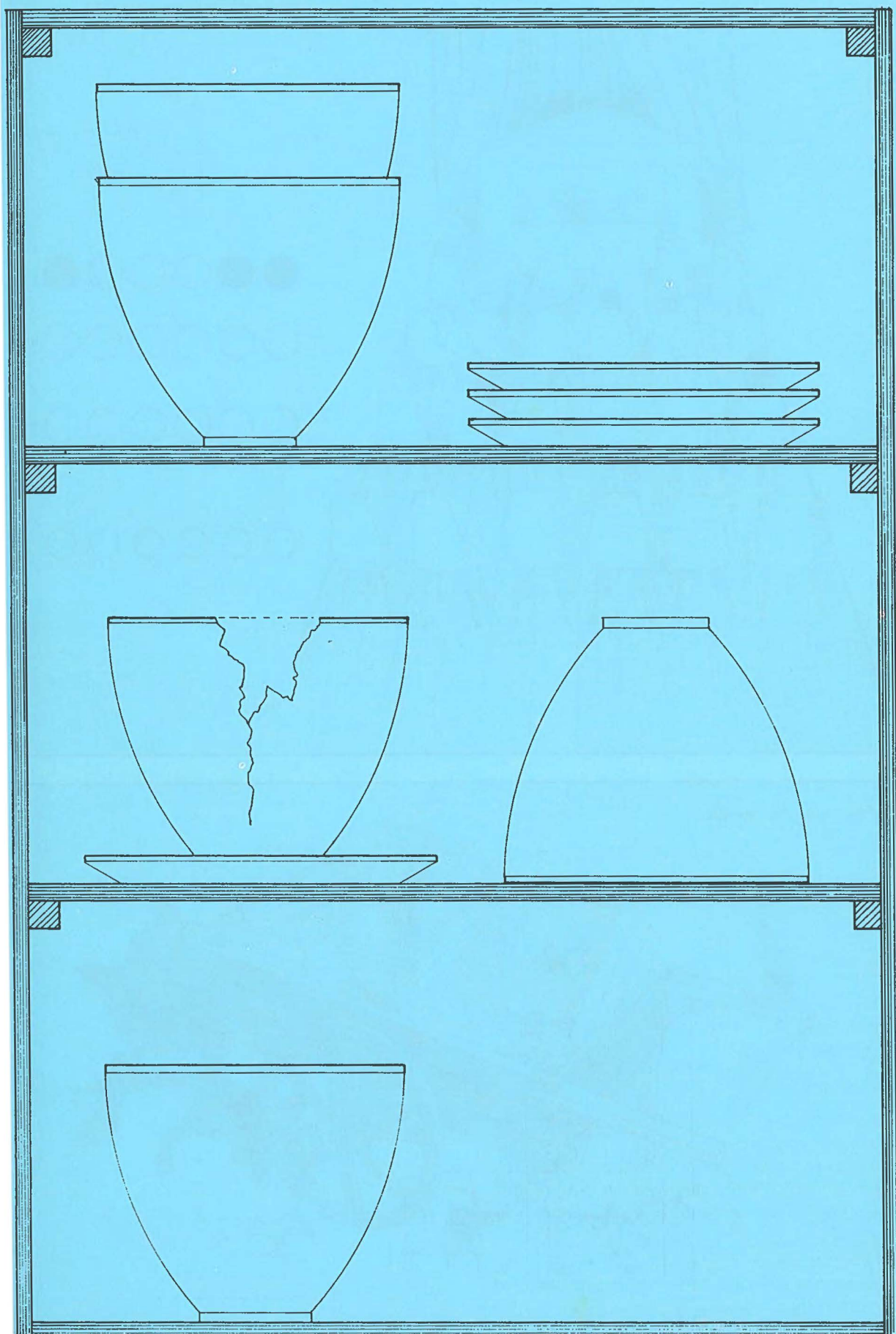
De schema's worden daarna vergeleken.

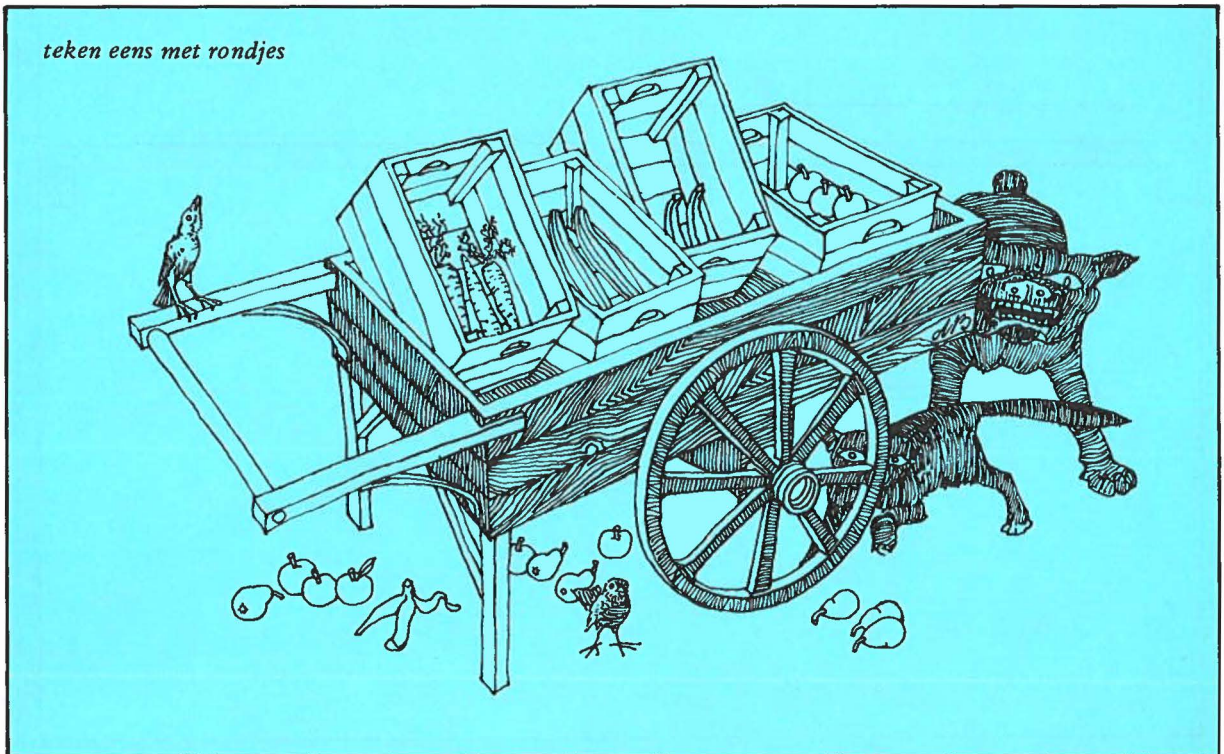
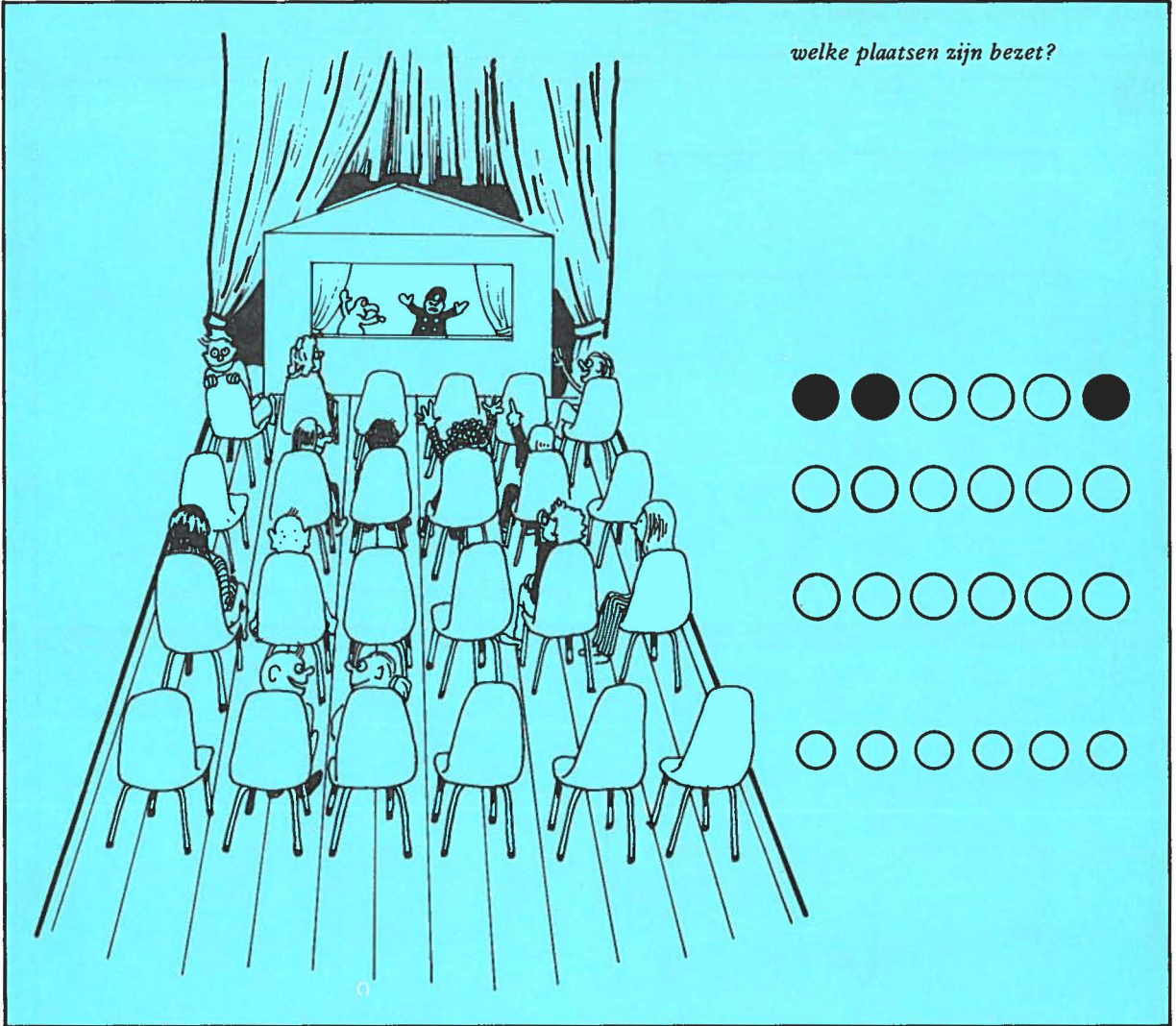
Nog enkele opmerkingen over de lijn, waarin dit werkblad is opgenomen.

* Aan het werkblad gaan vooraf het 'spelen met fiches' (mooie figuren maken en laten bespreken) en het geven van opdrachten om bepaalde figuren te leggen.

* Werkbladen die erop volgen zijn:

zet op elke plank een gelijk aantal kopjes en schotels





HET LEREN SCHRIJVEN

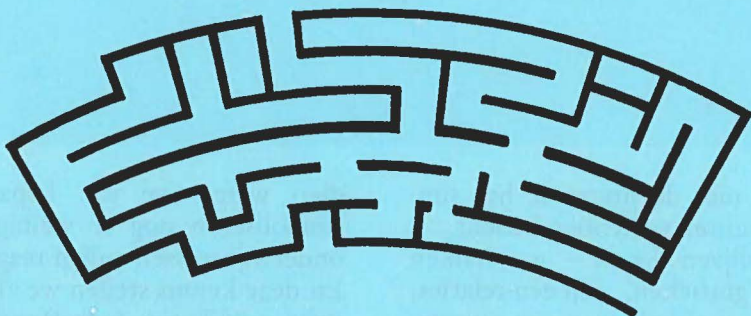
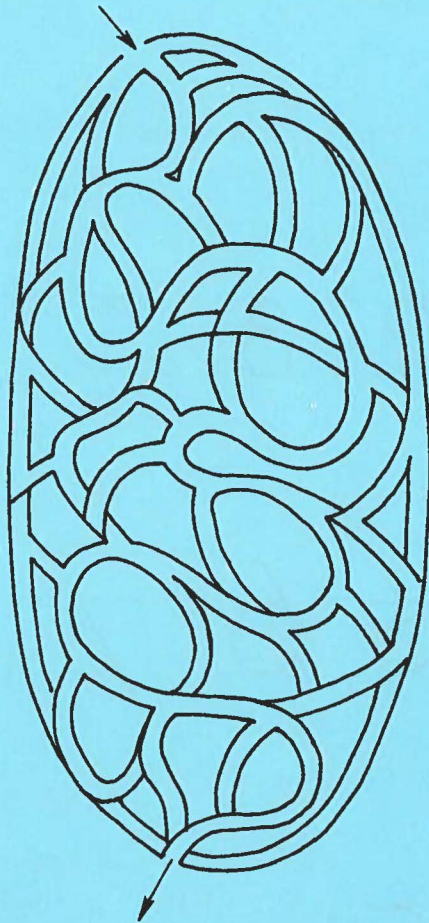
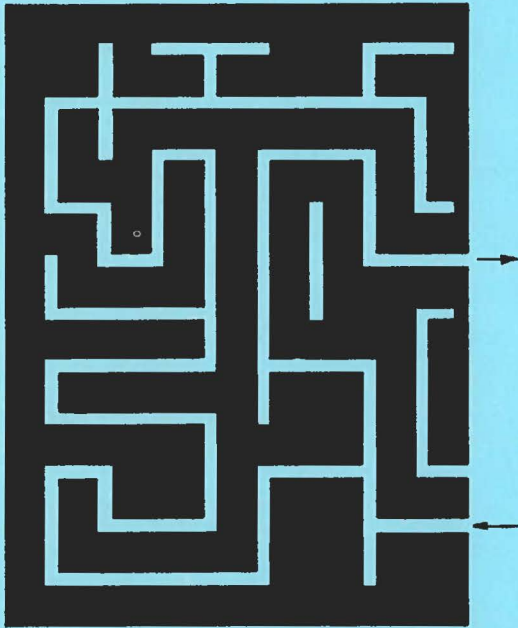
Praktische eisen die bij het schrijven gesteld worden, zijn:

- * het potlood moet tussen de lijntjes blijven
- * begin bij de opening

* trek slechts één lijn; dus niet (op- en neergaand) een dikke lijn tekenen.

Deze eisen stellen we ook bij het tekenen van een weg door een *doolhof*.

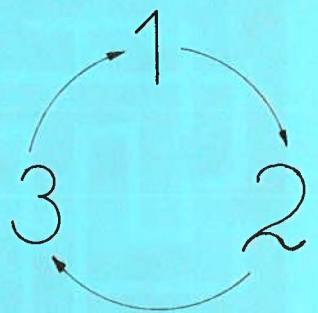
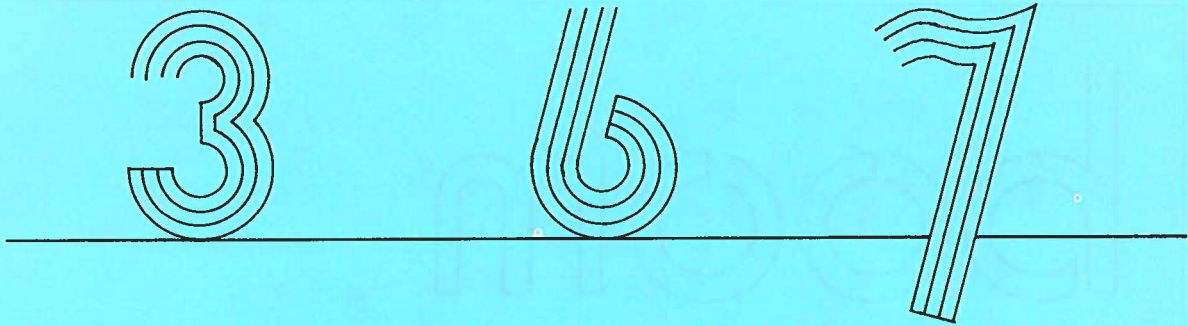
boom



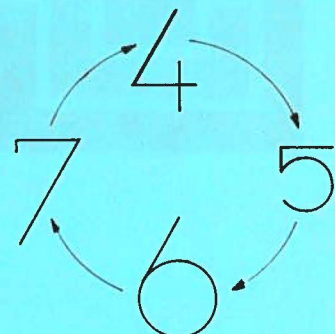
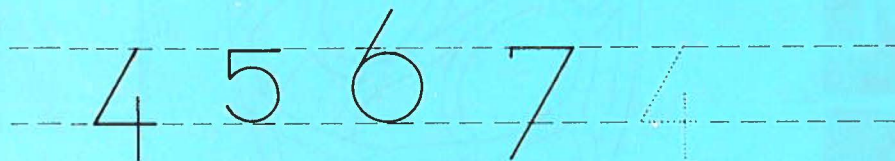
Bij het schrijfonderwijs wordt bovendien een zwaar aksent gelegd op het herhalen van een beweging.

Het volgende werkblad geeft hiervoor enkele suggesties:

in verschillende kleuren herhalen:



overtrekken in kleuren



We hebben zeker niet de pretentie het symboliseren van alle kanten te hebben belicht. Veel zaken zijn blijven liggen – we denken bijvoorbeeld aan grafieken, één-één-relaties, de plattegrond als symbool voor een ruimtelijke situatie, e.d. We moesten echter een keuze maken. Boven-

dien weten we van bepaalde vormen van symboliseren nog te weinig hoe kinderen en onderwijzeressen zullen reageren. En deze kennis stellen we als voorwaarde voor onze publikaties betreffende het schoolwerkplan.

1.3 over optel- len en aftrekken

DE EIKELS, OPA EN DE ABAKUS IN
KLAS 3

JOHAN VAN BRUGGEN

1 INLEIDING

In het volgende doen we verslag van een stuk wiskunde-onderwijs in klas 3, dat iedereen bekend is als *cijferend optellen en aftrekken*. Het leerplan voor klas 3 valt in drie 'happen' uiteen:

- * Leren algoritmisch werken (+, -, x :) aan de hand van een serie lesjes met werkbladen.
- * Verkenning van het rekensysteem; eigenschappen van getallen en van operaties; geldrekenen; eerste verkenning breuken; herhaling en verdere inoefening van tafels van vermenigvuldiging; werken met roosters, tabellen, pijldiagrammen, enz. Dit werk gebeurt via een systeem van individueel werk aan werkbladen, afgewisseld met introductielessen.
- * Een derde hoofdstroom wordt gevormd door klassikale activiteiten rond onderwerpen als: telproblemen, introductie kansbegrip, gezamenlijk onderzoek gericht op inventarisatie, lessen over symmetrie van figuren, oppervlakte, wegen, e.d.

In dit eerste verslag gaan we alleen in op het aanleren van de algoritmen voor optellen en aftrekken zoals dat nu in klas 3 gedaan is en zoals we ons voorstellen om dit voort te zetten. Allerlei relaties met vermenigvuldigen en delen en met andere onderdelen uit het programma komen in dit artikel dus niet aan bod.



2 DE HOOFDLEERGANG

Het cijferend optellen en aftrekken in klas 3 komt uiteraard niet zomaar uit de lucht vallen; het is een voortzetting van hetgeen in klas 1 en 2 geleerd is.

Daarom eerst enkele opmerkingen over de lijn die vanaf het begin van klas 1 doorloopt tot diep in klas 4.

Vanaf vijf jaar

- ▶ Diverse problemen aanbieden:
 - 'je bent een jaar ouder geworden'
 - 'hij woont vier huizen verder'
 - 'we hebben samen acht autootjes'
 - 'hij heeft vijf knickers meer'
 - 'morgen komen er zes nieuwe kinderen bij'.
- ▶ Begrippen: meer, minder, evenveel en termen: bijdoen, bijvoegen, optellen, samennemen.
- ▶ Optellingsprocedures leren uitvoeren als operaties:
 - doortellen]
 - getallenlijn]
 - groeperend tellen]

$\left. \begin{array}{l}] \\] \\] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{verenigen van verzamelingen} \\ \text{afbeelden op staaf/getallenlijn} \\ \text{afbeelden op patroon.} \end{array} \right.$
- ▶ Operaties noteren als beschrijving van procedures.

