wiskobas bulletin

Wiskobas-Bulletin, Jaargang 2, nr 2

Jaargang 2, nr. 2
Januari 1973

WISKOBAS-BULLETIN

— Bulletin ter begeleiding van het eksperiment 'Wiskunde — op de Basisschool'.
— Verschijnt gedurende de tweede jaargang 6 keer

JAARGANG 2, Nr. 2 — JANUARI 1973

REDAKTIEADRES:
INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS
Tiberdreef 4, Utrecht.
t.a.v. R.A. de Jong.

ABONNEMENTSPRIJS:
f 25,— per jaargang.
Men abonneert zich door dit bedrag over te maken op girorekening 500167 van Vlaer en Kol te IJsselstein, t.n.v. V.V.C., rek.nr. 218401450, onder vermelding van 'WISKOBAS-BULLETIN'

Verzamelabonnementen voor studenten Pedagogische Akademies en kursisten Heroriëntering f 15,— per jaargang (aanmelden via docent).

INHOUD

VAST BLOK

Redaktioneel		614
Kolommen	- H. Freudenthal	615
Wiskunst	- F. van der Blij	617
Problematika	- Huub Jansen	621
Berichten uit het buitenland	- Klaas Koster	623
Onderwijstelevisie en Wiskundeonderwijs	- Piet Scholten	625
Leerplanologie	- Adri Treffers en Edu Wijdeveld	627
Wiskunde-werkhoeken	- Hans ter Heege	637
Nieuw op de markt	- Ed de Moor	639
Over'wegen'	- Jan van den Brink	641
Skriptoteek	- Henk Meyer en Johan v. Bruggen	645
Kleuters en Wiskunde	- Jes Melis en Jenneke de Lorme-Bakker	647
Basje, een jonge onderzoeker	- Dik Oort	651

VARIABEL BLOK

2.1	Operaties 1	658
2.2	Hoe het was	659
2.3	Hoe het is	663
2.4	Zeventien modellen	667
2.5	Oriëntatietocht in buitenlandse metoden	672
2.6	Zeven klassen van modellen	682
2.7	Ontdekkingen in nederlandse metoden	684

RESPONS BLOK

2.1	Inleiding en leeswijzer	696
2.2	Van konkreet naar abstrakt	697
2.3	Diagrammen in klas 2	700
2.4	Open beweringen in het $\boxed{}$ van het land	702
2.5	Over 'Zeefie'	709
2.6	Een ervaring in Arnhem	711

EEN UITGAVE VAN HET INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS

INHOUD

Redaktioneel — 614
Kolommen — H. Freudenthal 615
Wiskunst — F. van der Blij 617
Problematika — Huub Jansen 621
Berichten uit het buitenland — Klaas Koster 623
Onderwijstelevisie en Wiskundeonderwijs — Piet Scholten 625
Leerplanologie — Adri Treffers en Edu Wijdeveld . . . 627
Wiskunde-werkhoeken — Hans ter Heege 637
Nieuw op de markt — Ed de Moor 639
Over 'wegen' — Jan van den Brink 641
Skriptoteek — Henk Meyer en Johan van Bruggen . . 645
Kleuters en Wiskunde — Jes Melis en Jenneke de Lorme-Bakker. 647
Basje, een jonge onderzoeker — Dik Oort 651

vastblok

redaktioneel

Aktiegroepen, politieke partijen en godsdienstige genootschappen doen geloven dat het ons dient te gaan om de *'kwaliteit van het bestaan'*. Wat we er onder moeten verstaan wordt dan niet altijd precies geformuleerd, maar we hebben er toch allemaal een vage notie van.

De 'kwaliteit' wordt ons als een waarschuwende vinger voorgehouden. De westerse welvaart – zo wordt gesteld – manifesteert zich steeds heviger in een kwantitatieve gedaante; een samenleving waarin het vooral gaat om toe- of afname van: het aantal auto's per 100 inwoners, het aantal kubieke meter woning per gezin, de gemiddelde taille-omvang, het aantal infarkten per jaar, het aantal woorden van een leraar per les, het aantal strekkende meter boeken per 1000 inwoners. Enfin, vult u zelf maar aan!

Met de ongelooflijke toename van goederen is het gevaar dat we de kwantiteit tot norm van ons bestaan zouden maken, niet denkbeeldig. Een kwantitatief bestaan dat beter gekarakteriseerd wordt door het werkwoord 'hebben' (bezit) dan door het werkwoord 'zijn'. En met het 'hebben' van een heleboel dingen is de kwaliteit van het bestaan allerminst gegarandeerd. Dat is, dachten we, de kern van de boodschap der verontrusten.

Ook bij het onderwijs speelt dit een rol. Wanneer leerlingen een heleboel dingen 'kennen', wil dat nog niets zeggen over de kwaliteit van het onderwijs.

Op de kweekschool of pedagogische akademie hebben we allemaal geleerd dat *'niet het vele goed is, maar dat het goede veel is'*. U leze er nog eens een boekje over de geschiedenis van ons onderwijs op na. We mogen blij zijn dat deze periode van het encyklopedisch kennisideaal voorbij is. We behoeven niet al het weetbare meer te weten.

Toch klagen we ook nu nog over de 'overlading van het onderwijs'. Het lijkt wel of er steeds meer bij komt: meer vakken (engels, verkeer, seksuele voorlichting) en per vak meer onderwerpen (kunstgeschiedenis, koördinaten, vioolspel).

En we ervaren iedere dag dat het allerminst eenvoudig is om aan deze overlading het hoofd te bieden. Wat laten we weg? Wat doen we in ieder geval? Hoe kiezen we verstandig? Het probleem kwam levensgroot in het vizier bij de breuken-diskussie in het Bulletin, zelfs nadat afgesproken was dat de 'breuken-leerstof' niet als geïsoleerd gegeven beschouwd zou worden, maar binnen een bredere kontekst.

Het goede is veel, ook in het wiskunde-onderwijs. Ook hier wordt duidelijk voor de kwaliteit gekozen. Maar hoe realiseren we zoiets? We noemen een mogelijkheid. De keuze zou kunnen inhouden, dat we proberen om vanuit een zorgvuldig gekozen goed probleem onze kinderen zicht te laten krijgen op een ruimer gebied, een probleem dat een groter geheel weerspiegelt. Het begrip *'eksemplarisch onderwijs'* wordt voor deze aanpak wel gebruikt.

Wagenschein, één van de geleerden die zich hiermee heeft beziggehouden, schreef – ik vertaal vrij – :

> hoe grondiger je je met een bepaald probleem uit een vakgebied bezighoudt, hoe dieper het inzicht dat je in dat vakgebied krijgt.

Degenen die met de wiskobas-blokken werken zullen iets van deze gedachte herkennen: grondige verdieping in blok SPIJKERBORD bijvoorbeeld, leidt tot fundamentele inzichten die uitstralen buiten de beperkte grenzen van dat blok.

Soms is het vele ook goed, tenminste dat hoopt de redaktie lettend op de omvang van het Bulletin. Als het ook deze jaargang niet lukt om 'dunne' afleveringen te produceren dan moet u maar denken: die jongens bezitten nog te weinig wijsheid om korte bijdragen te kunnen leveren.

Rob de Jong

H. FREUDENTHAL

WINDSTOTEN VAN 162 KM PER UUR

Zeker herinnert u zich nog de rekord-storm van begin november laatstleden, die tien millioen bomen ontwortelde. Over die bomen wil ik het nu niet hebben, wel over de krantenberichten.

De maksimale windsnelheid, bij deze gelegenheid gemeten, was volgens de kranten, die beweerden dat ze het van De Bilt hadden, 162 km per uur. Natuurlijk werd die niet overal gemeten. Op sommige plaatsen was het 117 km per uur, op andere 126 km of 144 km per uur – ook nogal flinke snelheden.

Als je die snelheidsmetingen van 162, 117, 126, 144 km per uur de revue laat passeren, krijg je de indruk dat de meteorologen zoiets wel erg nauwkeurig meten – geen ronde 160, 120, 125, 145 km per uur maar, naar het schijnt, op de kilometer nauwkeurig. Of kun je werkelijk windsnelheden op scherper dan 1% nauwkeurig meten en als je het kunt, welk zinvol doel is met dergelijke overdreven nauwkeurige metingen gediend?

Ik zat er eventjes over te puzzelen tot me opviel dat al die getallen door 9 deelbaar waren. Meet De Bilt misschien windsnelheden in het 9-tallig stelsel?

Neen, het is iets anders. Wie enige ervaring met natuurwetenschappelijke metingen heeft, weet dat fysici, technici en andere beoefenaars van eksakte vakken snelheden nooit per uur, maar per sekonde meten.

162, 117, 126, 144 km per uur zijn respektievelijk 45, $32\frac{1}{2}$, 35, 40 m per sekonde, en dit zijn vrijwel zeker de cijfers die door De Bilt werden opgegeven – ronde cijfers, die aantonen, dat in feite windsnelheden met een foutenmarge van $2\frac{1}{2}$ m per sekonde, dus van 9 km per uur worden gemeten en niet van 1 km per uur, zoals de krantenberichten ons wijs kunnen maken.

In wetenschapsbeoefening en techniek werkt men met de sekonde als tijdseenheid als men snelheden, frekwenties e.d. wil meten. Dit ligt voor de hand. Met welke snelheid moet men een projektiel wegschieten om het 100 meter hoogte te doen bereiken? Met 44 m per sekonde – luidt het antwoord.

'160 km per uur' zou eenvoudig belachelijk zijn, want die snelheid van 44 m per sekonde houdt het maar voor een ogenblik. Van een buis zegt men dat hij 10 liter water of gas per sekonde kan verwerken en niet 36 000 liter per uur. De stemvork die de 'concert-A' voortbrengt, maakt (per definitie) 435 trillingen per sekonde en niet 1 566 000 per uur. Het geluid plant zich volgens de natuurkundige terminologie met 330 meter per sekonde voort en niet met 1200 km per uur.

Waarom zetten kranten dan alle snelheden van 'per sekonde' in 'per uur' om? Het is nogal duidelijk. Omdat de snelheden, waarmee veel mensen vertrouwd zijn, *die van het verkeer zijn* – die 50 km maksimum, die meestal in de bebouwde kommen gelden, die 70 km die daar ook af en toe gepermitteerd zijn, de 100 km, 110 km, 120 km, 130 km, 140 km, waarnaar je de snelheidsmeter op de autoweg ziet oplopen.

Je kunt een windsnelheid beter met verkeerssnelheden vergelijken wanneer hij door 162 km per uur dan wanneer hij door 45 meter per sekonde gegeven is. Natuurlijk heeft de automobilist een goed recht op zijn snelheidsgegeven per uur, want hij moet immers weten hoe laat hij op zijn plaats van bestemming aankomt, wanneer hij met die of die snelheid rijdt. Maar voor een windstoot in De Bilt is het niet zo erg belangrijk wanneer hij in Groningen is aangekomen en voor wetenschappelijke doeleinden blijf je hem maar in meters per sekonde meten.

Desniettemin valt ook al aan de geluidssnelheid de eer te beurt om in plaats van met 330 meter per sekonde te worden aangegeven in

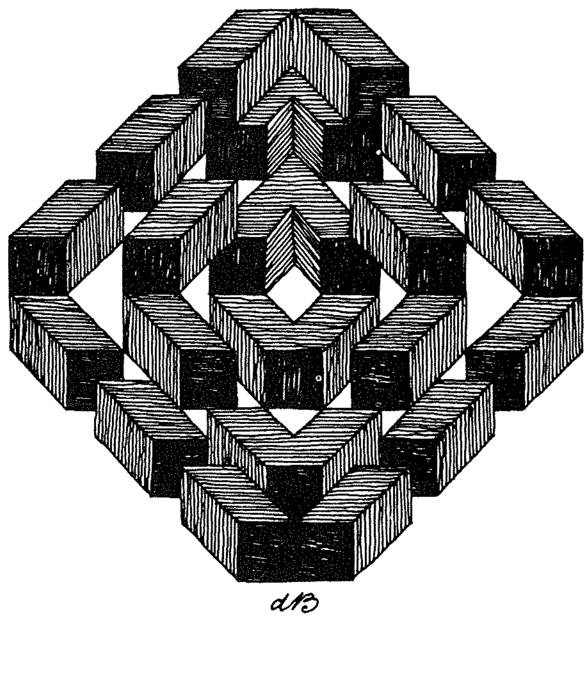
1200 km per uur. Waarom? Omdat er supersone vliegtuigen zijn, d.w.z. vliegtuigen die sneller dan het geluid vliegen — twee of drie keer zo snel. En van een supersonisch vliegtuig dat om 12 uur in New York is vertrokken, wil je uiteraard graag weten, hoe laat het in Schiphol aankomt.
Nu is er geen enkel bezwaar tegen dat je *voor verschillende doeleinden* verschillende maten gebruikt. Reukstoffen verkoop je per milligram of gram, appelen per kg, staal per ton. Het vervelende met uur en sekonde is dat hun verhouding, 3600, niet in het tientallig stelsel past, en dit veroorzaakt moeilijkheden en onduidelijkheden.

Met de andere tijdmaten, jaar, maand, dag, minuut is het eender gesteld. Als ik zeg dat in nederland per jaar 250 000 kinderen worden geboren, bedoel ik geen precies statistisch gegeven, maar een ronde schatting. Als ik van hier naar het *dagelijks* geboortental toe wil, moet ik niet maar 250 000 door 365 delen en stellen dat het er per dag 684,93... zijn, want hiermee wordt een in de gegevens niet aanwezige nauwkeurigheid geïntroduceerd. Wat dan wel?
250 000 per jaar hoort kennelijk in een schaal, met stappen van 50 000:

50 000	100 000	150 000	200 000	
250 000	300 000	350 000	400 000	...

Met 250 000 bedoelt men: tussen 225 000 en 275 000. Want was het iets minder dan 225 000 dan had men 200 000 gezegd en bij iets meer dan 275 000 had men 300 000 genomen.
Wil men dit bedoelde gegeven per dag omrekenen dan wordt het: tussen 618 en 752. Hoe zou men dit ruwweg formuleren? Ik zou zeggen: 700 per dag. Dit geeft zo ongeveer de bedoelingen weer. En hoeveel kinderen gemiddeld per uur? Zeg maar gerust: 30.

Bij het omzetten en vertalen van *numerieke gegevens* met maten, gewichten, geldwaarden enz. moet men op zijn qui vive zijn. Een van onze radiosprekers vertaalt windsterkten zowel in meters per sekonde als in kilometers per uur, en dit lijkt me verstandig. Anders zijn radio en pers soms minder verstandig. Vliegtuigkapers die 3 300 000 guldens losgeld eisen (of: 'ongeveer 3 300 000 guldens') zijn schering en inslag — het is nog foutief ook, want ze moesten echt dollars hebben en zouden met nederlandse guldens evenmin genoegen nemen als met betaalcheques.
Een krant meldde, dat de Mt. Everest hoger was gebleken dan tot nu toe aangenomen werd en had de engelse gegevens maar ruwweg vertaald met 10 voet = 3 meter, hetgeen de Mt. Everest juist met zowat 10% verlaagde.
Als een nederlandse encyklopedie vermeldt, dat de leeuw 1,8 — 2,4 m lang wordt, met een staart van 0,6 — 0,9 m en een gewicht van 180 — 225 kg, dan ligt de vertaling uit het engels er dik op: 6—8 voet lang met een staart van 2—3 voet en een gewicht van 200—250 britse ponden.
Veel erger is het, wanneer fysische grootheden zoals lichtsnelheid, omtrek van de aarde, afstand van de hemellichamen, enz. eerst door amerikaanse kranten uit het metrieke stelsel in mijlen, voeten enz. worden overgezet, om daarna — soms foutief — door nederlandse kranten terugvertaald te worden in het metrieke stelsel.
Vaak komen er dan ook nog wat nulletjes bij of vallen er af.
Vertalen van maten en gewichten is een netelige zaak, en ik hoop maar dat u bij het lezen van Shakespeare *'every inch a king'* niet gaat vertalen met *'elke 2,54 cm een koning'*.

