wiskobas bulletin

Jaargang 1, nr. 5
September 1972

WISKOBAS-BULLETIN

– Bulletin ter begeleiding van het eksperiment 'Wiskunde – op de Basisschool'.
– Verschijnt gedurende de eerste jaargang 5 keer (± 64 pagina's per aflevering).

JAARGANG 1, Nr. 5 – SEPTEMBER 1972

REDAKTIE:
F.Goffree, R.A. de Jong (eindredakteur), G.H.Meijer, Drs.A.Treffers, Drs.E.J.Wijdeveld.

MEDEWERKERS:
Prof. Dr. F. van der Blij, J. van de Brink, W.M.F.Bronnenberg, J. van Bruggen, K.Frenay, Prof. Dr. H. Freudenthal, L. Gilissen, H. Jansen, H. ter Heege, D. Karman, Drs. K.B. Koster, F. du Maine, E. de Moor, D.W. Oort, P. Scholten, L. Streefland.

VORMGEVING:
Interes Reclame

LAY-OUT:
Rob Timmer

CARTOON:
Hans de Boer

REDAKTIEADRES:
INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS
Tiberdreef 4, Utrecht.
t.a.v. R.A. de Jong.

ABONNEMENTSPRIJS:
f 25,– per jaargang.
Men abonneert zich door dit bedrag over te maken op girorekening 500167 van Vlaer en Kol te IJsselstein, t.n.v. V.V.C., rek.nr. 218401450, onder vermelding van 'WISKOBAS-BULLETIN'.

Verzamelabonnementen voor studenten Pedagogische Akademies en kursisten Heroriëntering f 15,– per jaargang (aanmelden via docent).

INHOUD

EEN UITGAVE VAN HET INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS

Tineke Brinkman

INHOUD

Wim Aarts overhandigt Mr. C. van Veen – Minister van Onderwijs – een eksemplaar van 'Cijferen anno 2000'.

H. FREUDENTHAL

EKSPONENTIËLE GROEI

Eksponentiële groei – u kent die term zeker al als een stukje wiskunde dat de dagbladen heeft veroverd. Waar doet hij u aan denken? Ik wed, aan bevolkingsaanwas en voedselproblemen, aan lucht- en waterverontreiniging en natuurlijk aan de Club van Rome, om het meest aktuele erbij te halen.

* * *

Een bakterie op een voedingsbodem – 'Petrischaal' genaamd door wie bakteriën kweken – deelt zich, laten we zeggen, één keer per uur door celdeling in tweeën, in twee bakteriën die zich op dezelfde wijze en in hetzelfde tempo voortplanten. En zo gaat het door.
Er zijn

op uur 0 : 1 bakterie
1 : 2 bakteriën
2 : 2x2 = 4 bakteriën
3 : 2x2x2 = 8 bakteriën
4 : 2x2x2x2 = 16 bakteriën.

U begrijpt direkt het nut van machten en eksponenten: er zijn

op uur n : 2x2x...x2 (n faktoren) = 2^n bakteriën.

Hoeveel is dit bij voorbeeld voor n = 80? Als u maar een rond antwoord wilt hebben, dus niet nauwkeurig, op één bakterie af, kunt u het beste als volgt redeneren:

$$2^5 = 32,$$
$$2^{10} = 2^5 \times 2^5 = 1024 \sim 1000 = 10^3,$$
$$2^{20} = 2^{10} \times 2^{10} \sim 10^3 \times 10^3 = 10^6,$$
$$2^{40} = 2^{20} \times 2^{20} \sim 10^6 \times 10^6 = 10^{12},$$
$$2^{80} = 2^{40} \times 2^{40} \sim 10^{12} \times 10^{12} = 10^{24},$$

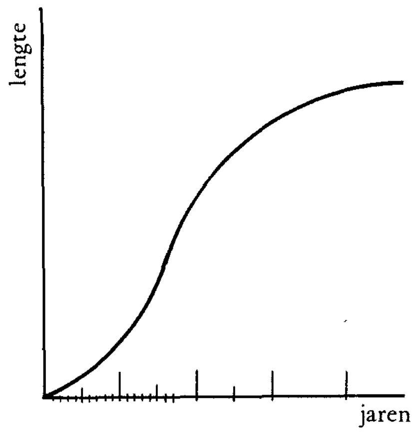
en dat is een één met 24 nullen.
Stel zo'n bakterie heeft een middellijn van een honderdste millimeter:
100 x 100 = 10 000 = 10^4 overdekken samen dan een vierkante millimeter,
$10^6 \times 10^4 = 10^{10}$ een vierkante meter,
$10^{10} \times 10^6 = 10^{16}$ een vierkante kilometer; voor 't geheel dat er na 80 uren door celdeling is ontstaan, heb je dus 10^8 vierkante kilometer nodig, een terrein van 10 000 km lang en 10 000 km breed, dus een flink part van de aardbol.
Natuurlijk is het al eerder spaak gelopen: toen de rand van de Petrischaal werd bereikt, na 24 uur, zo niet door allerlei omstandigheden veel eerder.
Maar in 't begin, met genoeg ruimte en voedsel voor allen, was er wel degelijk ongeremde 'eksponentiële groei'.
Waarom *eksponentieel*? Kijk eens terug naar de formule met de n:

op uur n zijn er 2^n bakteriën.

Het aantal bakteriën in de groeiende bevolking hangt af van n en die staat in de *eksponent.*

Er bestaan natuurlijk andere groeiwetten. In het natuurlijke groeiverloop van mensen en dieren bestaan er hele stukken van *lineaire* groei, d.w.z. waar de aanwas evenredig met de tijd is: na n dagen (of jaren) is de lengte of het gewicht

a + bn.



In de figuur hierboven kunt u na de aanloop een periode van lineaire groei onderkennen, gekenmerkt door het rechtlijnig verloop van de grafiek. U ziet daar duidelijk het toenemen van de lengte met eenzelfde stuk in dezelfde tijd, terwijl na deze periode van lineaire groei de groei snel minder wordt en tenslotte tot stilstand komt.

* * *

De tegenstelling van lineaire en eksponentiële groei is vanouds bekend. Als u een kapitaal van *f* 100 hebt belegd tegen 5% jaarlijkse rente, maar de rente niet opnieuw belegt dan is het na

0 jaar : *f* 100
1 jaar : *f* 105
2 jaar : *f* 110
⋮
n jaar : *f* 100 + 5n.

Het kapitaal groeit in *lineaire* afhankelijkheid van de tijd n.
Wie handig is, belegt echter zijn rente opnieuw (tenzij hij genoodzaakt is van die rente te leven). De *f* 105 na 1 jaar verloop dragen opnieuw 5% rente, die dus niet alleen door de 100 oorspronkelijke guldens, maar ook door de 5 nieuwe wordt gekweekt. Het lijkt een onbeduidend verschil, maar het telt aan.

Hoe berekenen we zoiets het handigste?
Uit *f* 100 zijn na 1 jaar *f* 105 geworden, of – eenvoudiger – iedere gulden is met 1,05 vermenigvuldigd in een jaar tijds. En dit blijft zo: in een jaar tijds vermenigvuldigt een gulden zichzelf met 1,05. Het doet ons denken aan de groeiende bakteriënbevolking. Die deed het met een faktor 2 in een uur. Het geld doet het langzamer, met een faktor 1,05 in een jaar. Maar in principe is het hetzelfde. Na

0 jaar : *f* 1
1 jaar : *f* 1,05
2 jaar : *f* 1.05 x 1,05 = $1{,}05^2$
⋮
n jaar : $(1{,}05)^n$.

Groei volgens samengestelde interest is dus ook eksponentieel.

We krijgen een beter overzicht als we ons afvragen in welk tijdvak het oorspronkelijke kapitaal is verdubbeld. Dus, voor welke n is

$(1{,}05)^n = 2$?

Zo iets rekent men met logaritmen uit. Ik heb de uitkomsten hier neer gezet voor verschillende rente-percentages.

rente	verdubbeling na ongeveer jaar
1%	70
2%	35
3%	24
4%	18
5%	14
10%	7

Ruw gezegd: Als je bij gewoon interest verdubbeling van het kapitaal in

d jaren

zou verwachten, is het bij samengestelde interest

0,7 d jaren.

Het een keer verdubbelen gaat met een faktor 0,7 vlugger. (Maar let wel, dit klopt alleen voor 'kleine' waarden van interest, zoals in de tabel boven bijeengebracht.)
Tegen 5% is het kapitaal na

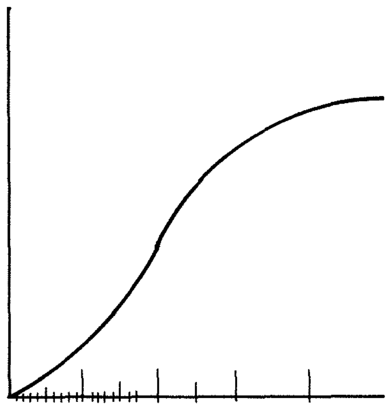
jaar 14 met 2 vermenigvuldigd
jaar 28 met 4 vermenigvuldigd
jaar 42 met 8 vermenigvuldigd.

Een gulden, in de tijd van Claudius Civilis tegen 5% samengestelde interest belegd, zou thans uitgegroeid zijn tot een bedrag groter dan de jaarlijkse nederlandse rijksbegroting. Natuurlijk zijn er ook voor de eksponentiële financiële groeigrenzen afgepaald.

* * *

Onbelemmerde groei is eksponentieel. Dit was met de groei van de menselijke bevolking zo in 't verleden en het is nu nog zo. Alleen was vroeger het groeipercentage, voornamelijk tengevolge van ziekten, veel kleiner dan nu. Van 1600 tot 1800 had de mensheid 200 jaar voor een verdubbeling nodig. In zuidamerika is de groei thans per jaar 3%, en dit betekent verdubbeling in een kwarteeuw; in de rijke landen gaat het met 0,8% per jaar, hetgeen verdubbeling in 90 jaren betekent.
Het wereld-energieverbruik groeit met 4% per jaar – verdubbeling na 18 jaren. Maar alles kent een grens. Bij het eksponentieel groeiende energieverbruik ligt die daar waar de voorraad op is. Zolang voorraden onbeperkt zijn, gaat het eksponentieel. Maar met het plafond in zicht heerst een andere wet.
De eksponentiële wet zegt dat de groei evenredig is met wat er al is. Maar volgens een

verfijnd model komt er een groeiremming bij, omgekeerd evenredig met wat er nog te verteren valt. Het gevolg is een kromme, ook welbekend uit toepassingen van de wiskunde.



Natuurlijk zou de kromme, als er katastrofen komen, ook eens naar beneden kunnen gaan.

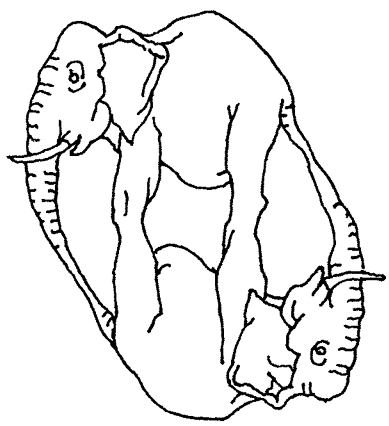
* * *

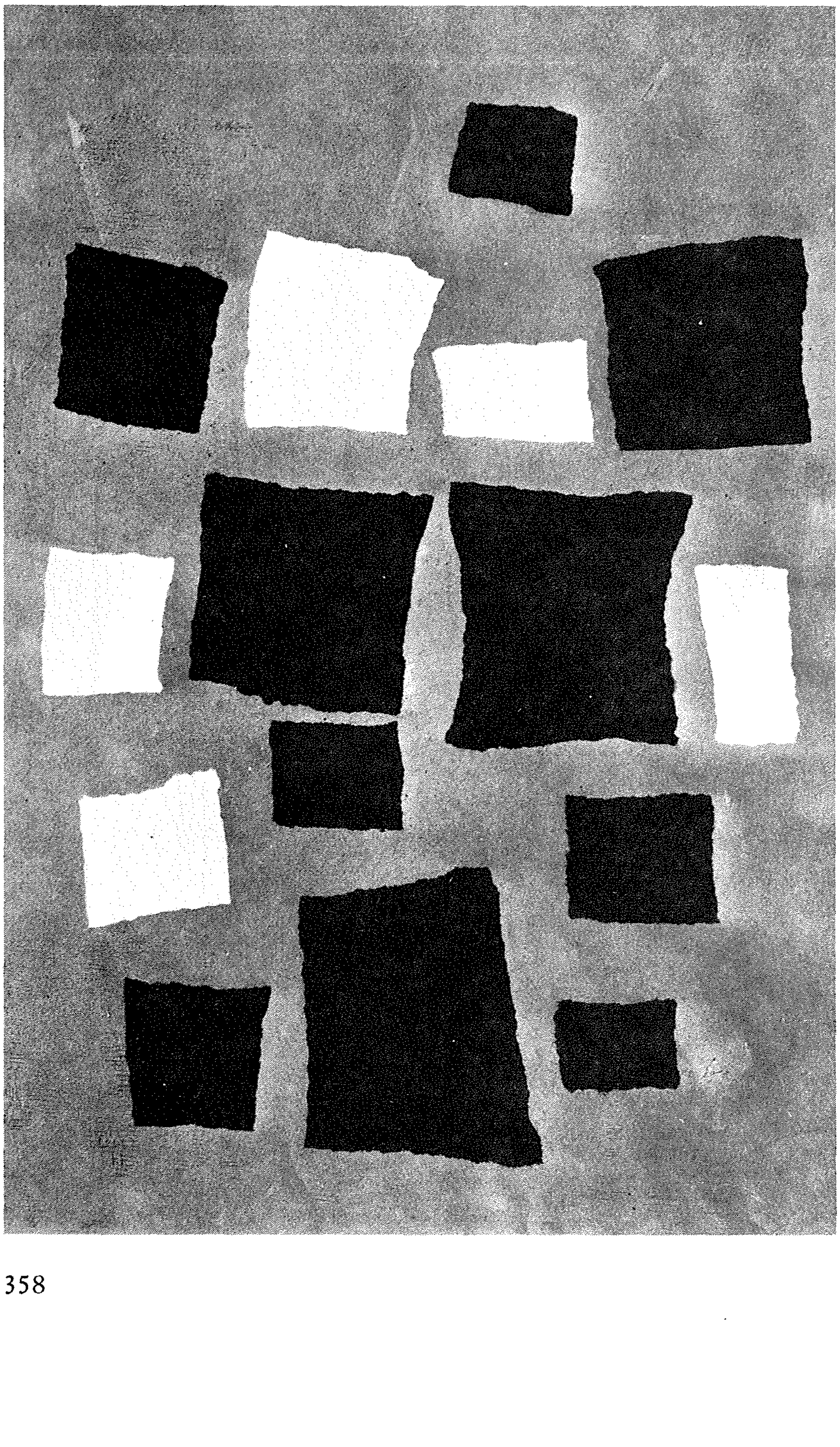
Naast de eksponentiële *groei* is er als tegenhanger, het eksponentieel *verval*.