Vanaf 6 à 7 jaar

- ▶ Memoriseren van de resultaten van optellingen met summanden kleiner of gelijk aan 10.
- ▶ Vertrouwd worden met grotere hoeveelheden door tellen – schatten (tot 1000).
- ▶ Noteren van grotere getallen in 'basis tien' zonder eksplisiete aandacht voor het positie-systeem.
- ▶ Inwissel/inpakspelletjes waarbij hoeveelheden worden gestructureerd in:

x^2	x^1	x^0
*	*	*

*) een getal kleiner dan x.

- ▶ Hanteren van de abakus met 10 kralen op elke staaf om getallen te 'noteren' en af te lezen. Hanteren van de abakus met 20 kralen om de basisoptellingen hiermee nog eens weer te geven. Daarbij wordt ingewisseld: 16 noteer je op de abakus als $1 \times 10 + 6 \times 1$ en niet als 16×1 .

Vanaf 6 à 7 jaar

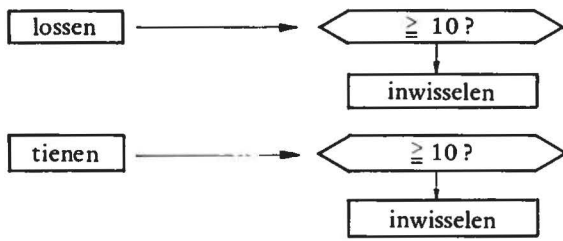
- ▶ Als handeling uitvoeren van optellingen met grote getallen (tot 1000) door:
 - doortellen]
 - getallenlijn]
 - groeperend tellen.

Vanaf 7 à 8 jaar

- ▶ Doorgaande oefening met optellen met behulp van de abakus in een serie problemen uit de realiteit en 'gewone' rekenopgaven. Deze serie dient geïndividualiseerd te zijn, omdat individuele verschillen in verkortingstempo kunnen gaan optreden.
- ▶ Overgang naar een 'schriftelijke abakus', waarbij hoeveelheden door cijfers worden weergegeven: (de positiekaart)

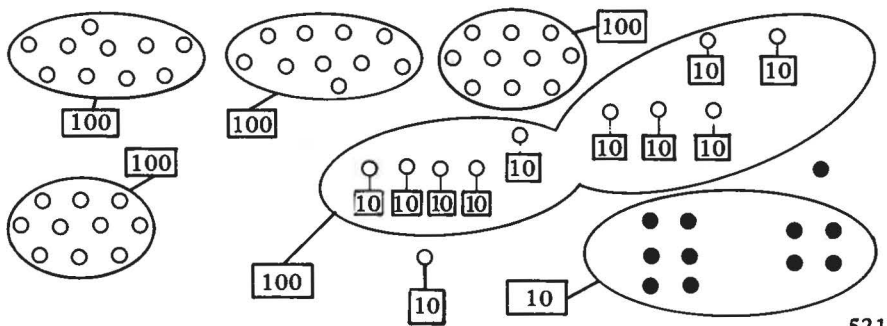
4	3	8	+	438 + 385 = 823
3	8	5		
7	11	13		
7	12	3		
8	2	3		

- ▶ In individuele bespreking verbalisering en aanschouwelijke schematisering van het algoritme:

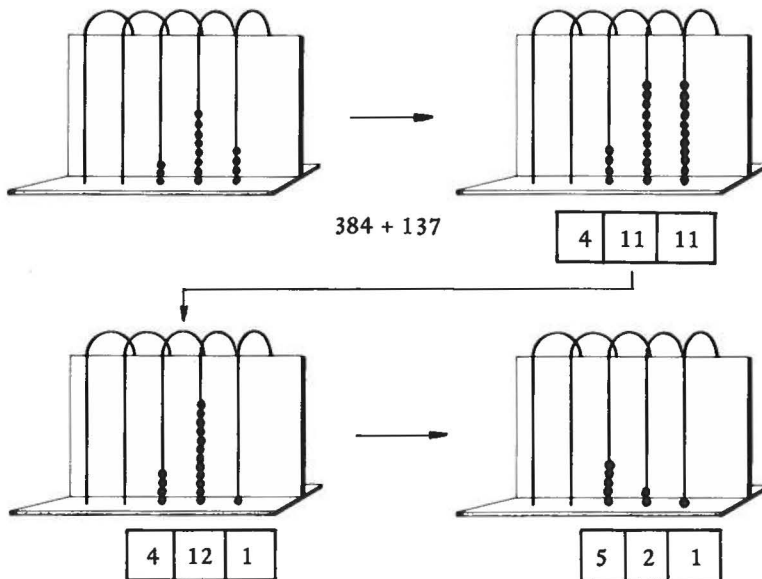


Vanaf 8 jaar

- ▶ Het verkortingsproces dat met de positiekaart op gang gebracht wordt, loopt uit in het bekende algoritme, zij het per leerling op verschillende tijdstippen. Om dit proces te sturen is een zorgvuldig-geplande serie individuele en klassikale activiteiten en problemen nodig, waarbij men attent dient te zijn op een zo intensief mogelijk relatie met de toepassingsgebieden.
- ▶ In individuele bespreking aanbieden van (minder of meer) verfijnde aanschouwelijke schema's van het algoritme als extra hulp.
- ▶ Leerlingen die tot beheersing van het algoritme zijn gekomen laten vertellen – individueel – welke stappen ze achtereenvolgens moeten nemen.
- ▶ Lezen en maken van blokschema's van eenvoudige handelingen, procedures, verhalen.
- ▶ Beschrijving van de handeling door:
 - notatie op getallenlijn
 - notatie in symbolen ($384 + 137 = 521$)
 - notatie vanuit groeperend tellen:



– notatie op abakus (20-kraals):



3 DE DEELLEERGANG

In de eerste 3 à 4 maanden van klas 3 leren de kinderen cijferend optellen en aftrekken (eventueel kan men de leergang ook reeds in klas 2 laten beginnen).

Beschrijving van het gevolgde programma

3.1 Indien dit in klas 2 nog niet voldoende gebeurd is, dan moeten de kinderen eerst vertrouwd raken met de abakus. Deze speelt immers een sleutelrol in het vervolg. Dit gebeurt door de abakus te introduceren als *teller*.

Allerlei hoeveelheden in de klas (legrondjes, tafels, stenen aan de muur) worden geteld,

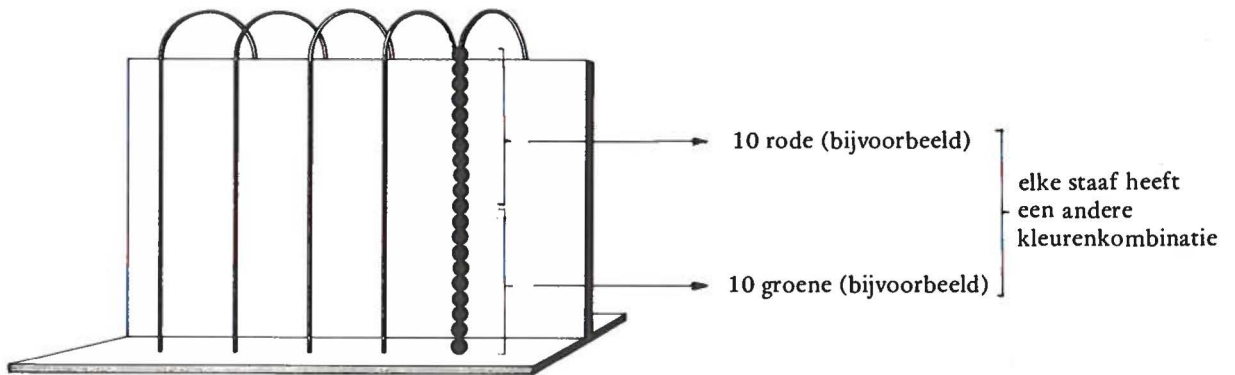
evenals bewegende 'hoeveelheden': hoe vaak zegt de onderwijzer 'Piet' in een verhaaltje? ; hoe vaak loopt een kind – van vijf kinderen die door de klas lopen – voorbij een aangegeven punt?

De abakus wordt vervolgens gegeven – elke leerling één – en daarmee wordt geteld: elke keer als er één bijkomt, een kraal erbij.

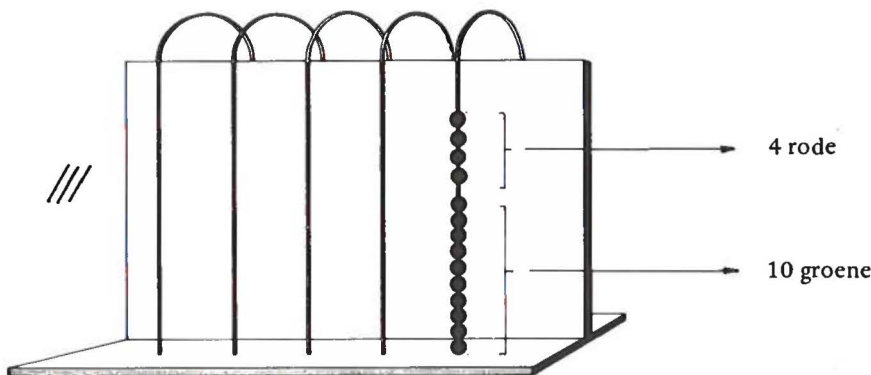
Wat nu als alle 20 kralen van de rechterstaaf op zijn?¹⁾

Tijdens een leergesprek komen de suggesties:

- gewoon doorgaan op de tweede staaf – als we dat doen, blijkt dat we niet verder kunnen dan 100 –;



- elke keer bij 20 een turfje op papier zetten, zodat bijvoorbeeld 74 wordt:

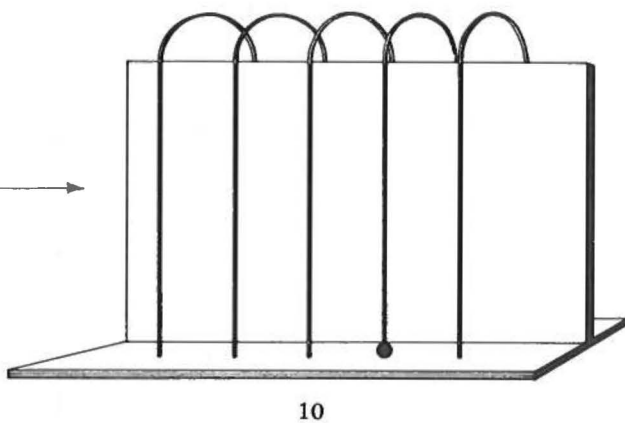
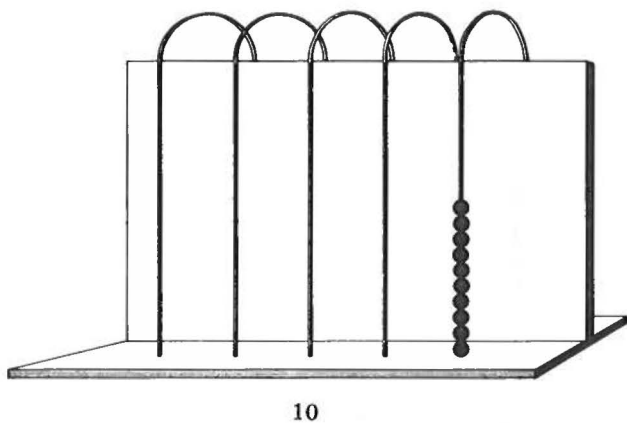


Dit leergesprek loopt over in de informatie dat er vroeger mensen geweest zijn die een handige manier hebben bedacht om met de abakus te tellen. Dit wordt voorgedaan: er

wordt geteld (bijvoorbeeld van 1 tot 33) terwijl de onderwijzer op de abakus de getallen 'schrijft'²⁾ en daarbij veel aandacht vestigt op het inwisselen:

¹⁾ Eigenlijk kan men hier beter abakussen met 10 kralen gebruiken om het plaatsen van getallen duidelijk te maken. Omdat in het vervolg abakussen met 20 kralen nodig zijn, hebben we die hier ook maar gebruikt, wat – ook door de verschillende kleuren – geen grote problemen opleverde.

²⁾ De kinderen gebruiken kleine abakussen van ca 23 cm hoogte met 5 maal 20 kralen. Deze abakussen zijn speciaal gefabriceerd door Jegro-Bolsward evenals de grote abakus van 5 maal 20 kralen die ca 40 cm hoog is. De laatste wordt door ons als demonstratie-abakus gebruikt. De kleine is (nog) niet in de handel verkrijgbaar.



Zo wordt geoefend met het plaatsen van getallen op de abakus en het aflezen van getallen. In de eerste twee weken is daar – naast de introductieles van ca $\frac{3}{4}$ uur – nog enkele malen mee geoefend. Meestal direkt in relatie met het optellen.

3.2 Hierbij wordt uitgegaan van een *verhaal over een groep eekhoorns* (Spriet, Sproet, Sprintie, etc.) die onder leiding van opa eekhoorn eikels aan het verzamelen zijn voor de winter.

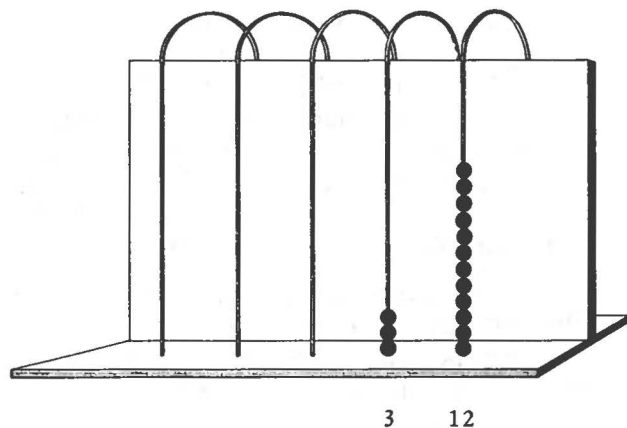
De eikels worden in verscheidene holletjes gestopt en opa moet bijhouden hoeveel er in de verschillende holletjes komen. De leerlingen helpen opa op hun eigen abakus. Steeds wordt in korte lesjes (15 à 20 minuten) op deze wijze gewerkt: klassikale aanbieding van het verhaal en de daarin vervatte opdrachten;

individuele notatie; klassikale bespreking en korrektie gekombineerd met individuele hulp.

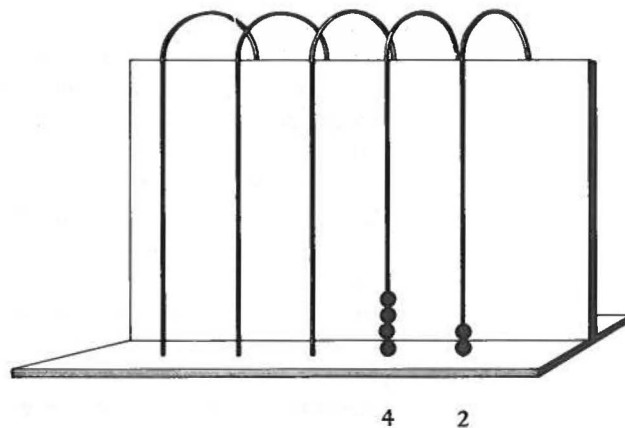
3.3 In deze eerste fase van *optellen met behulp van de abakus* gaat het in hoofdzaak om het leren hanteren van de abakus als 'optellen-door-inwisselen-machine':

* Als er op een staaf 10 of meer kralen zijn gekomen, moet je er 10 naar achteren gooien; je krijgt er dan 1 voor terug op de 'volgende' staaf.

Een fout die in het begin nog al eens voorkomt, is dat de kinderen wel de 10 naar achteren gooien maar vergeten om de 1 naar voren te doen. Door steeds te beklemtonen dat het inwisselen niets verandert aan de hoeveelheden, verdwijnt deze fout vrij snel:



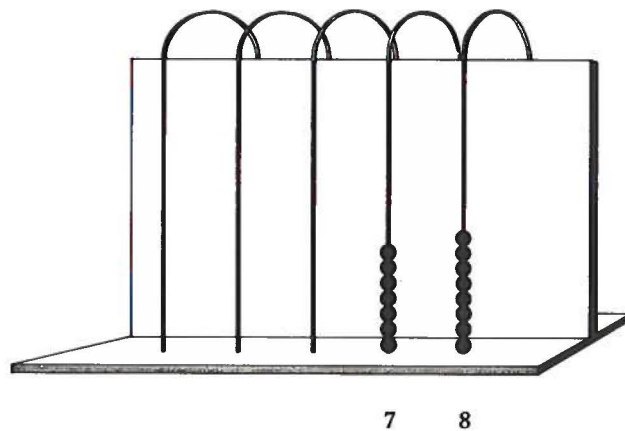
is hetzelfde als



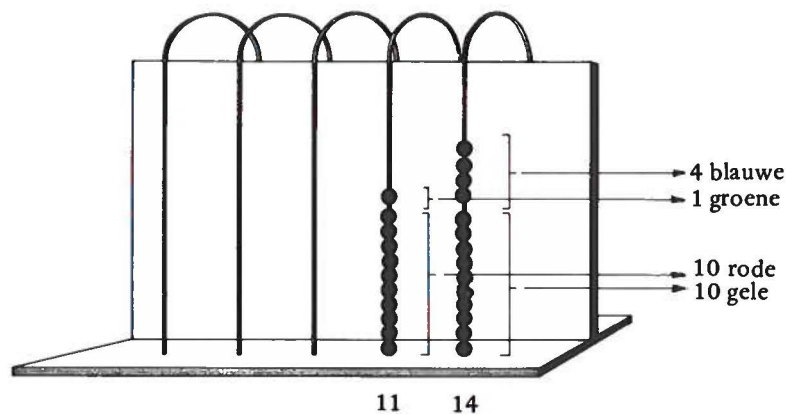
* Door het gebruik van de abakus met 20 kralen wordt het optellen-als-samenvoegen gescheiden van het inwisselen: je voert éérst

de optelhandeling uit en daarna pas ga je het getal 'goedmaken'.
Bijvoorbeeld: $78 + 46$

- zet 78 op je abakus



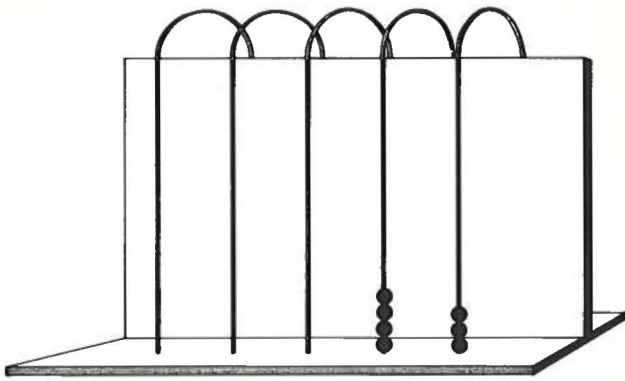
- doe er 46 (dat wil zeggen 4 'tienen' en 6 'losse') bij



- wissel – indien nodig – in:
 - gooi 4 blauwe en 6 gele op de eenhedenstaaf naar achteren (al gauw wordt ontdekt dat je niet hoeft te tellen van 1 tot en met 10 maar dat je gebruik kunt maken van de steun die de twee kleuren bieden; er zijn 4 blauwe dus moeten er 4 gele overblijven);
 - gooi 1 groene op de 'tienstaaf' naar voren;
 - gooi 2 groene en 8 rode op de 'tienstaaf' naar achteren (met andere woorden: zorg dat er 2 rode overblijven);
 - gooi 1 oranje (bijvoorbeeld) op de 'honderdstaaf' naar voren;
 - lees af: 124.

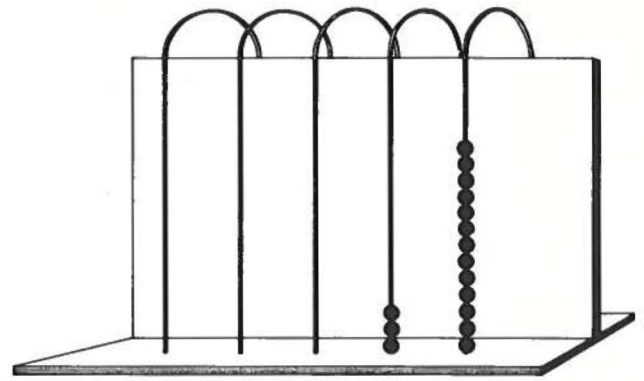
heidjes gaan ontwikkelen; de belangrijkste is wel dat het inwisselen al *tijdens* het optellen gaat plaatsvinden. Individueel wordt dit gestimuleerd (het is een belangrijke stap in het matematiseringsproces dat het kind naar het cijferend optellen toe voltrekt), maar deze ontdekking wordt niet te nadrukkelijk klassikaal besproken.