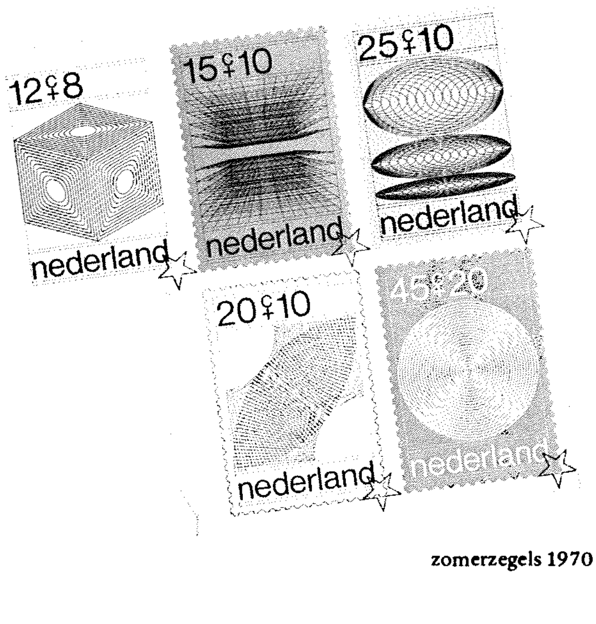


F. VAN DER BLIJ

DE NEDERLANDSE POSTZEGELS 1970

De laatste afleveringen van onze wiskunst waren nogal high-brow, vandaag sluiten we aan bij het dagelijks leven. In de wiskunde wordt een diskussie gevoerd over de grenzen van zuivere en toegepaste wiskunde; bestaan ze en zo ja waar liggen ze dan? Bij de kunst vinden we dezelfde diskussie; zuivere kunst en toegepaste kunst, waar liggen de grenzen? Bij wiskunde zowel als bij kunst krijgt men de indruk dat dit onderscheid minder gemaakt werd in de 'goede oude' tijd.
Toegepaste wiskundige kunst is veelvuldig en al sinds enige tijden te vinden in de fraaie 'spirograaf'-krommen op bankbiljetten en waardepapieren. Dit gebeurt met een guillocheer-machine. Ik raad u echt aan de bankbiljetten er nog eens speciaal op te bezien. Misschien herkent u hier en daar zo'n typische spirograaf-kromme, of te wel epicycle.

Maar ik wilde het vandaag niet in de eerste plaats over bankpapier met u hebben; uit de titel weet u al dat ik het over postzegels wil hebben. De titel van deze 'wiskunst' is precies hetzelfde als de titel van een P.T.T.-uitgave ('s Gravenhage 1971).



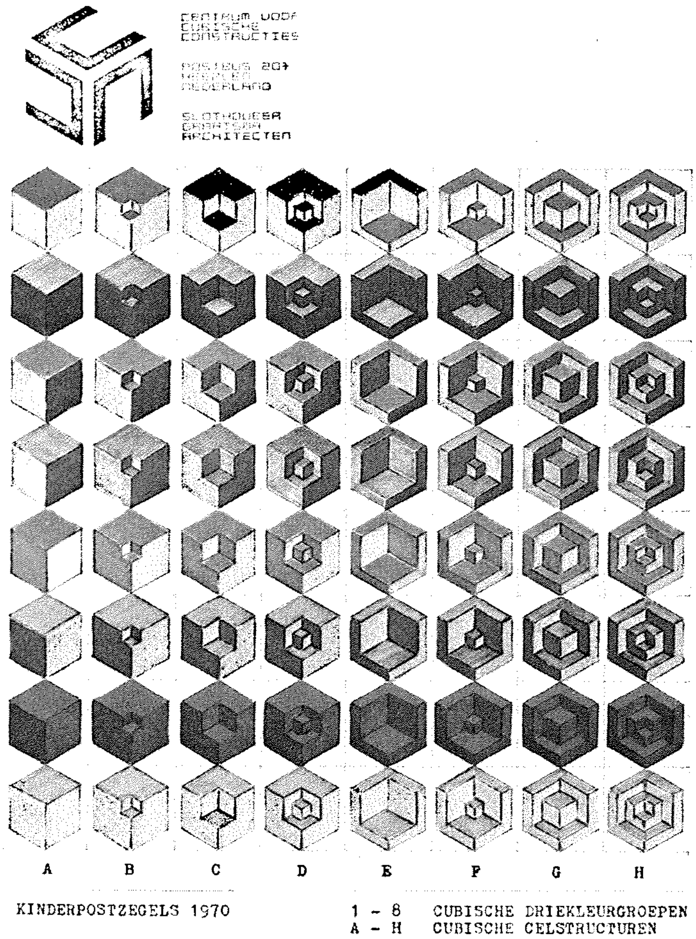
zomerzegels 1970

Het was toen een zeer wiskundig postzegeljaar.

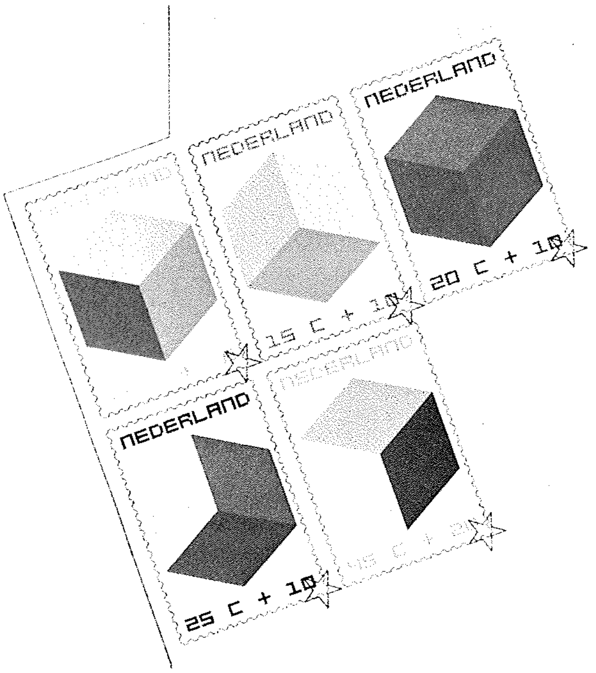
Er waren de *zomerzegels*, vijf in getal met komputertekeningen, uitgevoerd op de Technische Hogeschool te Eindhoven en ontworpen door R.D.E. Oxenaar.
Een enkel woord over de figuren, die eigenlijk wel voor zich zelf spreken:

12+ 8:	isometrische projektie van cirkel naar vierkant;
15+10:	evenwijdige vlakken in een kubus;
20+10:	twee schaalverdelingen, met prachtige interferentie (moiré of zwevingen) in de nevendiagonaal;
25+10:	overgangsfasen van projekties van een stelsel koncentrische cirkels;
45+20:	vier spiralen (sic!).

Wanneer u meer wilt weten over filatelistische gegevens rond deze zegels verwijs ik u naar het boekje van de P.T.T.
Er was in dat jaar nog meer wiskundig gepostzegel. De kinderpostzegels van 1970 waren aan de kubus gewijd. De ontwerpers waren J. Slothouber en W. Graatsma, die samen werken in het Centrum voor Cubische Constructies te Heerlen. Dit centrum is op verschillende manieren naar buiten getreden. Ik noem hun inzending op de Biennale te Venetië in 1970.
Wellicht kom ik nog eens in deze rubriek op hun kubus-konstrukties terug. Het boek Cubics (Cubic Construction Compendium) uitgegeven in Deventer 1970 door de Octopus-Foundation bevat een schat van konstrukties die op de kubus gebaseerd zijn.
De 'kubische' letters en cijfers vindt u ook zeer fraai terug in enkele kwadraatbladen van Steendrukkerij de Jong uit Hilversum.



ontwerpen kinderpostzegels 1970



kinderpostzegels 1970

Op het ontwerpplaatje voor de *kinder-postzegels* vindt u linksboven hun kubisch-handelsmerk. Het plaatje is in het P.T.T.-boekje in kleuren uitgevoerd, dan is het nog veel boeiender!
Natuurlijk vertonen de kubussen het door de psychologen 'Necker-kubuseffekt' genoemde verschijnsel; staat de kubus of hangt hij? kijk je er op of er in? is het een betonnen blok of een open kamerhoek?
Hebben kleuren nog invloed hoe we de keuze maken?
Van de kinderpostzegels werden er in het totaal 8.102.965 verkocht en nog 2.735.869 velletjes, zodat u er bij u in de buurt nog wel een paar moet kunnen vinden.

Graatsma wees er op dat kind en blokken bij elkaar passen; de blokkendoos geeft het jonge kind een stuk stereometrie, dat in het onderwijs veelal pas veel later wordt opgevat.

Graatsma zegt:

> 'Kleuters proberen met blokken onmogelijke dingen te doen. Zij leren het bestaan van wetmatigheden kennen. Die kennis wordt gebruikt om te groeperen en te stapelen. De eerste bouwsels stellen meestal helemaal niets voor. Later vertonen de gebouwen gelijkenissen.'

De Uno-zegel van 45 cent van 1970, ontworpen door Ben Bos, vertoont ook al een matematisch tema: een bol op een door vierkanten gevormd plateau.

Tenslotte noem ik nog de *Europazegel* van dat jaar, een vlechtwerkje in de vorm van een zon. Is het een kerntjesgeheugen van een komputer? Duidelijk niet, maar is het vlechtwerk ook niet een typisch matematische struktuur?
Ik zou nog op veel nederlandse P.T.T.-uitgaven kunnen wijzen, bekijkt u nog maar eens onze girobetaalkaarten en kascheques.

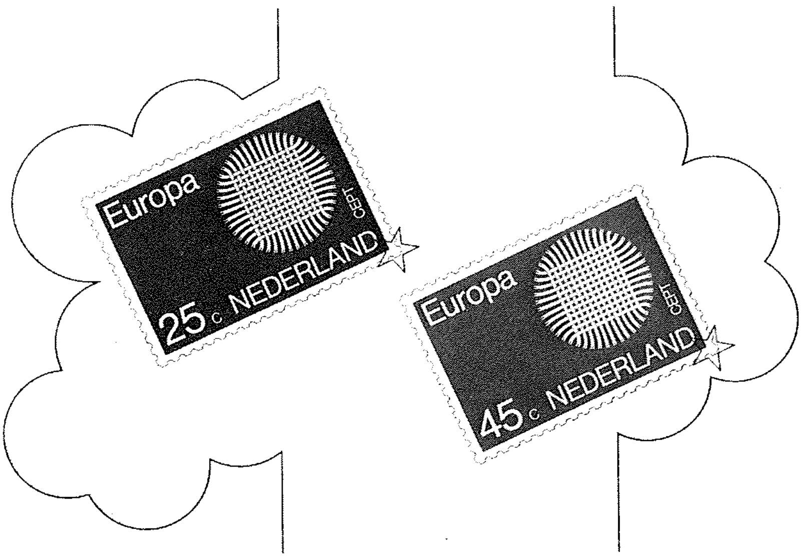
Tot slot had ik een verzoek. Zelf geen systematisch of degelijk postzegelverzamelaar zijnde, heb ik me de vraag gesteld of er veel wiskundige postzegels of wiskundigen op postzegels te vinden zouden zijn.
Het eerste tema is wat moeilijk af te grenzen. Wat is een wiskundige postzegel? De voorbeelden 'Nederland 1970' waren duidelijk. Maar er zijn veel grensgevallen aan te geven. Laat ik me maar beperken tot wiskundigen op postzegels,

voor zover ik ze vond (zonder veel zoeken). Weet u meer voorbeelden stuurt u mij dan eens een berichtje? Onder de Wiskobas-lezers moet toch wel een postzegelverzamelaar zijn! Er zijn natuurlijk weer moeilijkheden met teoretisch natuurkundigen en astronomen. Laat ik maar wat royaal zijn.

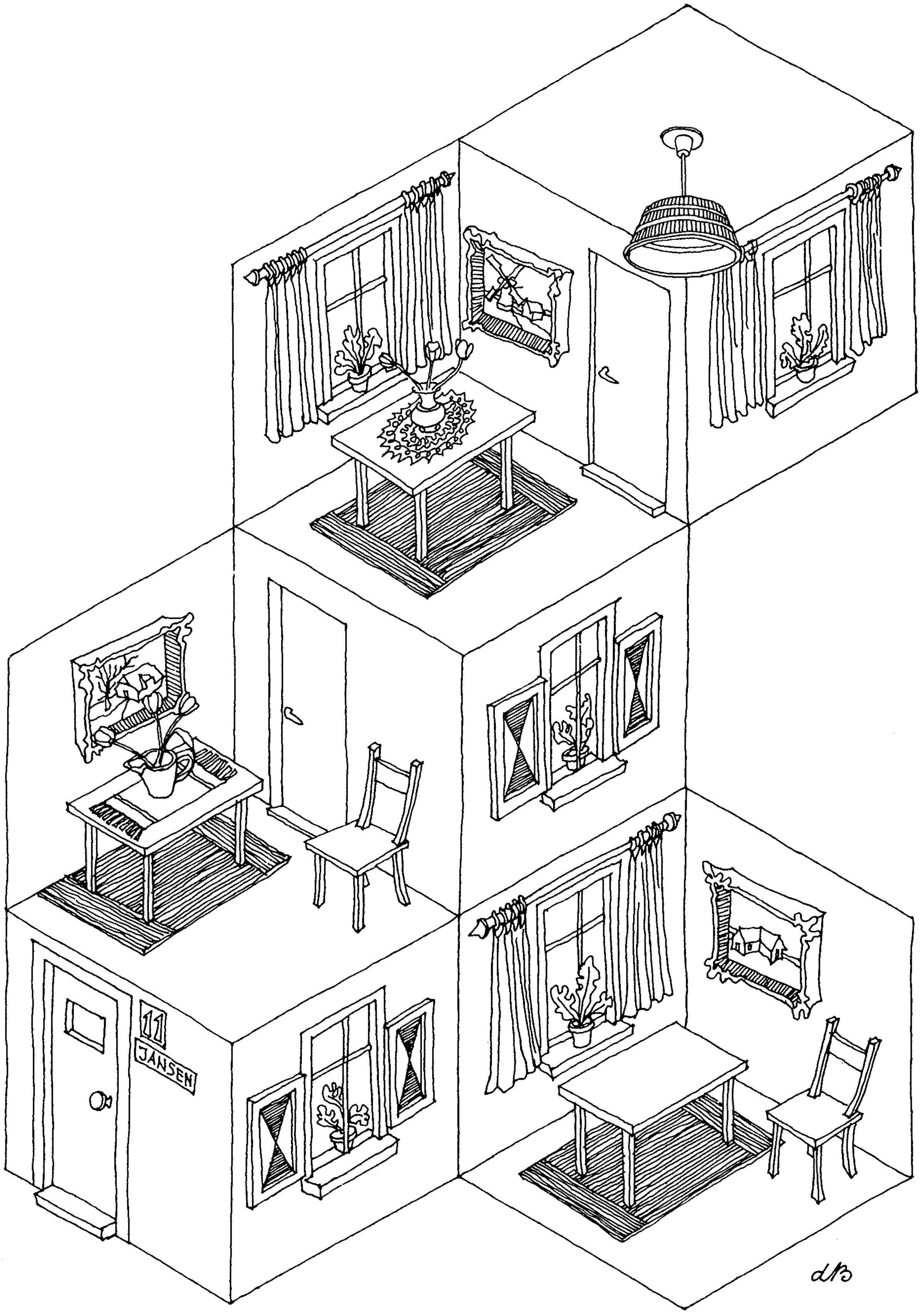
Hier is mijn lijstje:

Niels Henrik Abel	Noorwegen,	1929?
C.F. Gausz	Duitsland,	1965?
Galileo Galileï	Hongarije,	1964?
G. Mercator	België,	?
J. Kepler	Duitsland,	1971
M. Kopernile	Polen,	1972
A. Einstein	U.S.A.	1966
Benjamin Franklin	U.S.A. bij zijn 250ste verjaardag,	1956
Kamerling Onnes	Nederland,	1936
Lorentz	Nederland,	1928
Ik meen te weten ook Huygens,	Nederland,	?