Van een radio-aktieve stof vervalt per jaar een zekere kleine fraktie, waarvoor straling wordt uitgezonden. De vervallende fraktie is evenredig met wat er nog over is. Als het met de hoeveelheid m begint en van het aanwezige elk jaar één duizendste vervalt, is er na

0 jaar de hoeveelheid m
1 jaar de hoeveelheid 0,999 m
2 jaar de hoeveelheid $(0,999)^2$ m
⋮
n jaar de hoeveelheid $(0,999)^n$m.

Zoals daarstraks de verdubbelingstijd, interesseert ons hier de *halveringstijd* of, zoals men het ook noemt, de halve-waarde-tijd. In 't onderhavige geval zou dit 700 jaren zijn. Radio-aktieve stoffen hebben zeer uiteenlopende halveringstijden, van sekonden tot millioenen jaren. De radio-aktieve elementen gaan door verval in andere over, bijv. uranium in radium. In de uraniumertsen is de verhouding uranium tot radium ongeveer 10 millioen tot 3. Het uranium vervalt dus $\frac{10}{3}$ millioen keer zo langzaam als het radium. Inderdaad is de halveringstijd voor radium ongeveer 1500 jaar en voor uranium 5000 millioen jaren.





Jean Arp
Collage met vierkanten gerangschikt volgens de wetten van het toeval. 1916-17, gekleurd papier.

Coll. Museum of Modern Art, New York

wiskunst

F. VAN DER BLIJ

TOEVAL

Vorige maal stipte ik onder anderen aan hoe in de letterkunde ook de wiskunde mede kan inspireren. Er zijn natuurlijk nog geheel andere manieren waarop de wiskunde betrokken kan zijn bij de schone letteren. Ik kom er nog wel eens op terug want het is de moeite waard uw aandacht eens te vragen voor Stefan Themerson (bij voorbeeld *'Kardinaal Pölätüo'*) of voor het naberícht van *'Mrs Caldwell spreekt met haar zoon'*, door Camillo José Cela (met als titel: 'Het hoofd, de meetkunde en het hart'). En ook het werk van Gerrit Krol verdient een apart artikel, zowel om het in 1967 verschenen: *'Het gemillimeterde Hoofd'*; met als ondertitel 'Schrijven met sommen' als om het recente A.P.P.I. (Automatic Poetry by Pointed Information; poëzie met een komputer).

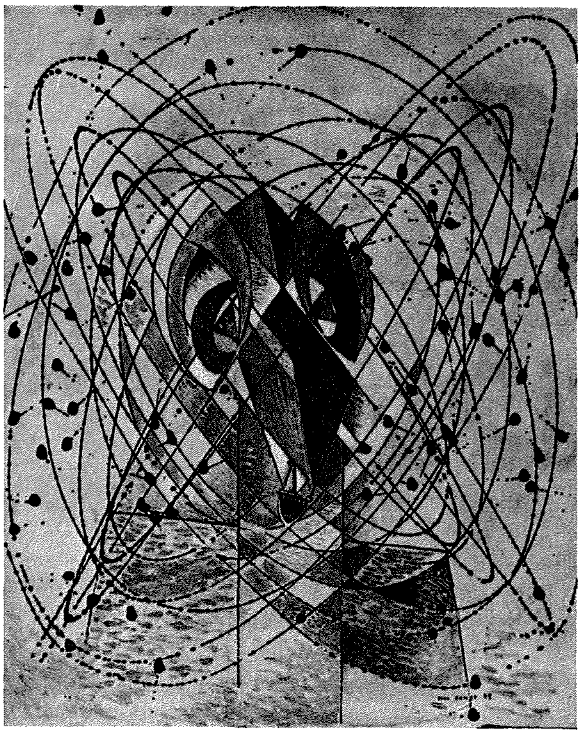
* * *

Maar in dit nummer wil ik uw aandacht vestigen op Toeval.
In de periode van 13 maart tot 18 maart 1972 was dit het thema van een Studium Generale Manifestatie van de Utrechtse Universiteit. En hoewel deze voor iedereen vrij toegankelijk was zal niet iedere lezer van onze rubriek er kennis van hebben genomen. Het feit dat het origineel uitgevoerde en bizonder rijk geillustreerde 'toeval'boek nu de boekwinkels heeft bereikt is een reden te meer om er nog eens op terug te komen. Bij het onderstaande maak ik dan ook dankbaar gebruik van de vele informatie in deze uitgave!

Natuurlijk kan men het toeval gebruiken zoals in Da-Da gebeurde: woorden in een hoge hoed; schudden en trekken maar. Nog ekstremer: letters in een machine en maar hopen dat de letters woorden vormen (kent u het verhaal nog uit Gulliver's 'Travels'; het bezoek aan de grote akademie van Lagado, waar de letterkunde zo beoefend wordt?)

Maar beter kan men ook nog grammatikale regels stellen (zoals in Appi gebeurt). Toeval in de kunst wordt voor ons tema van belang als het toeval gebonden is aan enkele regels. In hoeverre is waarschijnlijkheidsrekening en statistiek in te schakelen bij het kreatieve proces, waar iets onwaarschijnlijks gaat ontstaan?

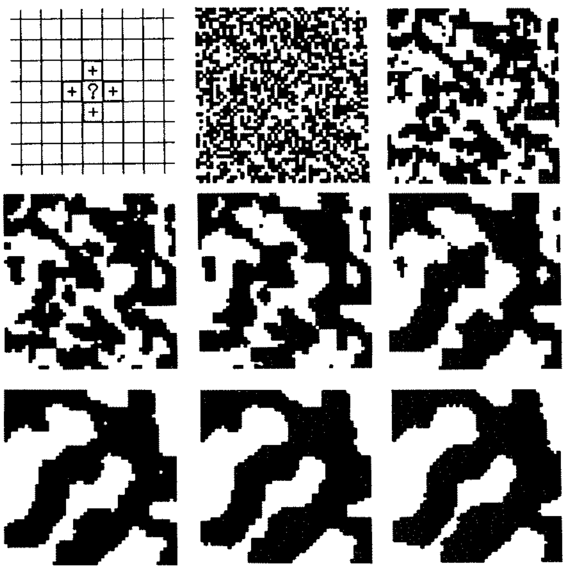
Laten we beginnen met de beeldende kunst, in 1916-7 maakt Hans Arp een 'collage met vierkanten gerangschikt volgens de wetten van het toeval'. Maar dat toeval vormde voor hem alleen een beperkt onderdeel van een onpeilbare reden van bestaan, van een orde die in zijn totaliteit ontoegankelijk was.



Max Ernst
Jeune homme intrigué par une mouche euclidienne, 1947
Sammlung Löffler, Zürich

Max Ernst maakt een kombinatie van toeval en berekenbaarheid door een verfblikje met een gaatje onderin aan een touwtje te laten slingeren, de zo ontstane Lissajous-figuren vormen de grondlijnen voor het werk: 'Jeune homme intrigué par une mouche euclidienne' (1947).

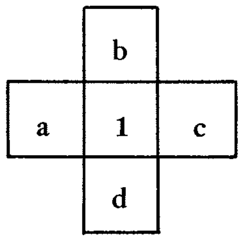
Later begint Elsworth Kelly (1951) met ruitjespatronen. U kunt ze maken door op een vel ruitjespapier sommige blokjes zwart te maken. Sommige, maar welke dan? Er is natuurlijk de dambord-methode. Iedereen die wel eens aan matjes vlechten heeft gedaan, of op een weefgetouw gewerkt kent deze blokjes-patronen. Een zeer matematisch patroon is dat van de priemgetallen van Gausz (de ondeelbare komplekse getallen a+bi, in het komplekse vlak door zwarte blokjes aangegeven). François Morellet koos het telefoonboek om wit of zwart te kiezen; bijvoorbeeld even is zwart, oneven wit; natuurlijk kun je het ook met andere kleuren, eventueel met meer dan twee kleuren doen.



Lambert Meertens en Leo Geurts
Kristalstrukturen, 1970

Deze reeks geeft een heel proces van kristallisatie in acht stadia weer, en het schema van het principe waarnaar het werkt.

Peter Struycken gaat de komputer gebruiken om meer systeem in het wit-zwart kiezen te brengen. Lambert Meertens en Leo Geurts, twee medewerkers aan het Mathematisch Centrum hebben in hun kristalstrukturen een gekompliceerd samenstel van systeem en toeval gegeven. Zij gaan namelijk uit van een toevallige, eerlijke wit-zwart verdeling over de hokjes, nummeren de hokjes en geven dan de hokjes 1,2,3,... achtereenvolgens de kleur van de minderheid van de blokjes, die met het blokje een zijde gemeen hebben.
Dus als geen of één van de blokjes a,b,c,d wit zijn, dan wordt 1 wit. Door dit proces enkele malen te herhalen ontstaat een stabilisering, de uiteindelijke kristalstruktuur.

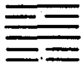


Wilt u het precies weten, leest u dan hun toelichting op het katalogusblad van hun ekspositie bij Galerie Swart (van Breestraat 23, Amsterdam). Ook in het Toevals-boek kunt u er iets over vinden, evenals trouwens over het bovengenoemde werk van Peter Struycken, waar veel literatuur over bestaat.

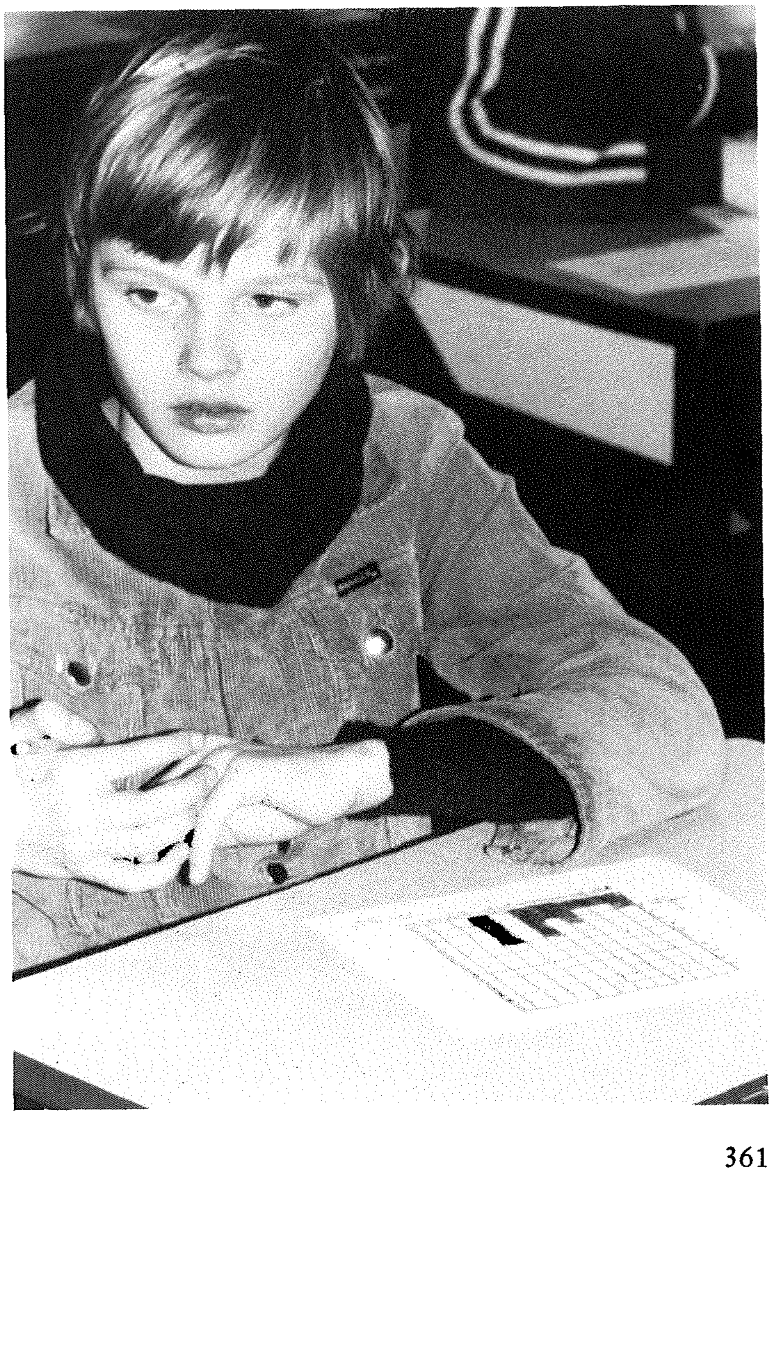
We willen nog even over toeval en muziek praten. Het Toevals-boek bevat een facsimile van een in Amsterdam uitgegeven werk van W.A. Mozart, namelijk een stuk partituur met enkele cijfertabellen, met behulp waarvan men door het werpen met twee dobbelstenen tot de samenstelling van een groot aantal engelse kontradansen kan komen. Van Haydn vinden we in zijn *'Musikalisches Gartenlaube'*, III.Band (1870) een 'giuoco harmonico'. Hier zijn door dobbelen 45.949.729.863.572.161 mogelijke menuetten uit te lezen en te spelen. (Ontleend aan Andreas Speiser)