3.4 Na twee à drie weken zijn de kinderen allemaal zover, dat alle optellingen met uitkomsten beneden 1000 vlot met de abakus gedaan kunnen worden. Intussen is ook de aftrekking op de abakus geïntroduceerd (nadat het optel-inwisselen goed beheerst wordt!). De terug-inwisseling bij de aftrekking geeft in 't begin nog wel even problemen, maar door opnieuw te beklemtonen dat het getal door inwisselen niet verandert, verdwijnen de fouten vrij snel.



4 3

is hetzelfde als



3 13

3.5 Na deze eerste introductie-ronde van 3 à 4 weken krijgen de kinderen regelmatig optel- en aftrekproblemen voorgezet, die ze met de abakus oplossen. Deze problemen komen voort uit de activiteiten van de derde hoofdstroom (zie inleiding) maar ook nog vanuit het eekhoornverhaal dat af en toe weer opgevat wordt en ook zónder kontekst, wanneer de leerlingen een werkblad krijgen met opgaven.

In deze periode treden uiteraard tempo-verschillen op, die worden opgevangen door het geven van ekstra-opdrachten.

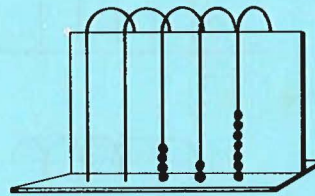
Om de lezer een indruk te geven van het werk van de kinderen, drukken we enkele stukjes van lesbeschrijvingen en werkbladen – sterk verkleind – af.

eerste week

- daar komt Scheefoor met 1 beukenoot (15)
- daar komt de Slimme Sproet; die heeft een tasje gemaakt van bladeren en hij brengt er 12 tegelijk; wacht – denk opa – eerst even 2 erbij en dan nog 1 tien (27)
- daar komt Sprintie al weer met 3 noten; opa doet ze erbij; dat worden er 10 op de 'éénstaaf', dus inwisselen (30)
- daar is Slomie; hij heeft 2 nootjes gevonden; opa doet ze erbij (32)
- Roodrug komt er aan met 6 noten (38)
- Scheefoor brengt er ook 6; op de 'éénstaaf' staan er nu weer meer dan 9, dus even 10 inwisselen (44)
- daar komt Spriet met 5 noten (49)
- daar is Sproet weer met zijn tasje; hij heeft er 10 verzameld; opa schuift er één bij op de 'tienstaaf'. (59)

eerste week

- ④ Zet het getal 25 op je abakus.
- ⑤ Zet het getal 44 op je abakus.
- ⑥ Zet het getal 135 op je abakus.
- ⑦ Hieronder staat een getal op de abakus



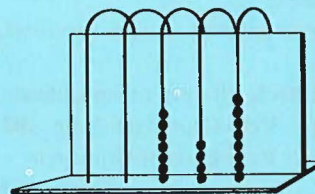
Hoeveel 'enen'? Vul in:

Hoeveel 'tienen'? Vul in:

Hoeveel 'honderden'? Vul in:

Je ziet: het is het getal 427.

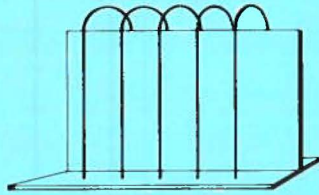
- ⑧ Welk getal staat hier?



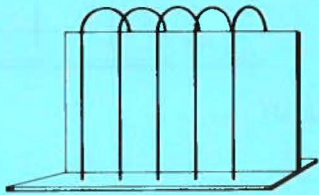
Vul in:

tweede week

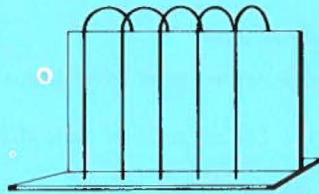
$$\begin{array}{r} 55 \\ 35 \\ \hline \end{array} +$$



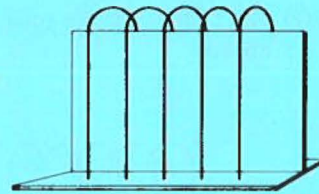
$$\begin{array}{r} 457 \\ 322 \\ \hline \end{array} +$$



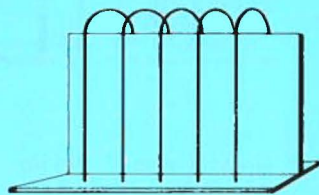
$$\begin{array}{r} 87 \\ 56 \\ \hline \end{array} +$$



$$103 + 34 = \square$$



$$129 + 271 = \square$$



- ② Haal antwoordblad A-7; zet een kruisje achter de antwoorden die goed zijn. Breng het antwoordblad terug.

tweede/derde week

- ② De vader van Jolanda is een vrachtwagenchauffeur.
In een week heeft hij deze ritten gemaakt:
- maandag : Velp-Groningen-Velp 382 km
 - dinsdag : Velp-Utrecht-Nijmegen-Velp 153 km
 - woensdag : Velp-Apeldoorn-Velp 67 km
 - donderdag: Velp-Parijs 467 km
 - vrijdag : Parijs-Maastricht-Velp 538 km
- Hoeveel heeft Jolanda's vader die week gereden? (Je mag de abakus gebruiken!)

vierde week

- ① Reken uit (je mag de abakus gebruiken):

$$\begin{array}{r} 48 \\ 39 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 331 \\ 247 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 18 \\ 36 \\ 73 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 539 \\ 318 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{r} 638 \\ 548 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ 72 \\ 38 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 112 \\ 91 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{r} 357 \\ 263 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{r} 536 \\ 28 \\ 63 \\ 55 \\ 309 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{r} 130 \\ 27 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 47 \\ 58 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{r} 150 \\ 68 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{r} 100 \\ 70 \\ \hline \end{array}$$

- ② Pak antwoordblad A-26; streep de sommen aan die je fout had. Breng het antwoordblad terug. Reken je foute sommen nog eens na.
- ③ Probeer eens zo veel mogelijk sommen te maken, waarvan het antwoord 100 is. Hier zijn twee voorbeelden:

$$\begin{array}{r} 18 \\ 34 \\ 48 \\ \hline 100 \end{array} + \begin{array}{r} 119 \\ 19 \\ \hline 100 \end{array}$$

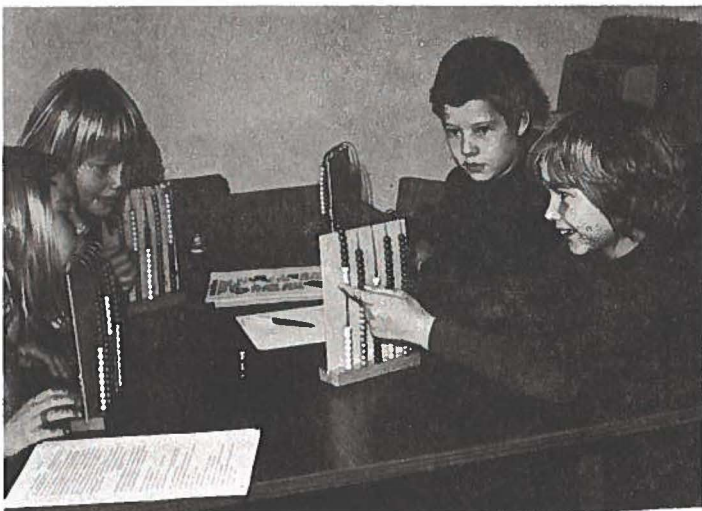
Schrijf ze hieronder (reken ze wel na, zodat je zeker weet dat ze goed zijn!)

4 ENKELE ESSENTIËLE ELEMENTEN IN DEZE LEERGANG

- * De kinderen zijn – met behulp van de abakus – vroegtijdig in staat om alle optellingen en aftrekkingen uit te voeren. Dit feit geeft prettige konsekwenties voor het werk in andere onderdelen van het leerplan.
- * Het ontwikkelen van het algoritme verloopt vanuit de 'bijvoegsituatie' via abakus en positiekaart als een proces van toenemende schematisering en is dus een voorbeeld van een matematiseringsproces dat via de eigen ontdekkingen van het kind verloopt.
- * Al tijdens de fase van het aanbieden van de 'gereedschappen' (abakus, positiekaart) treden individuele ontdekkingen op. Deze worden verheven tot kennis of inzicht van alle kinderen, maar kunnen niet leiden (binnen het klassikale onderwijs) tot nivo-differentiatie. De aanbieding wordt dan erg ineffisiënt. Nadat de principes en de 'gereedschappen' zijn aangeboden, kan het individuele matematiseringsproces-in-engere-zin beginnen. Op dat moment is differentiatie (in nivo en in tempo) vereist en te realiseren.

5 VERVOLG

In een later stadium hopen we u over de voortgang van de leergang verder te informeren.



1.4 een mooie, rooie bus

EEN LEERSTOFPAKKETJE VOOR
KLAS 4

De foto's in dit artikel zijn beschikbaar gesteld door de pers- en publiciteitsdienst van de PTT.

ANS ZWIERS
SIMON SMAAK
DIK GROOTE HAAR
HANS TER HEEGE

OVERWEGINGEN

We kozen voor de vierde klas van de ontwerp-school een afgerond stukje leerstof, 'brievenbussen' genaamd. Het verhaal van de serie lessen rond deze leerstof betreft de problematiek van het plannen van brievenbussen in een nieuwe stadswijk.

Er komen een aantal belangrijke wiskundige zaken aan de orde, waarvan we er drie bekijken:

- * De problematiek komt uit de werkelijkheid. Om het probleem te kunnen oplossen moeten we die werkelijkheid gaan vereenvoudigen. Dat wil zeggen: we maken afspraken die in de plaats komen van een aantal onbekende of onzekere factoren. Zo stellen we voor om een 'stippenwijk' te bekijken:



In deze wijk gelden een aantal afspraken, zoals

- op de plaats van de stippen staan de huizen van de wijk; op de plaats van de stippen kunnen ook brievenbussen staan;
- er zijn in de wijk slechts lanen en straten (vergelijk het stadsplan);
- de afstand tussen twee burens is 1 (afstandseenheid).

- * Welke betekenis kan één brievenbus in deze wijk hebben?

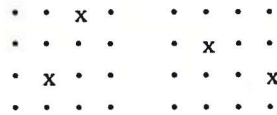
Het is duidelijk dat sommige bewoners van de wijk veel verder moeten lopen wanneer de brievenbus op een hoek wordt geplaatst dan wanneer de brievenbus op een van de stippen in het midden terechtkomt.

Maar hoe zit dat nu voor de hele wijk?

We ontwikkelen daar een methode voor. We kennen aan de wijk een 'bereikbaarheidsgetal' toe. Daarmee hebben we het probleem gekwantificeerd. Men zou ook kunnen zeggen dat we een 'maat voor bereikbaarheid' hebben gevonden. Het bereikbaarheidsgetal stelt ons in staat om door vergelijking de beste oplossing te kiezen. Ook als er meerdere brievenbussen worden geplaatst.

- * Het probleem met één brievenbus is vrij gemakkelijk 'zo' te zien.

De gelijkwaardigheid van meerdere situaties levert dan eveneens geen enkel probleem op. Dit inzicht berust dan op het intuïtief aanvoelen van rotaties en spiegelingen. Zo ontstaan ook onderstaande situaties uit elkaar door rotaties:



Bovendien spelen hier spiegelingen een rol:



De vier bovenstaande situaties zijn gelijkwaardig. We konkluderen dat met meetkundige argumentaties.

Hierboven hebben we al beschreven dat de situaties ook vergeleken kunnen worden op hun 'bereikbaarheidsgetal'.

Een waardevol aspect in dit leerstofpakketje is nu dat er steeds verbindingen kunnen worden gelegd tussen de twee soorten oplossingen. Zo is het duidelijk dat de oplossing via het berekenen van het bereikbaarheidsgetal – in moeilijker situaties zoals bijvoorbeeld in een 7-bij-7 stippenwijk is dit de meest voor de hand liggende methode – het inzicht in symmetrie en rotaties bevordert. En omgekeerd.



DE LESSEN

Les 1

In de eerste les moeten we het probleem helder stellen. Verder dient de les 'open' te eindigen. Er hoeft niets te zijn opgelost. De leerlingen vinden in deze les de motivatie van het probleem.

Lesduur: 30 minuten.

Verloop

- * Klassegesprek rond vragen als
 - waar post jij (of je vader) de brieven?
 - moet je ver lopen? drukke straten oversteken?
 - vind je dat de brievenbus op een goede plaats staat?
- * Verhaal over een nieuwe wijk waarin de PTT één of meer brievenbussen zal plaatsen; het verhaal eindigt met de vraag: 'moet de PTT zich daar nou zo druk over maken?'
- * Op deze vraag kunnen we tijdens een leergesprek dieper ingaan; het volgende komt dan aan de orde:
 - de PTT is een staatsbedrijf, dus van ons allemaal; het parlement controleert de PTT;

- we mogen van de PTT verwachten dat zij efficiënt werkt, dat wil zeggen: 'zuinig' met brievenbussen, brievenbussen niet te dicht opeen, enz;
 - we benadrukken de dienstverlening van de PTT, hetgeen o.m. betekent: voldoende brievenbussen op redelijke afstand van de woningen.
- * We schrijven wat konklusies op het bord, die de leerlingen kunnen overnemen.

Les 2

In deze les introduseren we een stadswijk. We kiezen voor een 'stippenwijk'. Daarbij horen een aantal afspraken. Vervolgens plaatsen we op diverse punten in de wijk een brievenbus en kijken welke konsekwenties dit voor de wijk heeft.

Lesduur: 50 minuten.

Verloop

- * We memoreren nog even wat het probleem was: de PTT gaat *weloverwogen te werk* bij het plaatsen van brievenbussen. Op het bord staat een tekening met 16 gestileerde huisjes. Dit stelt de stadswijk voor uit het verhaal van de eerste les. We vereenvoudigen deze wijk tot de 'stippenwijk':

```

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

```

- * We maken nu twee afspraken:
 - de stippen geven de plaats van zowel de huizen als de brievenbussen aan;
 - in de wijk kan men zich slechts horizontaal of vertikaal verplaatsen (vergelijk lanen en straten in het stadsplan).
- * We laten leerlingen de meest gunstige plaats voor een brievenbus aanwijzen. Daarbij komt direct de gelijkwaardigheid van de vier 'centrum-stippen' aan de orde.
- * We maken een nieuwe afspraak: de afstand tussen twee burens noemen we 1.
- * In een leergesprek ontwikkelen we het getal dat de bereikbaarheid van een brievenbus op een bepaalde plaats aangeeft. Dit gaat als volgt:
 - eerst wordt voor elk huis nagegaan wat de afstand tot de brievenbus is; we zetten die afstanden in een schema:

```

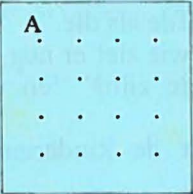
A . 1 2 3
  . 1 2 3 4
  . 2 3 4 5
  . 3 4 5 6
  . . . .

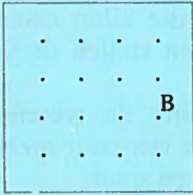
```

wie ziet er iets leuks?

- daarna tellen we alle afstanden op: totaal 48;
het getal 48 is het bereikbaarheidsgetal voor de wijk met de brievenbus bij A;
de leerlingen nemen dit over op werkblad 1.

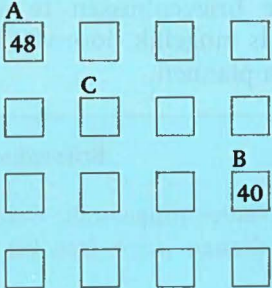
Werkblad 1 **Brievenbussen**

▶  totaal

▶  totaal

▶ Uit de getallen zie ik dat beter is.

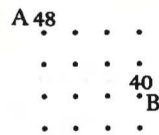
Werkblad 2 **Brievenbussen**

▶ 

met symmetrie in de stippenwijk. Aan het slot volgt een opdracht, waarop in les 4 wordt doorgegaan.
Lesduur: 30 minuten.

Verloop:

- * 'Wie weet nog wat het totaal is bij de situatie met in A een brievenbus?'
Eventueel nog even nakijken of narekenen. Dit getal wordt op de plaats van de brievenbus geschreven:



Evenzo bij de situatie met een brievenbus in B.

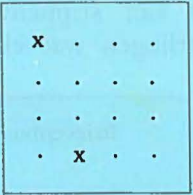
- * We praten erover of we dit patroon kunnen afmaken en wat dan nog uitgerekend moet worden. De leerlingen dienen een grote inbreng in dit deel van de les te hebben. Zij moeten begrip krijgen voor de symmetrie in het patroon.

De leerlingen nemen de figuur over op werkblad 2.

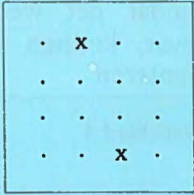
- * De leerlingen krijgen een werkblad waarop twee situaties staan aangegeven. Zij moeten – op het gevoel of na berekening – de beste situatie aangeven.

Werkblad 3 **Brievenbussen**

▶ De PTT vindt dat er twee brievenbussen in de wijk moeten worden geplaatst. Hier zijn twee voorstellen. Welke is de beste?



A



B

▶ Vul in:
Ik vind de beste.
Want ik zie

Les 4

In de vorige les hebben de leerlingen *op het gevoel* twee situaties met twee brievenbussen vergeleken. Daar gaan we op door. We vragen steeds: 'kan het nog beter? kan het nog handiger?'

Les 3

De nadruk valt in deze les op het leergesprek waarin de leerlingen gekonfronteerd worden



Via selecteren komen we op gelijkwaardige oplossingen. Tot slot volgt een opdracht die het karakter van een toets kan krijgen.
Lesduur: 50 minuten.

Verloop

- * De leerlingen krijgen werkblad 4. We geven de opdracht om daarin twee brievenbussen te plaatsen. Dat moet een beetje slim gaan. Omdat het werkblad vier stippenwijken bevat, kunnen de leerlingen wat eksperimenteren.

Werkblad 4 **Brievenbussen**

▶

.
.

- * Er volgt een gesprek. Op een groot vel met een stippenwijk die voor de klas hangt, noteren de leerlingen hun oplossingen. Zo komen een 10- à 15-tal oplossingen voor de klas te hangen. We proberen nu een aantal oplossingen te selecteren die *meerdere oplossingen representeren*. Dit gebeurt weer 'op het gevoel af'. Eigenlijk maken we klassen van oplossingen. Daarbij valt de opmerking 'die is hetzelfde als die.' We gaan daarop door: 'wie ziet er nog meer oplossingen die dezelfde zijn?' 'en waarom?' Dit moet helemaal uit de kinderen zelf komen.
- * We hebben nu een 4- of 5-tal klassen van oplossingen gekregen, die allen essentieel van elkaar verschillen en stellen de vraag: 'welke kies je nu?' Op de achtergrond blijft de wetenschap aanwezig dat elk van de vier voor meerdere gelijkwaardige oplossingen staat. Als de leerlingen niet op het idee komen om het bereikbaarheidsgetal van elk van de oplossingen te bepalen, moeten wij dat suggereren. Door vergelijking van de bereikbaarheidsgetallen komen we tot de beste oplossing.
- * We geven nu werkblad 5 met de opdracht om hier twee brievenbussen te plaatsen. Differentiatie is mogelijk door vier brievenbussen te laten plannen.

Werkblad 5 **Brievenbussen**

▶ Hier zie je een andere stippenwijk. Waar zet je twee brievenbussen neer? Doe het een beetje handig.
Probeer maar!

. . . .

▶ Probeer het ook eens op een andere – handiger – manier!

. . . .

Les 5

Toegift

Men kan het bovenstaande als een afgerond geheel beschouwen. We kunnen ook verder gaan op het subjektieve criterium dat iedere bewoner van de stippenwijk een bus op redelijke afstand van zijn woning heeft. Daaruit volgt een oplossing omtrent het aantal bussen dat dan minimaal nodig is.

Lesduur: 45 minuten.

Verloop

- * We noemen de criteria van les 1 nog even. Dan maken we de afspraak dat we een afstand van woning tot bus van 1 eenheid een redelijke afstand zullen noemen.
- * We delen werkblad 6 uit. De uiteindelijke oplossing volgt na proberen en het uitrekenen van bereikbaarheidsgetallen. De onderwijzer geeft individuele steun bij dit werkblad.