Er moet natuurlijk nog veel meer zijn, en als mijn lijstje door u aangevuld wordt kunnen we misschien natuurkundigen en astronomen wel in een apart hokje zetten!



europazegels


11
JANSEN
dB

problematika

HUUB JANSEN

EEN BESCHOUWING ACHTERAF EN EEN AANTAL EKSKUSES

In het vorige nummer van dit tijdschrift hebben we getracht u en uw leerlingen te amuseren met een spelletje waarbij het materiaal bestond uit 9 kaartjes met daarop de cijfers van 1 tot en met 9. Twee spelers moesten daarbij om beurten kaartjes pakken met als doel drie kaartjes te verkrijgen, waarvan de som de cijfers 15 is.

In hetzelfde nummer heeft u – in een artikel van Adri Treffers – kunnen lezen dat het spelen van spelletjes nooit doel van het reken- of wiskundeonderwijs mag zijn, maar hoogstens een middel, indien zinvol ingepast in een leergang.

Bovengenoemd probleem is een voorbeeld van een spelletje dat op eenvoudige wijze zinvol binnen een leergang is in te passen. Immers: de vaardigheid in de bewerking *optellen* neemt in dit spel een centrale plaats in – al is het dan ook met eenvoudige getallen – en bovendien zullen de leerlingen, al spelend, bemerken dat er oplossings-strategieën zijn die tot winst kunnen voeren.
Tenminste?
Laten we het probleem eens nader bekijken.
Met de getallen 1 tot en met 9 een som van 3 termen maken met uitkomst 15 kan op de volgende manieren:

$$\left.\begin{array}{l} 1+5+9 \\ 1+6+8 \\ 2+4+9 \\ 2+5+8 \\ 2+6+7 \\ 3+4+8 \\ 3+5+7 \\ 4+5+6 \end{array}\right\} = 15$$

Zoals u ziet: er zijn 8 verschillende kombinaties, waarbij opvalt dat het getal 5 het meeste voorkomt.

Een goede strategie is dus om als beginnend speler het kaartje met het cijfer 5 te kiezen. Kiest vervolgens de andere speler een van de kaartjes 2, 4, 6 of 8 dan kunt u gemakkelijk nagaan dat bij goed spel van beide spelers niemand de overwinning behaalt. Er zijn uiteraard andere mogelijkheden, maar steeds blijkt dat bij goed tegenspel niemand tot winst komt.

Een en ander wordt nog duidelijker bij de presentatie van het volgende vierkant:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Via de horizontale en vertikale lijnen en de diagonalen zijn alle mogelijke sommen met uitkomst 15 te lezen, waaruit u konkludeert dat dit een eksemplaar is uit de verzameling *magische vierkanten.*

Bovendien is te zien dat het getal 2 precies driemaal voorkomt nl. horizontaal, vertikaal en diagonaalsgewijs. Wat overeenkomt met het voorkomen van 2 in het gegeven rijtje sommen met uitkomst 15. Voor de andere getallen geldt hetzelfde.
Vervolgens is nu duidelijk, dat ons spelletje in wezen niets anders is dan het bekende spelletje *'boter-, kaas en eieren'*. U kunt het namelijk ook spelen met bovenstaand vierkant erbij, waarbij iedere speler om beurten een getal moet aankruisen of omcirkelen.
Duidelijk is wel dat het bekende 'boter-, kaas en eieren' eenvoudiger en veel minder abstrakt is, dan het spelletje, waar het hier om gaat.
Met deze achtergrondkennis bent u wellicht in staat na te gaan of uw leerlingen al spelend de overeenkomst tussen dit spelletje en 'boter-, kaas en eieren' ontdekken en er gebruik van weten te maken.

Tenslotte:
In vraagstuk 2 van het vorige nummer, het vraagstuk van de schipbreukelingen, apen en kokosnoten is tussen de voorlaatste en laatste alinea een alinea verdwenen, waardoor de bedoeling van het vraagstuk op losse schroeven is komen te staan.
Tussen de twee genoemde alinea's had nog moeten staan:

> 'De volgende morgen doet ieder of hij van de prins geen kwaad weet, men verdeelt de resterende stapel in 5 gelijke delen, waarbij geen kokosnoot overblijft en iedere schipbreukeling trekt zich met zijn kokosnoten terug naar een veilig plekje op het eiland.'

U krijgt van mij evenveel ekskuses als de uitkomst van dit probleem aangeeft; u put daaruit misschien de moed om er alsnog uw tanden en kiezen op te breken.

1

Wiskobas onderzoekt vlijtig de mogelijkheden (en onmogelijkheden!) voor een toekomstig wiskundeonderwijs op de basisschool.
Nieuwe leerstofgebieden, zoals meetkunde, waarschijnlijkheidsrekening en statistiek zullen daarbij aan de orde komen. Onderdelen van het huidige rekenonderwijs zullen het loodje moeten leggen.
Het 'cijfermatige' karakter van het goede, oude rekenen zal bijvoorbeeld wel verdwijnen.

Voor een aantal fervente rekenaars onder u – en uw leerlingen – kan dit weleens een hard gelag betekenen.
Daarom voor deze mensen de volgende opgave:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100

Hierboven de getallen 1 tot en met 9 en de uitkomst 100. De kunst is nu op verschillende plaatsen tussen de cijfers rekenkundige bewerkingstekens (+, –, x, :) te plaatsen, zodat een rekenopgave ontstaat waar inderdaad 100 uitkomt.
Mocht het gelukt zijn, ga dan niet op uw lauweren rusten, want 10 verschillende oplossingen zijn zeker mogelijk.
Bovendien kunt u nagaan of de kreativiteit van uw leerlingen op dit punt wellicht groter is dan de uwe.

berichten uit het buitenland

KLAAS KOSTER

PROEVEN VAN EEN ENGELS PSYCHOLOOG

Voor veel leerlingen op de basisschool levert het onderscheid tussen oppervlakte- en omtrekberekeningen problemen op. Soms weten ze feilloos:

- de oppervlakte van een rechthoek is gelijk aan de lengte keer de breedte en
- de omtrek van een rechthoek bestaat uit twee keer de lengte plus twee keer de breedte.

Maar zodra vragen gesteld worden over het verband tussen oppervlakte en omtrek veranderen hun gezichten in grote vraagtekens.

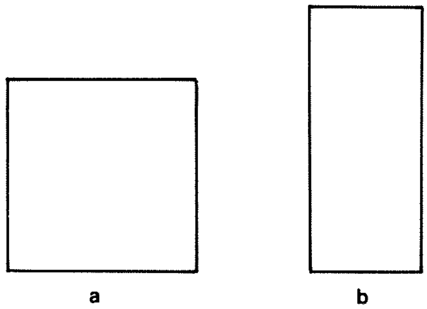


fig. 1

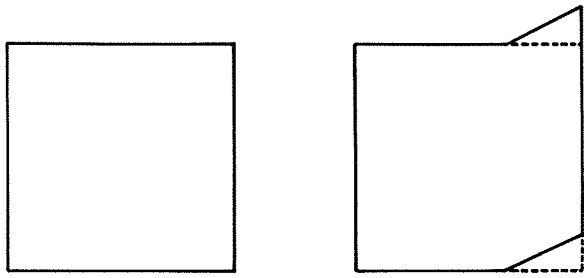


fig. 2

De volgende proefjes van de engelse psycholoog Lunzer laten goed zien welke problemen er bij oppervlakte- en omtrek-vergelijkingen kunnen optreden. Lunzer nam zijn proeven af bij 80 kinderen van vijf tot vijftien jaar in Geneve en bij 60 kinderen van negen tot vijftien jaar in Manchester. Beide groepen maakten dezelfde fouten en pas de oudste proefpersonen waren in staat de vraagstukjes op te lossen.
Het ging daarbij om de volgende taken.

Taak 1
De proefpersonen kregen een spijkerplankje voor zich waarop de spijkers in keurige rijen en op gelijke afstand van elkaar waren geplaatst. Op dit spijkerbord was met dikke lijnen een vierkant getekend, met een zijde van 25 cm. Met behulp van een touwtje werd op het spijkerbord dit vierkant ook aangegeven. Vervolgens werd de vorm van het touwtje vijf keer veranderd in steeds verschillende rechthoeken (zie fig. 1).
Vierkant **a** werd veranderd in rechthoek **b**, waarbij de oorspronkelijke omtrek gehandhaafd bleef, maar de oppervlakte zich wel wijzigde.

Taak 2
Een vierkante groene kaart met een zijde van 12 cm diende als uitgangsstelling. Vervolgens werd vijf keer een steeds groter driehoekje vanuit de rechter benedenhoek verplaatst naar rechtsboven het vierkant (de hoogte van de driehoeken bedroeg 2, 4, 6, 8 en 10 cm). In deze taak verandert de oppervlakte dus niet, maar de omtrek wel (zie fig. 2).

In grote trekken komen de resultaten van Lunzer's onderzoek op het volgende neer: kinderen in het *konkreet-operatoire stadium* volgens Piaget (tussen acht en elf jaar ongeveer) vertoonden de neiging om bij taak 1 zowel omtrek als oppervlakte als gelijkblijvend te beschouwen; om zowel omtrek als oppervlakte te *'konserveren'*.
Zelfs wanneer sommige kinderen door meting in een eerder proefje vaststelden dat de oppervlakte niet behouden bleef, deden ze het volgende proefje van taak 1 toch weer fout. Pas op het nivo van de *formele operaties* herkenden de proefpersonen dat bepaalde

grote veranderingen leidden tot afname van oppervlakte; daarna pasten ze dit gegeven ook toe in het geval van kleinere veranderingen.
In taak 1 deed zich nog het opmerkelijke verschijnsel voor dat sommige proefpersonen wel door hadden dat de oppervlakte tot nul naderde in geval de lengte of breedte van de touwfiguur steeds kleiner en kleiner werd gemaakt, maar ook deze opmerking leidde niet tot de oplossing van de andere vraagstukjes.
Volgens Lunzer beschouwen de kinderen de situatie waarin de oppervlakte de nul nadert namelijk als totaal afwijkend van de andere vormveranderingen. Het één heeft voor de kinderen niets met het andere te maken.

Bij taak 2 deed zich hetzelfde verschijnsel voor als bij taak 1.
Eerst werden zowel omtrek als oppervlakte 'gekonserveerd'. Maar hier hadden de oudste kinderen uit de *konkreet-operatoire fase* al in de gaten dat oppervlakte en omtrek losgekoppeld moesten worden. Kennelijk was taak 2 voor de leerlingen dus minder 'verleidelijk'.
Het blijkt uit proefjes als deze dat het denken van de kinderen in de hoogste klassen van de basisschool voor een deel andere wegen volgt dan de logika waarmee Piaget het denken van 14- tot 16-jarigen beschrijft.
Het denken van vijfde- en zesde-klassers is nog sterk gebonden aan gegevens *hier-en-nu*; formele redeneringen gaan nog grotendeels langs hen heen.

Met betrekkelijk eenvoudige middelen zijn de proefjes van Lunzer voor iedereen te herhalen. Misschien vormt het voor sommige P.A.-studenten een aanzet tot een onderzoekje in deze richting?

KONFERENTIES

Van 3-6 maart 1973 vindt te Knokke (België) een internationaal kongres plaats.
Dit wordt georganiseerd door het 'Centre Belge de Pedagogie de la Mathematique'.
De volgende tema's zullen aan de orde gesteld worden:
'1 Primary Education – Psychology – Special Education
2 Logic and Mathematics
3 Round tables in different languages
4 Programmed workshop (text by PAPY, on logic)'

Voor nadere gegevens kunt u zich wenden tot:

Centre Belge de Pedagogie de la Mathematique,
Avenue Albert 224,
1180 BRUSSELS.

onderwijs-televisie en wiskunde-onderwijs

PIET SCHOLTEN

Informatie over
- *onderwijstelevisie in nederland*
- *het projekt KIJK OP KANS*
- *plannen voor volgende projekten*

* * *

▸ *ONDERWIJSTELEVISIE IN NEDERLAND*
Onderwijstelevisie komt in nederland tot stand onder gezamenlijke verantwoordelijkheid van de Stichting Nederlandse Onderwijs Televisie (NOT) en de Nederlandse Omroep Stichting (NOS).
Globaal zijn de te verrichten werkzaamheden als volgt verdeeld:
NOT – samenstelling van de programmering
– samenstelling van de synopses
– vervaardiging van lesmateriaal
– studie, onderzoek en voorlichting.
NOS – vervaardiging van de draaiboeken
– produktie en regie van de programma's
– uitzending.

Ongeveer 70% van het totale aantal programma's zijn algemene uitzendingen. De overige zijn gerichte programma's, in het bizonder bestemd voor het protestants-christelijk, rooms-katholiek of openbaar en neutraal-bizonder onderwijs. Deze komen tot stand in samenwerking met respektievelijk NCRV, KRO en AVRO/VARA/VPRO.

Sinds de oprichting van de NOT in 1962 is het aantal otv-programma's voor basis- en voortgezet onderwijs sterk gestegen: van 20 programma's in 63/64 tot 220 in 71/72. Ook de inhoud is in de loop van deze jaren sterk veranderd; steeds meer vormen de programma's een onderdeel van een *onderwijsleerpakket*, met als komponenten: televisieprogramma's, begeleidend schriftelijk materiaal voor de onderwijzer/leraar, werkmateriaal voor de leerling en – zo nodig – diasets, geluidsbanden en grammofoonplaten.

Op dit moment beschikken ongeveer 2 van de 3 basisscholen over één of meerdere televisietoestellen.
Het gebruik bij het voortgezet onderwijs is minder groot, hetgeen vooral veroorzaakt wordt door lesroosters, die vaak moeilijk fleksibel te hanteren zijn. Nu er langzamerhand betaalbare videorecorders op de markt komen, kunnen we ook bij het voortgezet onderwijs een nog grotere belangstelling verwachten.

Wie uit deze opsomming de konklusie trekt dat we er in nederland zo'n beetje zijn op het terrein van de otv, is echter al te optimistisch. We zijn uit de startblokken, maar ook niet verder.

Het is niet de bedoeling om u hier lastig te vallen met alle problemen die de komende tijd om een oplossing vragen. Ik volsta met het noemen van een paar losse punten:
- intensivering van het kontakt met het onderwijs
- meer systematiek in het programma-aanbod
- planning op langere termijn
- de problematiek van de instruktieve omroep in haar geheel
- tegemoetkoming aan de wensen op het gebied van individualisering
- de fleksibele school
- optimalisering van het gebruik van otv
- de leeftijdsgroep van 4 tot 8 jaar
- kinderen met specifieke leermoeilijkheden
- de groep van de zogenaamde vroege schoolverlaters
- de rol van de ouders bij het onderwijs
- enzovoorts.