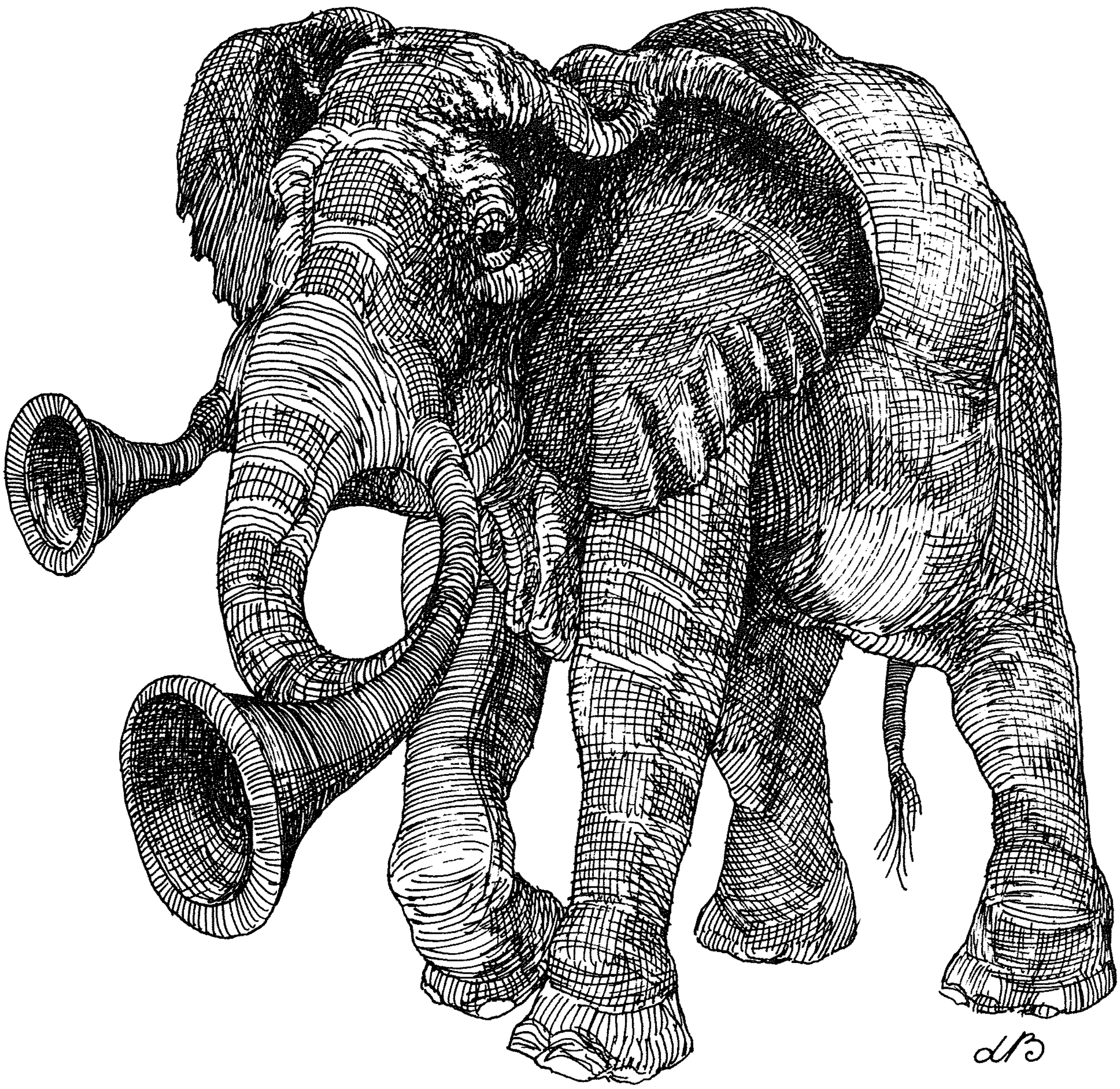
In de moderne tijd is de matematische toevalsmuziek weer aktueel geworden. Ik noem u Yannis Xenakis die met statistische metoden (gebruik makende van een Poisson-verdeling) toonwolken konstrueert. De fase tussen idee en uiteindelijke kompositie wordt door de komputer verzorgd.

Op een geheel andere manier gebruikt John Cage het toeval. In zijn recente werk (in dit jaar trad hij in nederland op) gebruikt hij de 'I-Ching', een chinees orakelboek, gebouwd rond 64 tekens van het type



waarover ook al weer het een en ander wiskundig te vertellen is, maar dat heeft meer met vliegwerk dan met kunst te maken.





TUBAFANT

Wiskobas bulletin

ROB DE JONG

Omdat de redaktie een zo helder mogelijk beeld omtrent de opvattingen, ervaringen en verwachtingen der abonnees met betrekking tot het Bulletin wilde krijgen, is gedurende de maand april een lezersonderzoek – op kleine schaal – gehouden. Aan dit onderzoek hebben 100 kursisten en 100 studenten aan Pedagogische Akademies uit Arnhem, Assen, Enschede, Hengelo, Nijmegen en Zwolle deelgenomen.
Het vermelden van allerlei onderzoekstechnische aspekten, alsmede een beschrijving van het teoretisch kader van waaruit het onderzoek heeft plaatsgehad, zal voor de meeste lezers nauwelijks interessant zijn. We beperken ons tot het weergeven van een paar resultaten.

De kursisten hebben meer artikelen gelezen dan de studenten

aantal door kursisten gelezen artikelen		aantal door studenten gelezen artikelen
Vast Blok	g : 251	g : 194
Variabel Blok	g : 493	g : 297
Respons Blok	g : 85	g : 87
Totaal aantal gelezen artikelen:	829	578

tabel 1

Hoe komt het nu dat de studenten aanzienlijk minder artikelen hebben gelezen?
De studenten noemen zèlf als oorzaak van het 'niet-lezen':
– 'tijdgebrek'
– 'te weinig gemotiveerd'.
De relatie tussen beide argumenten is duidelijk.

Een andere oorzaak van het verschil kan gelegen zijn in het feit dat op de heroriënteringskursussen meer gebruik wordt gemaakt van en verwezen wordt naar het Bulletin dan op de Akademies.

Wanneer we de artikelen gaan rangschikken naar leesfrekwentie, dan treffen we tussen beide groepen een grote mate van overeenkomst aan. Zo zijn de vier meest gelezen rubrieken uit het VAST BLOK bij zowel studenten als kursisten:

kursisten:		studenten:	
Ouders en Wiskunde	49x	Basje	40x
Basje	43x	Wiskunst	35x
Wiskobas-Bulletin	39x	Wiskobas-Bulletin	31x
Wiskunst	35x	Ouders en Wiskunde	28x

tabel 2

Van de vier door de kursisten meest gelezen bijdragen uit het VARIABEL BLOK komen er drie voor die ook door de studenten het meest gelezen zijn, nl.
– Werkbladen voor de leerlingen
– Lesverslag en kommentaar
– Werkbladen voor de lezer.

Bijdragen die een direkte bruikbaarheid voor de onderwijspraktijk hebben, worden door studenten en kursisten het meest gewaardeerd.
Uit antwoorden op de vraag om – zo mogelijk – twee titels van artikelen te noemen waarvoor de lezers de meeste waardering hebben, is de volgende tabel samengesteld. We geven de 10 meest genoemde titels weer:

	aantal *kursisten* dat waardering heeft voor genoemd artikel	aantal *studenten* dat waardering heeft voor genoemd artikel
Werkbladen voor de leerlingen	27	25
Lesverslag en kommentaar	13	12
Stadsplan	10	4
Wiskunst	9	12
Basje	6	19
Over het gebruik van werkbladen	5	7
Wat voor wiskunde zit erachter?	5	0
Werkboek	5	6
Spelletjes	5	1
Ouders en wiskunde	4	8

tabel 3

Bij vragen naar het 'waarom' van de voorkeur, komen de meeste antwoorden neer op: 'daar kun je tenminste iets mee doen in de klas'.

Vergelijk hiermee de gegevens uit tabel 4 ('aan welk artikel heb je in de praktijk iets gehad, of denk je in de praktijk iets te zullen hebben? ').

	Aantal **studenten** en **kursisten** per genoemd artikel
Werkbladen leerlingen	87
Lesverslag en kommentaar	28
Stadsplan	25
Over het gebruik van werkbladen	15
Basje	14
Spelletjes	12
Werkboek	11
Werkbladen lezer	10
Kanttekeningen	5
Koördinaten in Oss	5

tabel 4

Ook in tabel 4 zijn alleen de tien meest genoemde titels vermeld.

Rijke schakering van meningen over wiskobas.
Een belangrijk gedeelte van het onderzoek had betrekking op de vormgeving, op de funktionering van het RESPONS-BLOK, op de moeilijkheidsgraad, enz. We gaan daar nu aan voorbij, wellicht komen we er later nog eens op terug.
In het onderzoek is een – vrij algemene – vraag naar meningen omtrent leerplanontwikkeling, kadervorming, begeleiding e.d. opgenomen. Om u een idee te geven omtrent de rijke schakering van meningen, geven we enkele uitspraken weer:
– Zeer goed met een zoen van de juffrouw.
– Mooie ideeën, maar in de praktijk komt er niets van terecht.
– Positief, je moet achtergrond hebben om met wiskundig-rekenen te werken.
– Ik zie de grote lijn niet.
– Op deze manier moet het lukken.
– WaaromWiskobas? Is dat een hobby van enkelen, of een erkende noodzakelijkheid?
– Ideale vormgeving voor leerplanontwikkeling en kadervorming.
– Het lijkt allemaal heel aantrekkelijk, maar m.i. is het ietwat moeilijk als je je erin gaat verdiepen (ik ben geen kei in wiskunde).
– Leerplanontwikkeling vanuit de praktijk met begeleiding zeer goed. Vormt tegenwicht tegen kommercie. Garantie voor betere didaktiek.
– Zwak, te weinig praktijkgevallen en wel toto-uitslagen en voetbalgemiddelden, die op de basisschool nimmer ter sprake komen.

Wel – u begrijpt – de staalkaart is nog geschakeerder dan uit de uitsprakenlijst is af te leiden.

Wat heb je nu als redaktie aan een dergelijk onderzoek?
Mede o.i.v. dit onderzoek is de kwestie der *praktijkrelevantie* nog eens opnieuw een punt van bespreking geweest. Een aspekt, waar we ons heel scherp op moeten richten. De moeilijkheid van een begrip als praktijkrelevantie is echter, dat het meerdere kanten heeft:
- Wat voor mijnheer x in klas 6 relevant is, hoeft nog niet bruikbaar te zijn voor juffrouw y die een eerste klas heeft.
- Een artikel kan praktijkrelevant zijn, maar niet door iedereen als zodanig worden herkend (bv. omdat de gebruikte taal te moei-

lijk is, of omdat de vormgeving te weinig uitnodigt).

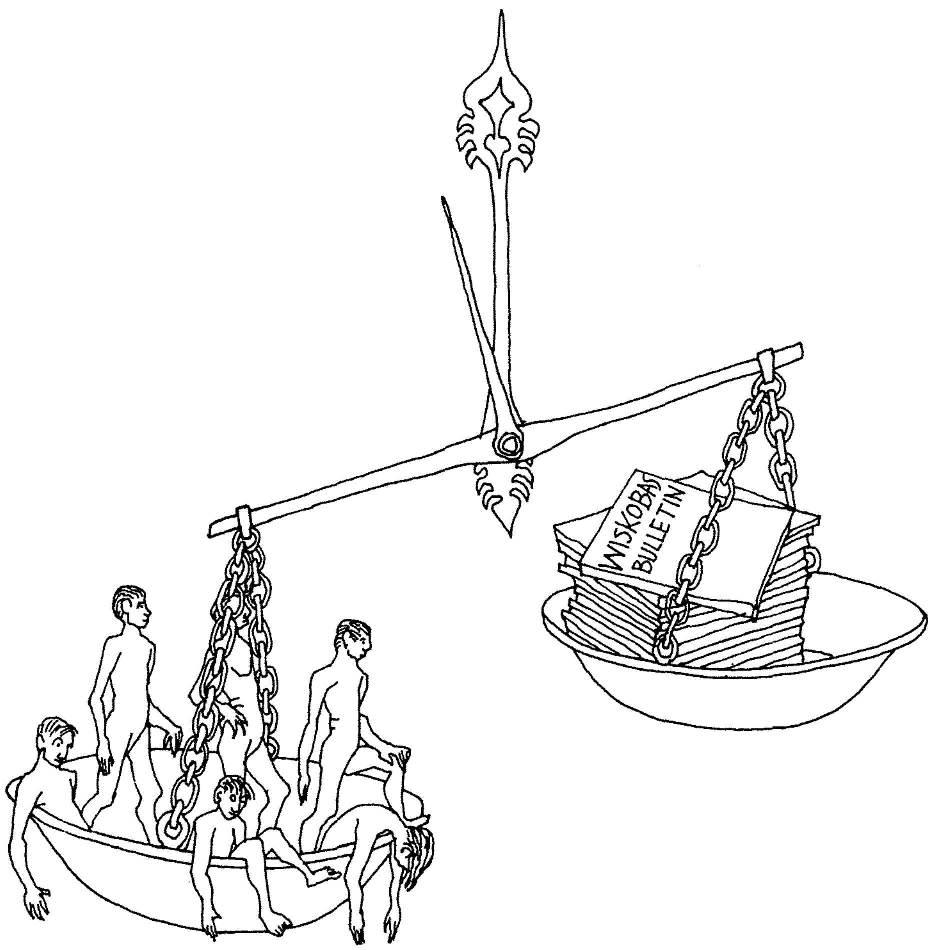
Vragen die nogal eens terugkwamen tijdens de besprekingen:
Is het wel terecht om het Bulletin te verengen tot de funktie van 'tool for daily working'? Moet het niet méér zijn?
We willen toch eigenlijk een soort hulp bieden om beslissingen m.b.t. het wiskunde-onderwijs verstandig te nemen?
En zijn vooṙ verstandige beslissingen artikelen met achtergrondinformatie, bekommentariërende bijdragen e.d. niet noodzakelijk?

U ziet het! Vragen genoeg!

De *weg* die de redaktie is ingeslagen, is met een heleboel woorden toe te lichten. U kunt er echter beter en sneller kennis van nemen door de afleveringen 4 en 5 (over 'breuken') te lezen. Uit deze afleveringen blijkt de ingeslagen weg:

- praktijkprobleem (breuken) als uitgangspunt,
- achtergrond (aflevering 4),
- 'aangevertjes' voor de praktijk (aflevering 5).

Een 'verstandige' beslissing?