Werkblad 6 **Brievenbussen**

► Niemand in de wijk mag verder dan 1 afstand van de brievenbussen of van één van de brievenbussen wonen. Kijk, bijvoorbeeld zo:

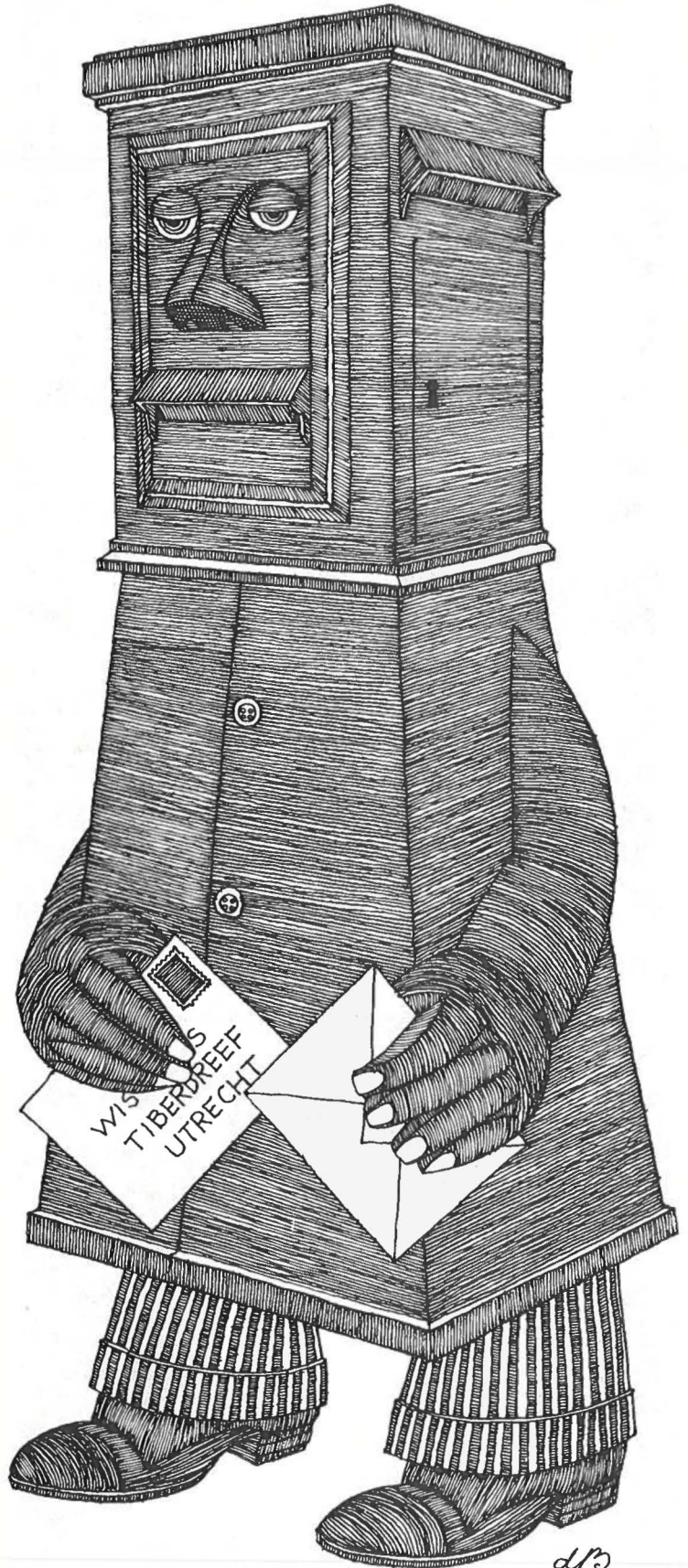
†	x	†	x
†	x	†	x
†	x	†	x
†	x	†	x

Hier zijn 8 brievenbussen nodig.

► Kun je wijken maken met minder brievenbussen?
Probeer het eens!

Aantal bussen <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- * We inventariseren de oplossingen en een gesprek over de oplossing volgt. Voor de inventarisatie is het weer handig om voor de klas een groot vel papier met stippenwijken te hangen. De leerlingen kunnen hun oplossingen hierop intekenen. In het gesprek komt opnieuw de *gelijkwaardigheid van oplossingen* naar voren.



1.5 de tijdmachine

EEN TERUGBLIK OP NATUURLIJKE
GETALLEN VANUIT HISTORISCH
'STANDPUNT'



LEEN STREEFLAND
FRED GOFFREE

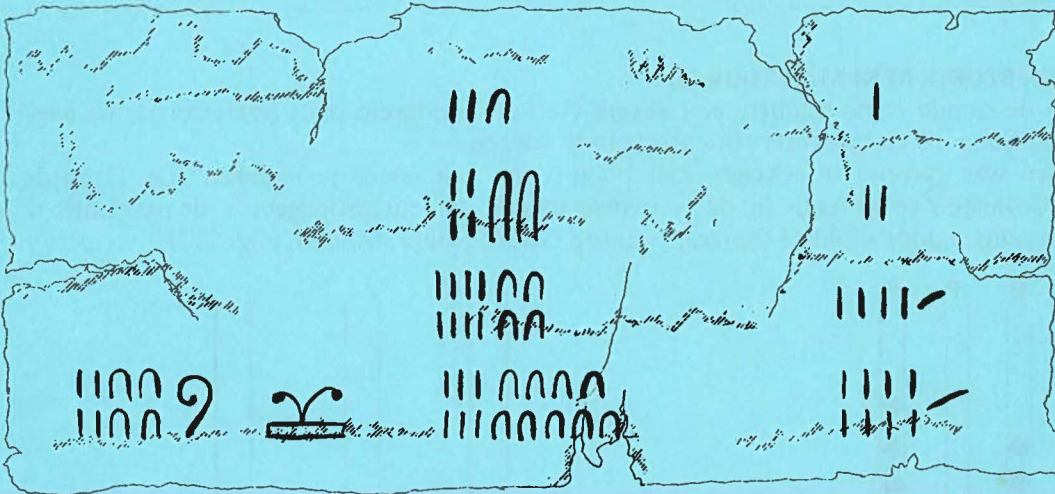
TELLEN, WAAROM EIGENLIJK?

Er is een moment geweest in de ontwikkeling van de mensheid, dat het kunnen tellen een volkomen overbodige lukse was. Hoewel is aan te nemen, dat een zeker hoeveelheidsbegrip funktioneerde (ook bij sommige dieren komt het voor, dat kleine hoeveelheden herkend worden), was van tellen nog geen sprake.

- *Kunt u omstandigheden c.q. gebeurtenissen aangeven in het leven van de 'primitieve' mens, waarbij de wenselijkheid en noodzakelijkheid van het tellen gevoeld werden.*

EEN STUKJE REKENKULTUUR (1)

De bekendste papyrus, via welke we met de egyptische 'rekenkunst' kennismaakten, is de zogenaamde *papyrus Rhind*, genoemd naar de engelsman Rhind, die deze tekst in Luxor kocht. Deze rol dateert uit circa 1700 voor Christus en is volgens de schrijver Ahmes overgenomen van een ouder voorbeeld, daterend uit de jaren 2000-1800 voor Christus. In deze papyrus treffen we onder andere het volgende aan:



- | : 1
- ∩ : 10
- ∩ : 100
- ⌢ : teken van de boekrol

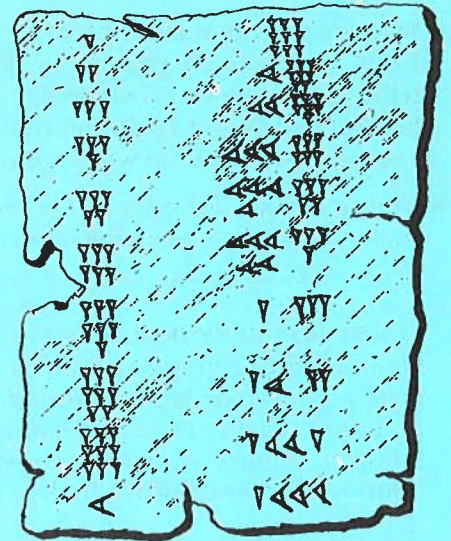
(links daarvan werd het antwoord van een berekening genoteerd)

- *Kunt u dit deel van de papyrus Rhind ontcijferen? (Het gaat om een bepaalde wijze van vermenigvuldigen).*
- *Tracht de gevolgde rekenwijze (het algoritme) stapsgewijs te noteren. Pas haar toe op een paar eigen gekozen voorbeelden en ga na of in deze problematiek een uitgangspunt voor een les voor vijfde klassen te vinden is.*

EEN STUKJE REKENKULTUUR (2)

Ook de babyloniërs bedreven hoogstaande 'rekenkunst'. Allerlei gegevens, welke men bij het rekenen gebruikte, werden 'genoteerd' op kleitabletten. Hieronder is een kleitablet met de tafel van negen afgebeeld.

- ▶ Welke symbolen gebruikten de babyloniërs en wat was hun betekenis?
- ▶ Welk systeem zat er in het noteren van de getallen?
- ▶ Met welke basis werkten de babyloniërs?
- ▶ Zijn in dit systeem 'kommagetallen' (breuken) mogelijk? Hoe?
- ▶ Vergelijk het egyptische, babylonische en 'ons' systeem eens met elkaar.
- ▶ Welke fundamentele verschillpunten merkt u op?
- ▶ Welke konsekwenties hebben deze systemen voor 'cijferen', 'reken-apparatuur', 'breuken'?



kleitablet

EEN STUKJE REKENKULTUUR (3)

In de tiende eeuw trachtte een zekere Gerbert (de latere paus Sylvester II) de west arabische- of Gobar-cijfers in europa in te voeren.

Men was gewend te rekenen met behulp van een (steentjes)-abakus (fig. 1) en de uitkomsten te noteren in de romeinse tekens. Hij nu propageerde de steentjes te vervangen door schijfjes (apices), waarop Gobar-cijfers stonden. (fig. 2)¹⁾

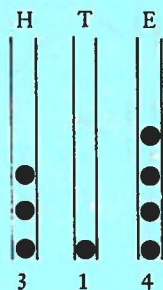


fig. 1

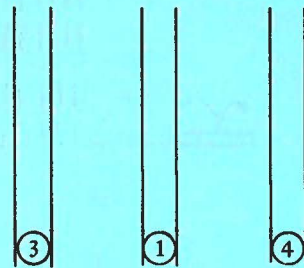


fig. 2

Hierdoor kwamen de arabische cijfers echter (nog) niet in gebruik.

- ▶ Waardoor was het optellen en aftrekken op de (steentjes)-abakus eenvoudiger dan op de abakus met de schijfjes?

Dit was echter niet de voornaamste reden waarom het door Gerbert voorgestelde 'rekentuig' op weerstand stuitte. Gebrek aan materiaal om op te schrijven is waarschijnlijk mede oorzaak van het feit, dat de abakus bij het rekenen in gebruik bleef. (Pas in 1154 werd in west-europa (spanje) de eerste papierfabriek gesticht). Na het jaar 1000 'laaide' een strijd op tussen 'algoritmici' en 'abakisten'.

- ▶ Kunt u een verklaring geven voor deze namen?

¹⁾ De Gobar-cijfers hadden de volgende gedaante:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

ABAKISTEN KONTRA ALGORITMICI

In Italië, destijds centrum van de handel, werden de voordelen van het rekenen op schrift, het eerst erkend.

- *Kunt u een groot voordeel noemen, dat het rekenen op schrift heeft ten opzichte van het rekenen met de abakus?*

Vooraf het boek 'Liber abaci' (1202), van de hand van Leonardo van Pisa (ook wel Fibonacci genoemd) heeft stimulerend gewerkt op de verbreiding van de Arabische cijfers. Tenslotte nog een didactisch probleem:

- *Op basis van de huidige stand van zaken mag aangenomen worden, dat de vier hoofdbewerkingen met natuurlijke getallen en de algoritmen daarvoor, ook in een modern leerplan vóór het vijfde jaar basisschool aan de orde geweest zijn. In het begin van het vijfde jaar zou men vanuit historisch standpunt kunnen terugblikken op het uitvoeren van verschillende operaties in \mathbb{N} om aldus aksenten te plaatsen bij belangrijke kenmerken van ons positiestelsel. Wat vindt u van een dergelijke aanpak? Welke bezwaren ziet u?*

2 ANTWOORDEN**Tellen, waarom eigenlijk?**

- het onthouden van het aantal in verband met jacht en visserij,
- het weten van het aantal dagen tussen twee volle manen, zodat men uitspraken over toekomstige gebeurtenissen kan gaan doen,
- het gebruik van regelmatigheden in de natuur: zon, maan, jaargetijden.

Een stukje rekencultuur (1)

12	1	
24	2	
48	4	✓
144	96	8 ✓

12 x 12 wordt op dit deel van de *papyrus* berekend via de zogenaamde verdubbelingsmethode, namelijk:

ga bij het produkt $a \times b$ met $a, b \in \mathbb{N}^+$ uit van $1 \times b$;

verdubbel zo vaak totdat het produkt $2^k \times b$ verkregen is, waarbij $\frac{1}{2}a < 2^k \leq a$; kies vervolgens die machten van 2, die samen gelijk zijn aan a en bepaal de som van de bijbehorende 'tussen'-produkten.

Voor de les(sen) op het nivo van vijfde-klas-sers verwijzen we naar het vervolg.

Een stukje rekencultuur (2)

$\nabla = 1$ òf 60 òf $3600, \dots$

De Babyloniërs hadden dus een positioneel notatiesysteem met 60 als basis.

Kommagetallen (of breuken) zijn in dit systeem inderdaad mogelijk, evengoed als in

ieder ander positioneel systeem, bijvoorbeeld:

$$\nabla \quad | \lll \ll \quad (1 \frac{30}{60} = 1 \frac{1}{2} \text{ of } 1,30)$$

$$\nabla \quad | \ll \ll \quad (1 \frac{20}{60} = 1 \frac{1}{3} \text{ of } 1,20)$$

Het Egyptische systeem was zuiver additief, dat wil zeggen: plaats en volgorde van de symbolen in een getal hadden in wezen geen betekenis. Het Babylonische systeem lijkt dus meer op het onze, omdat het wel het idee van plaatswaarde kende, alleen de bases (respectievelijk 60 en 10) verschillen. Bovendien kenden de Babyloniërs geen teken voor 0. Voor een deel was het systeem echter ook additief, omdat de getallen tot en met 59 (met behulp van 2 verschillende tekens) net zo werden gevormd als in het Egyptische systeem.

Binnen een positioneel systeem is cijferen mogelijk en kan dus rekenapparatuur ontwikkeld worden. Bovendien kunnen hierin de decimale breuken betrokken worden.

Een stukje rekencultuur (3)

– Bij het optellen of aftrekken op de (steen-tjes)-abakus kon men volstaan met bijvoegen, wegnemen en eventueel inwisselen. Wanneer men met apices zou gaan werken, dient men de 'tafels' van optellen en aftrekken tot 20 van buiten te kennen.

– De Algoritmici stonden het rekenen op schrift voor, daarbij gebruik makend van de (bekende) algoritmen voor de hoofdbewerkingen. De Abakisten hielden vast aan het rekenen op de abakus.

Abakisten kontra algoritmici

Bij het rekenen op schrift is het uitgevoerde algoritme achteraf controleerbaar.

Leerplanontwikkelingsvraag:

Wat ons (voorlopige) standpunt betreft, volstaan we met een verwijzing naar het vervolg.

3 TERUGBLIK OP DE OPERATIES IN \mathbb{N} VANUIT HISTORISCH 'STANDPUNT'

► WAAROM?

Bij een begripsmatige benadering van de verzameling der natuurlijke getallen en de vier hoofdbewerkingen met hun eigenschappen daarbinnen, worden een drietal essentiële karakteristieken van ons positionele notatiesysteem benadrukt, namelijk

- het idee van de plaatswaarde,
- het inwisselen,
- de rol van de nul als 'plaatsbekleder' voor een 'lege positie' in een getal.

Wanneer de verzameling \mathbb{N} verkend is en de vier hoofdbewerkingen met hun algoritmen beheerst worden, blikken we hierop terug, alvorens het positionele systeem een uitbreiding in de vorm van decimale breuken te laten ondergaan.

Het plaatsen van deze terugblik in een historische kontekst levert onder andere de volgende voordelen op:

- * Een konfrontatie van het hindu-arabische systeem met andere, waarbij in de signalering van de verschillen, de kenmerken van het positionele systeem nog eens geaccentueerd worden.
- * Het laten ervaren van de problemen, waarmee de mensen worstelden bij de ontwikkeling van hun rekensysteem; problemen, welke (mogelijk) ook als zodanig bij het zelf leren rekenen door de kinderen ervaren zijn.
- * De gememoreerde strijd tussen 'algoritmici' en 'abakisten' biedt een natuurlijke kontekst tot herintroductie van abakus en positiekaart; hulpmiddelen, die de kinderen al eerder leerden gebruiken bij het opereren met natuurlijke getallen.
- * De ontwikkeling van waardering voor de cultuur-historische ontwikkeling van de mensheid, waardoor eigentijdse superioriteitsgevoelens gerelativeerd worden.

► HOE?

In deze paragraaf willen we een schets geven van de manier, waarop we gepoogd hebben het gestelde doel in de Dr. Dreesschool te Arnhem gedurende de eerste periode van de ontwikkeling van het integratieplan te realiseren.

OPERATIES MET NATUURLIJKE GETALLEN Opbouw vanuit 'historische' beschouwing.

Les 1 en 2: Tellen: getalsymbolen/getalnamen

- * Tel het aantal kinderen in de klas.
 - Antwoord opschrijven.
 - Antwoord onder woorden brengen.
 - Onderscheiding van
getalsymbolen: 1, 2, 3, 4, ... en
getalnamen: één, twee, drie, ...
 - Vraag: zouden kinderen in andere landen deze opdracht ook begrijpen?
 - Praat er samen eens over en ook over: hoe zou dat komen?
- * Waarom schrijven we de namen en symbolen, zoals we ze schrijven?
We schrijven bijvoorbeeld:
1, 2, 3, ..., 10
11, 12,, 20
21,, 30
enz.
Vragen: hoe ver kun je zo doorgaan?
hoe 'lang' houdt een kilometer-teller in een auto het vol?
Wij schrijven onze getallen als in het voorbeeld.
- * Wie kent een andere manier om getallen te noteren? (romeins systeem)
Er zijn nog andere voorbeelden van *notatiesystemen*, bijvoorbeeld: het egyptische, het babylonische, het chinese en het hindu-arabische (het onze).
Op het egyptische, het babylonische en het onze komen we nog terug.
- * Vragen:
 - Waarom zou(den) de mens(en) zijn gaan tellen?
 - Hoe leerde(n) de mens(en) tellen?
 - Waarom zouden ze cijfers (symbolen) zijn gaan gebruiken?
 - Hoe schreven ze iets op?
 - Waarom zouden ze zo'n slim systeem (met 10 symbolen!) hebben willen ontdekken?
- * Niemand weet hoe en wanneer het begonnen is. Eerst zal tellen wel niet nodig geweest zijn. Dan: één, twee, veel.
Op een gegeven moment was het wél nodig, dat bepaalde aantallen onthouden werden. Wie bedenkt eens een voorbeeld?
 - Het onthouden van het aantal in verband met de jacht (en de verdeling van de buit daarna).
 - Idem met het vissen.
 - Het meten van het aantal dagen tussen twee volle manen, zodat men uitspraken kon gaan doen over toekomstige gebeurtenissen.

– Het gebruik maken van regelmatigheden in de natuur: zon, maan, jaargetijden.

- * Bij de behoefte aan het onthouden van aantallen komt ook het probleem van de schaapherder (*werkblad 1*) aan de orde. ('Even' tijdens de les er tussendoor.)

Na de bespreking van het schaapherderprobleem geven we de leerlingen (mondeling) de opdracht nog meer van zulke 1-1-verbindingen (als met schaap-steentje) te vinden.

Voorbeelden: knoop-knoopsgat
kop-schotel
schouwburgbezoeker-kaartje-
vakje plattegrond-stoel
leerling-tafeltje-stoeltje
auto-kenteken
gironummer-rekeninghouder

N.B.: Voor Lucky Luckliefhebbers: kerfjes op revolver-slachtoffers.)

- * Vervolgens komt het *tellen 'door afbeelden'* aan de orde.