***

▸ *HET PROJEKT 'KIJK OP KANS'*
Onder de titel *KIJK OP KANS* wordt een

onderwijsleerpakket samengesteld voor de klassen 5 en 6 van de basisschool. Het volledige pakket zal bestaan uit:
* 6 televisielessen voor de leerlingen (NOT);
* 8 televisieprogramma's voor de onderwijzers (Teleac);
* leerlingen-werkboek voor ongeveer 20 lessen;
* onderwijzersboek;
* boek voor belangstellenden (o.a. ouders).

Het geheel komt tot stand in nauwe samenwerking met WISKOBAS.

In het voorjaar van 1973 zal dit pakket, met uitzondering van het boek voor belangstellenden, voor het eerst worden aangeboden.
De proeffase – waarin het uitproberen van het *volledige* pakket op een aantal scholen moet plaatsvinden – heeft op dat moment door tijdgebrek nog niet geheel volgens wens kunnen funktioneren, zodat het totaalpakket in het voorjaar duidelijk het karakter van een eerste versie zal hebben.
Op basis van ervaringen in de klas – tijdens en tussen de uitzendingen – zullen onderdelen van dit pakket worden herzien.
In gewijzigde vorm zal het totaalpakket in het najaar van 1973 opnieuw worden aangeboden. Zo zullen de TELEAC-uitzendingen duidelijk aan overtuigingskracht winnen door het opnemen van ervaringen in de klas, die tijdens de NOT-uitzendingen in het voorjaar kunnen worden gefilmd.
Het volgende advies is dan ook aan de onderwijzers van de klassen 5 en 6 gegeven:
- in het voorjaar meedoen met klas 6;
- in het najaar meedoen met de klassen 5 en 6.

Belangstellende onderwijzers van andere klassen, studenten P.A. en ouders wordt aangeraden om de Teleac-uitzendingen in het najaar te volgen.

De NOT-lessen worden gedurende 6 achtereenvolgende weken 's ochtends uitgezonden, te beginnen op woensdag 2 mei met de herhaling op de vrijdagochtend.
In deze lessen wordt aan de hand van gebeurtenissen uit de wereld van het kind (en de volwassene), en in voortdurende wisselwerking ermee, nader ingegaan op begrippen als kans, toeval, uitschieter, enz.
Ze zijn bedoeld als startpunt van een reeks aktiviteiten in de klas – individueel en in groepsverband –. We noemen: kritisch waarnemen, gegevens verzamelen, tabelleren, grafisch verwerken, rekenen, konkluderen, een onderzoekje opzetten en uitvoeren.

De TELEAC-uitzendingen vinden plaats op de dinsdagavond en – waarschijnlijk – op de zaterdagochtend. Deze zullen onder meer inhouden: wiskundige informatie, didaktische aanwijzingen en gedeeltelijke *preview* van de NOT-lessen.

De doelstellingen van dit projekt – in algemene termen geformuleerd – zijn:
- het doen beleven van de wiskunde als een *menselijke aktiviteit*, die in nauwe relatie staat tot het leven van alle dag;
- komen tot een positieve attitude ten aanzien van de wiskunde;
- de reeds verkregen rekenvaardigheid leren toepassen op problemen uit de eigen ervaringswereld.

De in de doelstelling genoemde rekenvaardigheid spitst zich vooral toe op breuken, procenten, kommagetallen en gemiddelden.

Het ligt in de bedoeling om parallel hiermee op de WISKOBAS-heroriënteringskursussen het onderwerp kansrekening en beschrijvende statistiek aan de orde te stellen.

***

▸ *PLANNEN VOOR VOLGENDE PROJEKTEN*

Voor de wat verdere toekomst gaan de gedachten uit naar een najaars- en voorjaarsprogramma van 4 à 5 lessen voor alle klassen van de basisschool, ter ondersteuning van het schoolwerkplan wiskunde.
Zendtijduitbreiding voor onderwijstelevisie moet dan echter wel eerst gerealiseerd zijn.

Voor het kursusjaar 73/74 wordt gedacht aan een projekt voor klas 2 (uitzending omstreeks maart). Omdat met de voorbereidingen nog moet worden begonnen, kan volledig rekening gehouden worden met de wensen uit het onderwijsveld.

Heeft u ideeën of suggesties? Ze zijn bizonder welkom (NOT, Riouwstraat 163, Den Haag, t.a.v. Piet Scholten).

0-70, 60 98 15

leerplanologie

ADRI TREFFERS
EDU WIJDEVELD

OVER OPERATIONELE DOELSTELLINGEN

2.0 INLEIDING

In het vorige artikel beschreven we de vooroorlogse opvattingen over de doelstellingen van het wiskunde-onderwijs.

In de nu volgende afleveringen bespreken we drie belangrijke tendensen, die na de tweede wereldoorlog hun invloed op het wiskunde-onderwijs doen gelden. We doelen op:

* De ontwikkelingen in verband met operationele doelstellingen.
* De herziening van de wiskunde-leerstof.
* Het streven naar een demokratische en veelomvattende leerplanontwikkelingsprocedure.

We gaan deze ontwikkelingen vooral beschrijven met het oog op de doelstellingen van het wiskunde-onderwijs en de implikaties voor de leerplanontwikkeling.

2.1 OVER OPERATIONELE DOELSTELLINGEN

2.1.0 De situatie in nederland

In de verenigde staten was men gewoon om de doelstellingen in nauwe relatie met de psychologie te omschrijven. Zo werd in de twintiger jaren een omschrijving van het vak rekenen voor de basisschool gegeven in niet minder dan 3000 eenheden.

Algemene doelstellingen ('aims' en 'goals') en doelstellingen in termen van waarneembare gedragingen ('objectives') bestonden naast en met elkaar.

In nederland – we schetsten het reeds in het eerste artikel – lag de situatie anders: de beschouwingen vonden plaats rondom 'algemene einddoelen.

Pas in de vijftiger jaren kon men hier te lande voor het eerst stemmen beluisteren, die wezen op de noodzaak om te komen tot formulering van doelstellingen in termen van waarneembaar gedrag. We noemen in dit verband: Wielenga, Von Dantzig en De Groot.

Wielenga schreef naar aanleiding van een studiereis naar de V.S.:

> 'Als men een of ander leerprogramma bekijkt, dan bemerkt men, dat elk onderdeel met het stellen der 'major objectives' begint. En dat niet alleen – er wordt ook aangegeven op welke wijze is te konstateren, dat men voortgang maakt op de weg naar het doel (meestal met behulp van het standaardtoetsen) – en dat is ook van het grootste belang.'[1])

Von Dantzig wijst naast de noodzaak van het formuleren van operationele doelen ook op de differentiatie van deze doelen in kategorieën van vaardigheid, kennis, systematische aanpak, inventiviteit en korrekt logisch redeneren.[2])

Kortom de leerstof, die de leerling aangeboden krijgt moet nauwkeurig vastliggen, de toelaatbare toegangswegen zijn uitgestippeld en het leertrajekt is nauwkeurig afgebakend. Of de leerling geslaagd is om dit trajekt te doorlopen dienen we af te meten aan zijn prestaties bij het oplossen van de toets. Toetsen waren echter weinig voorhanden.

Op aandrang van De Groot werd in de vijftiger jaren een *inzichttest voor meetkunde* ontworpen.[3])

Daarmee kwam voor het eerst in nederland een diskussie over operationele doelstellingen op gang. Aan de ene zijde stonden de voorstanders van een *open* benaderingswijze: in een onderwijs-leersituatie zijn wel gespecificeerde aktiviteiten te beschrijven, maar geen gedetailleerde doelen voorop te stellen; de avontuurlijke ontmoeting van leerling en onderwijzer binnen het onderwijsgebeuren laat een dergelijke vooropstelling niet toe. Deze groep heeft een afkeer van het kwantificeren en legt de nadruk op *het kwalitatieve karakter* van het leerproces in een kreatief onderwijsgebeuren.

nieerd als de bedoelde en gewenste gedragsveranderingen van de leerling als resultaat van het onderwijsleerproces — berust op de eigenschap, dat iedere doelstelling van een bepaalde kategorie gebaseerd is op een voorgaande.
De doelstellingen vormen zodoende een rangorde naar kompleksiteit: ze zijn hiërarchisch geordend (op een waarde-ladder). Omdat de meest belangrijke taxonomie zich allereerst richtte op het kognitieve gebied (kennis en vaardigheden), laat zich raden, dat vooral de invloed op de matematische vakken relatief groot geweest is.
Laten we eens enkele taxonomieën bekijken.

2.1.3 Taxonomie van Wood

Een betrekkelijk eenvoudige klassifikatie is van Wood en hij werd gebruikt voor een analyse van het wiskunde-onderwijs.[4])
De kategorieën, die nu volgen zijn niet te beschouwen als waterdichte kompartimenten, waarop de lezer kan aflezen welke begrippen hij er in kan stoppen. Men zij gewaarschuwd!

* *Kennis*
  - de taal van de wiskunde: definities, notaties, begrippen;
  - specifieke feiten;
  - wetten en generalisaties.
* *Vaardigheden*, zoals
  - het gebruik van meet- en rekeninstrumenten;
  - het tekenen van figuren en grafieken;
  - het maken van tabellen.

  Kortom, naast het kunnen verrichten van allerlei manipulaties moet de leerling beschikken over zekere technieken en algoritmen.
* *Begrip*, dat wil zeggen:
  - het kunnen omzetten van gegevens; bijvoorbeeld het omzetten van gegevens uit diagrammen, tabellen, grafieken in verbale vorm en omgekeerd, het kunnen omzetten van geometrische begrippen, die in verbale vorm gegeven zijn, in ruimtelijke vorm;
  - het kunnen interpreteren van gegevens; bijvoorbeeld het interpreteren van grafieken, het konkluderen uit gegevens, het kritisch onderzoeken van een redenering, het onderscheid maken tussen belangrijke en minder belangrijke gegevens, het destilleren van de essentie uit een redenering of een verhaal;
  - het interpoleren en ekstrapoleren; bijvoorbeeld uit beschikbare gegevens voorspellingen doen en leemten opvullen in een reeks met een bepaald patroon.
* *Inzichtelijk toepassen*, dat wil zeggen:
  - het toepassen van het geleerde in andere situaties;
  - het toepassen van het geleerde in relatief nieuwe situaties;
  - het vaststellen van relaties tussen bepaalde gegevens;
  - het hanteren van oplossingsmetoden;
  - het konkluderen en evalueren.
* *Inventiviteit*
  - kreatief handelen.

Taxonomieën die een grote overeenkomst vertonen met deze vijfdeling zijn die van de 'Educational Testing Service' (U.S.), 'The Indian National Council of Educational Research Classification' (India), de klassifikatie van 'The Schools Mathematics Study Group' (SMSG) en 'The International Study of Achievements in Mathematics' (Husèn, Zweden). Deze indelingen komen voort uit de sfeer van het toetsen en vertonen een treffende overeenkomst.

2.1.4 Taxonomie van Bloom

De taxonomie, waarvan de meeste invloed uitgaat, is die van Bloom.[5])
De voorgaande klassifikatie kan dan ook beschouwd worden als een vereenvoudigd model van de taxonomie van Bloom, die de volgende indeling heeft:

- *'Knowledge'*: kennis berustend op herinneren;
- *'Comprehension'*: de laagste trap van begrijpen en vooral bedoeld als een begrijpen op grond waarvan kommunikatie over het betreffende onderwerp mogelijk is;
- *'Application'*: het gebruiken van abstrakties, zoals regels, formules, metoden, teorieën;
- *'Analysis'*: het analyseren van een gegeven, waardoor de essentiële elementen en de relaties ertussen blootgelegd worden;
- *'Synthesis'*: het samenvoegen van elementen tot een geheel of een struktuur, die nieuw is voor de samensteller;
- *'Evaluation'*: oordelen over de waarde van

het materiaal — gegevens en metoden — om een bepaald doel te bereiken of om vast te stellen in hoeverre kwalitatieve en kwantitatieve gegevens aan bepaalde kriteria voldoen.

Ieder van de zes genoemde kategorieën is onderverdeeld in punten, die ook weer hiërarchisch geordend zijn.
Er zijn voor het wiskunde-onderwijs nog geen uitgebreide onderzoekingen gedaan op grond van de klassifikatie van Bloom; wel kan men voorbeelden van een praktische vulling vinden in de 'Guidelines for Teaching Mathematics' en in het 'Handbook on formative and summative evaluation of Student Learning'.[6])
Een goede manier om de waarde van een dergelijk klassifikatiesysteem te leren kennen is om het op een bepaald leerstofgebied toe te passen. Men kan dan een tabel gebruiken, waarbij de gedragskategorieën enerzijds en de leerstofkategorieën anderzijds de indeling bepalen.

2.1.5 Taxonomie van Wilson

Tot slot beschrijven we de taxonomie van Wilson, die de taxonomieën van Bloom (kognitieve gebied) en Krathwohl (affektieve domein) wat aangepast heeft voor het wiskunde-onderwijs.[7])

▸ *Tellen en Rekenen* ('Computation')
Eenvoudige oefeningen, waarin het routine-aspekt overweegt
- kennis van specifieke feiten: de feiten dienen daarbij op dezelfde wijze gereproduceerd te worden als ze geleerd zijn;
- kennis van specifieke termen: een zekere vertrouwdheid met de taal der wiskunde;
- het kunnen uitvoeren van algoritmen: de algoritmen zijn uiteraard niet alleen beperkt tot rekenen (algebra).

▸ *Begrijpen* ('Comprehension')
Begrijpen veronderstelt een meer kompleks gedrag dan in de vorige kategorie, hoewel de scheidslijn tussen beide kategorieën kunstmatig is aangebracht.
- kennis van begrippen: een begrip is een abstraktie en het werken met begrippen kent zekere beslissingsmomenten; we kunnen een begrip opvatten als een verzameling van specifieke feiten;
- kennis van principes, regels en generaliseringen: dit betekent zowel het vinden van principes, regels en generaliseringen, als ook het toepassen ervan om een probleem op te lossen;
- kennis van matematische strukturen: kennis van eigenschappen van getalsystemen en strukturen;
- bekwaamheid om problemen te transformeren: dit kan zijn een omzetting van een verbale beschrijving in een diagram of in een symbolische vorm (en omgekeerd);
- bekwaamheid om een redeneringslijn te volgen: dit betekent, dat men matematische argumenten kan volgen, openstaat voor kommunikatie;
- bekwaamheid om een probleem te lezen en te interpreteren.

▸ *Toepassen* ('Application')
- bekwaamheid om routine-problemen op te lossen;
- bekwaamheid om te vergelijken: relevante informatie dient opgespoord te worden, relaties moeten ontdekt worden; er moet tenslotte een beslissing genomen worden; na deze beslissing kan het probleem volgens een routine-aktiviteit opgelost worden;
- bekwaamheid om gegevens te analyseren, om daarna een aantal beslissingen te nemen: interpreteren van informatiegegevens, het probleem uiteenleggen in verschillende komponenten, het onderscheiden van relevante en irrelevante informatie en het verband leggen met problemen, die reeds eerder opgelost zijn;
- bekwaamheid om patronen, regelmatigheden, isomorfieën en symmetrieën te ontdekken.