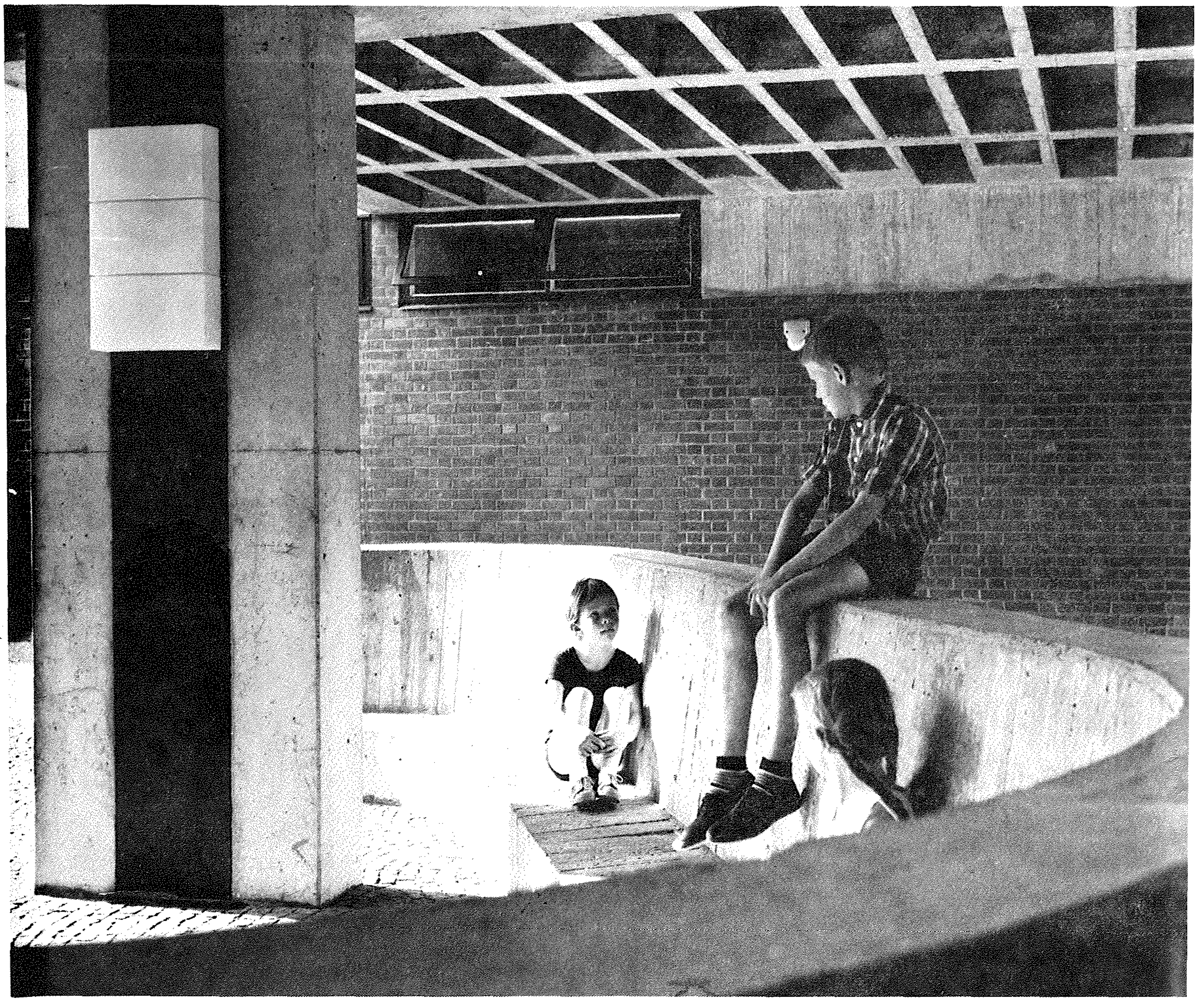


Foto ontleend aan fotoarchief tijdschrift CEMENT.

problematika

HUUB JANSEN

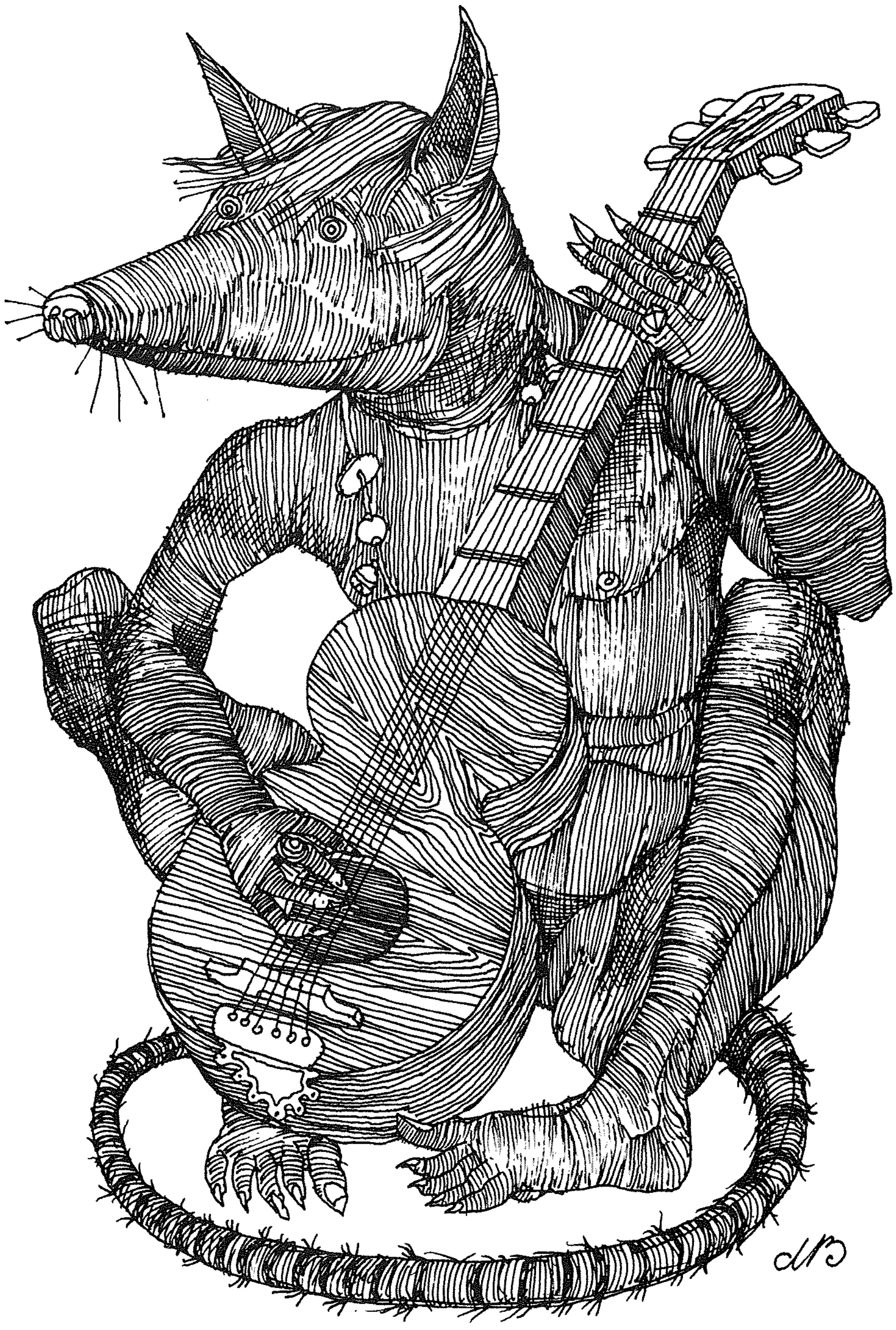
1

We wagen het erop om dit maal te beginnen met een probleem, dat voor sommige lezers misschien niet nieuw is. Het probleem zelf is er niet minder aardig om. En om die aardigheid is het ons in deze rubriek in de allereerste plaats begonnen.

Het is het probleem van de brave huisvader, die elke dag vanuit zijn werk de trein naar huis neemt. Om 5 uur 's middags precies stapt hij dan uit de trein alwaar zijn trouwe echtgenote met de auto net aankomt en hem naar huis brengt.
– Of deze vrouwelijke aktiviteit wordt veroorzaakt door liefde of door angst, dat manlief van het rechte pad afdwaalt, laten we hier maar in het midden! –

Op een goede dag echter stopt de hoofdpersoon uit dit verhaal wat eerder met werken en néemt een trein die één uur vroeger op het station arriveert. Hij besluit vast in de richting van zijn huis te gaan lopen en al doende ontmoet hij zijn vrouw – onkundig van zijn vroege aankomst – die op weg naar het station is.
Hij stapt in en gezamenlijk rijden zij naar huis.
Tien minuten eerder dan gewoonlijk komen zij thuis aan.

Zoals u ziet: een lang en ingewikkeld verhaal. Hopelijk hebt u het kunnen volgen en bent u bovendien nog bereid om aan te nemen, dat de vrouw altijd met dezelfde snelheid rijdt en altijd precies om 5 uur bij het station arriveert.
Wanneer u vervolgens nog wilt geloven, dat er geen stoplichten, opstoppingen e.d. zijn die de boel in de war kunnen sturen, dan kunt u wellicht uitrekenen hoe lang onze man gewandeld heeft, voordat hij zijn vrouw ontmoette.



GITAARRAT

HANS TER HEEGE

wiskunde werkhoeken *)

1 Enkele meer teoretische opmerkingen

* In de V.S. eksperimenteert men al enige jaren met het wiskundewerklokaal. Uit de bestudeerde literatuur over deze eksperimenten blijkt een groot enthousiasme over de resultaten. Daar bovendien uit Groot-Brittannië (Nuffield) gunstige berichten komen, lijkt het gerechtvaardigd om een serieuze poging te doen een nederlandse visie op het wiskundelokaal te ontwikkelen. Daarbij moet de bestaande situatie in het nederlandse onderwijs permanent in het oog worden gehouden. Binnen deze konstellatie lijkt de voorzichtige introduktie van *wiskundewerkhoeken* mogelijk en zinvol.

* De *materiaalfaktor* is erg belangrijk. Veel materiaal kan zelf gemaakt worden. Bij nagenoeg alle leermiddelenfirmas is overigens materiaal te verkrijgen als balansen, weegschalen, spijkerborden, abaci, MAB, rekenmachines, logiblokken, enz.
De selektie van de materialen is een hele klus. De materialen moeten immers in de praktijk van het onderwijs geëvalueerd worden. Een volgend probleem is dat de leerlingen de wiskunde niet zullen ontdekken als bij het materiaal dat zij gebruiken opdracht- en werkkaarten ontbreken. Materialen en opdracht- of werkkaarten vormen een eenheid. Hoewel materialen in overvloed verkrijgbaar zijn, blijkt echter dat er weinig begeleidende teksten (software; opdracht- en werkkaarten dus) op de markt zijn.

* Het is duidelijk dat over de *plaats en funktie van de onderwijzer* in een klas waar met een wiskundewerkhoek wordt gewerkt nog veel moet worden nagedacht. De didaktische funktie van de onderwijzer is hier in ieder geval totaal verschillend met zijn funktioneren tijdens klassikale lessen. De onderwijzer trekt zich meer naar de achtergrond terug, is echter steeds bereid om de helpende hand te bieden of om fouten te korrigeren.

2 Een voorzichtige start

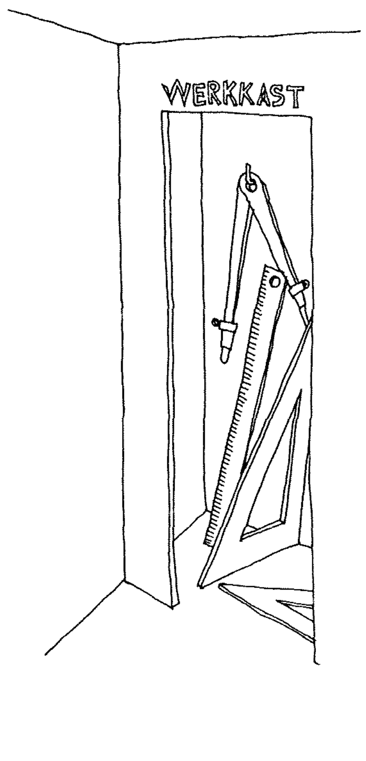
* Als een onderwijzer besluit een begin te maken met een *wiskundewerkhoek*, zal hij aan een aantal situaties denken, waarin zijn wiskundewerkhoek gaat funktioneren. In de Verenigde Staten komt het voor dat men in een school een lokaal als wiskundewerklokaal inricht. Het rekenonderwijs m.b.v. materialen is hier sterk geïntegreerd met het totale wiskunde- en rekenonderwijs. In het wiskundewerklokaal zwaait een klasseonderwijzer die zich in de wiskunde voor de basisschool heeft gespecialiseerd de skepter. Soms berust de supervisie bij een door een gemeente of een schooladviesdienst aangestelde 'wiskundekonsulent'.

* In deze fase van de introduktie van de nieuwe reken- en wiskundedidaktiek hebben we gekozen voor de *wiskundewerkhoek*, een wiskundewerkhoek die in de klas wordt ingericht. Bij het inrichten van een wiskundewerkhoek kan men het beste denken aan een *rustig*

*) Dit artikel heeft een oriënterend karakter; in de komende afleveringen zullen regelmatig bijdragen over wiskundewerklokalen en wiskundewerkhoeken opgenomen worden.

verlopend groeiproces, omdat gevaren rond een plotselinge koersverandering in het rekenonderwijs zeker aanwezig zijn. Het 'eksperiment' is dan tot mislukken gedoemd.

* *Klein beginnen* is dus ons idee. Hiermee is ook de kostenfaktor – een redelijk ingerichte wiskundewerkhoek kost zeker *f* 500 – in betekenis afgenomen. Door veel materiaal zelf te maken en door de aanschaf van de benodigde materialen te spreiden over meerdere jaren, kunnen problemen van financiële aard ondervangen worden. Later, als de wiskundewerkhoeken het eksperimentele karakter hebben verloren, behoren z.g. 'ekstra kredieten' o.i. tot de reële mogelijkheden bij de investering. Hoewel wij ons bewust zijn van de financiële konsekwenties die het met zich meebrengt om in meerdere lokalen wiskundewerkhoeken in te richten, geven wij toch de voorkeur aan een 'vaste' wiskundewerkhoek. Dat wil zeggen: een hoekje, een deel van een wand van het lokaal, desnoods twee aan elkaar geschoven tafeltjes met een 'bijrijkast' waarin het materiaal zich bevindt. Dit 'hoekje' moet opgenomen worden in de lokaalindeling. Het alternatief van de verrijdbare wiskundewerkhoek is o.i. minder aantrekkelijk. Ondanks het voordeel dat de verrijdbare wiskundewerkhoek in meerdere klassen kan worden gebruikt, trekt het een te grote wissel op het organisatorisch vermogen van de leerkrachten. Het is overigens veel aantrekkelijker om de wiskundewerkhoek te kunnen gebruiken op de momenten die de leerkracht wenselijk acht. Gesjouw met de verrijdbare wiskundewerkhoek kan de mogelijkheid om de wiskundewerkhoek in het gewone rekenonderwijs te integreren belemmeren.



* *Het werken met wiskundig georiënteerd materiaal in de week-agenda van de klas.*
In de klassikale school komen de verschillen tussen de leerlingen vaak tot uitdrukking in het tempo waarin het schriftelijk werk wordt gemaakt. Leerlingen die hun werk snel afhebben krijgen een ekstra opdracht. Aan deze leerlingen kan een opdracht worden gegeven die in de wiskundewerkhoek moet worden uitgevoerd. Er zijn bezwaren tegen deze werkwijze. De waarde van het werken met wiskundig-georiënteerd materiaal wordt niet onderkend als men deze werkvorm als 'stopwerk' voor de intelligente en vlugge leerlingen gaat hanteren. Indien alleen deze 'betere' leerlingen opdrachten voor de wiskundewerkhoek krijgen, heb je kans dat de andere leerlingen ongeïnteresseerd worden.

Een andere mogelijkheid is de hele klas op gezette tijden, bijvoorbeeld de woensdag- of de vrijdagmiddag, opdrachten voor de wiskundewerkhoek te geven. Sommige onderwijzers zullen er de voorkeur aan geven in deze 'vrijdagmiddag-lessen' ook aardrijkskunde-, geschiedenis-, natuurkunde-, of leesopdrachten op te nemen. Het is duidelijk dat de sfeer tijdens deze 'vrijdagmiddag-lessen' ongedwongen zal moeten zijn, waarin 'leergeruis' aanvaard zal moeten worden.

Een derde aanpak. Tijdens de gewone rekenlessen hebben sommige leerlingen opdrachten die ze in de wiskundewerkhoek moeten uitvoeren. Wij vinden hier een eerste stadium van integratie tussen het 'normale' rekenen en het gebruik van de wiskundewerkhoek. Deze organisatorische integratie zal uiteraard door een stof-inhoudelijke integratie moeten worden gevolgd.