– Schaapherder-steentje.
– Knopen in touw (Inca's).
– Tellen op de vingers.
– Kerfjes in stok (met daarbij – eventueel – de etymologie van uitdrukkingen als: 'hij heeft heel wat op z'n kerfstok', 'een streep aan de balk', 'op de lat kopen').

- * De volgende stap is groepjes maken (*turven!*).

Even enkele opdrachten als:

– Welk aantal wordt aangegeven door:
III III III?
– Hoe kan ik een aantal van 37 op deze manier weergeven?
– Een turfopdracht met behulp van *werkblad 2*: hoeveel bloemetjes staan op dit werkblad?

- * Vooral de *telstrategie* krijgt de volle aandacht bij de lesbespreking (bijvoorbeeld: streep een bloemetje door en turf, enzovoort).

De resultaten worden met elkaar besproken, waarna een aantal voorbeelden ter sprake komt, waarbij turven zinvol wordt toegepast:

– kladje van de onderwijzer bij kastie (punten, vangballen, runs, 'aan slag'),
– verkeerstelling,
– radioreporter: aantal vrije schoppen, aantal hoekschoppen,
– inventarisatie boekwinkel in verband met balans,
– kilometerteller op fiets (elke tik één omwenteling).

N.B.: In het voorgaande is geen strakke lesindeling gegeven volgens een be-

paald didactisch model. We menen dat met de gegeven sfeertekening volstaan kan worden om onze bedoelingen duidelijk te maken.

Les 3: Symbolen verschijnen

Opnieuw het probleem van de schaapherder, maar nu via *werkblad 3*.

Het werkblad wordt na verwerking besproken, waarbij de nadruk valt op het inwissel-idee (één steen wordt het symbool voor 10 vingers).

We brengen de in de vorige lessen genoemde manieren van schrijven van getallen (aantallen) in herinnering en laten van elk het symbool voor 10 zien:

egyptisch: \cap	babylonisch: \triangleleft	maya's : =
chinees : ㄣ	grieks : Δ	romeins: X.

Ter afsluiting van de les en in de volgende les(sen) gaan we enkele van die notatiesystemen aan een nader onderzoek onderwerpen. Dit gebeurt via de *werkbladen 4 tot en met 7*.

De vraag is nu: hoe motiveren we de 'instap' in de historie? Wij kozen voor het 'oproepen van een science-fiction-achtige sfeer' door te stellen, dat we via een tijdmachine zouden trachten naar het verleden terug te gaan, om de geheimen van de egyptische (en later: babylonische) rekenkunst uit te zoeken.

In de bespreking van de *werkbladen 4 en 5* komt tot uitdrukking:

– Karakteristiek voor het egyptische systeem is het additief-zijn (volgorde en plaats van de symbolen in een getal zijn in principe niet van belang).

– Het aftrekken 'gaat net zo' als bijvoorbeeld bij het afrekenen met de melkboer. (Wanneer men niet gepast kan betalen wordt vanaf het verschuldigde bedrag verder geteld, tot het betaalde bedrag.)

– Het (egyptische) delen verliep als volgt:
63 : 9 werd uitgevoerd als 'tel met 9, totdat je 63 vindt'.

Men vermenigvuldigde dus de deler (via de verdubbelingsmethode) totdat men 'bij' (of 'in de buurt van') het deeltal was.

Tijdens de bespreking van de *werkbladen 6 en 7* vergelijken we het babylonische met het egyptische getallenschrift. Hoewel het babylonische van vroeger datum was, kende het toch al het idee van *plaatswaarde* en stond dus op een hoger nivo. Bovendien is het belangrijk te signaleren, dat in beide systemen geen teken voor nul beschikbaar was (een karakteristiek die het (ons) hindu-arabische systeem wel heeft).

Les 4 (en volgende)

Met behulp van de historische informatie, zoals deze verwerkt is in de werkbladen op uw eigen nivo, maken we kennis met (of herintroduceren) de abakus en positiekaart, waarmee we weer op vertrouwd terrein zijn en de historische beschouwing (voorlopig?) kunnen beëindigen. Er kan nu weer (eventueel met gebruikmaking van abakus of positiekaart) naar hartelust gerekend worden. We proberen dit opereren met natuurlijke getallen echter wél zoveel mogelijk in de toepassingsfeer te plaatsen.

Maar daarover misschien in een ander nummer nog eens wat meer.

► HOE HET 'LIEP IN DE PRAKTIJK'

Om de volgende opmerkingen op hun juiste waarde te kunnen schatten is een enkele opmerking over de beginsituatie van de kinderen op het moment, dat we met dit pakket begonnen, op zijn plaats.

Gedurende een viertal weken hebben de kinderen niet meer gerekend in traditionele zin, doch uitsluitend 'Wiskobas' gedaan in het kader van het integratieplan.

Zonder op de inhoud van die vier voorafgaande weken in te gaan, kan gesteld worden dat nu reeds zichtbaar 'iets' in de attitude van de kinderen ten aanzien van het rekenen-wiskunde is veranderd. Ze zijn in het algemeen alert geworden voor problemen, gewend om op verschillende nivo's 'in te stappen', inventief in het bedenken van oplossingen, die de ontwerper bij het samenstellen van zijn teksten lang niet altijd onderkend had.

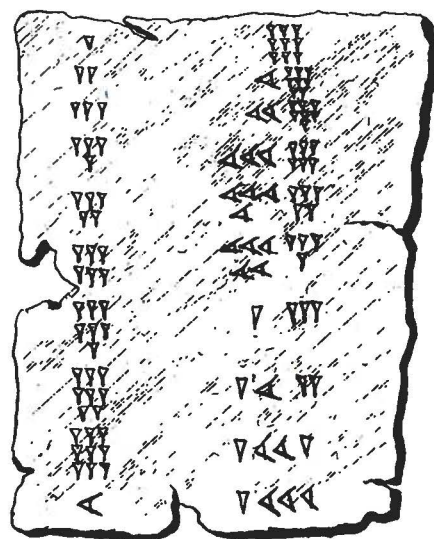
Kortom, bij alle gebreken die er nog aan het werk in de ontwerpschool kleven en die een grondige revisie van de tot nu toe ontwikkelde materialen noodzakelijk maakt, is een flexibilisering in de ontwikkeling van het aanpakgedrag van de kinderen te herkennen.

Tegen deze achtergrond gezien kan gesteld worden, dat het gepresenteerde pakket zonder meer voldoet aan de eisen van de onderwijspraktijk. Komen we zo tot wat meer concrete opmerkingen, dan leert de ervaring:

* De leerlingen worden duidelijk gemotiveerd door de historische kontekst, waarbinnen de activiteiten zich afspelen.

* Zoals reeds gezegd: de kinderen zien vaak méér in een probleem, dan de ontwerper er in legde.

Zo wordt op werkblad 7 bijvoorbeeld het volgende kleitabel gegeven:



Zoals uit de opdrachten op werkblad 7 duidelijk blijkt, is het niet alleen de bedoeling dat de kinderen de tekens op het kleitablet (in twee gedeelten) ontcijferen, doch uit die ontcijfering de idee van plaatswaarde in het babylonische spijkerschrift ontdekken.

Tijdens de bespreking van opdracht ② (werkblad 7) ('Wat staat er, denk je, op het kleitablet?') komen de volgende suggesties uit de klas naar voren:

'De tafel van 1 aan de linkerkant.'

'De tafel van 9 aan de rechterkant.'

'En als je zo doet: $1 + 9 = 10$
 $2 + 18 = 20$ etc.,

kun je de tafel van 10 er ook nog uit aflezen.'

* In zijn artikel 'Wat hoofdrekenen is, weet iedereen' ¹⁾ schrijft Huub Jansen:

'Inzicht in deze eigenschappen en vooral het kunnen gebruiken van de eigenschappen bij het oplossen van rekenproblemen, is kenmerkend voor goed hoofdrekenen'.

Wanneer we het rekenonderwijs in een nieuw jasje steken is het voor de onderwijzer van belang, dat hij bepaalde zaken uit het traditionele rekenen herkent. Het gepresenteerde pakket bevat diverse van die momenten en we willen er één, die betrekking heeft op het aangehaalde citaat, uit de ervaring 'lichten'.

Op werkblad 5 is het voorbeeld gegeven van de wijze, waarop de egyptenaren 12×12 berekenden. Na een voldoende aantal malen verdubbeld te hebben:

1	12
2	24
4	48
8	96,

wordt het produkt uiteindelijk bepaald door de juiste regels uit het verkregen

overzicht bij elkaar te plaatsen, in dit geval:

4 48
8 96

en deze op te tellen.

In wezen komt deze handeling neer op het toepassen van de distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging over de optelling. Immers, in feite staat er:

$$\begin{array}{r} 4 \times 12 = 48 \\ 8 \times 12 = 96 \\ \hline 4 \times 12 + 8 \times 12 = 48 + 96 \quad \text{of} \\ (4 + 8) \times 12 = 144 \quad \text{of} \\ 12 \times 12 = 144. \end{array}$$

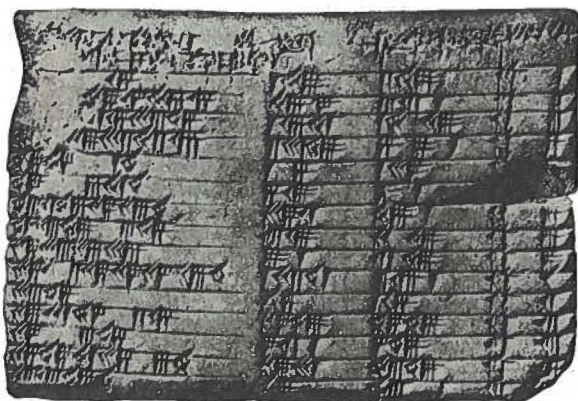
Ook dit ontdekken de meeste kinderen.

- * Op grond van de laatste opmerking moet vermeld worden, dat niet altijd alle kinderen zonder hulp tot de gewenste resultaten komen. Uiteraard ligt er voor de onderwijzer(es) een taak om de betrokken leerlingen door denkstootjes en stimulerende opmerkingen over een barrière te helpen, zodat ze daarna zelfstandig verder kunnen.

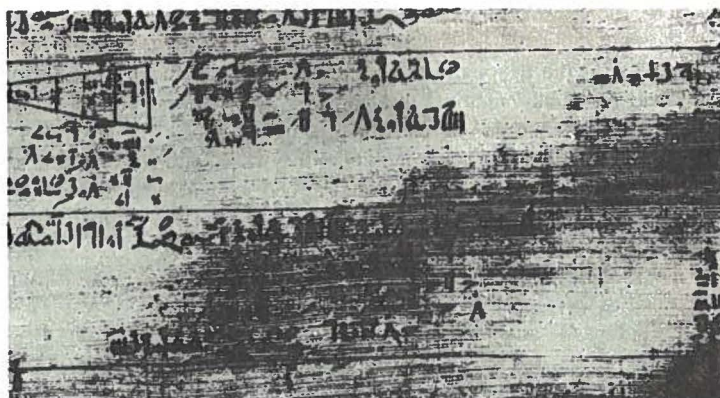
► SAMENVATTING

Samenvattend kunnen we stellen dat leerlingen, onderwijzers en ontwerpers aan de ontwikkeling en praktische realisering van het voorgaande pakket veel plezier beleefden en dat juist daarom een uiterst kritische beschouwing uwerzijds gewenst is. Van daaruit kunnen we tot een verantwoorde 'revisie' van het pakket voor de onderwijspraktijk komen. We hopen dan ook dat het voorgaande u tot de gewenste reacties zal bewegen.

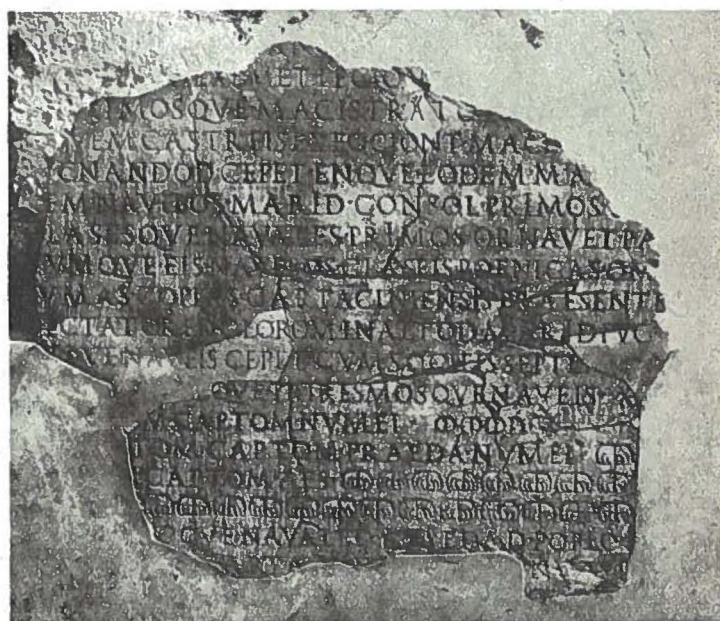
Afbeeldingen ontleend aan 'Zahlwort und Ziffer' (Karl Menninger) en 'The World of Mathematics' (James R. Newman).



Babylonisch kleitablet met getallen in spijkerschrift (1800 voor Christus).



De foto laat een gedeelte van de papyrus Rhind zien. Het schrift moet gelezen worden van rechts naar links en van boven naar beneden.



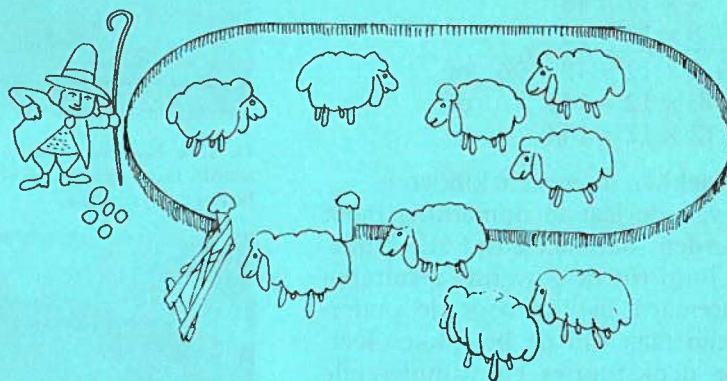
Inskriptie op de Columna Rostrata bevattende o.m. 20 tekens voor 100.000. De zuil werd in Rome opgericht om de overwinning op de Karthagers (260 voor Christus) te herdenken.



Egyptische getallen in beeldschrift (2500 voor Christus). We lezen: 2234... en 232413; een ezel ongeveer een $\frac{1}{2}$ m hoog.

WERKBLAD 1

DE SCHAAPHERDER, TELT HIJ?

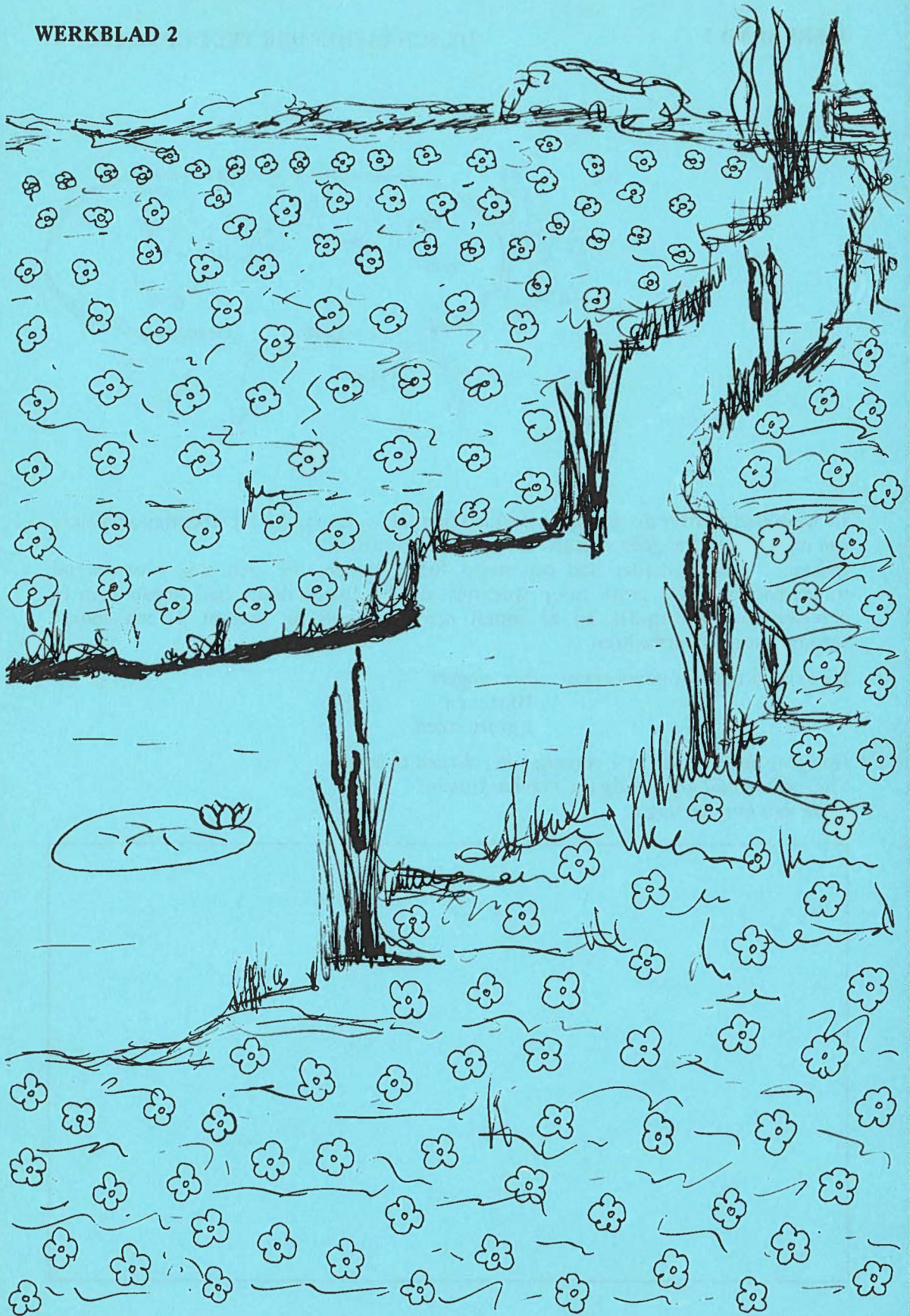


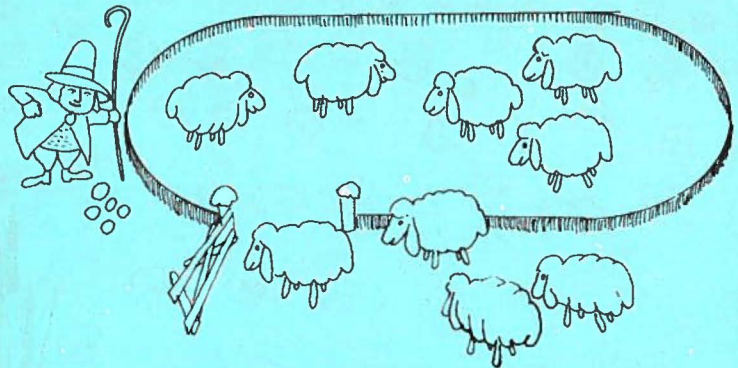
Vroeger, toen ons land nog dun bevolkt was, trokken herders met hun kudden schapen dagelijks er op uit om de dieren te laten grazen. 's Avonds, wanneer de kudde naar de kooi gebracht werd, *telde* de herder zijn schapen.

Er was echter een tijd, dat de mensen nog niet tellen konden. Hoe kon een herder dan te weten komen, dat hij geen enkel schaap miste?

- *Probeer dit probleem op te lossen. Het plaatje kan je op weg helpen. Schrijf je oplossing in onderstaande ruimte.*

WERKBLAD 2





In werkblad 1 (over de schaapherder) hebben jullie gezien, dat hij steentjes gebruikte om na te gaan of er geen schaap aan zijn kudde ontbrak.