▸ *Analyse* ('Analysis')
Het is de hoogste kognitieve kategorie: het oplossen van problemen, ontdekkingen doen en kreatief handelen; het verschil met het voorgaande bestaat uit de mate van transfer, die nodig is om problemen in een andere kontekst op te lossen.
- bekwaamheid om problemen op te lossen die niet volgens routine opgelost kunnen worden;
- bekwaamheid om relaties te ontdekken;
- bekwaamheid om een bewijs te leveren, een verklaring te geven;

- bekwaamheid om bewijzen kritisch te bezien;
- bekwaamheid om generalisaties te formuleren, te bewijzen of te verklaren.

▸ *Belangstelling en attitude* ('Interests and attitudes')
We betreden hier het affektieve gebied. Er is bij affekten sprake van een drietal komponenten: het betreffende vak, het gevoel met z'n richting en sterkte en de neiging om het vak volgens het voorgaande te benaderen. De problematiek in dit gebied is bizonder kompleks en wordt door klassificeerders met grote terughoudendheid benaderd.
- attitude: heeft de leerling plezier in wiskunde en hoe belangrijk vindt hij het vak ten opzichte van de andere vakken?
- belangstelling: heeft de leerling voorkeur voor matematische aktiviteiten?
- motivatie: hoe sterk is de emotionele komponent – de drijfkracht – om wiskunde te bedrijven?
- 'anxiety';
- 'self-concept': hoe beziet het kind zijn eigen prestaties?

▸ *Waardering* ('Appreciation')
Deze kategorie bevat zowel kognitieve als affektieve elementen:
- ekstrinsieke waardering: heeft betrekking op het nut van de wiskunde;
- intrinsieke waardering: deze waardering van de wiskunde wordt afgeleid uit de struktuur van de wiskunde zelf; wiskunde beoefenen om de wiskunde zelf;
- operationele waardering: de appreciatie voor de wiskunde komt voort uit de behoefte om wiskunde te leren aan anderen of om te kommuniceren op matematische golflengte.

2.1.6 Een kontroverse

Welke mate van effekt heeft de hier geschetste klassifikatieprocedure nu gevonden in de verschillende aspekten van de onderwijsontwikkeling?
In de eerste paragraaf noemden we als invloedssferen van operationele doelstellingen: de leerplanontwikkeling, de onderwijsresearch en de onderwijspraktijk.
Nu is gebleken, dat zowel bij leerplanontwikkeling als bij praktici een grote weerstand bestaat om doelstellingen te operationaliseren. Dit in tegenstelling tot de werkers in het gebied van de onderwijsresearch, die als belangrijke taak hebben het evalueren van het onderwijs.
Vanwaar deze kontroverse rond het belang van operationele doelstellingen voor de onderwijspraktijk?

Robert Davis (Madison Project) signaleert een tegenstelling tussen de beschrijvende onderwijsaanpak in de V.S., die uitloopt op een star onderwijsgebeuren en het *'aanpakkende'* onderwijs in Engeland:

▸ 'Now our descriptions seem to work moderately well when applied to mediocre patterns of practice, but they are not helpfull in elucidating subtlety, artistry, or real elegance. We allowed our available descriptions to limit our imagination, and our imagination to limit our practice. Here is one example: there is a fad in the States about writing down 'explicit behavioral objectives' before you start teaching, and aiming for those BO's (as they are called) with maximum feasible inflexibility.'[8])

▸ Meer fundamentele kritiek zijn we reeds eerder tegengekomen: geoperationaliseerde doelstellingen passen niet op de onderwijsleersituatie, omdat in de *interaktie* van leerling, leerstof en leraar ruimte moet zijn voor het onverwachte. Een gedetailleerde doelomschrijving staat de zelfrealisatie van het kind in de weg.

▸ De triviale, eenvoudig te formuleren doelstellingen in termen van gedrag krijgen te veel aandacht. Juist de doelstellingen van een hogere orde, die niet in dergelijke termen te vangen zijn, blijven ongenoemd, waardoor de aandacht in het onderwijs te veel gericht wordt op de *routine-matige eindprodukten* van onderwijsprocessen.[9])

▸ De *terminologie*, waarin de geoperationaliseerde doelstellingen omschreven worden, alsmede de klassifikatie-kategorieën, verduisteren veeleer de doelstellingen in plaats van ze te verhelderen.

▸ De *invloed van de leerling* op de doelstellingen is te gering.

▸ Belangrijke *attitude-doelen* en *affektieve doelen* zijn moeilijk meetbaar en waarneembaar, waardoor ze relatief weinig aandacht krijgen.

- Van meer *filosofische* zijde wordt op de grenzen van het operationaliseren gewezen: men kan de mens met natuurwetenschappelijke metoden bestuderen, maar dan reduceert men hem zodanig, dat het menselijke leerproces ontoegankelijk gemaakt wordt.[10])
Vooral van de kant van de fenomenologen wordt de nadruk gelegd op het belang van de onderwijskundige intuïtie, de noodzaak van het interpreteren en het gewicht van de visie, zonder nochtans het belang van empirische metoden aan te tasten.

2.1.7 Feiten

Na deze wederzijdse konfrontatie is het goed om nog enkele feiten onder ogen te zien, die bij de polemiek nogal eens uit het oog verloren worden.

- De praktici hebben zeer konkrete doelstellingen: het leerboek is het belangrijke oriëntatiepunt.
Dit aan het adres van degenen, die stellen, dat de leraar niet doelstellingenbewust is.
- Bloom, Krathwohl, e.a. wijzen het ekstreme standpunt van het operationaliseren af. Zij beklemtonen het feit, dat de mate van konkreetheid van de doelstelling afgestemd dient te worden op het gebruik en het gewenste effekt, dat men ermee wil bereiken.
Dit aan het adres van degenen, die nog 'operationeler' zijn dan 'Bloom himself'.[11])
- Het operationaliseren en klassificeren van doelstellingen heeft een duidelijk didaktisch keuze-moment in zich.
Persoon A kan een bepaalde aktiviteit rangschikken in de kategorie 'inventiviteit' van het schema van Wood, terwijl persoon B dezelfde leerstof rangschikt onder kategorie 'kennis'. Daarmee wordt dan waarschijnlijk uitgedrukt, dat A in deze les de ontdekkende werkwijze hanteert, terwijl B een meer docerende metode prefereert.
Het is ook mogelijk, dat bij de indeling een nivo-verschil tot uitdrukking gebracht wordt. Kortom, een klassifikatie-systeem is geen dwangbuis, maar kan dat wel worden als het alleen gebruikt wordt door toetsmakers. Is immers het onderwijs niet afgestemd op de toetsprocedure dan loopt men gevaar langs elkaar heen te meten: kennis wordt dan bijvoorbeeld gemeten met maatstaven van inventiviteit.
Dit aan het adres van degenen, die menen, dat in het klassifikatiesysteem alle beslissingen vooraf genomen zijn en dat de indeling slechts een kwestie is van het goede hokje aankruisen, zoals het in eerste instantie door Bloom c.s. ook wel bedoeld is.

2.1.8 Stellingen

Ter afsluiting van dit artikel een aantal stellingen.

* De formulering van min of meer konkrete doelstellingen en de ordening ervan met behulp van een taxonomie (bijvoorbeeld Wood, Bloom, Wilson) vooronderstelt *een nauwkeurige afbakening* van het onderwijsleertrajekt. De klassifikatie van de doelstellingen sluit een didaktisch keuze-moment in zich.

* Hieruit volgt, dat een toetsprocedure, die los staat van het gegeven onderwijs en de verrichte leeraktiviteiten, gevaar loopt om kennis te meten met maatstaven van inventiviteit. De toetspraktijk dient niet geïsoleerd te worden van de onderwijspraktijk, maar behoort juist een *integraal deel* uit te maken van het gehele didaktische proces. Hetzelfde betreft de formulering van konkrete doelstellingen.

* Zowel de doelformulering als de evaluatieprocedure maken deel uit van de *kreatieve ontwerpaktiviteiten*, waarmee de les of de lessencyclus voorbereid worden.
Doelformulering en evaluatie zijn de afgeleiden van de matematisch-didaktische kreatie.

* Aanvankelijk is de doelformulering dus geheel *verweven* met de ontwerpaktiviteit.

* Naast de uitputtende doelformulering heeft de *eksemplarische doelformulering* een belangrijke funktie in de eerste fasen van de leerplanontwikkeling.
Met name de illustratie van de filosofie, die achter het wiskunde-onderwijs steekt, kan helpen om deze filosofie ook voor een lessenserie te ekspliciteren.

* De formulering van konkrete doelen met

behulp van een taxonomie-rooster, met op de assen de gedragskategorieën enerzijds en de leerstofkategorieën anderzijds, geeft *een versnipperd beeld* van de doelen. Het beschrijvingsstuk van het gegeven onderwijs verleent het rooster meer struktuur.

* De gedragskategorieën van een taxonomie kunnen de procesmatige elementen van het onderwijs versluieren. Plaatst men een doelstelling onder het hoofd van inventiviteit dan komt het er vooral ook op aan om te analyseren waaruit die inventiviteit dan wel bestaat. Kortom, de *fundamentele matematisch-didaktische analyse* vormt – naast de beschrijving van een stukje onderwijs – een noodzakelijk komplement van de inpassing in de taxonomie.[12])

* Een doelstellingsformulering, die los van de onderwijsrealisering geschiedt, leidt tot misstanden.
Aan de andere kant staat echter het beeld van de volledig vrije, kreatieve onderwijzer als een tegengestelde overdrijving.
Tussen beide uitersten hoort *een redelijke beschrijving* van de doelen thuis.

* Een min of meer konkrete doelomschrijving wordt moeilijker naarmate we van teorie en probleempjes via bakens naar *tema's en projekten* gaan. De moeilijkheden vinden we in het groot binnen de vakken terug als we bijvoorbeeld konkreet de doelen van het cijferen, het taalonderwijs en het muziekonderwijs proberen te omschrijven.

* In het voorgaande deden we een poging om de formulering van konkrete doelen op de juiste plaats te zetten in het geheel van de leerplanaktiviteiten. Zo u wilt: een bescheiden plaats.[13])

* De ontwerpaktiviteiten, de vakstrukturele en didaktische verantwoording en analyse, de eksplicitering van de filosofie die achter de lessencyclus steekt en de beschrijving van het onderwijs-leergebeuren zijn komponenten die aan de konkrete doelformulering en z'n evaluatie-komplement vooraf gaan. In de eerste en tweede fase van de leerplanontwikkeling (de eksploratie en de eerste poging tot integratie) ligt de nadruk op de eerstgenoemde komponenten, in een volgende fase zal het aksent meer naar de konkrete doelformulering, ordening en evaluatie verlegd worden.

2.1.9 Oproep

Om de doelstellingenproblematiek werkelijk goed te ervaren, wekken we de geïnteresseerde (gespecialiseerde) lezer op om eens een poging te doen om de doelstellingen van een lessencyclus te operationaliseren.
De afhankelijkheid van de didaktische aanpak, het pakken van het *leerproces*, het doorstoten naar het essentiële of het blijven hangen in het triviale, het al dan niet harnassen van het onderwijsleerproces e.d. kunnen we bijvoorbeeld ervaren bij het aanbieden van isomorfe telproblemen.[14])
In de V.S. is men er ten aanzien van het wiskunde-onderwijs niet in geslaagd het vraagstuk van het operationaliseren bevredigend op te lossen.
In de diskussie van de opponenten in de tijdschriften 'Mathematics Teaching' en 'The Arithmetic Teacher' komen twee trekken duidelijk naar voren:

- Men geeft toe, dat het vraagstuk van het operationaliseren *nog* niet is opgelost maar men blijft het grondbeginsel aanhangen: 'Als we er in slagen . . .'.
- Of men is tot de konklusie gekomen dat het beginsel niet toegepast kan worden, omdat het leerproces de doelstelling verbergt (zie: 'de nederlandse situatie in de vijftiger jaren').

Uit de opgesomde stellingen kan de lezer opmaken, dat we de pogingen tot operationaliseren toch zinvol achten als een klein onderdeel van de planning en verantwoording van een lessencyclus (c.q. leerplanontwikkeling).

Vandaar de oproep .

2.1.10 Noten

[1]) *Wielenga, G.: – Enige aspecten van het onderwijs in de wiskunde en natuurwetenschappelijke vakken op de Amerikaanse High-School, in 'Euclides' 26 (1950–1951) pagina 82–96*

[2]) *Dantzig, D. von: – The function of mathematics in modern society and its consequence for the teaching of mathematics, in 'Euclides' 31 (1955–1956) pagina 88–103*

[3]) *Groot, A.D. de: – Een inzicht-test voor meetkunde, in 'Euclides' 31 (1955–1956) pagina 88–103*

[4]) *Wood, R: – Objectives in the Teaching of Mathematics, in 'Current Research in Elementary School Mathematics' pagina 22–45*

[5]) *Bloom, B.S.: – Taxonomy of Educational Objectives: The classification of educational goals, Handbook I, Cognitive domain, New York 1956*

[6]) *Johnson, D.A. en Rising, G.R.: – Guidelines for Teaching Mathematics, Belmont 1969*[2] *pagina 334–341*
Bloom, B.S., Hastings, J.T., Madaus, G.F. : – Handbook on formative and summative evaluation of student learning, New York 1971 pagina 271–277 en pagina 651–690

[7]) *Wilson, J.W.: – Evaluation of Learning in Secondary School Mathematics, in 'Handbook' (zie noot 6) pagina 643–697*

[8]) *Davis, R.B.: – Report from the States, in 'Mathematics Teaching' 50 (1970) pagina 6–13*

[9]) *Cecco, J.P. de: The psychology of learning and instruction, London 1968 hoofdstuk I*

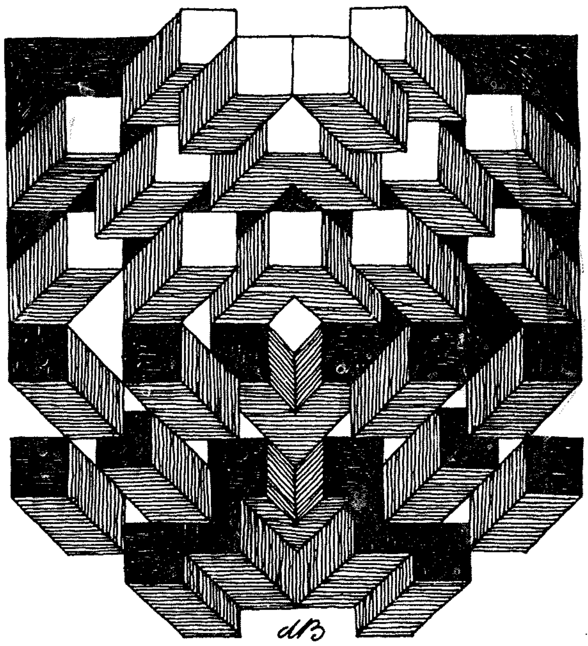
[10]) *Strasser, S.: – Fenomenologie en empirische menskunde, Arnhem 1962 pagina 278 en verder*

[11]) *Corte, E. de: – De functie van algemene en concrete doelstellingen in het didaktisch proces, in 'Pedagogische Studiën' 48/1 (1971) pagina 14*

[12]) *Scandura, J.M.: – Mathematics, Concrete behavioral foundations, New York 1971*

[13]) *Corte, E. de: – Naar een model voor inventarisatie van didaktisch wenselijke onderwijsdoelstellingen, in 'Pedagogische Studiën' 48/1 (1971) pagina 33 en verder*
Henting, H. von: – Allgemeine Lernziele der Gesamtschule in 'Gutachten und Studien der Bildungskommission' 12 Stuttgart 1971[2] *pagina 13–44*
Curriculum Reform als Gegenstand der Schule in 'Paedagogica Europaea' 1970/1971 Den Bosch 1971 pagina 126

[14]) *Moor, E. de, Treffers, A.:– Tel-op-tal Een KO-boek voor de heroriëntering van de onderwijzer I.O.W.O., Utrecht*



Zeker is, dat u in de wiskundewerkhoek kunt opnemen:

* multo ruitenpapier 10 mm (in grote hoeveelheden);
* potloden, linialen, plexiglas, driehoeken, scharen;
* spijkerborden (9 x 9);
* weegschaal met gewichten;
* meetlint;
* stopwatch;
* 'waardeloos materiaal' als schroeven, spijkers, flessedoppen, stuiters, kurken, kiezelstenen, zand;
* en alles wat u verder van belang lijkt na bestudering van de opdrachtkaarten.