In bovenvermelde oplossingen is een ontwikkeling ten aanzien van de integratie van het 'normale' rekenen en de wiskundewerkhoek aangegeven.

* *Waar halen we de tijd voor dit soort zaken vandaan?*
Wij dachten dat er wel tijd was. Misschien moeten we wat 'loskomen' van de door de metoden voorgeschreven leerstof.
Een voorbeeld uit een metode: In de deeltjes voor de 4e klas zijn ± 500 staartdelingen opgenomen. Moeten alle leerlingen alle staartdelingen maken? Of kan men bijvoorbeeld

een kwart van de staartdelingen laten maken ('maak alleen het eerste rijtje') en het resultaat laten bepalen of er nog een tweede kwart ('maak ook nog het tweede rijtje') moet worden gemaakt. De leerlingen in deze klas maken dan nog altijd 125 tot 250 staartdelingen. De tijd die nu vrij komt, kan dienstbaar worden gemaakt aan zinvoller bezigheden.

3 Ervaringen met het ontwikkelen van Software

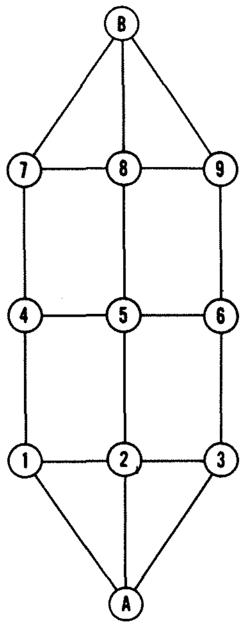
* We geven onderstaand *een aantal ervaringen* die wij hadden bij het werken met en uittesten van opdrachtkaarten.

Twee leerlingen uit een vierde klas, *Wim en Rini*, kregen de eksperimentele opdrachtkaarten S406 en S407, behorende bij het blok 'Spijkerbord'. Op de tafel lag een spijkerbord van 9 bij 9 spijkers. Wim en Rini maakten voor het eerst kennis met dit materiaal.
Zij lazen ieder voor zich kaart S406.
De tekst leverde geen moeilijkheden op.
Spoedig speelden de jongens het spel. Daarbij bleek al gauw dat zij een spelstrategie ontwikkelden die het spel wezenlijk veranderde.

Dit kwam duidelijk naar voren bij kaart S 407, die een vervolg is op S 406.

2

Kat en muis op het speelveld.
Een speler speelt met een wit fiche (muis), de andere speler speelt met drie zwarte fiches (katten). Als het spel begint staat de muis op 5 en de katten op A, 1 en 3.
Zwart begint door een van zijn fiches naar een naastgelegen leeg veld te verplaatsen, waarbij hij echter nooit naar achter mag schuiven.
Wit mag ook zijn fiche naar een naastgelegen leeg veld verschuiven, waarbij alle richtingen toegestaan zijn.
Zwart moet nu zo manipuleren dat wit geen zet meer kan doen. In dat geval heeft zwart gewonnen. Wanneer zwart dit doel niet bereikt, heeft wit gewonnen.



Nummer: S 406 Klas: 4/5/6

Spel voor twee **LANDVEROVEREN I**

Je hebt nodig: een spijkerbord
elastiekjes
Lees eerst de hele kaart voordat je met het spel begint!

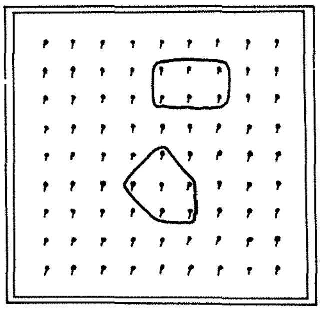


fig. 1

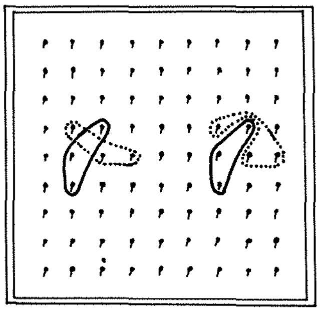
1. Eén van de spelers begint.
Hij sluit met een elastiekje **6 spijkers** in. Die spijkers zijn van hem! (zie fig. 1 boven).

2. De andere speler doet hetzelfde, hij sluit 6 **andere** spijkers in. (zie fig. 1 onder).

3. Nu is de eerste speler weer aan de beurt; hij kiest er **een nieuwe** spijker bij. Daarna mag de tweede speler een nieuwe spijker erbij kiezen en zijn land groter maken.

4. Zo gaat het spel verder:
Om beurten maken de spelers hun land groter door de grens om één nieuwe spijker te leggen.

fout



goed

fig. 2

5. Nog enkele spelregels:
a als je elastiekje stuk springt heb je het spel verloren.
b als je aan de beurt bent, mag je **altijd** een nieuw elastiekje op het bord brengen (om zes spijkers!).
c je mag niet met een elastiekje over het land van de ander (zie fig. 2).
d het spel gaat door tot alle spijkers veroverd zijn; wie dan de meeste spijkers heeft ingesloten, is winnaar.

6. Pak nu kaart S 407, en ga daarmee verder.

eksp. uitg.

Nummer: S 407 Klas:4/5/6

Spel voor twee **LANDVEROVEREN II**

Je hebt nodig: een spijkerbord
elastiekjes

1. Lees eerst kaart 406 nog eens door lees daarna deze kaart helemaal door en begin dan pas met dit tweede spel.

2. Als je twee landen hebt, kun je proberen van die landen een ketting te maken. Kijk maar eens naar fig. 1 en 2:

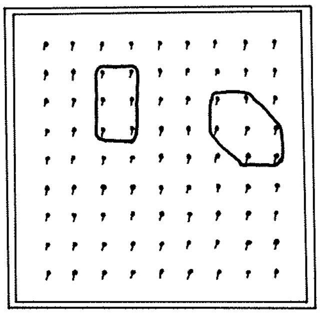


fig. 1

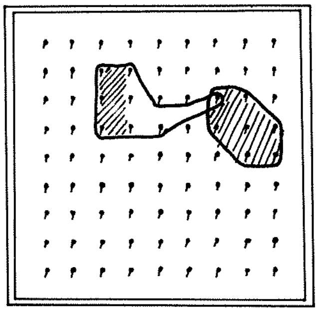


fig. 2

3. Je kunt natuurlijk ook een derde elastiekje op het bord brengen (zie fig.3).

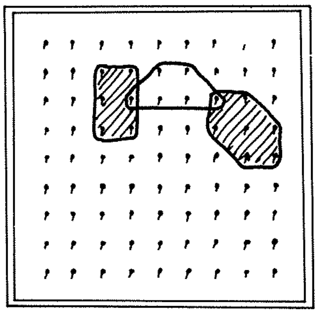


fig. 3

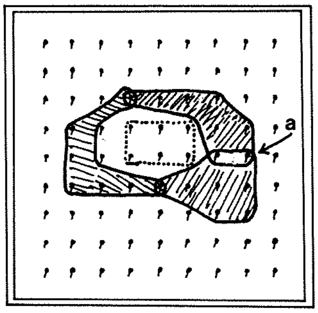


fig. 4

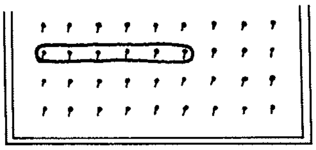
4. Op deze wijze krijg je een **landenketting**.
Met die landenketting kun je proberen het land van je **tegenstander** te **omsingelen**.
Dat land is dan van jou! Ook alle andere spijkers die door de ketting zijn omsingeld zijn nu van jou! (zie figuur 4)

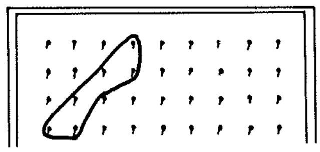
5. De spelregels zijn dezelfde als bij het eerste spel. Alleen moet je aan het eind erop letten, dat elke spijker maar één keer meetelt. In fig. 4 tellen de spijkers bij A bv. geen twee keer, maar slechts één keer mee!

eksp.uitg.

De door de jongens gevolgde strategie hield het volgende in:

– zij maken een figuur aan de rand van het spijkerbord, waardoor omsingeling uitgesloten is;
– zij maken een langgerekte figuur, zoals dat in onderstaande figuren is weergegeven:



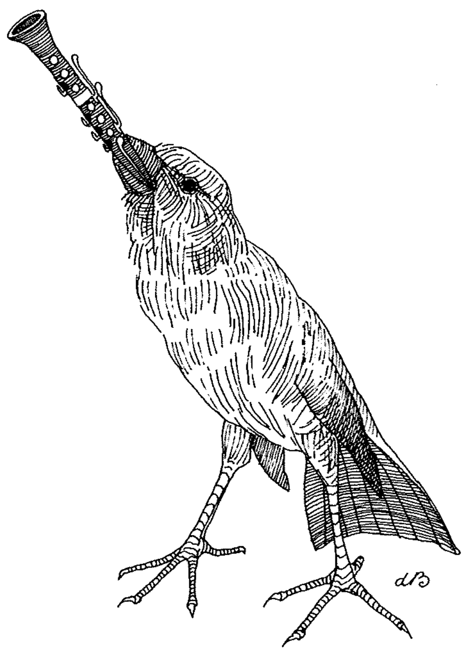


– zij nemen bij elke beurt een nieuw elastiekje, net zo lang tot er geen 'vrije' spijkers voor een elastiekje over zijn;
– tenslotte zijn er alleen nog 'losse' spijkers over, die zij om beurten één voor één 'in'-nemen.

Konklusies en aanbevelingen:

- Een groot spijkerbord (b.v. 20 bij 20 spijkers) is gewenst.
- De spelregel dat je *altijd*, bij elke beurt, een nieuw elastiekje mag nemen, kan gewijzigd worden in de spelregel dat je 10 elastiekjes (in 't geval van een 20 x 20 spijkerbord) mag gebruiken, bij elke beurt één.
- Een andere mogelijkheid is het aantal spijkers dat bij de introduktie van een nieuw elastiekje omsloten mag worden (6) te verkleinen tot b.v. 3 spijkers.

* *Annemieke en John* uit klas 3 werkten in ongeveer 40 minuten kaart S 301 (Spijkerbord) door. Het meest opmerkelijke is dat deze leerlingen al bij opdracht 1 de fout maken om in plaats van 'de onderste rij hokjes', 'de onderste rij spijkers' te lezen. De tekeningen op de kaart werken deze vergissing misschien in de hand. De fout, die kinderen vele opdrachten lang kunnen maken voor ze tot de ontdekking ervan komen, werd door de leerkracht gekorrigeerd. De leerlingen waren inmiddels tot opdracht 3 gevorderd. De leerkracht kwam af en toe eens kijken. Als de leerlingen bij de tabel van opdracht 5 zijn, maken zij 2 fouten, waarbij de ene terug te voeren is tot de hiervoor reeds besproken fout.



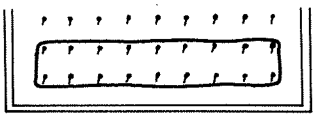
KANARINET

Nummer: S 301 Klas: 2/3

Je hebt nodig: een spijkerbord, elastiekjes, een blaadje ruitjespapier, een pen of potlood

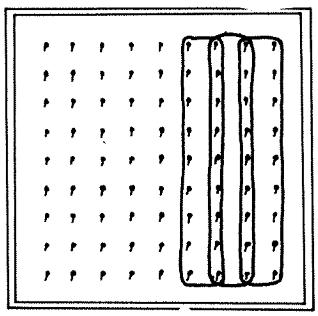
AFSPRAAK:
- schrijf op je blaadje bovenaan het nummer van deze kaart (S 301)
- schrijf de vet gedrukte zinnen op je blaadje over en vul de open plaatsen in
- zet de nummers van de vraag er altijd voor

1. Doe een elastiekje om de onderste rij hokjes van je spijkerbord. Schrijf op:
Voor 1 rij heb ik . . . . spijkers nodig.



2. Probeer maar op je spijkerbord hoeveel van die rijen je kunt maken, als je ze tegen elkaar aan maakt.
Schrijf op: **Je kunt . . . . rijen maken.**

3. Je kunt de rijen ook **naast** elkaar zetten, bv.



Schrijf op:
Je kunt . . . . rijen naast elkaar maken.

4. Schrijf op: **Om 3 rijen naast elkaar te maken, heb je . . . . spijkers nodig.**
Tel ze maar op het spijkerbord.

5.

1 rij	18 spijkers
2 rijen	.... spijkers
3 rijen	36 spijkers
4 rijen	.... spijkers
5 rijen	.... spijkers
.. rijen	.... spijker
.. rij	

Hiernaast staat een tabel, waar je al in kunt zien, dat je voor 1 rij 18 spijkers nodig hebt en voor 3 rijen naast elkaar 36 spijkers. Maak dezelfde tabel op je blaadje en vul alle lege plaatsen in; maak de tabel zo lang mogelijk.

6. Maak op je blaadje ook zo'n tabel, waarin je kunt zien hoeveel spijkers je nodig hebt voor rijen boven elkaar.

7. Bekijk alle twee de tabellen goed. Schrijf op:
Ik ontdek, dat. . . . .

eksp.uitg.

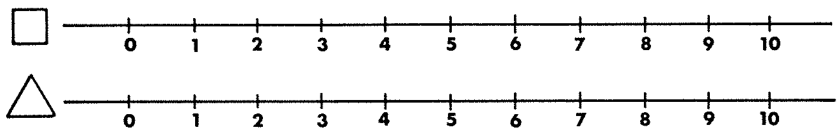
- De leerlingen maken de andere fout door als volgt te tellen:
  1 rij 18;
  2 rijen 36;
  3 rijen 54, enz.
  Onderwijzer: 'Wijs eens één rij aan. Hoeveel spijkers heb je nodig? '
  De leerling wijst zo te zien de goede rij hokjes aan.
  Onderwijzer: 'Wijs nu twee rijen aan. Hoeveel spijkers? '
  Annemieke heeft het inzicht nog niet: zij wijst 3 rijen aan (!).

- Het blijkt dat de leerlingen de tekst naast opdracht 5 niet hebben gelezen. Het voor leerlingen moeilijke woord (begrip) *tabel*, dat terugkomt in opdracht 6, hebben ze niet begrepen.

Konklusie:
de leerlingen hebben na het doorwerken van deze kaart nog onvoldoende inzicht in de situatie dat één rij spijkers voor twee rijen hokjes wordt gebruikt (uitgezonderd de eerste en de laatste rij spijkers).
De wijze waarop ze aan de kaart werken is voorbeeldig:
— ze werken goed samen;
— ze verdelen de taken en wisselen soms van taak;
— ze spreken fluisterend met elkaar; dit fluisteren is beslist niet hinderlijk;
— ze zijn zeer gekoncentreerd.