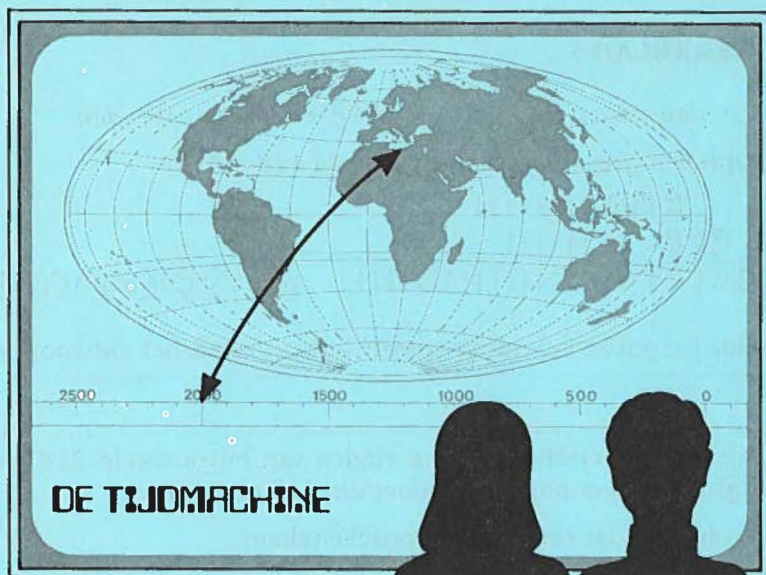
Alleen, deze herder had een nogal flinke kudde, die zich nog voortdurend uitbreidde ook. De grote hoop steentjes, die hij steeds nodig had begon hem te vervelen, ook al omdat hij ze moest meeslepen, als hij besloot in een andere schaapskooi te overnachten.

Hij gebruikte daarom voortaan: zijn vingers
 10 stenen
 1 grote steen.

- *Hoe ging deze herder in 't vervolg zijn schapen tellen?
Tot welk aantal kon hij op die manier komen?
Maak een kort verslagje:*

WERKBLAD 4

HOE DE EGYPTENAREN REKENDEN



We gaan eens kijken naar de manier, waarop de egyptenaren getallen schreven en hoe ze er mee rekenden.
Dat is lang geleden, zeg!

- ① Hoe lang is het ongeveer geleden? (Je kunt het aflezen op de 'tijdmachine-kaart').

Ongeveer jaar.

Voor de getallen 1 tot en met 9 gebruikten ze streepjes.

Voor tien, honderd, duizend, enz. hadden zij andere tekens. Kijk maar:

(tien)
boog

(honderd)
krul

(duizend)
lotusbloem

Zo schrijven wij $\text{CC}\text{AAA}\text{IIII}$ als 234.

De *volgorde* van de tekens was niet belangrijk.

Dus ook $\text{IIII}\text{AAA}\text{CC}$ betekent 234.

- ② Zie je nog een ander verschil behalve de volgorde? Schrijf maar op:

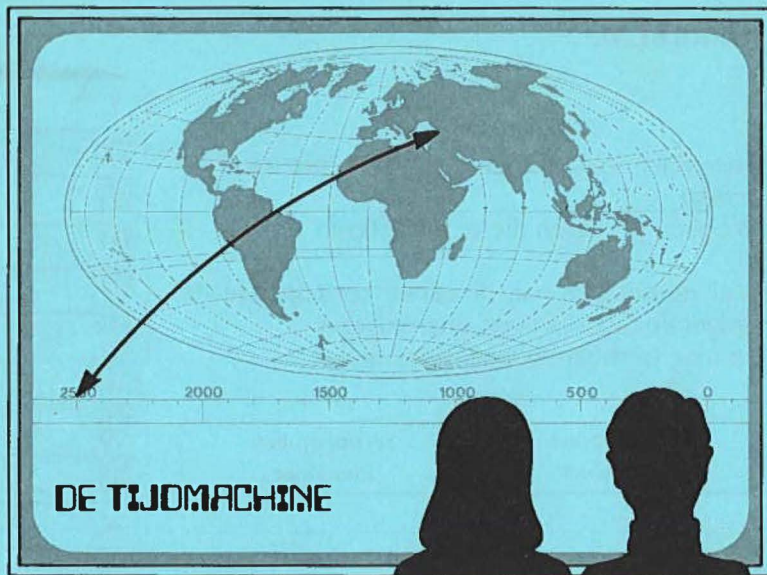
- ③ Is de volgorde in ons getallenschrift belangrijk?

Schrijf ook op waarom?

- ④ Vul de volgende tabel verder in:

$\text{CC}\text{AAA}\text{IIII}$	$2 \times 100 + 3 \times 10 + 6 \times 1$	236
$\text{CCC}\text{A}\text{IIIIII}$		342
$\text{AAA}\text{AA}\text{III}$		89
		204
		2030

WERKBLAD 6



We gaan nu nog eens de geschiedenis in. We bekijken het babylonische getallenschrift. Op de 'tijdmachine-kaart' kun je zien, waar zij (de babyloniërs) woonden.

① Om hoeveel jaar geleden gaat het nu? Ongeveer jaar.

De babyloniërs hadden maar twee tekens:
 ∇ (spijker) en < (winkelhaak)

Je zult het niet vreemd vinden dat men sprak van *spijkerschrift*.
 De tekens werden aangebracht op vochtige kleitabletten en daarna in de zon gedroogd, waardoor ze hard werden:



② Op het kleitafeltje staat het getal 23.

* Wat betekent dan een spijker?

* Wat betekent dan een winkelhaak?

③ Vul nu de volgende tabel verder in:

spijkerschrift	ons getallenschrift
<<<< ∇∇∇	43
<<< ∇∇∇∇∇	
<<<<< ∇ ∇∇∇∇∇	27
	60

Zo, je weet nu al wat van het spijkerschrift, maar er valt nog meer aan te ontdekken.

Kijk maar op het volgende werkblad.

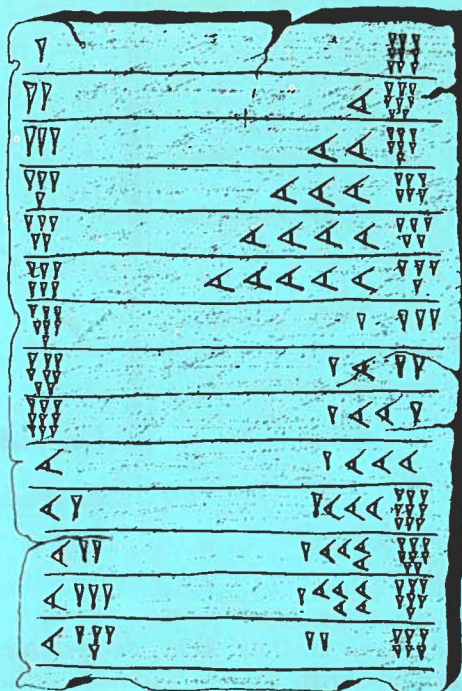
WERKBLAD 7

Hiernaast zie je een kleitablet met *spijker-schrift*.

We gaan proberen die te ontcijferen.

- ① Vul de getallen van de eerste zes regels in de volgende tabel in (met onze cijfers).
Je mag werkblad 6 erbij gebruiken.

links op het kleitablet	rechts op het kleitablet



- ② Kijk eens goed naar de getallen in de tabel. Ontdek je iets?
Wat staat er, denk je, op het kleitablet?

- ③ Wat staat dus op de zevende regel van het kleitablet?

links op het kleitablet	rechts op het kleitablet

- ④ Ontcijfer ook de laatste 7 regels van het kleitablet en vul de volgende tabel in:

links op het kleitablet	rechts op het kleitablet

- ⑤ Bekijk nu rechts op het kleitablet de getallen *boven* de 60 nog eens goed.
In werkblad 6 leerde je, dat een spijker 1 betekende.
Wat kan een spijker ook betekenen?

- ⑥ Waarvan hangt het af, wat een spijker in een getal betekent?
Op het kleitablet kun je dat zien.

suorpores

INHOUD

1.1 <i>Inleiding</i>	86
1.2 <i>Ordenend tellen</i> (klas 1)	87
1.3 <i>Ordenend tellen</i> (klas 3)	93
1.4 <i>Ordenend tellen</i> (klas 5)	97

MEDEWERKERS AAN DIT BLOK:

Teams van de Margarethaschool (Arnhem), Pieter Breughelschool (Arnhem), Apollo-school (Hoevelaken), Van der Huchtschool (Soest).

Een groep studenten van de Rijks Pedagogische Akademie te Amersfoort.

Daan Karman, Rob de Jong.

blok

1.1 inleiding

In de voorgaande aflevering van het Wiskobas-Bulletin heeft u kunnen kennismaken met enkele problemen op het gebied van het *ordenend tellen*. Tevens werden wat ervaringen, die tijdens gesprekken met kinderen opgedaan waren, vermeld.

Toen we het betreffende VARIABEL BLOK samenstelden, werd ons steeds duidelijker dat de waarde van het gepresenteerde goeddeels afhankelijk zou zijn van de inbreng van kollega's bij het basisonderwijs.

Van het betrekkelijk kleine aantal leerlingen dat bij het voorontwerp was ingeschakeld zijn de leerprocessen vrij minutieus geregistreerd en hier en daar geanalyseerd. Een eventueel meer algemene geldigheid van de analyses zou echter alleen kunnen blijken vanuit ervaringen in andere situaties met andere gesprekspartners.

Belangrijke vragen waren tevens:

- * Hoe zouden kollega's de problemen aanbieden? — de beschrijvingen in het bulletin waren open genoeg om een diversiteit in de aanpak mogelijk te maken —
- * Zouden andere presentatiewijzen van zelfde problemen andere processen op gang brengen, andere resultaten ten gevolge hebben?
- * Welke aanvullingen, suggesties, kritische notities komen vanuit de onderwijspraktijk en zijn bruikbaar om het voorontwerp te verbeteren?
- * In hoeverre vinden kollega's van de basisschool het zinvol om dit soort problemen in hun onderwijs op te nemen?

We zijn bijzonder blij dat teams van de volgende scholen zich met de telproblemen en de gestelde vragen hebben willen bezighouden:

- Margarethaschool te Arnhem (1)
- Pieter Breughelschool te Arnhem (2)
- Van der Huchtschool te Soest
- Apolloschool te Hoewelaken.

Een groep studenten van de Rijks Pedagogische Akademie te Amersfoort heeft eveneens gesprekken met kinderen gevoerd.

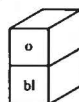
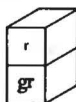
De belangrijkste gegevens uit de verslagen willen we u in dit RESPONS BLOK graag aanbieden. Alhoewel we reeds nu op enkele plaatsen kanttekeningen willen maken, zullen we toch nog even wachten met een afsluitend commentaar en met het trekken van voorlopige konklusies tot ook andere schoolteams en studentengroepen gereageerd hebben. Zo weten we dat er — op het moment dat we dit schrijven — o.a. op scholen in Oss en Lunteren met de telproblemen gewerkt wordt.

1.2 ordenend tellen (klas 1)

Torens bouwen en afbreken (1)

Er liggen 5 blokjes van 5 verschillende kleuren op tafel:

r o gr gc bl



r = rood
o = oranje
gr = groen
gc = geel
bl = blauw

Hiermee gaan de leerlingen torens bouwen. Voor de eerste verdieping mag gekozen worden uit de kleuren geel, groen of blauw. Voor de tweede verdieping uit de kleuren rood en oranje.

Opdracht: Bouw zoveel mogelijk verschillende torens en breek ze steeds weer af.

Soest

De twaalf leerlingen gaan entoesiast aan het werk

- drie leerlingen komen niet uit de opdracht;
- drie leerlingen bouwen in 't wilde weg en raken de tel kwijt;
- zes leerlingen bouwen volgens het systeem: neem 't oranje blokje in de hand en ga er mee langs de onderkleuren – resultaat: drie torens;
twee leerlingen gaan verder en doen hetzelfde eveneens met het rode blokje – resultaat: zes torens.

Eén kind verzucht: 'Had ik maar een papier-tje'. Met het verstrekte papier doet hij echter niets.

Arnhem (2)

Zeer verwarrend. De (drie) leerlingen kunnen niet onthouden welke blokjes boven moeten. Ze zijn vlug afgeleid. Na enige hulp komt Carolien tot vier torens. Verder gaat het niet. Ze werken ook niet samen. Van ordenen is geen sprake.

Amersfoort

We geven de twee leerlingen (een goede en een middelmatige) elk een groepje van vijf blokjes. De leerlingen begrijpen de opdracht snel. Al gauw vindt de ene leerling vijf mogelijkheden en de andere zes mogelijkheden.

Hoewelaken

Na een verhaaltje over de te bouwen huizen zitten de vier kinderen nog een beetje met de kleuren. Ik neem nu een vel papier en teken er een huis op. Bovenin een kruisje.

'Hier horen rood of oranje.'

Op een ander vel ook een huis, maar nu onderin een kruisje.

'En hier blauw of geel of groen.'

Het is nog wel even zoeken, maar 't lukt. Het afbreken is een probleem.

'Ik weet niet meer wat ik had.'

De foto's in dit blok zijn gemaakt door R. Zijlstra, hoofd van de Apolloschool te Hoewelaken.

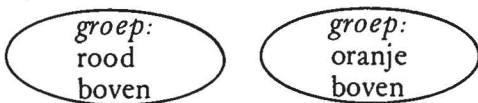


Torens bouwen en niet afbreken (2)

Op tafel liggen 5 groepen gekleurde blokjes. Elke groep bestaat uit blokjes van dezelfde kleur: rood en oranje (voor de tweede verdieping); geel, groen en blauw (voor de eerste verdieping).
Weer de vraag: bouw zoveel mogelijk verschillende torens en laat ze staan.

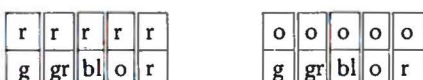
Arnhem (2)

Deze opgave is al wat gemakkelijker. Carolien ziet het 't snelst. Erik meent vervolgens dat je ze kunt sorteren:



Zelf zien ze geen mogelijkheid om te noteren. Na enige hulp gaan ze grif kleuren en willen weer gaan tekenen.

¹⁾ Kennelijk wijkt de verstrekte opdracht enigszins af van de opgave in het bulletin. We vermoeden dat de volgende oplossingen geakcepteerd zijn:



Amersfoort

Elke leerling krijgt vijf groepjes van vijf verschillend gekleurde blokjes.

Opdracht: bouw vijf verschillende torentjes! We voegen de tien resulterende torentjes (ieder had er vijf) bijeen en laten gelijken weghalen. Acht torens blijven over.¹⁾

Hoewelaken

De leerlingen blijven gemotiveerd. Ilse bouwt twee huizen met dezelfde kleur. De opmerking 'kijk eens' is al voldoende om één van de blokjes te veranderen. Waar de onderkleur boven komt, gaan we even terug naar het papiertje met de kleuren.

Elke: 'Ik heb er vijf. Meer weet ik niet.'
We stoppen even.

'Waar heeft ze nu het meeste van?', vraag ik, wijzend op de bovenkleur.

In koor: 'Oranje.'

Elke pakt al een rood dak, maar ik vraag haar



nog even te wachten. We gaan nu de huizen van Ilse met de huizen van Elke vergelijken. Het blijkt dat Ilse een huis met een rood dak meer heeft.

Resultaat: Elke en Ilse vijf torens; Marcha en Harald vier torens. Met elkaar komen we tot zes *verschillende* torens!

Soest

Elf kinderen komen zeer snel tot zes torens; één kind tot vijf torens.

Vier kinderen bouwen lukraak; drie kinderen werken met: twee groen, twee geel, twee blauw en zetten daar de bovenkleuren op; vijf kinderen zetten achtereenvolgens drie oranje blokjes en drie rode blokjes op de onderkleuren.

Allen zijn er gauw van overtuigd dat er niet meer mogelijkheden zijn.

Ter kontrôle wordt gesorteerd.

Vier kinderen letten hierbij op de onderkleuren, zes kinderen letten op de bovenkleuren en twee kijken af.

Aankleden (3)



Dit poppetje is op een vel papier afgebeeld. We hebben er kleding voor geknipt. Twee bloesjes: een rood en een oranje. Drie rokjes: een blauwe, een gele en een groene rok.
'Kleed het poppetje op zoveel mogelijk verschillende manieren aan door de bloesjes en rokjes op het papier te leggen.'
(Er werd een gesprek gehouden over garderobes).

Amersfoort

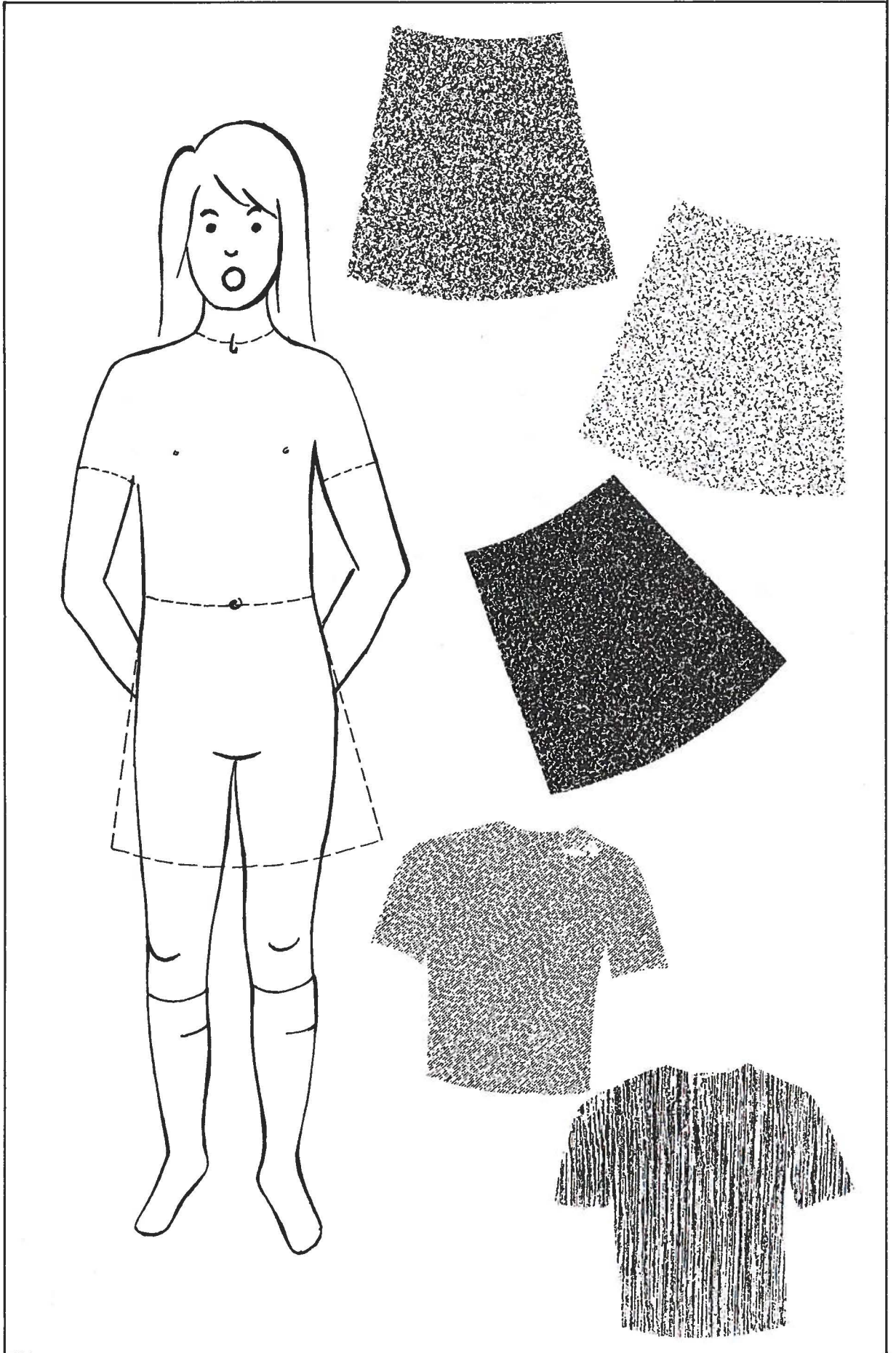
Op de opdracht 'kleed de pop op zoveel mogelijk verschillende manieren aan', zegt de goede leerling direkt: 'Dat zijn zes manieren. Het is makkelijk. Eerst rood met blauw, groen en geel en dan oranje met blauw, groen en geel. Dat is bij elkaar zes.'

Hoewelaken

Aanwezig zijn: rode en oranje vesten; zwarte, blauwe en groene rokken.

'Een mevrouw wil zich steeds anders gaan kleden. Bedenk eens veel manieren.'