In de sektor van het meten en wegen kan een enorme lijst van bruikbare materialen geproduceerd worden.
We wijzen u erop dat in de blokken voor de heroriëntering veel informatie, ook betreffende materialen, is te vinden. De nadruk valt daarin vooral op materialen die te maken hebben met 'Grafische Verwerking', 'Het Spijkerbord', 'Meten'.
Het blok 'Kans op . . . ', over waarschijnlijkheden, is momenteel in ontwikkeling. Ook daarin worden vele bruikbare materialen (van dobbelsteen tot kansspelletjes) genoemd.

'Wiskundewerkhoeken' als werkwoord
We adviseren de onderwijzer die met een wiskundewerkhoek start en deze start heeft voorbereid op de manier zoals hierboven beschreven om voorzichtig met deze werkwijze te beginnen.
Dat kan op twee manieren.
De eerste manier vereist veruit de minste voorbereiding. U wacht in een normale rekenles tot een leerling die klaar is zich meldt en u geeft hem een bepaalde opdracht in de wiskundewerkhoek. U kiest dus de software (opdrachtkaart bijvoorbeeld) en wijst de leerling kort de weg in de materialenkast.
In een later stadium, als de leerlingen er niet meer vreemd van opkijken dat u deze werkwijze voor een bepaalde leerling uitkiest, breidt u de werkwijze naar twee kanten uit. Soms geeft u vrije opdrachten ('Zoek zelf snel een leuke opdrachtkaart'), soms geeft u opdrachten die in groepjes moeten worden uitgevoerd. Het is uiterst belangrijk dat u in de gaten houdt dat een leerling zonodig een volgende keer zijn opdracht kan afmaken.

Een tweede manier is de werkwijze die wel eens getypeerd wordt als 'de vrijdagmiddagaktiviteit'; een aktiviteit die uiteraard ook op de maandag kan plaats vinden. In deze vrijdagmiddagaktiviteit kunt u allerlei opdrachten geven (lees-, taal-, toneel-, enz.), waarvan een aantal plaatsvinden in de wiskundewerkhoek. Ook kunt u er een wiskundemiddag van maken, met onderzoekjes, eksperimentjes. Dit laatste eist een gedegen voorbereiding, ook al is het zo dat de voorbereiding opdrachtkaarten, organisatieschema's e.d. kan opleveren, die in een ander jaar of in een andere klas weer kunnen worden gebruikt. Die voorbereiding is uiterst belangrijk. Het is duidelijk dat een totaal uit de hand gelopen 'eksperiment' niet gauw herhaald zal worden.
En dat zou jammer zijn, omdat in dit kader zeer zinvolle aktiviteiten kunnen worden gedaan.

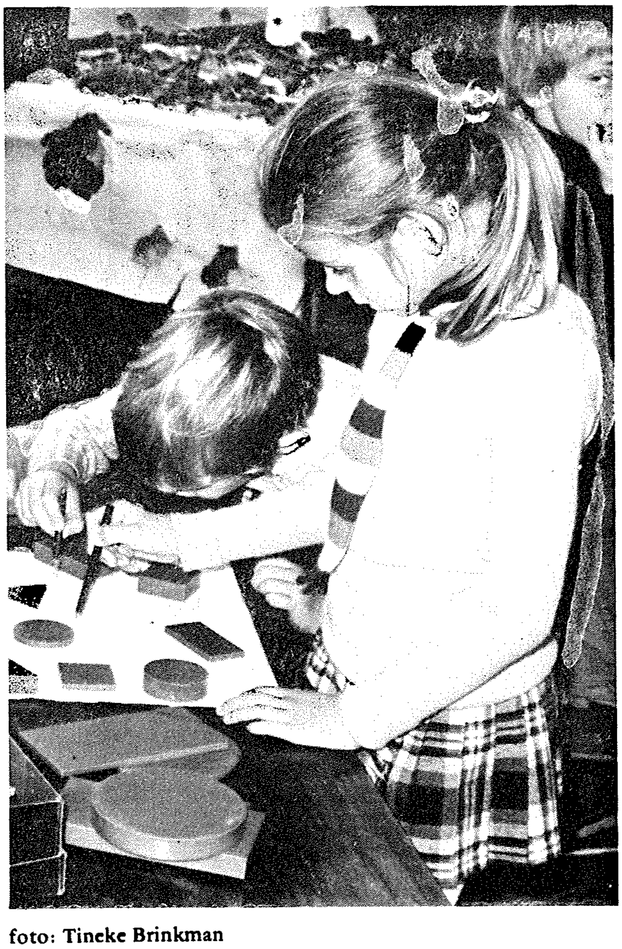


foto: Tineke Brinkman

nieuw op de markt

ED DE MOOR

EEN REKENAKTIVERINGSPROGRAMMA

De onvermijdelijke hamvraag op alle H.O.O.-kursussen, oriëntatiemiddagen, voorlichtingsbijeenkomsten van WISKOBAS is:

> 'Welke basischoolmetode beveelt u ons aan? '

U kent zo langzamerhand het antwoord, dat we toch maar weer eens herhalen:

> 'We zijn momenteel in de eksploratiefase. Tot 1975. Houdt u zich tot die tijd aan een goede traditionele metode. Als u een H.O.O.-kursus volgt: probeer eens wat ideeën uit, die in de BAS-boeken staan. Probeer het rekenonderwijs uit z'n verstarring te verlossen. Kortom: verlevendig het huidige rekenonderwijs! '

Een voortreffelijk hulpmiddel hierbij voor de eerste twee klassen van het basisonderwijs is thans verschenen, nl. het *Rekenaktiveringsprogramma* van Drs. Ger Janssen, met medewerking van Drs. A.N. van der Geest en Wim Swüste, een uitgave van Malmberg en in opdracht van het Centrum Onderwijs-Service te Nijmegen samengesteld (2 delen).

De ondertitel luidt 'Suggesties voor een vernieuwde aanpak voor de onderbouw van de basisschool'.

Het programma is dan ook geen metode in de traditionele zin met rijtjes sommen en oefenstof. Wel bevat het boek, in multobandvorm uitgegeven, een schat van ideeën voor de onderwijzer(es) om het rekenonderwijs tot een waar feest te maken.

Vele ideeën zijn mijns inziens ook zeer geschikt, of misschien soms geschikter voor het kleuteronderwijs dan voor het basisonderwijs, maar dit zal veelal van het nivo van de leerlingen afhangen.

Uit de verantwoording van Janssen citeer ik:

> 'Doel van het programma.
> De in dit rekenactiveringsprogramma aangeboden suggesties zijn bedoeld om de overgang van het traditionele rekenen naar het moderne rekenen (of: wiskunde) te vergemakkelijken. De suggesties vormen tezamen geen volledige, nieuwe methode, maar kunnen náást het gewone rekenboek gebruikt worden door de leerkracht om langzaamaan wat meer vertrouwd te raken met de nieuwere werkwijzen.'

Daarna worden enkele kernpunten genoemd om enigszins aan te geven waarin 'nieuw' en 'oud' verschillen.

Natuurlijk wordt het struktuurkarakter van de wiskunde genoemd, waar ik gaarne mee instem, maar van veel groter belang acht ik de aandacht die aan het 'reken-taalgebruik', het 'leren door doen', het 'zelf ontdekken' en het 'stimuleren van de inventiviteit' wordt besteed.

Ik citeer weer een klein stukje over reken-taalgebruik:

> 'Veel kinderen zijn *ongenuanceerd* in hun taalgebruik. Kinderen spreken van een grote boom als ze een 'hoge boom' bedoelen; ze zeggen dat een straat groot is als ze 'breed' willen aangeven. Precieze uitdrukkingen als 'hoog', 'lang', 'uitgestrekt', 'veel', 'een groot aantal', enz. zijn aan de kinderen niet steeds bekend.'

Het zal u niet verwonderen dat 'het leren door doen' iedere Wiskobassiaan het hart sneller doet kloppen en weer citeer ik Janssen gaarne:

> 'Leren door doen
> Al is het verwoorden door de kinderen belangrijk, we mogen niet vergeten, dat een kind ook zonder woorden, in een activiteit, blijk kan geven iets begrepen te hebben. Het accent ligt in de hele rekendidactiek niet meer zo zwaar op het horen of het zien, maar veel meer op het doen.'

Nu zal het geen rekendidaktikus moeilijk vallen een teoretische verantwoording te schrijven, maar het gaat om de praktijk en gelukkig zijn de praktische aanwijzingen vrijwel allemaal zeer bruikbaar. Aan de orde komen de onderwerpen:

- Dingen en verzamelingen
- Verzamelingen vergelijken

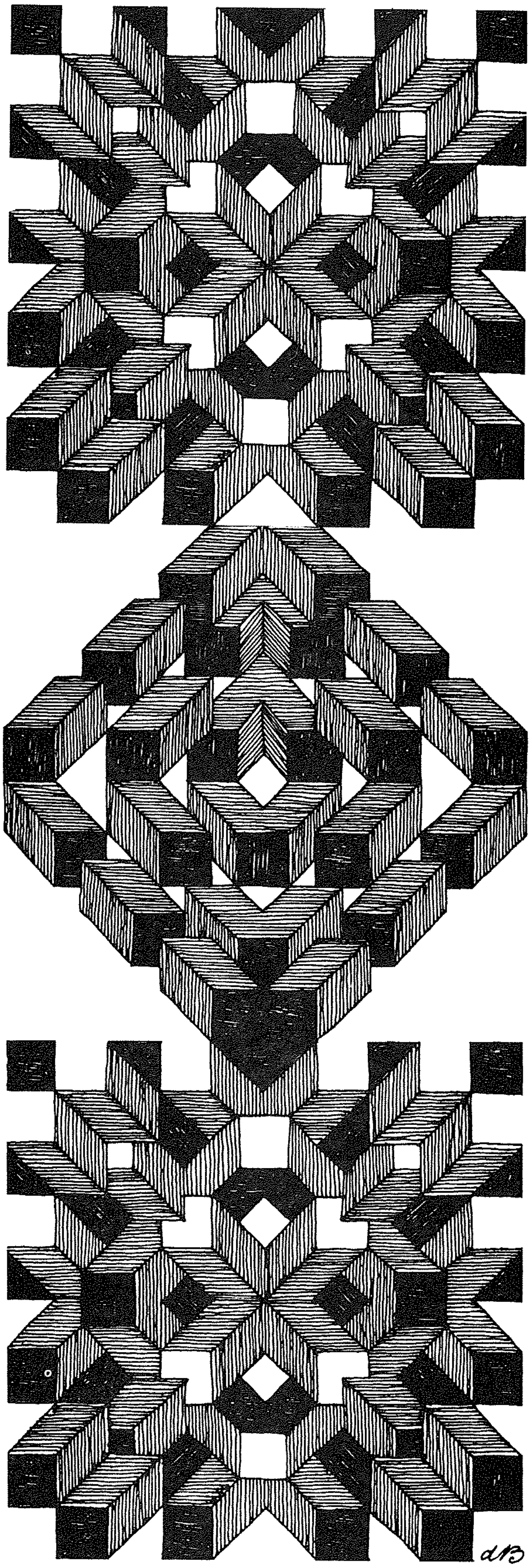
– Getallen
– Ordenen
– Bewerkingen
– Figuren
– Lengte
– Oppervlakte
– Inhoud
– Gewicht
– Tijd

Jammer is het naar mijn idee, dat wederom zoveel aandacht aan verzamelingen besteed wordt, aan de één-één-relatie, en vooral dat het kardinaal-aspekt van het getal zo sterk benadrukt wordt. Degenen, die de heroriënteringsblokken kennen zijn op de hoogte van ons standpunt wat deze onderwerpen betreft. Ook zullen zij vele herkenningspunten in dit programma ontdekken.
Het lijkt mij geen programma voor de luie onderwijzer(es) want grondige voorbereiding, studie, goede les- en klasse-organisatie is vereist bij het gebruik. De voldoening, die het onderwijs kan schenken als enthousiasme ontstaat bij degenen, die je onderwijst, zal hier zeker tegenop wegen.

In het tweede deel zijn als bijlagen toegevoegd een reeks handige tekeningetjes die gemakkelijk zelf te produceren zijn, een lijst van rekentermen, een overzicht van leermiddelen, een reeks peilingen (tests), een literatuurlijst en een handleiding bij de werkbladen.
Het geheel is schitterend uitgevoerd, aantrekkelijk geïllustreerd, van foto's voorzien, kortom: met zorg uitgevoerd, zelfs met zoveel zorg dat wij in de errata lezen:

Blz. 330, r 4 v.b. rekenactivitieten moet zijn rekenactiviteiten

Wij kunnen Ger Janssen c.s. met dit programma feliciteren en ook de uitgeverij Malmberg, die zoveel denkt aan rekenen. De prijs van de twee delen (f 55,–) mag bij de aanschaf geen beletsel zijn.
U hebt toch maar één eksemplaar per klas nodig.
De volgende keer hopen we aandacht aan de werkkaarten van Jan Nieland te kunnen besteden.



overwegen

JAN VAN DEN BRINK

Door de Amsterdamse Raad voor Beroepskeuze wordt een brochure uitgegeven, getiteld 'De zesde klas door . . . wat nu? '
Hierin vinden de ouders schema's over allerlei schooltypen.
De 'routes' die men kan doorlopen zijn als lijntjes tussen de 'scholen' aangegeven (zie fig. 1).

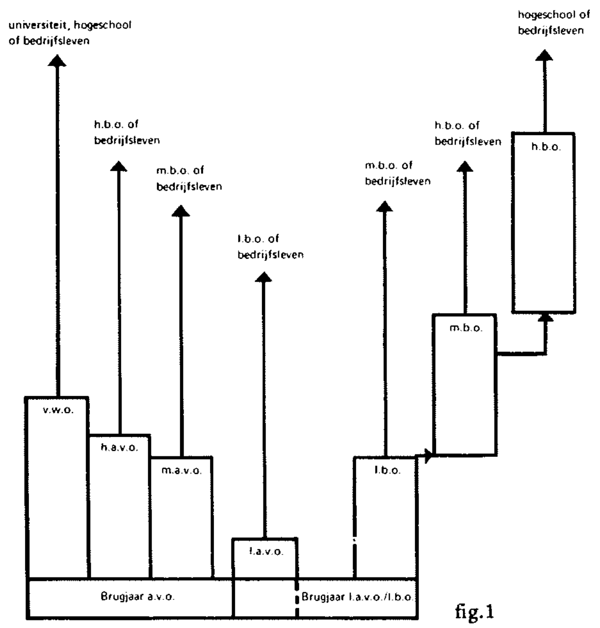


fig.1

Op de achterkant van de brochure staat een ander ingewikkeld wegensysteem getekend (zie fig. 2).