* Bij *het BAS-boekje van blok* 7 (Open beweringen) vindt men een serie werkkaarten. Deze zijn in de 'ontwerpschool' in Arnhem geëvalueerd.
Aan de definitieve vorm zijn een zestal niet geheel voldoende versies vooraf gegaan.
De tekst van een deel van één der werkkaarten luidde:

Opdracht 4: Teken twee getallenlijnen op je blaadje.



Eén van de getallenparen uit de tabel van werkkaart 2 is $\boxed{3}$; $\triangle 5$.
— Wijs op de □-getallenlijn 3 aan.
— Wijs op de △-getallenlijn 5 aan.

— Trek met je lineaal een lijn tussen deze twee punten.

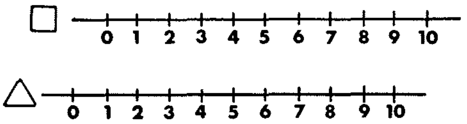
— Doe het ook met de andere getallenparen uit de tabel van werkkaart 2.

Zie je iets leuks aan de tekening die je hebt als je met de opdracht klaar bent?

Praat er over met elkaar.

* Deze werkkaart, bestemd voor de 3e klas, werd in de op één na laatste versie met twee leerlingen van de 3e klas geëvalueerd. *Margot en Wout* werkten de hele serie door. Margot beheerst het technisch lezen goed, Wout wat minder.
Nadat Margot de kaart in z'n geheel hardop voorlas, begon Wout opdracht 4 te lezen. Uit het lezen van Margot bleek dat de tekst geen onoverkomelijke moeilijkheden opleverde.
Uit Wout's aandeel bleek echter dat men voor verrassende moeilijkheden kan komen te staan, wat uit het vervolg duidelijk zal worden. Wout leest 'Teken twee getallenlijnen op je blaadje'.

Margot neemt het initiatief en de twee getallenlijnen worden op het papier getekend:



Omdat de getallenlijnen niet precies onder elkaar worden getekend, wordt besloten om aan deze opdracht toe te voegen:
'Begin bij 0; zet ze precies onder elkaar.'
Deze toevoeging is meer ingegeven door de wens de kinderen netjes te laten werken, dan dat het voor het verdere verloop van de opdrachten van essentieel belang is. De lezer kan dit zelf nagaan.
Nu leest Wout verder. Hij leest het hardop helemaal voor. Als hij klaar is, kijkt hij vragend om zich heen.
De onderwijzer vraagt wat hij denkt te moeten doen.
Hij haalt zijn schouders op.
De onderwijzer wijst de tekst onder de getallenlijnen aan en zegt: 'Lees het nog maar eens, Wout.'
Technisch gezien leest Wout de tekst nu redelijk goed. Ook deze keer blijkt Wout niet te begrijpen dat hij de gestelde opdrachten moet gaan *uitvoeren*. Als Margot, die het wel begrijpt, de opdrachten voorleest en hier en daar een aanwijzing geeft, kan Wout de opdrachten behoorlijk uitvoeren. De tekst is dus ook voor Wout begrijpelijk.
Waar zit dan de moeilijkheid? Wout kan de tekst lezen, begrijpt de tekst ook wel, maar weet de opdrachten niet om te zetten in handelingen. Hij ziet het verband niet tussen een geschreven opdracht en het uitvoeren van die opdracht. Het lezen van een tekst staat los van de handelingen die naar aanleiding van die tekst gevraagd worden.

Het kunnen uitvoeren van geschreven opdrachten is van belang. Het is duidelijk dat dit een nodige voorwaarde is voor het werken met werk- en opdrachtkaarten en met praktika.

4 Afsluiting
In dit artikel vindt de lezer een grove inventarisatie van enkele problemen, die bij het werken in een wiskundewerkhoek optreden, gesignaleerd. Er zijn twee uitwerkingen opgenomen: een voorbeeld met het spijkerbord en een evaluatie van een werkkaart. Het is duidelijk dat in dit artikel de problemen niet konden worden opgelost; het wilde de onderwijzer een aantal mogelijkheden aangeven om de werkvorm 'individueel werken met materiaal' in zijn klas te proberen. Zijn ervaringen kunnen in volgende bijdragen verwerkt worden.

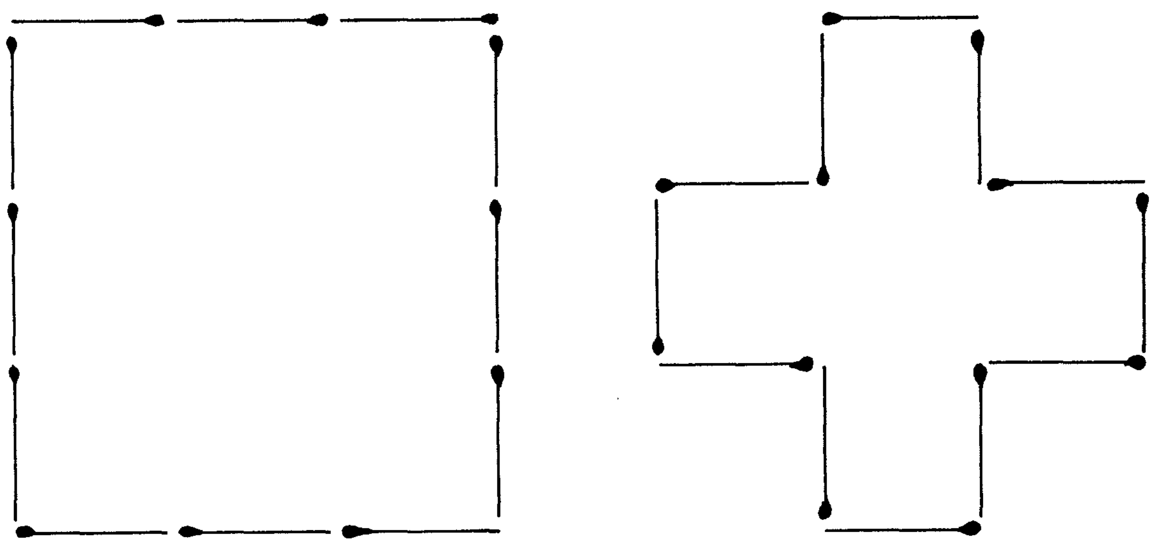
Enige bruikbare (?) materialen zijn:

- *De eksperimentele serie werkkaarten bij blok 5 (Het Spijkerbord) voor de Heroriëntering van Onderwijzers (uitg. IOWO, Tiberdreef 4, Utrecht, tel. 030-611611);*
- *De serie 'Wees wijs met wiskunde 1' van D. Karman en P. Scholten (uitg. Kok, Kampen);*
- *De serie 'Klaar? Ga maar spelen' van J. Nieland (in bewerking) (uitg. Malmberg, Den Bosch);*
- *De serie 'Instructie-boekjes' (uitg. Malmberg, Den Bosch); hiervan zijn de volgende deeltjes beschikbaar:*
  Het M.A.B. materiaal
  Algebraïsch Experimenteer Materiaal
- *'Wiskunde in wording' – Stuart E. Bell (nederlandse bewerking W. den Hartog, uitg. Malmberg, Den Bosch):*
  – Mozaïek, oppervlakte, omtrek
  – Talstelsels
  – Veelhoeken en veelvlakken
  – Hoeken.
- *Diverse artikelen in 'The Mathematics Teacher' en 'The Arithmetic Teacher' (uitg. National Council of Teachers of Mathematics, 1201 16th Street, N.W., Washington, D.C. 20036)*

3

Het aantal problemen met lucifers is misschien nog talrijker dan het aantal doosjes lucifers dat per jaar door een luciferfabriek op de markt wordt gebracht.

Dikwijls hebben deze puzzels een meetkundige ondergrond. Zo ook het volgende probleem:



Hier zijn afgebeeld twee figuren — veelhoeken — opgebouwd uit 12 lucifers. Het vierkant heeft een oppervlakte van 9 (eenheden). De oppervlakte van de kruisvormige veelhoek is 5.
De vraag is nu om een dergelijke veelhoek op te bouwen met behulp van deze 12 lucifers, zodanig dat de oppervlakte 4 is.
We houden ons voor goede oplossingen aanbevolen.

KLAAS KOSTER

DE STAND VAN ZAKEN IN ENKELE BEKENDE AMERIKAANSE PROJEKTEN M.B.T. LEERPLANONTWIKKELING VAN HET WISKUNDE-ONDERWIJS

CAMBRIDGE CONFERENCE on SCHOOL MATHEMATICS (CCSM)
Education Development Center, 55 Chapel Street, Newton, Massachusetts 02160.

Dit projekt startte in 1963 als uitvloeisel van een konferentie over de behoefte aan leerplanvernieuwingen in het wiskunde-onderwijs.
Het destijds geruchtmakende konferentieverslag, *Goals for School Mathematics,* diende als uitgangspunt voor het werk van CCSM. Net als het IOWO in nederland richtte de CCSM zich op de ontwikkeling van een leerplan 'wiskunde-onderwijs' van kleuterschool tot de '12th grade', van 5-18 jarigen. Teneinde de haalbaarheid aan te tonen van de in het leerplan gestelde doelen, was het uiteraard ook noodzakelijk leerstofeenheden en leermateriaal te ontwerpen. Vervolgens werden deze 'units' en het materiaal op een beperkt aantal scholen uitgeprobeerd.

Vanaf 1967 werd de aandacht van het projekt vooral gericht op het probleem van de heroriëntering van de onderwijzersopleiding, terwijl na 1969 de integratie van wiskunde- en 'science'-onderwijs in de basisschool in het vizier kwam. Een tweetal rapporten, te weten *Goals for the Mathematical Education of Elementary School Teachers* (1967) en *Goals for the Correlation of Elementary Science and Mathematics* (1969) waren voor de heroriëntering van de onderwijzersopleiding en de integratie van wiskunde en science het uitgangspunt. Op drie amerikaanse Teacher Colleges is in eksperimentele vorm gewerkt met de CCSM-kursus *Modern Mathematics for Elementary Teachers: a laboratory approach.*

Voor de uitwerking van een geintegreerd wiskunde- en 'science'-programma in het basisonderwijs is in 1970 een nieuw projekt gestart, onder de titel *Unified Science and Mathematics in Elementary School.* Dit USMES-projekt vormt zo de voortzetting van het in augustus 1970 beeindigde 'Cambridge Conference on School Mathematics'-programma. De hiervoor genoemde drie rapporten over doelstellingen van het CCSM-projekt zijn uitgegeven bij HOUGHTON NIFFLIN Company, 2 Park Street Boston, Massachusetts tegen de totaalprijs van $ 6.32. Ander projekt-materiaal kan men aanvragen bij ERIC Documentation Center, U.S. Government Printing Office, Washington D.C. 20402.

De ervaringen binnen het CCSM-projekt lijken ook voor de verdere planning van de leerplanvernieuwingen in nederland van belang.
Tijdig overleg en samenwerking tussen de diverse leerplankommissies kan voorkomen dat over een jaar of vijf allerlei integratiekommissies noodzakelijk worden. Vooral binnen het basisonderwijs – waar tot dusver immers de strenge vakkenscheiding van het sekundair onderwijs ontbreekt – is men weinig gebaat met een eenzijdige discipline-gerichte leerplanvernieuwing.

COMPREHENSIVE SCHOOL MATHEMATICS PROGRAM (CSMP)
CEMREL - CSMP, 103 South Washington Street, Carbondale, Illinois, 62901.

In juli 1969 nam het Central Midwestern Regional Educational Laboratory (CEMREL) alleen de verantwoordelijkheid van de financiering van het Comprehensive School Mathematics Program. Vanaf 1965 was projektdirekteur Burt Kaufman al via andere fondsen met dit programma bezig: eerst was het projekt ondergebracht bij een highschool in Florida, vervolgens kreeg het een plaats bij de Southern Illinois University, waarbij CEMREL ook nog enige tijd als co-sponsor optrad. CEMREL is één van de 15 regionale *educational laboraties*, die in 1965 door de United States Office of Education (USOE) werden opgericht, in het kader van een vernieuwde nationale onderwijswetgeving.

De doelstelling van het 'Comprehensive School Mathematics Program' (CSMP) is een gedifferentieerd wiskundeleerplan voor 5-18 jarigen te maken in de geest van de hiervoor al genoemde Cambridge Conference van 1963. CSMP is met nadruk *discipline-georienteerd.* Hoewel de programma- en leerplankonstrukteurs zich terdege rekenschap geven van onderwijskundige en pedagogische aspekten van het wiskunde-onderwijs, blijft de prioriteit liggen op de keuze en de ontwikkeling van, wat men noemt, een *sound mathematical content.* Dit startpunt heeft tot gevolg dat vooral de inbreng van wiskundigen gewaarborgd moet worden en dat het programma ook door wiskundigen wordt samengesteld. Een zwaar bezette nationale adviesgroep en diverse 'consultants' steunen de CSMP-staf bij de bewaking van de wiskundige inhoud van het programma. Tevens worden jaarlijks internationale kongressen georganiseerd over het wiskunde-onderwijs op het 'pre-college' nivo. Tot de adviseurs van CSMP behoren bv. Max Beberman (†), Robert Davis, Gerald Rising, Herbert Vaughan en Myron Rosskopf, terwijl ook adviseurs uit zweden en duitsland meewerken. De genoemde internationale wiskunde-konferenties hadden respektievelijk tot onderwerp:
'Het onderwijs in waarschijnlijkheid en statistiek' en
'Het meetkundeonderwijs'.

CSMP kent twee hoofdstromen in het programma. De eerste stroom is gericht op de konstruktie van onderwijs-leermaterialen voor hooggemotiveerde, verbaal begaafde leerlingen van 12-18 jaar. In de serie *Elements of Mathematics* zijn voor dit doel al een groot aantal tekstboeken verschenen. Iedere dag worden 120 leerlingen van diverse scholen naar het CSMP-gebouw vervoerd om, in plaats van hun dagelijkse portie wiskunde-onderwijs, met deze nieuwe programma's te werken. De verwachting is dat delen van de leerboeken uit de serie 'Elements of Mathematics' in het duits en zweeds worden vertaald.
De tweede stroom is minder ver uitgewerkt. Het gaat daarbij om de produktie van 'activity packages', voor de leeftijd van 5-18 jaar. Zo'n wiskunde-aktiviteiten-pakket moet door de leerlingen zelfstandig worden doorgenomen. Men gebruikt geluidsbanden, videotapes, films, allerlei materiaal om mee te manipuleren, en spelletjes evengoed als geprogrammeerde instruktie. Er is inderdaad sprake van een 'multi-media' benadering.
De konstruktie van de aktiviteiten-pakketten bevindt zich nog in de beginfase. Sinds het schooljaar 69-70 wordt op kleine schaal met deze pakketten gewerkt in een aantal eksperimenteerscholen. Voor de klassen drie en vier van de basisschool zijn de eerste pakketten gereed.
In totaal zijn voor bv. de derde klas 11 pakketten beschikbaar met o.a. de volgende onderwerpen: Optellen, Transformaties, Vermenigvuldigen, Aftrekken, Positie-stelsel, Waarschijnlijkheid, Meten.
Via zomerkursussen en wekelijkse bijscholingskursussen worden de leraren en onderwijzers voorbereid op het werken met het CSMP-materiaal.