Iedereen probeert tot alles op is.



Ik vraag of ze eens willen kijken wat gelijk is (vergelijken).

Weinig interesse.

'Wanneer je een zelfde poppetje ziet, mag je JA roepen en dat poppetje weghalen.'

Nu gaan ze op volle kracht.

We houden er zes over.

'Hoe kun je die zes nu bij elkaar leggen?'

In eerste instantie oriënteren ze zich op de rokjes.

Na de vraag 'waar kun je ook naar kijken?', gaan ze – lettend op de vesten – de zaak verschuiven.

Soest

Inleidend verhaaltje over een ijdel meisje dat er graag iedere keer anders uit wil zien. Ze heeft een slimme moeder, die twee bloesjes en drie rokjes voor haar maakt.

'Hoeveel keer kan ze er anders uit zien?'

Ieder kind (eenendertig leerlingen) krijgt vijf repen verschillend gekleurd papier en een roken bloespatroon (opplak-vel).

'Knip en plak zoveel mogelijk verschillende combinaties.'

De leerlingen vinden het een leuke opdracht, maar er wordt nogal willekeurig gewerkt. Slechts één kind werkt systematisch en sorteert naar de rokjes. Deze leerling heeft ook met de blokjes gewerkt.

Acht kinderen plakken wel de bloesjes om en om, maar in de rokjes is geen systeem.

Twintig kinderen vinden de zes combinaties. Acht kinderen vinden er vijf. Twee kinderen vier en één kind drie.

Arnhem (1)

Dit levert helemaal geen problemen op. De zes combinaties worden binnen zeer korte tijd gevonden. Liever zou ik voor deze oefening een poppetje in *vooraanzicht* gebruiken, daar dit voor de leerlingen gemakkelijker aan te kleden is. Zelf heb ik een poppetje in vooraanzicht gebruikt (zie afbeelding op pagina 90). Met de kontoerlijnen op 't poppetje getekend, lukt het beter om de bloesjes en rokjes goed te leggen. Om precies te onthouden welke kleurencombinaties al aan de orde geweest zijn, worden de gekleurde blokjes ingeschakeld en iedere combinatie nog een keer 'gelegd'. Persoonlijk vind ik dit een bijzonder handig hulpmiddel, maar 'het onthouden' wordt hier wel bij uitgeschakeld.

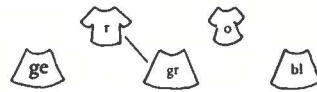
Toch is er sprake van zeer systematisch werk: eerst wordt het oranje bloesje neergelegd en dan afwisselend de verschillende kleuren rokjes, daarna het rode bloesje met de rokjes in precies dezelfde volgorde.

Arnhem (2)

Dit gaat redelijk vlug. Ze gebruiken nu wel de kleurpotloden, maar niet uit zichzelf de torentjes. Dus ze leggen er geen verband tussen. De opgave valt wel in de smaak door het gebruikte materiaal.

Lijnen trekken (4)

De 'kledingstukken' van het poppetje worden op een vel papier gelegd in deze formatie:



Een combinatie wordt aangegeven door een lijn te trekken van r (rood) naar gr (groen), waarop de vraag volgt om alle combinaties op die manier te tekenen.

Soest

Vierentwintig kinderen trekken de zes 'goede' lijnen; zeven kinderen komen er niet uit.

Arnhem (1)

Geen systematisch werk. Het gebeurt zo maar. Kris-Kras! De kinderen kijken alleen maar van welke bloes naar welke rok er nog geen streep loopt.

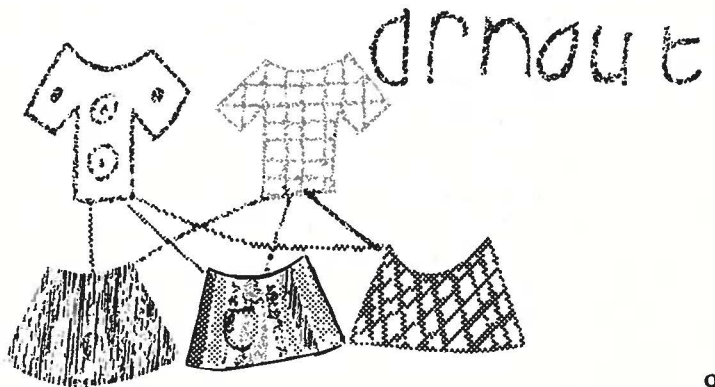
Arnhem (2)

Dit gaat erg vlug. Vooral Carolien heeft het meteen in de gaten.

Ik laat ze alle drie hun ogen dicht doen en vraag welke rokjes verbonden kunnen worden met het rode truitje (rode lijnen) en welke met het oranje truitje (oranje lijnen). Dit kunnen ze alle drie vlot.

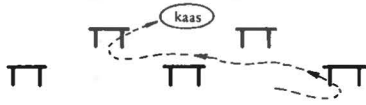
Amersfoort

De leerling die in de voorgaande opgave direkt een goed antwoord gaf, trekt nu vijf lijnen (waar ze er later toch nog één aan toevoegt). De andere leerling doet het ineens goed.



Het muizenprobleem (5)

Dit probleem kan als een spelletje in de klas worden geïntroduceerd. Laat een 'leerling-muis' onder tafels doorkruipen naar de 'kaas' en laat kinderen raden welke weg de muis heeft gevolgd. Op bord kan een 'plattegrond' worden getekend, waarop de roetes worden aangegeven. We kunnen ook een symbolisering stimuleren door de tafels te benoemen (bijvoorbeeld: roete Jan-Carla).



Variaties:

- Laat 5 kinderen door de 'poorten' naar de kaas kruipen – elk kind moet een verschillende roete gaan. Laat ook 7 kinderen dit eens proberen.
- Sluit enkele poorten, zodat het aantal mogelijkheden vermindert.

Hoewelaken

Het spel wordt op een vel papier gespeeld. Stroken Unifix zijn de muren. Een rode muis moet naar de gele kaas. De door de muis gelopen weg markeren we met een lijntje. Zonder moeite worden aldus de zes wegen gevonden. We praten nog even na.

'Hoe vaak kun je de voorste drie poortjes gebruiken?'

'Twee keer.'

Nu zien ze dat je er ook met tellen kunt komen: $2 + 2 + 2$.

Soest

De kinderen vinden 't spel zelf het leukste. Met elkaar worden vrij gauw de zes mogelijkheden gevonden.

Eén kind zegt ineens, heel entoesiast: 'Nu weet ik wat u gaat doen. 't Is precies hetzelfde als de bloesjes en de rokjes.'

Arnhem (1)

Ook nu wordt niet systematisch gewerkt. De leerlingen kruipen onder verschillende stoelen door om bij een 'kaas' te komen en laten als spoor een gekleurd draadje achter. (Er zijn zes verschillende kleuren!)

Het geheel blijkt moeilijk te overzien, waardoor niet alle mogelijkheden gevonden worden.

ALGEMENE OPMERKINGEN

Arnhem (1)

De leerlingen worden bij dit soort oefeningen gedwongen tot systematisch denken, wat voor eerste-klassers nog niet meevalt. Deze vorm van werken is beslist niet ongeschikt voor de basisschool, maar mijns inziens alleen te behandelen in kleine groepjes.

De leerlingen reageren leuk op de opdrachtjes. Ze zijn gefascineerd door de gebruikte kleuren en werken erg spontaan. Later vertellen ze dat ze het bouwen van de verschillende torens het moeilijkst vinden.

Persoonlijk vind ik het enorm leuk om eens op deze manier te werken. De kinderen vragen bij dit soort werk individuele begeleiding.

Arnhem (2)

Wellicht is de stof gewenst, maar het moet dan wel op een lager nivo.

De stof moet nog meer aangepast zijn aan de leefwereld en de mogelijkheden van het kind. De reactie van de kinderen is dat ze het wel leuk vinden.

Hoewelaken

Erg zinvol. Belangrijk om het eerst eens met een kleine groep te doen en pas daarna met een hele klas.

Het geeft zeker mogelijkheden tot goed doordenken, maar voor de zwakkere leerlingen lijkt het me te moeilijk.

Amersfoort

De opgaven zijn voor de betreffende twee leerlingen beslist haalbaar. Of dit het geval zal zijn voor en met een hele klas, is een tweede. Als leerkracht sta je er helemaal alleen voor. Volgens ons is dit project als klassikaal werk niet realiseerbaar. Als individuele les is het echter zeer aan te bevelen. Je leert met name wat de leerling door heeft, waarop je moet ingaan, enzovoort.

Soest

De materie is entoesiast verwerkt. Er is meer eksperimenteel gespeeld dan dat er systematisch is gewerkt. 't Spel is leuker, maar ze zijn wel verrast door het resultaat en hebben plezier in 't vergelijken.

Toch komen de torenbouwers niet spontaan tot het ontdekken van de isomorfie. Na een gesprekje is 't wel snel duidelijk. 't Werken met deze problemen is erg boeiend en stimulerend. Om dit regelmatig te doen en op te nemen in 't geheel lijkt me wenselijk. 't Moet mogelijk zijn hier tijd voor te vinden.

KANTTEKENINGEN

* *Uit vrijwel alle verslagen blijkt, dat de kinderen de zaak in het begin chaotisch aanpakken.*

Om daarna de vraag te beantwoorden of er nog andere torens zijn te bouwen wordt de kinderen gevraagd een uitputtingsmethode te vinden die gebaseerd is op een (door de volwassene) beoogde systematiek.

* *Transfer van deze systematiek op andere problemen, komt evenals het symboliseren bijna niet 'spontaan' tot stand.*

Anderzijds worden geschematiseerde opgaven (zoals het trekken van pijlen tussen kledingstukken) gemakkelijk gevonden.

* *Het muizenprobleem en het zoeken naar alle mogelijkheden zijn opgaven die een spel- of wedstrijd karakter dragen. Dergelijke opdrachten blijken de kinderen sterk te animeren.*

1.3 ordenend tellen (klas 3)

Over wegen (1)



Hier zie je het huisje van roodkapje en het huisje van grootmoeder. Als roodkapje naar grootmoeder gaat kan ze kiezen uit een aantal paden door het bos. Welk pad zou jij kiezen?

Gerrit zit op school. Als de school uit is, gaat Gerrit direkt naar huis. Moeder vraagt hem een boodschap bij de bakker te doen. Ze geeft hem geld mee. Gerrit kan van school naar huis uit twee wegen kiezen (let op de dubbele betekenis van 'wegen!') en van huis naar de bakker uit drie wegen.

Vrij gemakkelijk ontstaat de indruk dat er 'dus' 5 wegen zijn. Het ligt er maar aan hoe je het bekijkt. We spreken af dat we met een weg een roete van de school naar de bakker via huis bedoelen.



Arnhem (1)

Eerste probleem.

'Welk pad zou jij kiezen?'

Elodie: 'De bovenste, dat is de korste weg van Roodkapje naar het huis van grootmoeder. Maar er zijn drie wegen.'

Tweede probleem.

Eerste reactie bij het zien van de wegen:

'Dit zijn er drie, dit twee, dat kan niet.' (Elodie)

'Er zijn vier wegen. De laatste staat niet bij de eerste, dus twee.' (Ferry)

'Het zijn er drie. De eerste twee en het laatste stukje.' (Elodie)

Even later: 'Nee, het zijn er vier.'

De eerste twee wegen worden ook als één weg gezien, waarvan de twee zijanten getekend zijn. Wegen hebben een breedte.

Amersfoort

Eerste probleem.

Na het voorlezen van het verhaaltje, kiest Radboud meteen de onderste weg. Henriette kiest ook de onderste weg, omdat je dan niet zoveel bochten hoeft te maken. Edwin neemt de bovenste weg, omdat hij denkt dat het sneller gaat. Hij ziet deze weg als een berg. Later geeft hij toch de voorkeur aan de onderste weg.

Tweede probleem.

Radboud wijst direkt zes wegen aan. Henriette wijst vier wegen aan en zegt: 'Bij de derde weg kun je één van de twee wegen kiezen.' Edwin praat Henriette na.

Arnhem (2)

Eerste probleem.

De kinderen kiezen allemaal de middenweg.

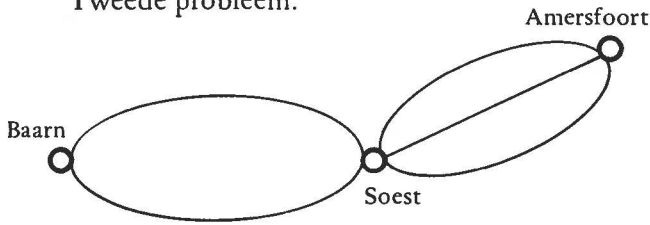
Tweede probleem.

Deze vraag vinden de kinderen erg moeilijk. Na ongeveer 10 minuten is er één die het antwoord weet en ook uit kan leggen hoe hij

er aan gekomen is. De andere kinderen hebben veel meer hulp nodig.

Soest

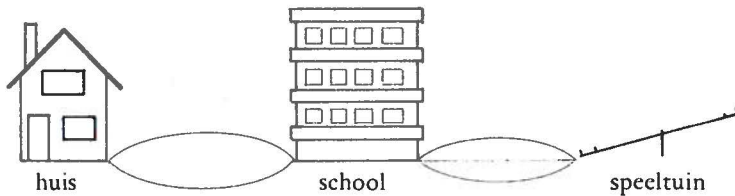
Tweede probleem.



Een analoog geval heb ik de dag ervoor klassikaal behandeld. Het leverde geen problemen op.

Nu vindt iedere groep de zes wegen en noteert het ook op een juiste wijze.

Het probleem is ook in een vierde klas aan de orde gesteld:



Ongeveer 70% van de klas komt tot de goede oplossing. Het is echter moeilijk te controleren wie van de groepsleden het gevonden heeft. Wel is van te voren de opdracht gegeven om elkaar bij een eventueel verschil van mening te 'overtuigen'.

Heen en terug (2)

Roodkapje gaat naar grootmoeder. Ze kan verschillende paden door het bos kiezen. Grootmoeder zegt: 'Ga maar direkt naar huis, dan ben je nog voor het donker thuis.' We spreken af dat we naar grootmoeder en terug één weg noemen. Hoeveel wegen kan Roodkapje kiezen? (Even proberen of het direkt begrepen wordt.) Wijs eens een weg aan. En nog een.



Hoewelaken

Levert te veel moeilijkheden op.

Amersfoort

Radboud ziet meteen drie wegen. Na een beetje puzzelen komt hij tot meer wegen. Elke weg heeft drie mogelijkheden, dus: $3 \times 3 = 9$.

Henriette en Edwin zien maar drie wegen.

Soest

Opgave getoetst aan de praktijk. Op hoeveel manieren kunnen we naar het zwembad lopen voor de wekelijkse zwemles? (heen en terug)

Sommige kinderen gaan direkt een plattegrond tekenen; de meesten komen er niet uit.¹⁾

Bij een klassikale behandeling vinden we gemakkelijk de goede oplossing. We kunnen op negen manieren heen en terug gaan. Deze mogelijkheden gaan we in de komende negen weken empirisch verifiëren.

Arnhem (1)

Hier vertelt Ferry dat er drie wegen heen zijn en drie terug, dus zes wegen. Elodie pakt het kleurpotlood en probeert de mogelijkheden uit. Ze integreert het vorige en komt op den duur bij negen.

Arnhem (2)

De kinderen kunnen er uit zichzelf niet uitkomen. Wel – na ongeveer 10 minuten – met enige hulp.

Uitbreiding (3)

Om na te kunnen gaan of de voorbeelden paradigmatische kenmerken hebben geven we twee problemen die veel op de voorgaande lijken en vragen: 'Kun je het antwoord ineens zeggen?' Hetty zegt direkt: 'Dat zijn er 12 (3×4).'



Er is een nieuwe weg om het bos heen aangelegd. Die weg kan Roodkapje ook kiezen. Hetty doorziet het antwoord op de vraag hoeveel mogelijkheden er nu zijn opnieuw het eerst: $4 \times 4 = 16$ wegen.



Arnhem (1)

Met kleurpotloden probeert men het uit. Wanneer ze het 'systeem' door hebben, komt Ferry al gauw met: 'Oh 12, dus 3×4 !'

Bij het volgende probleem is het meteen: ' $4 \times 4 = 16$ wegen'.

Arnhem (2)

De kinderen komen bij beide vragen vrij snel tot het antwoord. Er is overigens wel enige hulp verleend.

Amersfoort

Radboud ziet meteen dat er $3 \times 4 = 12$ wegen zijn. Edwin en Henriette komen er ook – na het vorige probleem – vrij snel uit.

Bij de tweede opdracht zegt Radboud direkt dat er zestien wegen zijn. Henriette wijst er acht aan, in een heel ongeordende volgorde. Edwin komt tenslotte ook tot zestien wegen.

Kaartjes (4)

Peter en Hetty krijgen de beschikking over getallenkaartjes. Ik geef opdracht ze op een strook te leggen. De volgorde van de kaartjes kan worden gevarieerd.



Soest

Iedere groep vindt zonder hulp de zes mogelijkheden. Sommige kinderen gaan al direct systematisch te werk: eerst alle mogelijkheden met de **1** voorop, dan de **2** en de **3**.

Toen hebben we de **4** er bij gehaald. Dit levert in het begin bij alle groepen moeilijkheden op. Twee groepen vinden zelfstandig alle combinaties.

De andere drie groepen komen er tenslotte met een duwtje in de goede richting ook uit.

Ervaringen met leerlingen uit een vierde klas: De meeste kinderen gaan systematisch te werk, althans in zoverre dat zij steeds met hetzelfde cijfer voorop, zoveel mogelijk uitproberen.

80% van de leerlingen vindt de goede oplossing.

Bij een uitbreiding van het probleem met vier cijferkaartjes, is het aantal goede oplossingen beduidend lager (55%).

Amersfoort

Radboud legt de kaartjes in de volgorde **2**, **1**, **3** voor zich neer en vindt vervolgens op een heel logische manier zes mogelijkheden.

Henriette komt ook tot zes mogelijkheden, zij het op een minder systematische wijze.

Edwin vindt, na veel gepuzzel, vier mogelijkheden.

Arnhem (1)

Je moet ze op weg helpen. Allen menen dat er vier manieren zijn.

'Waarom?'

Ze weten het niet.

'Wel dan gaan we eens kijken.'

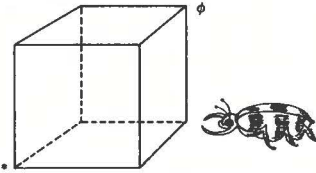
Met elkaar komen we tot zes mogelijkheden. Niemand ziet er een systeem in.²⁾

Arnhem (2)

Deze vraag vinden de kinderen erg gemakkelijk. Zonder hulp komen ze tot het goede antwoord.

Kubuskruiper (5)

Vanuit China is een raar beest naar ons land gekomen: de kubuskruiper. Hij kruipt over de ribben van een kubus (aanwijzen!).



Hij wil van * naar φ langs de kortste weg.
Op hoeveel verschillende manieren kan hij dit doen?

Hoewelaken

Kubuskruiper weggelaten, omdat ik daar te veel moeilijkheden vermoed. Waarom dan toch kubuskruiper?

Arnhem (1)

'Dat is een doos, een akwarium kan ook.'

'Zo'n doos noemen ze wel eens een kubus.'

Elodie komt tot vijf wegen, nadat ze op een blaadje de mogelijkheden gekleurd heeft.

Arnhem (2)

Om de kinderen te laten begrijpen wat de bedoeling is, heb ik een tekening laten maken. Na enige hulp komen ze toch tot het goede antwoord.

Amersfoort

Radboud ziet na het aanwijzen van de wegen dat ze allemaal even lang zijn: de kortste wegen bestaan uit drie stukjes.

Henriette wijst — heel ongeordend — vijf wegen aan.

Edwin ziet drie wegen, maar even later zijn het er zes.

Soest

Ervaring in klas 4:

De opgave valt goed in de smaak. Er wordt ook weer veel geprobeerd en getekend. Een aantal kinderen vergeet echter gebruik te maken van de 'achterkant' van de kubus. Toch ligt het resultaat weer vrij hoog, namelijk: ongeveer 80% goede oplossingen.³⁾

ALGEMENE OPMERKINGEN

Soest

Het lijkt me nuttig om dit soort problemen vaker aan de orde te stellen. De kinderen doen het met veel animo, zoals altijd met nieuwe dingen. Het gaat niet allemaal even vlot, maar ze hebben ook nog nooit zoiets gedaan. Bezwaar: het is niet duidelijk of de kinderen het allemaal werkelijk begrepen hebben.