De schema's in het boekje hebben tot doel om de warwinkel van wegen in ons onderwijssysteem voor de ouders enigszins bloot te leggen – om zo te laten zien op welke wijze een bepaald type school te bereiken is –.

BEREIKBAARHEID

De vraag naar de bereikbaarheid komt in alle 'wegensystemen' voor:
in een brochure over schoolkeuze, bij het instellen van eenrichtingsverkeer in een drukke stadskern (zie fig. 3).

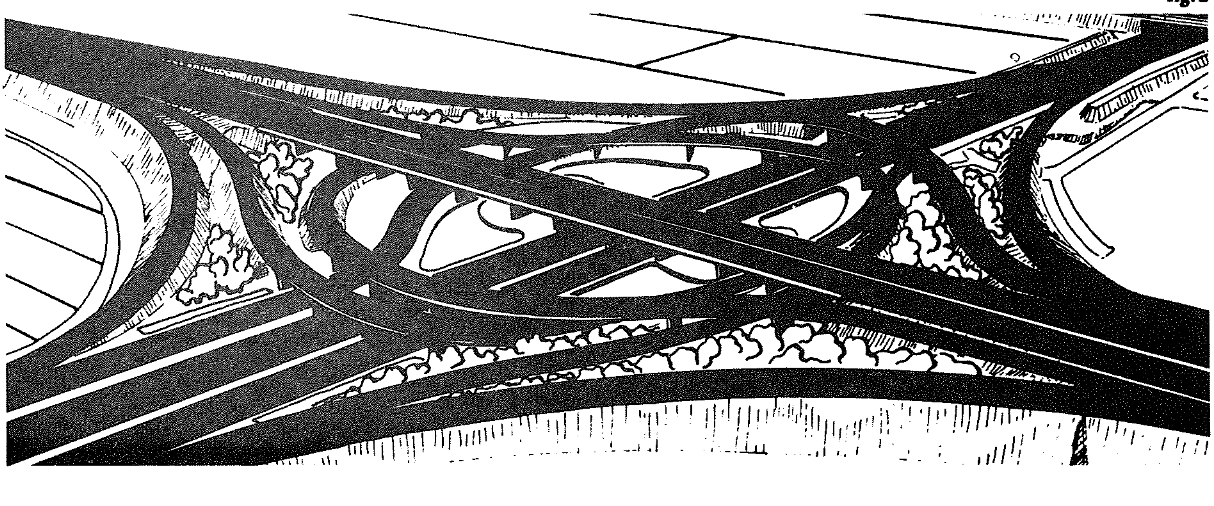
Steeds blijft de vraag aktueel: is vanuit een bepaald punt een ander punt te bereiken?

MATEMATISEREN OP VERSCHILLEND NIVO

Dergelijke 'wegensystemen' geven aanleiding tot matematiseren.

* We zullen in dit artikel eerst enkele *voorbeelden* bespreken die u in uw klas aan de orde kunt stellen.

fig.2



* Daarna zullen we demonstreren dat, op hoger nivo, een rekenkundige *teorie* (matrixalgebra) op deze meetkundige wegensystematiek is te ontwikkelen.
Deze maakt het mogelijk om op eenvoudige wijze relaties te *berekenen.*[1])

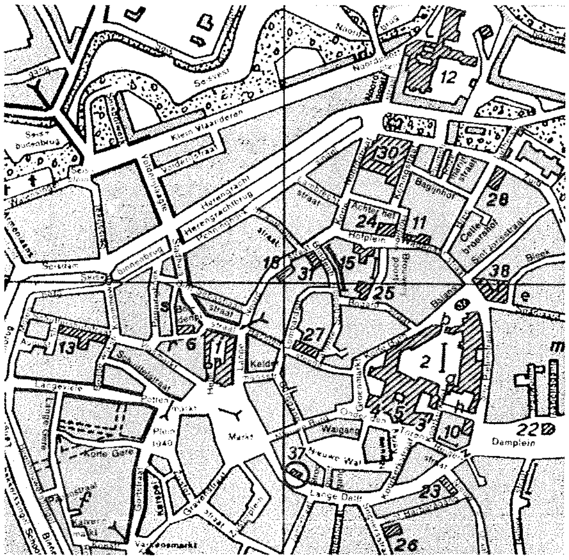


fig. 3

ENKELE VOORBEELDEN

▸ We spreken eerst af wat we onder een *'direkte weg'* verstaan.
Een *direkte weg* van A naar B in een wegensysteem is een weg waarbij we van plaats A naar plaats B gaan *zonder een derde plaats te passeren.*

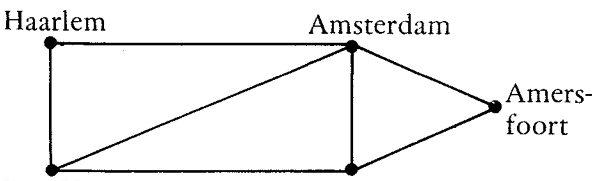


fig. 4

Enige vragen bij dit wegennet (fig. 4):
- Is er een direkte weg
  van Utrecht naar Den Haag?
  van Amersfoort naar Haarlem?
  van Utrecht naar Utrecht?
- Hoeveel direkte wegen eindigen in Amsterdam?
- Hoeveel beginnen in Den Haag?

▸ Een andere manier om de direkte wegen aan te geven is de *wegenmatrix*. Hierin wordt het *aantal* direkte wegen tussen twee plaatsen genoteerd.

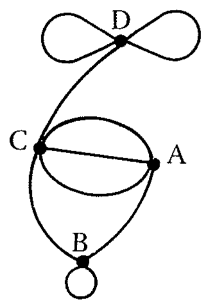
naar:

van:	Haarlem	Den Haag	Utrecht	Amsterdam	Amersfoort
Haarlem	0	1	0	1	0
Den Haag	1	0	1	1	0
Utrecht			0		
Amsterdam				0	
Amersfoort	0				0

fig. 5

- Probeer deze matrix in te vullen.
- Kunt u verklaren waarom op één van de 'diagonalen' van de matrix uitsluitend nullen staan?
- Hoe komt het dat de matrix gespiegeld is ten opzichte van die 'nullendiagonaal'?

▸ Matrices worden vaak ingevoerd, omdat men ermee kan 'rekenen'. Het verband tussen matrices en de problemen waarvoor ze worden gebruikt moet hierbij steeds worden onderzocht.
In dit kader volgen hier enkele opmerkelijke zaken:



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

fig. 6

- Kunt u verklaren dat er twee direkte wegen van B naar B genoteerd staan en vier direkte wegen van D naar D?
- In figuur 7 zijn vier wegensystemen getekend.
  Ga na of de volgende wegenmatrix bij elk van de systemen behoort.

$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$:

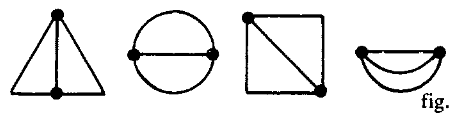


fig. 7

[1]) Dit teoretisch gedeelte is in kursief en in een kleinere letter gedrukt.

▸ We hebben tot nu toe steeds gesproken over de 'problematiek' om in *één stap* van het ene punt naar het andere te gaan.
Met 'één stap' bedoelen we: via *één direkte weg*.
We kunnen ons ook afvragen of we in *precies twee* stappen van A naar B kunnen komen. (zie fig. 8)

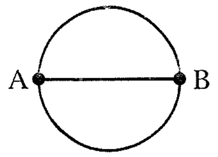


fig. 8

Dit is onmogelijk, want als u één stap vanuit A doet, komt u in B; doet u daarna de verplichte tweede stap dan verlaat u helaas punt B (waar u had moeten aankomen).

- Kunt u in *precies twee* stappen vanuit A in A terugkomen?
- Ziet u dat dit op 9 verschillende manieren kan?

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Ga na of deze wegenmatrix het aantal verschillende manieren aangeeft als men verplicht is precies 2 stappen te doen in het systeem van fig. 8.

We zullen dergelijke matrices *'tweestaps-matrices'* noemen.

Opmerkelijk is dat de tweestapsmatrix $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ *gevonden kan worden door de éénstapsmatrix* $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *met zichzelf te vermenigvuldigen — volgens de matrixvermenigvuldiging:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$ [1]

We onderzoeken nog een voorbeeld:

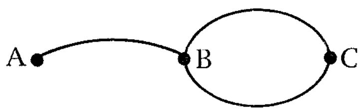


fig. 9

De éénstapsmatrix van dit systeem is

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- *Kunt u door figuur 9 goed te bekijken de tweestapsmatrix opschrijven?*

Ziet u bijvoorbeeld dat u op 5 verschillende manieren[2] *) vanuit B naar B in twee stappen kunt komen?*

▸ *Door de éénstapsmatrix met zichzelf te vermenigvuldigen vinden we de tweestapsmatrix van figuur 9:*

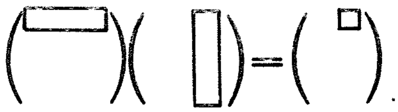
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- *Ga eens na of dit klopt.*
  (Kunt u C slechts op 2 manieren vanuit A in twee stappen bereiken of zijn er meer mogelijk?)

▸ *We analyseren nu de matrixvermenigvuldiging om uit te vinden of het kwadraat van een éénstapsmatrix ook in het algemeen de tweestapsmatrix zal zijn.*

Het aantal verschillende manieren om in twee stappen vanuit A in C te komen (we noteren dit aantal als $A^{(2)}_{AC}$ *is 2.*

Hoe vonden we $A^{(2)}_{AC}$ *via de matrixvermenigvuldiging?*



$A^{(2)}_{AC}$

fig. 10

$$A^{(2)}_{AC} = A^{(1)}_{AA} \cdot A^{(1)}_{AC} + A^{(1)}_{AB} \cdot A^{(1)}_{BC} + A^{(1)}_{AC} \cdot A^{(1)}_{CC} = \sum_{K \in \{A, B, C\}} A^{(1)}_{AK} \cdot A^{(1)}_{KC}$$ ❶

waarin $A^{(1)}_{AK}$, $A^{(1)}_{KC}$ *betekent:*

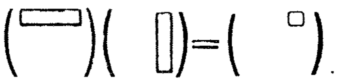
het aantal verschillende manieren om respektievelijk vanuit A in 1 stap in K te komen en om vanuit K in 1 stap in C te komen.

---

[1]) Weet u nog hoe twee matrices met elkaar te vermenigvuldigen zijn?
Een voorbeeld:

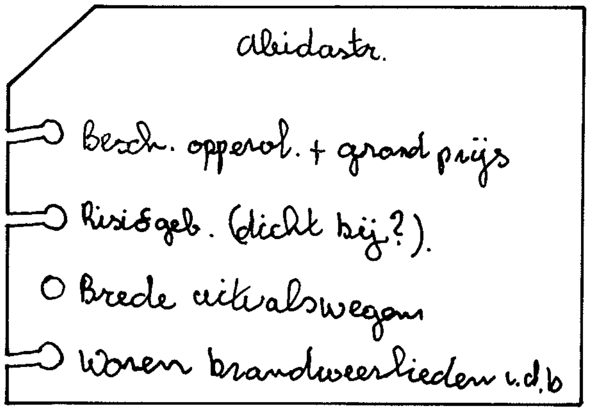
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{pmatrix}$$

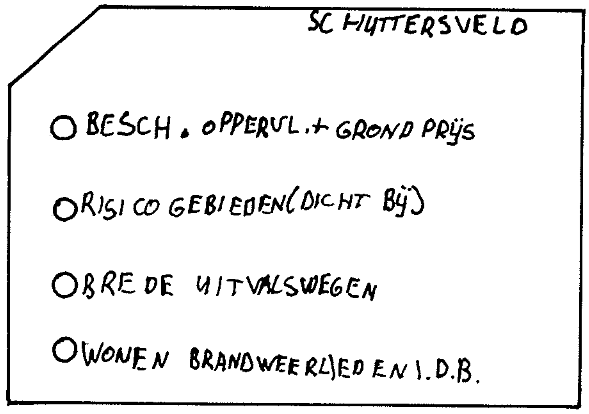
of wel, schematisch:



[2]) D.w.z. de gevolgde routes verschillen in wegen en/of in richting.

vens werden die op ponskaarten gezet en werd met de breinaaldmetode geselekteerd. Uiteindelijk bleken twee terreinen even goed te zijn. Hier een voorbeeld van 2 ponskaarten uit een set van 8 zoals ze door een groep van 2 leerlingen werden gemaakt en gehanteerd:





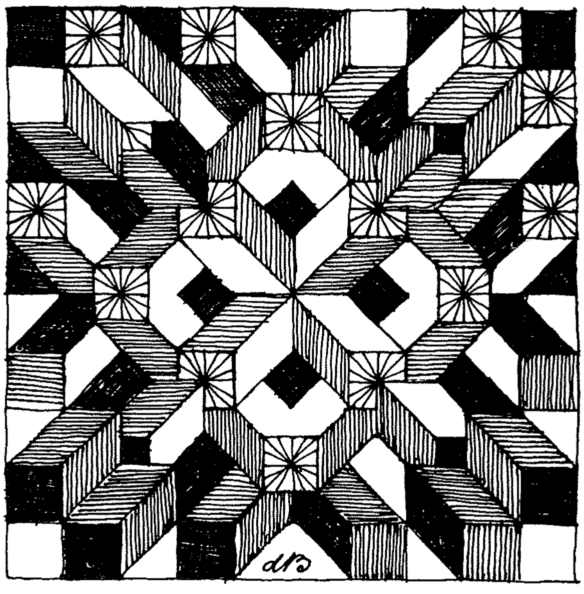
Uiteraard is het niet mogelijk in dit korte bestek een volledig beeld te geven van alle aktiviteiten (vraaggesprekken, metingen op kaarten, schaalberekeningen, bestudering risiko-zones en intekening op grote plattegrond etc.) alsmede van de vele voorbereidingen van de onderwijzer (eigen oriëntatie, lesplanning, produktie werkbladen, verzorging materiaal: kaarten, kurvimeters, ponskaarten). Voor de Heer De Jong waren het 7 lessen waarin de kinderen zeer geanimeerd bezig waren en ervaren hebben

'dat wiskunde een deel van ons leven is, d.w.z. dat wij zonder het te beseffen van de wiskunde gebruik maken'.

TENSLOTTE:

Van diverse zijden ontvingen wij skripties van P.A.-studenten. We noemen hier de titels om misschien anderen weer op een idee te brengen.

- Skriptie van 2 studenten over het ontwerpen van opdrachtkaarten voor klas 2 en 3, onder andere over tafelprodukten, alsmede een beschrijving van de evaluatie-ervaringen bij het herschrijven der kaarten.
- Idem voor de hoogste klassen met allerlei andere onderwerpen. Daarbij is een poging gedaan tot omschrijving van het konkrete doel van elke kaart.
- Idem voor het optellen en aftrekken in het getallengebied tot 10 en tot 100.
- Een skriptie van 2 studenten over leermiddelen in het rekenonderwijs, een inventarisatie, een test op polyvalentie, funktioneren van een wiskunde-werklokaal, het zelf maken van leermiddelen met voorbeelden en ideeën.
- Een skriptie over verzamelingentaal en -leer in het basisonderwijs; spelen met denkblokken en opdrachtkaarten i.v.m. verzamelingentaal.
- Een skriptie over schaken in het onderwijs, met een voorstel tot een leergang.
- Een skriptie over een lessencyclus betreffende beeldgrafiek, blokgrafiek, kolomgrafiek en frekwentiepolygoon met een vergelijking van de werkwijze op enkele scholen.



kleuters en wiskunde

JES MELIS
JENNEKE DE LORME-BAKKER

WAT KABOUTERS EN REUZEN AL NIET KUNNEN

De redaktie van het Wiskobas-Bulletin heeft het zeer te waarderen voornemen om in het Bulletin een vaste rubriek te reserveren voor ervaringen en mededelingen uit de wereld van het kleuteronderwijs.
Dit voornemen komt ons logisch en aantrekkelijk voor, omdat het eigenlijke wiskundige denken over aangeboden problemen reeds bij zeer jeugdige kinderen wordt voorbereid door de manieren waarop het jonge kind reeds van zijn geboorte af zijn kleine wereld onbewust aan het struktureren is, aanvankelijk op basis van de eigen emotionele gevoelens.
Lief – niet lief; lekker – niet lekker; prettig – niet prettig.