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP (S.M.S.G.)
Cedar Hall, Stanford University, Stanford, California, 94305

De werkzaamheden van SMSG begonnen in maart 1958 en waren gericht op het samenbrengen van wiskundeleraren en 'research mathematicians' teneinde het wiskunde-leerplan te verbeteren van scholen, die voorafgaan aan de 'college'-opleiding.
Het werk van SMSG bestond in hoofdzaak uit het ontwikkelen van programma's en onderwijsmetodieken voor de groep van 5-18 jarigen. Daarnaast produceerde SMSG materiaal voor de onderwijzersopleidingen (bv. de serie 'Studies in Mathematics') en verschenen konferentierapporten over speciale onderwerpen. SMSG bevindt zich in de afrondingsfase: het laatste evaluatierapport van de 'National Longitudinal Study of Mathematical Abilities' verscheen in 1971. De leerboeken voor de basisschool en het sekundair onderwijs waren al enkele jaren geleden klaar en zijn of worden bv. vertaald in het Spaans, Zweeds, Chinees, Portugees. Al met al heeft SMSG ruim tweehonderd verschillende titels uitgegeven.
Dit aantal kan men als volgt verdelen: 'Newsletters' voor leraren en onderwijzers, inklusief leerboeken (± 70 titels); geprogrammeerd materiaal (± 35); aanvullings- en verrijkingsmate-

riaal (± 30); 'Studies in Mathematics', bestemd voor de onderwijzersopleidingen (± 20); evaluatie-rapporten (± 15); konferentieverslagen (± 10).
In de 'New Mathematical Library' verschenen ruim twintig titels, waaronder bv. boeken met de opgaven van oosteuropese wiskunde-olympiades.

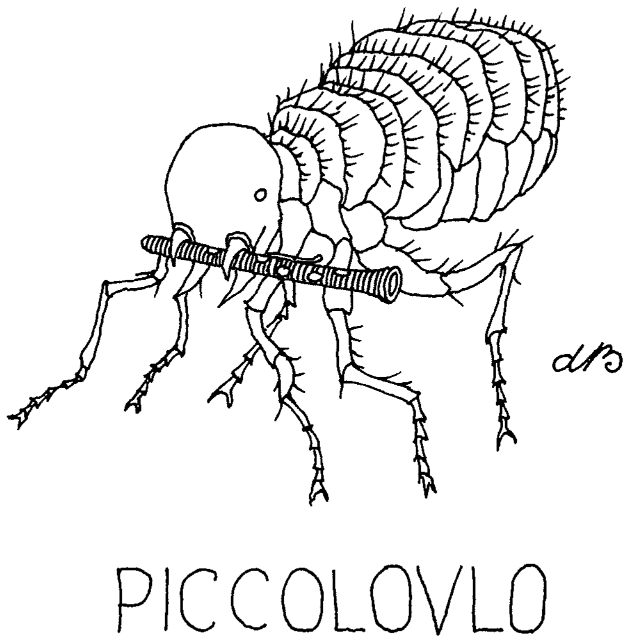
De laatste jaren heeft SMSG veel aandacht besteed aan de ontwikkeling van speciale programma's voor 'disadvantaged children' en 'low achievers'.
Voor informatiedoeleinden is er ook een wiskunde-programma voor ouders gemaakt, terwijl voor onderwijzers allerlei films beschikbaar zijn, waarin een overzicht van het SMSG-programma wordt gegeven.

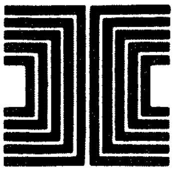
In verband met de afronding van het SMSG-projekt is per januari 1972 ook het sponsorschap van het tijdschrift *Investigation in Mathematics Education**) in andere handen overgegaan. Voortaan wordt deze uitgave verzorgd door het 'Center for Science and Mathematics Education' van de Ohio State University. Het tijdschrift blijft vier keer per jaar verschijnen.

In nederland kunnen we uit de SMSG-ervaringen leren dat tijdig differentiatie- en individualiseringsmogelijkheden in de programma's moeten worden opgenomen. Dit voorkomt dat later afzonderlijke programma's voor achterblijvers noodzakelijk zijn. Hoe deze individualisering van het wiskundeonderwijs in het buitenland gestalte krijgt zal in een volgend Bulletin worden beschreven.

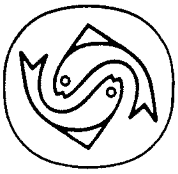
---

*) Zie: Wiskobas-Bulletin, jaargang 1, no.2/3, pag.110.

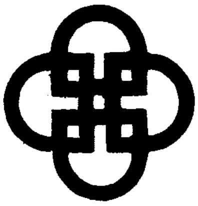




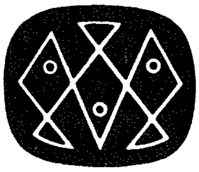
Antal symmetriaxlar ......
Antal symmetricentra .....



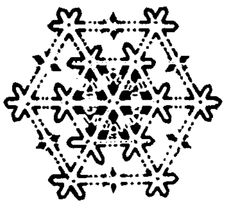
Antal symmetriaxlar ......
Antal symmetricentra .....



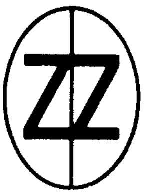
Antal symmetriaxlar ......
Antal symmetricentra .....



Antal symmetriaxlar ......
Antal symmetricentra .....

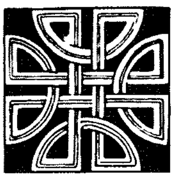


Antal symmetriaxlar ......
Antal symmetricentra .....



Antal symmetriaxlar ......
Antal symmetricentra ....

Antal symmetriaxlar ......
Antal symmetricentra .....



Antal symmetriaxlar ......
Antal symmetricentra .....

Uit: Matematik NU.

het delta-projekt

LOUIS GILISSEN

HERORIËNTERING ONDERWIJZERS IN ZWEDEN

In het schooljaar 1970-1971 startte men in zweden met een nieuw leerplan voor rekenen-wiskunde op de 9-jarige basisschool.*
Bij het ontwerpen van het leerplan bleek de verandering zo groot te zijn, dat men tot de overtuiging kwam dat de onderwijzers en leraren zonder hulp niet in staat zouden zijn deze vernieuwing door te voeren. Men besloot daarom tot een heroriëntering van onderwijzers, waaraan iedere onderwijzer van de eerste 2 fasen en iedere wiskundeleraar van de laatste fase van de basisschool verplicht werd deel te nemen (door de gecentraliseerde organisatie van het onderwijs in Zweden was en is dit mogelijk).
Zodoende werd de kursus gevolgd door 35.000 à 40.000 onderwijzers en 7.500 wiskundeleraren.

De kursus werd opgezet als een samenwerkingsprojekt tussen de nationale onderwijsraad (een lichaam dat het landelijk onderwijsbeleid voert), de zweedse omroep (radio en televisie zijn in zweden vertegenwoordigd in één lichaam) en Hermods (een instituut voor schriftelijke kursussen en uitgeverij van schoolboeken) en kreeg de naam 'Delta-projekt'.

De kursus vond plaats op 12 middagen, verspreid over het jaar, onder schooltijd; de kinderen kregen vrijaf. Iedere kursusmiddag duurde 3 uur en was als volgt ingedeeld:

10 minuten behandeling via de radio van ingestuurde problemen van kursisten;
20 minuten televisieprogramma, meestal over de stof, soms over didaktische problemen. Het doel was motivatie van de studie van de nieuwe stof en diskussie over de nieuwe didaktiek;

'geheroriënteerde onderwijzer'

* Deze 9-jarige basisschool bestaat uit 3 fasen van ieder 3 jaar. Tijdens de eerste 2 fasen wordt les gegeven door klasse-onderwijzers, tijdens de laatste fase door vak-leerkrachten.

15 minuten	een teoretisch radioprogramma waarin ingegaan werd op de stof. Bij dit programma behoorden de afbeeldingen uit het begin van het op de desbetreffende middag te bestuderen hoofdstuk uit het boek.

Na dit programma werd gedurende de rest van de tijd in groepen van 5-8 onderwijzers het desbetreffende hoofdstuk doorgewerkt. Iedere kursusmiddag werd een test gemaakt voor de zelf-kontrôle van de onderwijzer. 5 keer gedurende de hele kursus kon de kursist een multiple-choice-test maken en insturen naar Hermods, waar deze door de komputer werd geskoord. Hij was daartoe niet verplicht. Kursisten die alle 5 de testen instuurden, ontvingen een certifikaat.

Iedere kursusmiddag werd besteed aan een hoofdstuk. De volgorde van de onderwerpen was als volgt:

1e middag	Verzamelingen, venndiagrammen, deelverzameling, element van
2e middag	Een-eenduidige afbeelding, het getal, groter dan, kleiner dan
3e middag	Het positiestelsel, talstelsels
4e middag	Relaties, doorsnede en verschil van twee verzamelingen
5e middag	Variabelen, open beweringen, de getallenlijn, koördinaten
6e middag	Funkties, kommutatieve eigenschap van de optelling, aftrekken
7e middag	Idem
8e middag	Produktverzameling, vermenigvuldigen, delen
9e middag	Frekwentietabel, histogram, cirkeldiagram, relatieve frekwentie
10e middag	Gemiddelde, mediaan, kans
11e middag	Meetkunde, translaties, draaiingen, spiegelingen
12e middag	Kongruentie, gelijkvormigheid

Bij deze kursus lag de nadruk op de wiskundige inhoud. De didaktiek, het onderwijs kwam slechts zo nu en dan ter sprake. Bij het opzetten van de kursus ging men ervan uit, dat de onderwijzer het gereedschap in handen moest worden gegeven, maar dat het indoktrinatie zou zijn hem te vertellen hoe hij het zou moeten gebruiken. Van deze mening komt men nu langzamerhand terug; er schijnen plannen te bestaan voor een nieuw 'Delta-projekt', maar nu op didaktisch-onderwijskundig terrein.

handig tellen

JAN V.D. BRINK

KIJK MAAR, ER STAAT NIET WAT ER STAAT!
(vrij naar M. Nijhoff)

Ter inleiding volgen hier twee **problemen**:

▶**a** Wij vonden in fig.1 3913 kubusjes. En u?

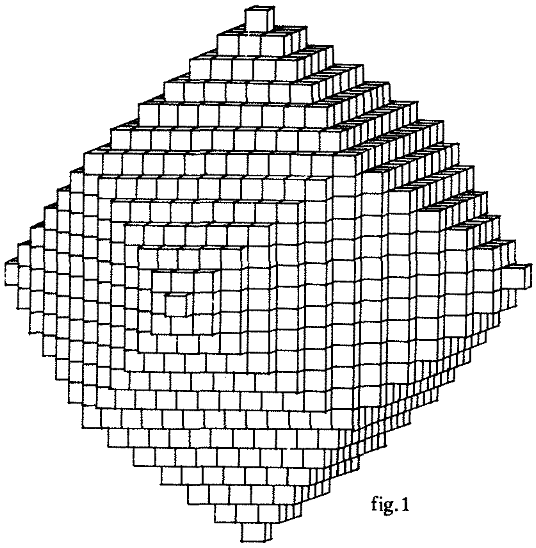


fig.1

▶**b** Uit hoeveel kubusjes bestaat figuur 2?

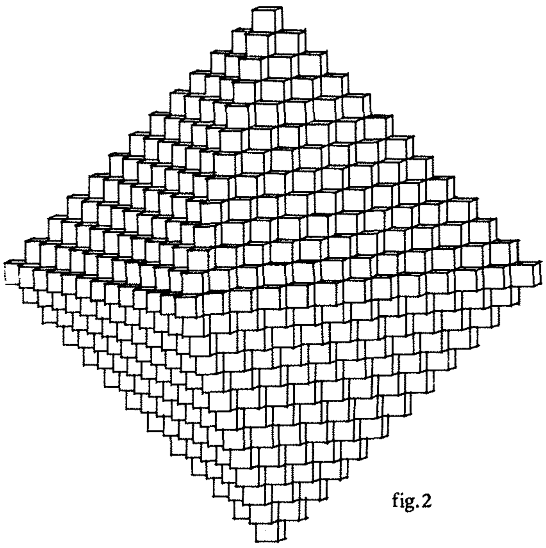


fig.2

1 Een analyse

Als u de voorgaande opgaven hebt bekeken, is het duidelijk dat bij het *tèllen* enkele moeilijkheden ontstaan.
Allereerst kunt u in de tekeningen niet *alle* kubusjes zien en bovendien weet u niet of de figuren 'aan de achterkant' plat zijn of een andere vorm hebben.
Om de opgaven toch op te lossen zult u méér hebben gedaan dan uitsluitend *kijken* naar de figuren.
'Er staat immers niet wat er staat' – *er staat méér*!
Maar dat meerdere moet u zèlf in de figuur brengen!

Door zelf struktuur te brengen in de tekening, door zelf in de chaotische hoeveelheid kubusjes orde te scheppen, wordt het mogelijk het aantal kubusjes te bepalen. Of, in ruimere zin: door *orde te scheppen* in de chaos wordt die chaos 'gemodelleerd'*) en *beheersbaar.*

Vormt de anthropologische visie, dat deze ordescheppende geesteshouding een wezenlijk kenmerk is voor het mens-zijn, soms het antwoord op de vraag: 'Waarom wiskunde, waarom matematiseren? '

In ieder geval is het matematiseren – zoals u in de twee opgaven ontdekte – een ordescheppende aktiviteit die we ons soms niet eens bewust zijn. Voor ons onderwijs is het echter wèl van belang ons te realiseren dat we meestal méér moeten doen dan alleen maar te lezen wat er staat. Mede daarom volgen hier een paar opdrachtjes die u met uw leerlingen kunt uitvoeren en die u de gelegenheid bieden om de kinderen bewust te maken hóe ze ordenen.

*) N.B. de chaos zèlf wordt niet gemodelleerd. U bedenkt zelf een model naar aanleiding van wat u ziet.

2 Opdrachtjes

HANDIG TELLEN

Dit is een tekening van een raam in een kerk.

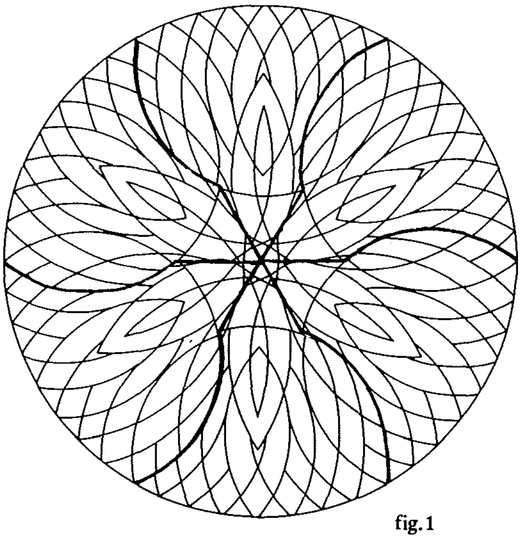


fig.1

▶ **c** Hoeveel open plaatsen zijn er in dit raam? *Hóe heb je geteld?*

Door eerst goed naar de figuur te kijken, kun je snel klaar zijn met tellen.
Probeer het eens – eerst goed kijken!