Graag wil ik de problemen nog eens individueel aan de kinderen voorleggen. Het grote winstpunt is mijns inziens dat de kinderen leren systematisch te werken. Iets waarvan ze bij al hun andere werk kunnen profiteren.

Konklusie: dit soort opgaven is heel goed in te passen in het huidige onderwijs.

Suggestie : geef ons – onderwijzers – het benodigde materiaal (in begrijpelijke taal gesteld). Wij zullen dan graag geregeld tijd uittrekken deze problemen op te lossen en uit te diepen.

Graag wil ik – met hulp uwerzijds – hiermee verder gaan!

De onderwijzer van klas 4:

Ik heb de indruk dat de klas betere resultaten boekt met problemen, waarbij getekend kan worden. Ook is het belangrijk, dat de kinderen het zich kunnen voorstellen. Ondanks, naar mijn smaak, tegenvallende resultaten, hebben de kinderen entoesiast gewerkt. Ik heb ze gevraagd om de opgaven ook thuis te bespreken met andere familieleden. Bij navraag blijkt dat zeker driekwart van de klas dit ook werkelijk gedaan heeft.

Ik geloof dan ook wel dat deze problemen in een klas gemaakt mogen en kunnen worden. Er zal echter grondig gezocht moeten worden naar:

- het juiste nivo,
- een duidelijke taal en vraagstelling,
- problemen die de kinderen aanspreken,
- een niet te plotselinge overgang van het concrete naar het abstrakte.

Amersfoort

De kinderen vinden het erg jammer dat deze test afgelopen is. Ze vinden de probleempjes erg makkelijk en leuk.

Hoewelaken

In wezen zijn er wel een heleboel kinderen zover gekomen dat ze systematisch het aantal mogelijkheden vergaarden, maar nog niet in zuiver abstrakte vorm.

De probleemstellingen worden in 't algemeen wel gepakt; de uitwerking is er voor de zwakkeren minder bij.

Arnhem (1)

Je moet ze op weg helpen. Om te zeggen dat de kinderen het zelf vinden en ook kunnen toepassen, moeten er meer en duidelijker voorbeelden gegeven worden. Wanneer de leerlingen in de gaten krijgen dat het een kwestie van proberen is, dan gaan ze alles uitproberen. (kubuskruiper!)

Is het dan nog inzichtelijk? ⁴⁾

Is dit toepassen?

Het begin is een kritisch leren denken. Hoe pak ik het probleem aan? Dit zet het kind aan tot nadenken. Het moet een gewoonte worden. Bij deze methode moeten de leerlingen zelf aanpakken, zelf denken, zelf uitvoeren.

Voor jezelf is het werken op een dergelijke manier erg fijn. Je kunt het kind beter volgen bij het zoeken naar een oplossing.

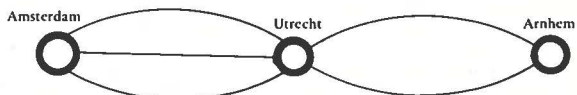
KANTTEKENINGEN

- 1) *Deze ervaringen kunnen erop wijzen dat de kontekst de leerlingen blokkeert. Het essentiële van deze telproblemen is gelegen in hun paradigmatische karakter. Door dit probleem in een voor de leerlingen emotionele, meer komplekse situatie te plaatsen, spelen te veel irrelevante dingen mee, zoals de plattegrond.*
- 2) *Uit deze ervaringen zou men kunnen konkluderen dat het meer abstrakte probleem met de getallenkaartjes makkelijker is dan het 'roodkapje probleem', dat eenvoudiger lijkt.*
- 3) *Waarschijnlijk lukt het vinden van de oplossing van de kubuskruiper vanaf een tekening beter dan vanuit een echte kubus.*
- 4) *Door alles uit te schrijven (bijvoorbeeld bij de getallenkaartjes) kunnen de leerlingen een zekere systematiek ontdekken of ontwikkelen. Dit leidt tot inzicht in het probleem, dat dan pas overdraagbaar is naar andere, meer komplekse situaties. Anderzijds kan het konkrete handelingsnivo soms remmend werken.*

1.4 ordenend tellen (klas 5)

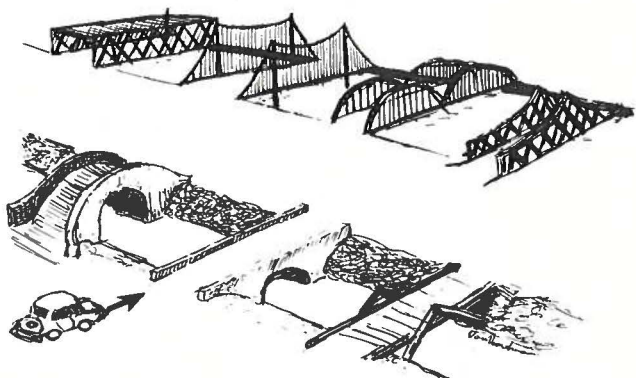
DE PROBLEMEN

Het wegenprobleem (2 x 3) (1)



Je ziet hier een stukje van een kaart. Er zijn twee wegen van Arnhem naar Utrecht. Er zijn drie wegen van Utrecht naar Amsterdam. Hoeveel verschillende roetes zijn er van Arnhem naar Amsterdam via Utrecht? Praat er samen eens over. (Wat zou bijvoorbeeld met verschillende roetes bedoeld worden?)

Het bruggenprobleem (3 x 4) (2)



Door een vrij groot gebied stromen twee rivieren. Over de ene rivier liggen *drie bruggen* en over de andere *vier*. Het gebied tussen de rivieren is prachtig. Een gezin wil een autotocht maken door dit gebied. Langs hoeveel verschillende roetes kunnen deze mensen de beide rivieren oversteken? Praat er samen eens over.

Toto met 3 wedstrijden (3³) (3)

Op een woensdagavond zijn er drie Europacup-wedstrijden. In een vijfde klas besluiten de kinderen met de onderwijzer een totoformulier voor deze drie wedstrijden in te vullen.

Real Velp — A.C. Rheden
Sporting Dieren — F.C. Oosterbeek
Inter Malburgen — Spartak Westervoort

	1	2	3

Als je een kruisje onder 1 zet betekent dit, dat de eerste club op die regel gaat winnen. Vul je een kruisje onder 2 in, dan wint de tweede club (volgens jou) en een aangekruiste 3 zou volgens de verwachting een gelijk spel opleveren. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er om een toto met drie wedstrijden in te vullen? Praat er samen eens over.

Boom met appeltjes (4)

In een tuintje staat een appelboom. De stam splitst zich in drie takken. Elk van die takken splitst zich in drie dünnere takken, die zich elk weer splitsen in drie kleine takjes. Aan elk van die kleine takjes hangt een appel. Hoeveel appels hangen aan het appelboompje?

Cijferkaartjes (5)

Els heeft vier cijferkaartjes: $\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4}$. Zij wil eens uitzoeken hoeveel verschillende getallen met 4 cijfers ze hiermee kan leggen. Hoeveel zijn het er?

Gang van zaken in de les

- * Klassikale introductie.
- * Verwerking individueel of in groepjes, waarbij gesteld is dat de groep tot een eensluidende konklusie moet proberen te komen. Afwijkende meningen krijgen gelegenheid om hun standpunt op het bord uiteen te zetten.
- * Gezamenlijk bepraten (napraten) tot iedereen (voor zover controleerbaar) het eens is met de konklusie.
- * Na elk probleem mogen de kinderen zelf verder gaan door er bijvoorbeeld nog een weg bij te tekenen, nog een brug (of meer) ekstra, nog één of meer cijferkaartjes. Hierbij blijkt dat enkele kinderen (ca 20%) vanuit het gegeven probleem verder kunnen denken.
- * Tenslotte wordt — gesuggereerd door de leerkracht — ontdekt dat de gegeven problemen veel met elkaar te maken hebben.
- * Abstrakt denken wordt bij slechts drie van de dertig leerlingen ontdekt (behalve bij de cijferkaartjes, maar dat is bij sommigen ook een kunstje geworden).

Het wegenprobleem

Hierbij ontstaat verwarring omdat de mogelijkheid om van Amsterdam naar Arnhem te komen en de weg sec steeds door elkaar worden gehaald. Nadat er later meer wegen bij getekend worden, hanteren enkelen al:
 2×3 , 3×3 , etc.

Het bruggenprobleem

Hier zijn we het langst mee bezig geweest. De analogie met de wegen wordt al meteen door zes leerlingen ontdekt.

Het is opvallend dat bij het tekenen van de wegen veel kinderen schematisch te werk gaan.

Het volgende probleem is toen gesteld:

‘als er in totaal acht bruggen over die twee rivieren liggen, hoe zou je ze dan over die rivieren verdelen om zoveel mogelijk mogelijkheden te krijgen?’

Het antwoord van een jongen is al direkt: ‘vier over elk, want 4×4 is 16 en 3×5 is maar 15.’ We zijn nog doorgegaan met drie rivieren, waarbij elke rivier twee bruggen heeft.

De meesten antwoorden: 2×4 .

Drie leerlingen: $2 \times 2 \times 2$.

Het totoprobleem

Dit probleem heb ik meegegeven om er thuis eens over te denken en te praten. Op school is het van te voren met twee wedstrijden gedaan!

Bij de nabesprekingen blijkt dat

- er niet erg over gedacht is,
- het probleem nogal moeilijk gevonden wordt (vijf van de dertig leerlingen vinden: $3 \times 3 \times 3$),
- de animo erg gezakt is, omdat we de vorige dag de bruggen zo hebben ‘doorgezaagd’,
- de analogie met het bruggenprobleem ($2 \times 2 \times 2$) slechts door één leerling gezien wordt.

Cijferkaartjes

Hiervoor heb ik de kinderen een blanco velletje papier gegeven met het verzoek dit te vouwen en te scheuren. De twee helften nogmaals en daarna nog een keer. ($2 \times 2 \times 2$!)

‘Hoeveel kleine papiertjes krijg je nu?’

Een jongen die bijna klaar is met de derde scheurbeurt zegt: ‘zestien.’

Zijn buurman: ‘Niks hoor, acht.’

‘Oh ja, want ik heb maar drie keer gescheurd.’

Op vier papiertjes worden de cijfers 1 tot en met 4 geschreven. Later gaan sommigen verder met 5 tot en met 8.

Er wordt zeer systematisch gewerkt.

Konklusies die door zeer velen getrokken worden:

— 3 kaartjes: $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}$ $1 \times 2 \times 3 = 6$
manieren,

— 4 kaartjes: $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}$ $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$
manieren,

— met de $\boxed{1}$ voorop 6 manieren, dus $4 \times 6 = 24$ manieren.

De lol is daarna niet meer om te proberen het aantal te vinden door de papiertjes te schuiven, maar om heel trots te zeggen — als er acht verschillende cijfers zijn —: er zijn $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = \dots$ manieren.

Mijn mening

Het is niet alleen gewenst maar zelfs noodzakelijk om dit soort problemen op te nemen, omdat steeds terugkomen: mogelijkheden zoeken, plotseling ontdekken en het speelse element. Hierop kunnen we de kinderen veel gemakkelijker ‘vangen’ dan met redaktievraagstukjes, etc. Deze laatste zijn dikwijls maniertjes.

De in het bulletin gestelde problemen kunnen door logisch (leren) denken opgelost worden, waarbij het voordeel is dat bij foutieve denkwijzen de korrektie per kind eenvoudiger ligt. Realiseerbaar?

Ja, maar niet overhaast en dan ingepast in de bestaande materie en nádat de leerlingen de hoofdbewerkingen goed onder de knie hebben.

KANTTEKENINGEN

**) Men zou ook kunnen stellen, dat enkele van deze probleempjes op grond van hun onderliggende structuur en de modellen (boomdiagram, wegenmodel, roostermodel) daarvoor, de operatie vermenigvuldigen in een 'ander daglicht kunnen plaatsen.'*

Immers, alle modellen voor een bepaalde operatie samen, karakteriseren die operatie pas volledig.¹⁾ In het huidige rekenonderwijs is het vermenigvuldigen bijna uitsluitend op het idee van herhaald optellen gebaseerd en komt er (dus) (te) 'kaal' af.

BOMEN OVER DE TOTO IN HOEVELAKEN

R. ZIJLSTRA

Twee voetballers.²⁾ Ze komen op de foto. Hoeveel verschillende foto's kun je — kwa opstelling — maken?

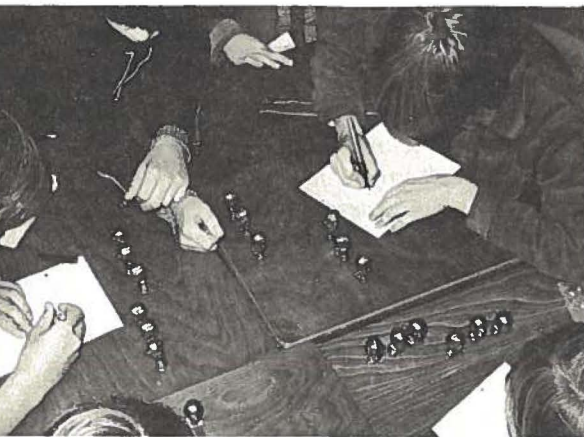
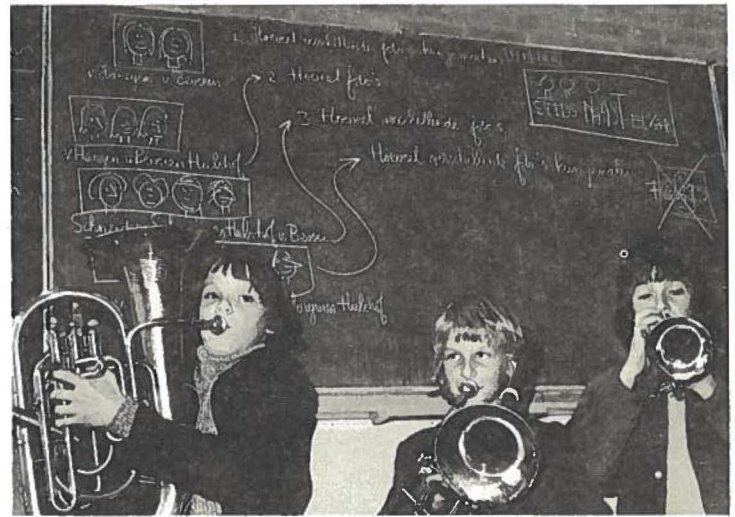
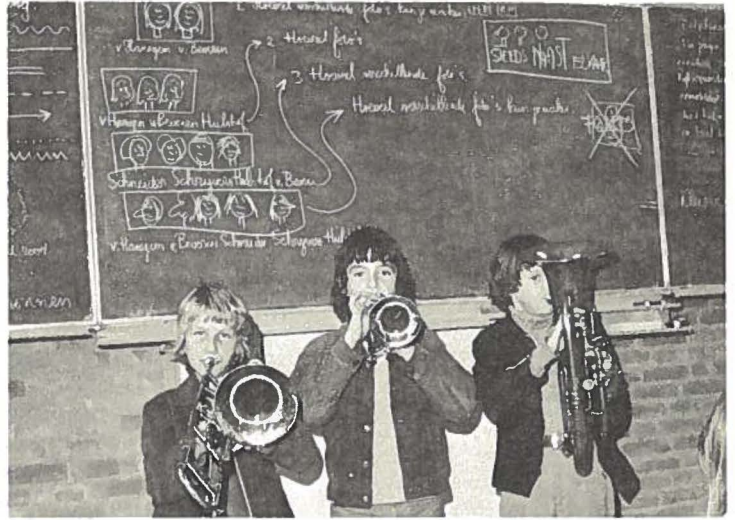
Ik doe deze variatie omdat de vraagstukjes met de roetes, de toto en de cijferkaartjes slecht zijn gemaakt.

Instructie

Ik laat de voetballers zien: Hulshof en Van Beveren. Ook omgekeerd: dit zijn de mogelijkheden!

Opdracht: denk na hoe je dit moet formuleren; laat zien *hoe* je er achter komt *hoeveel* foto's er gemaakt moeten worden.

Bij de volgende opgave komen er drie voetballers op de propfen.



De zaak wordt vervolgens met *drie muzikanten* geïllustreerd.

De groep kan worden gewisseld. Probeer ook nu weer een manier te bedenken om er achter te komen hoeveel verschillende foto's er gemaakt kunnen worden.

¹⁾ Zie: Wiskobas-Bulletin 2, jaargang 2, pag. 667 en verder.

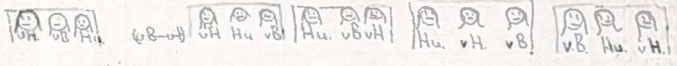
²⁾ Gewerkt wordt met poppetjes van bekende voetballers, die door rijdende winkels op de markt worden gebracht.

We gaan verder met het oorspronkelijke probleem. Er komt steeds een voetballer bij.

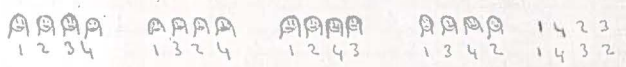
Yvonne

1. Er zijn 2 mogelijkheden. Eerst de ene links en de andere rechts. Dat is 1 mogelijkheid. Dan degene rechts stond links en degene die links stond rechts. Dat is de 2^e mogelijkheid.

2. Er zijn 6 mogelijkheden. ~~Ik teken ze~~ en dan tel ik ze.



3. Er zijn 24 mogelijkheden. Eerst teken en dan tellen. Er zijn 4 mensen, nr. 1, 2, 3, 4.



Er zijn er 6 met 1 voorop, dus ook 6 met 2 en $3+4$ = dus $4 \times 6 = 24$ mogelijkheden.

4. Er zijn 120 mogelijkheden. 5 mensen no. 1, 2, 3, 4, 5.



Er zijn er 24 met 1 voorop, dus ook 24 met 2, 3, 4, 5 voorop. $5 \times 24 = 120$ mogelijkheden.

5. Er zijn 720 mogelijkheden. Dan doe je $120 \times 6 = 720$ mogelijkheden. Er zijn 6 mensen.

6. Er zijn 7 mensen. Er zijn 5040 mogelijkheden. $720 \times 7 =$

$$\begin{array}{r} \times 7 \\ 5040 \end{array}$$

7. Er zijn 8 mensen. Er zijn 40320 mogelijkheden. $5040 \times 8 =$

$$\begin{array}{r} \times 8 \\ 40320 \end{array}$$

8. Er zijn 9 mensen. Er zijn 362880 mogelijkheden.

$$\begin{array}{r} \times 9 \\ 362880 \end{array}$$

9. Er zijn 10 mensen. Er zijn 3628800 mogelijkheden.

$$\begin{array}{r} \times 10 \\ 3628800 \end{array}$$

10. Er zijn 11 mensen. Er zijn 39916800 mogelijkheden.

$$\begin{array}{r} \times 11 \\ 3628800 \\ \hline 39916800 \end{array}$$

Probeer eens uit te zoeken hoeveel verschillende foto's er gemaakt kunnen worden van elf voetballers? Met ongelooflijk veel energie wordt nu gewerkt. Erica vergeet voor het eerst in drie maanden om koffie te zetten.

Resultaten

hoeveel foto's met	aantal leerlingen dat tot dit punt komt
2	3
3	5
4	13
5	3
6	—
7	1
8	—
9	—
10	—
11	5

Tot en met vier voetballers is het voor de meeste leerlingen — uitschrijvend — op te lossen.

Wie voorbij dit punt komt, heeft de regelmaat ontdekt en vindt het ook voor elf voetballers. Enkele leerlingen geven direkt nummers aan de voetballers. (rugnummers)

KANTTEKENINGEN

*) Als oefening van de operatie vermenigvuldigen zijn de laatste voorbeelden misschien nuttig. Wanneer aan kinderen gevraagd wordt het aantal permutaties van bijvoorbeeld 4 letters na te gaan en ze hebben 'het kunstje' door, dan is het zinvoller een isomorf probleempje aan de orde te stellen (eventueel enige tijd later) om na te gaan of de structuurovereenkomst met het voorgaande probleem ontdekt wordt.

© 1973 Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde
Onderwijs

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de houder van het copyright.

Omslag: Hans Gauw
Druk: De Gulden Pers B.V.