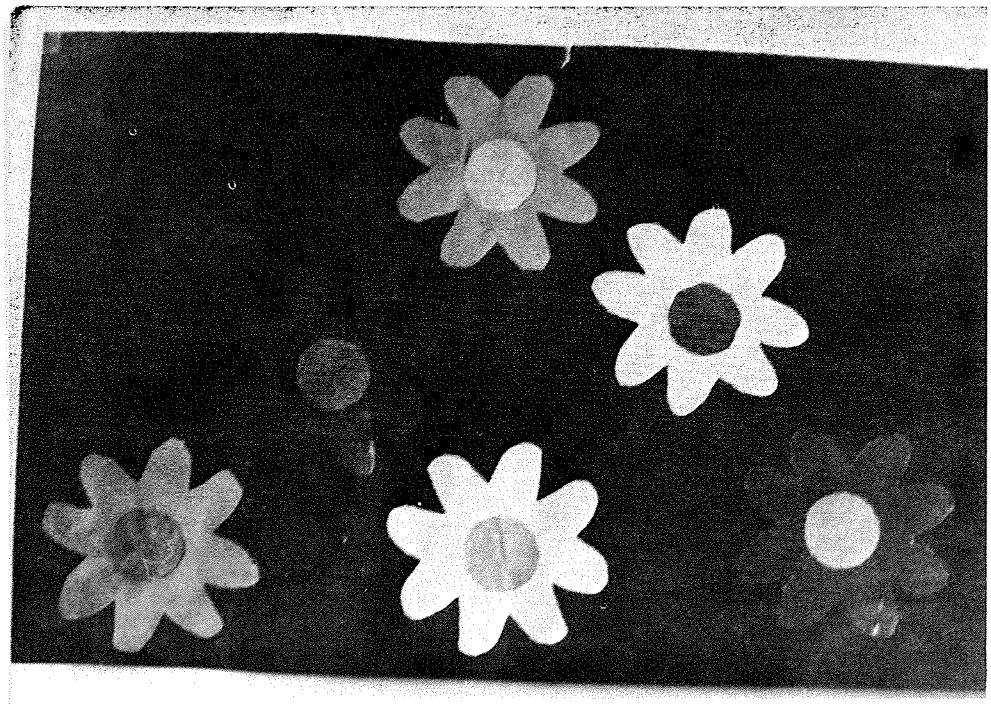
In een latere periode worden personen en zaken waarmee het jonge kind in aanraking komt, op een eigen, vaak originele wijze op basis van mogelijkheden gestruktureerd en ten slotte leert het kind aangeboden, konkrete gegevens onder leiding bewust strukturereren.
De nieuwe rubriek kan aanmerkelijk bijdragen om de lezer een duidelijker en fundamenteler inzicht te geven in de manier van denken van het jonge kind. Dit laatste kan helpen in de verbetering van de benadering van jeugdige adepten in de volgende leerperiode.

Mevr. S.H.J.M. van Lier, inspektrice kleuteronderwijs

Ook in de kleuterschool kunnen bepaalde onderdelen van Wiskobas worden gebruikt.
HET STADSPLAN leent er zich heel goed toe als middel te dienen om de kleuters te leren tellen en om bepaalde begrippen te leren, zoals:
- de derde – vierde straat;
- kruispunt van tweede straat en derde laan;
- wat is verder weg (of dichterbij)?
- naar bepaald kruispunt langs een omweg gaan omdat de straat rechtdoor is opgebroken;
- hoeveel kruispunten kom je tegen als je van punt a naar punt b gaat?

En zo zijn er zeker nog meer spelletjes te bedenken.

Het maken van eenvoudige GRAFIEKEN kan ook in de kleuterschool worden gedaan. Als voorbeeld kan misschien het volgende dienen:
Eén van de kleuters nam een ballon meer naar school.
Naar aanleiding hiervan volgde een 'kleurenlesje'. Na afloop werd aan de kinderen gevraagd welke gekleurde ballon zij eventueel zouden kiezen. Van deze kleur mochten ze een 'ballon' knippen. Deze knipsels werden op een stapel gelegd. Eén van de kinderen vond toen dat je kleur op kleur moest leggen. Toch was het telkens weer tellen om aantallen te weten. Toen kwam één van de kleuters op de gedachte de ballonnetjes op rijtjes te leggen. Al weer een stapje verder dus. Helaas, de ballonnetjes waaiden weg toen de deur open ging, waarna 'bedacht' werd dat ze beter konden worden opgeplakt. Cijfertjes ervoor en namen eronder en een eenvoudige grafiek was tot stand gekomen via het 'logisch denken' van de kleuters!



'kombineren van 3 kleuren bloemen en 2 kleuren hartjes'

Onnodig te zeggen dat zoiets ook kan worden gemaakt met andere onderwerpen als: lievelingsfruit, mooiste bloemen, huisdieren, automerken, enz.

Erg leuk is ook het MUIZENSPEL
Dit kan gespeeld worden met alles wat maar denkbaar is; bijvoorbeeld met tafels en gekleurde linten, blokjes en draadjes, op papier met kleurpotloden.

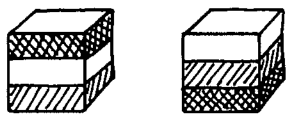
* *Kombineren van 3 kleuren bloemen en 2 kleuren hartjes*

Twintig vijfjarige kleuters kregen als opdracht zoveel mogelijk 'verschillende' bloemen te maken.

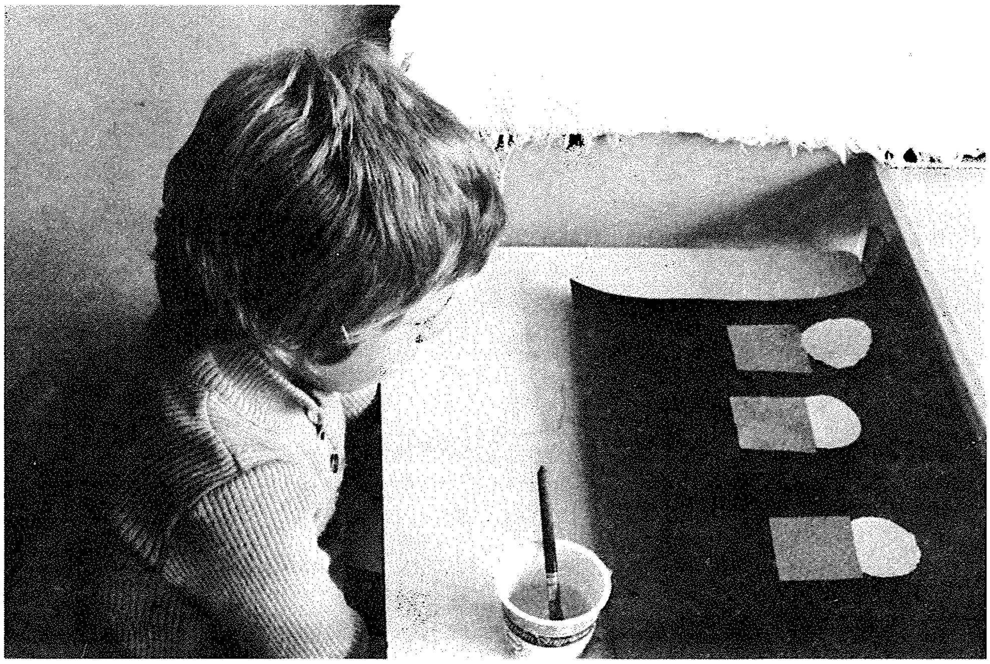
Eén kind begreep de opdracht niet. Een ander werkte systematisch: steeds 2 gelijkkleurige bloemen met verschillend hartje. De overige kinderen hadden het resultaat goed. Ze keken bij elke bloem die ze maakten of hij er al niet was.

* *Torentjes bouwen*

Reeds de 'kabouters' (de eerstejaars kleuters) kunnen met drie verschillend gekleurde blokjes torentjes bouwen die in kleurenvolgorde verschillen



De kinderen gaan hierbij vergelijkenderwijs te werk.



'poppetjes plakken'

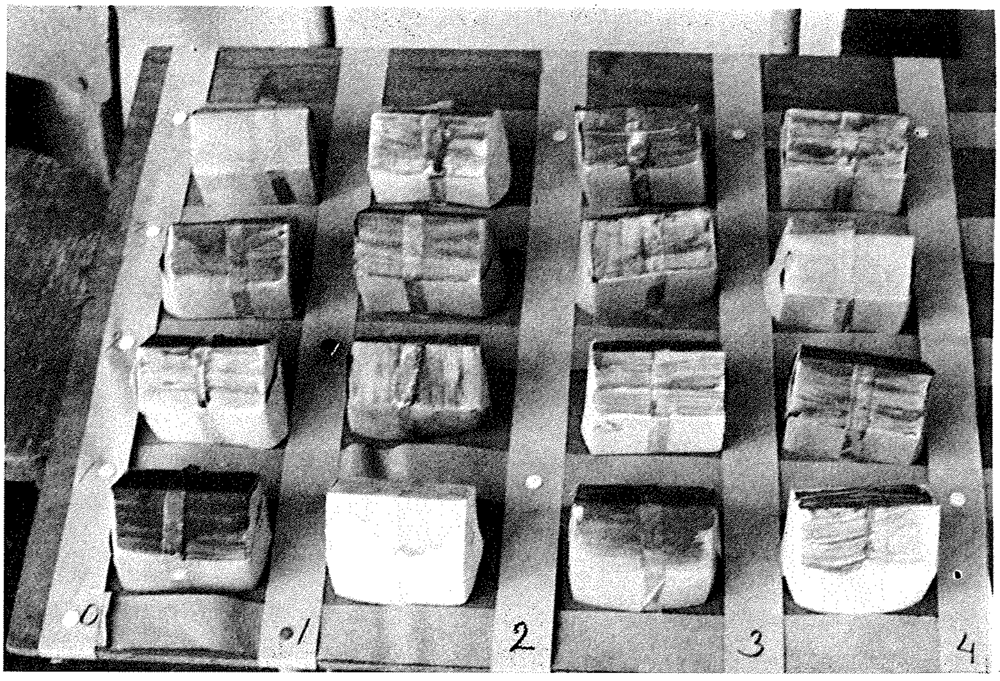
'poppetjes plakken'

Een enkele zoekt naar een systeem:
'Ik houd eerst het middelste blokje geel'.
Een variant op dit 'Torentje bouwen' is het kleuren van vlaggen met drie verschillende kleuren (zie tekening van rené op pag. 650).

* *Poppetjes plakken*
Dit 'muizenprobleem' werd door de 'reuzen' (tweedejaars kleuters) aangepakt.

Voor het hoofd was uit twee kleuren te kiezen; voor het lichaam uit drie. Het probleem was nu om na te gaan hoeveel verschillende poppetjes te plakken waren.
Een variant hierop is het 'aankleden' van een leerling waarbij een keuze moet worden gedaan uit twee verschillende jassen en drie verschillende mutsen.

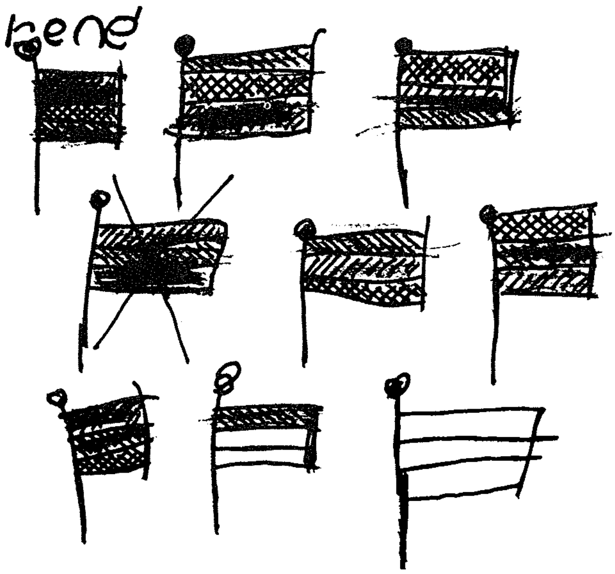
* Tenslotte:
Het ligt voor de hand om *het muizenspel 'echt' in de klas* te spelen.
Stoelen kunnen dan als poortjes dienst doen en de kinderen spelen om beurten voor muis.
Een moeilijkheid hierbij is het noteren van de wegen die worden afgelegd.
Hierover kan een gesprekje met de kinderen gevoerd worden.



'stadsplan'

Bovenstaand verslag is geschreven door de leidsters van de 'Kindertuin', een kleuterschool te Amstelveen.
We geven tenslotte nog een opmerking van één der leidsters weer:

> *'We doen dit niet om geleerd te doen, maar om met de kinderen te spelen met de ideeën die we op de kursus hoorden. Goede spelmogelijkheden.*
> *Wanneer de leerlingen op de basisschool komen dan gaan ze gewoon dingen 'herkennen'. Een en ander kan dan systematischer gebeuren.'*

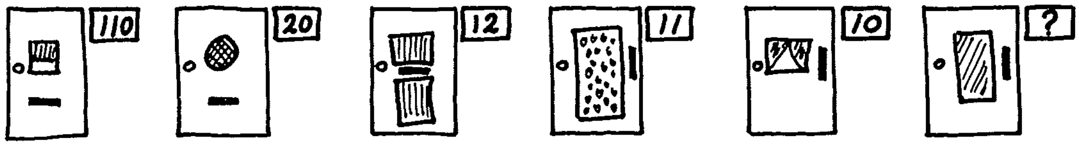


3

In de huidige rekendidaktiek beperken we ons niet uitsluitend tot het zo vertrouwde 10-tallige of *decimale stelsel.*
Er zijn rekenmetoden waar men van het begin af de kinderen in verschillende talstelsels laat opereren om zodoende een beter inzicht te doen ontstaan in het rekenen in ons decimale systeem.
Andere metoden voeren in een later stadium andere talstelsels ten tonele, maar ook hier is het doel: meer inzichtelijk kunnen omgaan met het vertrouwde systeem van onze tien vingers.

Uiteraard is hiermee niet alles over deze problematiek gezegd, maar we willen het eenvoudig houden en u slechts een suggestie geven om het hiervolgend probleem aan te kunnen.

In een denkbeeldige straat in een denkbeeldig land zijn de huizen zo genummerd, dat na nummer 110 volgt nummer 20, na nummer 20 komen achtereenvolgens de huizen met nummers 12, 11, 10,........



Het nummer van het huis volgend op nummer 10 is nog niet aangebracht, zoals u ziet. Hopelijk bent u daarin toch geinteresseerd, maar wij waarschuwen u vast, dat het simpel lijkt doch moeilijk is.