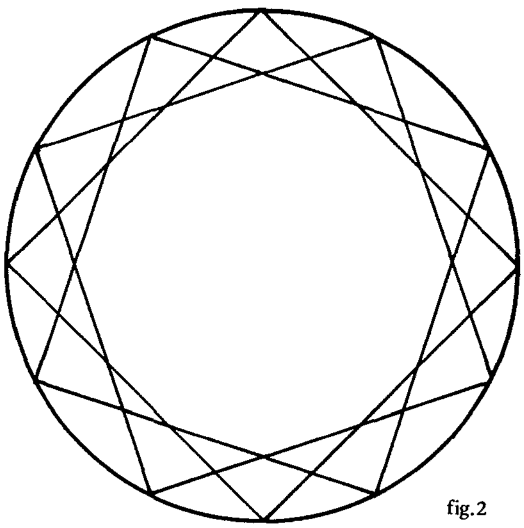


fig.2

▶ **d** Hoeveel vierkanten zijn in deze cirkel getekend?

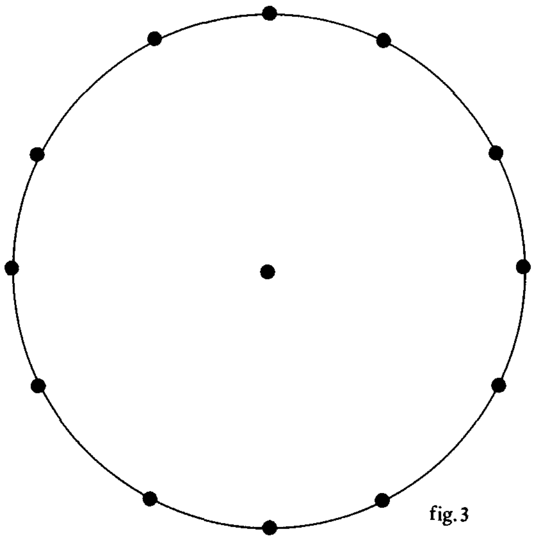


fig. 3

e Hoeveel punten zijn er op deze cirkel getekend?

Door de cirkel in gelijke stukken te verdelen kun je snel het aantal punten vinden!

---

f Hoeveel rechte lijnen zijn er getrokken in figuur 4?

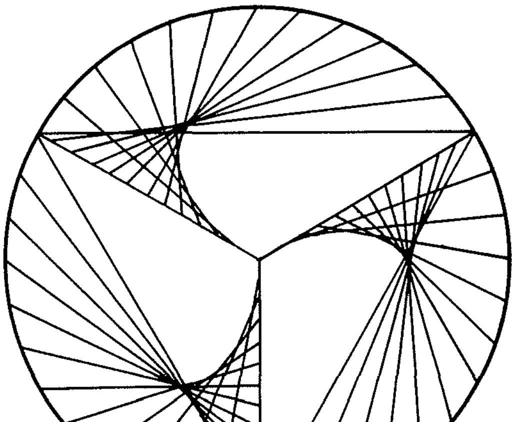


fig. 4

Hoe heb je geteld?

g Zie jij ook een driehoek in de cirkel van fig. 4?

h Hoeveel witte hokjes zijn er in de cirkel van figuur 5?

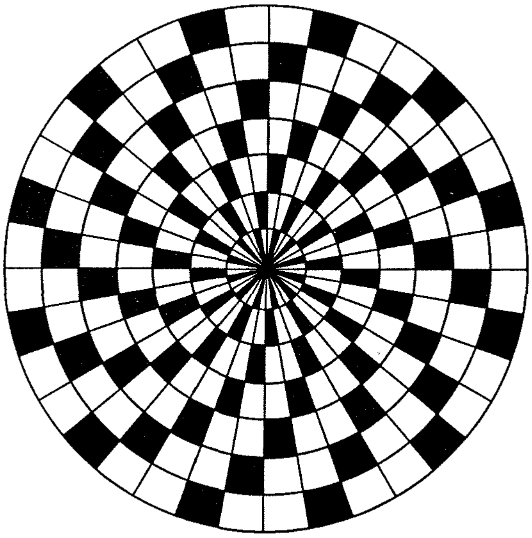


fig. 5

i Maak zelf ook zo'n telopgave.

STIPPENCIRKELS

In figuur 6 zijn twee cirkels met punten erop getekend.

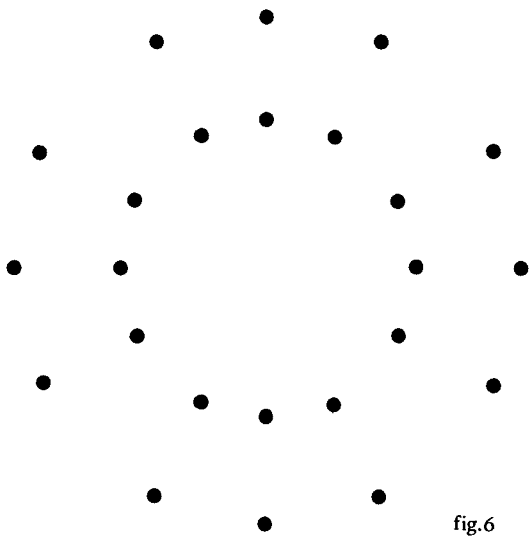


fig. 6

j Is het aantal stippen op de kleine cirkel groter dan het aantal stippen op de grote cirkel?

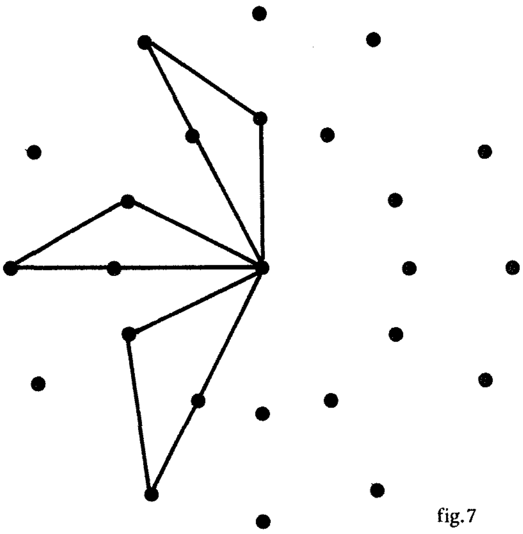


fig.7

▶ **k** Hoeveel driehoeken kun je op deze manier in figuur 7 tekenen?

In figuur 8 heb ik enkele rechte lijnen getrokken.

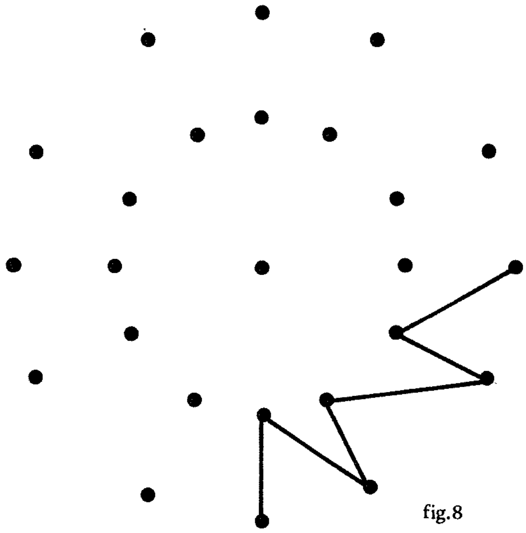


fig.8

▶ **l** Hoeveel van die rechte lijnen zou ik op die manier kunnen trekken?
(Kun je het antwoord vinden zònder de lijnen te tekenen? Er zijn 12 punten op elke cirkel.

Antwoorden:

b 578 kubusjes
d drie vierkanten
e 12 punten
f 39 rechte lijnen
h 168 witte hokjes

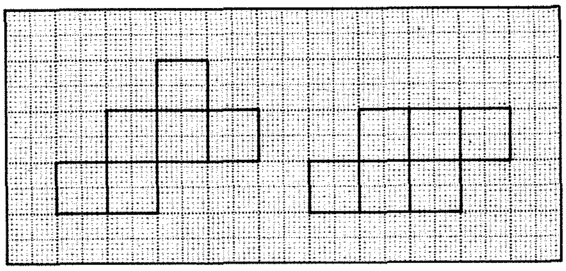
nieuw op de markt

ED DE MOOR

AANKONDIGINGEN

De aloude Hogere Burger School (5-jarige H.B.S.) is dit jaar aan zijn eind gekomen. Nog tweemaal zal er gelegenheid zijn om het eind-eksamen oude stijl af te leggen. Een eksamen, waar je 'vrijstellingen' kon behalen door bijvoorbeeld voor een schriftelijk onderdeel der wiskunde het cijfer zeven (of meer) te skoren. Behaalde je die vrijstelling niet dan volgde een 'mondeling' afgenomen door je leraar, op de vingers gekeken door een 'deskundige', die ook wel eens iets vroeg. Dit jaar legde zo'n deskundige aan een kandidaat het volgende probleem voor.

Probeer er eens achter te komen, welke van de figuren hieronder het netwerk van een kubus is?



De kandidaat vond 't nogal moeilijk.
Het vraagstuk komt uit de serie *'Wiskunde in wording'* (oorspronkelijke titel: 'Mathematics in the Making' van Stuart E. Bell), voor Nederland bewerkt door W. den Hartog en uitgegeven door Malmberg.
Er zijn tot nu toe vier deeltjes uitgebracht:

1 Mozaïek, oppervlakte en omtrek
2 Talstelsels
3 Veelhoeken en veelvlakken
4 Hoeken.

Boekjes, die geschikt zijn voor de *wiskunde-werkhoek* op de basisschool, maar er dient 'goede begeleiding' en materiaal bij verschaft te worden. 't Lijkt mij uitstekend als kinderen werkelijk eens een kubus in elkaar zetten, met een teller spelen als het over talstelsels gaat, een passer hanteren, enfin, allerlei zaken, die de huidige bovengenoemde H.B.S.-diploma-bezitter niet beheerst.
De onderwerpen uit deze eerste vier deeltjes komen op de Wiskobas-kursussen in het tweede jaar aan de orde.

Voor de wiskundewerkhoek zijn ook geschikt de werkkaarten van D. Karman en P. Scholten *'Wees wijs met wiskunde'*, uitgegeven door Kok. De kaarten – prettig en fantasierijk uitgevoerd – zijn echter het best te gebruiken voor groepswerk.
De meeste kaarten zijn geïnspireerd op het Blok I 'Stadsplan' van de heroriënterings-kursussen en het pakketje heeft daardoor een wat éénzijdig karakter. Jammer is het ook, dat er nog geen pakketje van dergelijke werkkaarten beschikbaar is voor de klassen 1, 2 en 3 van de basisschool.

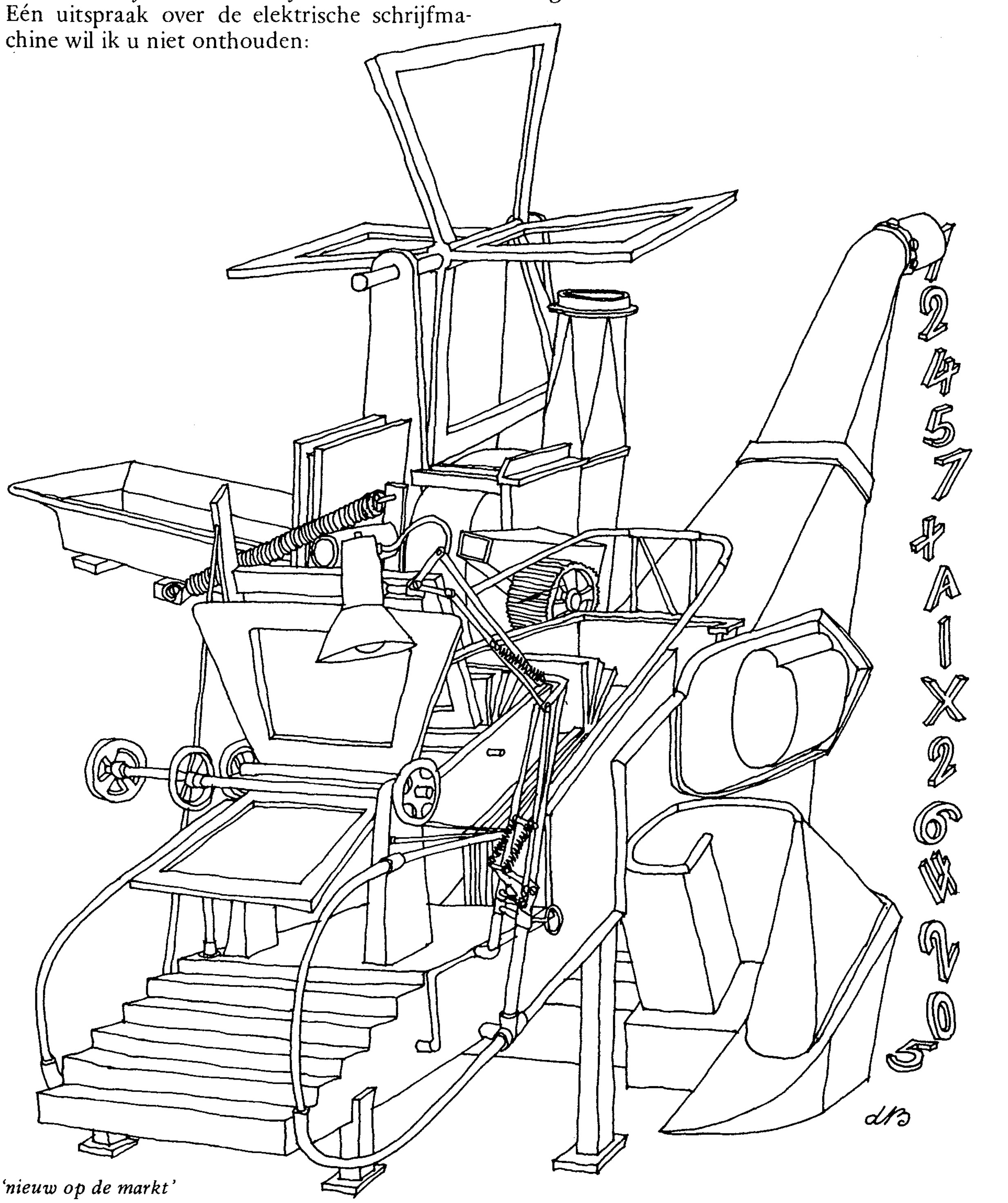
Bij Malmberg verschijnt ook een set werkkaarten onder de titel *'Klaar, ga maar spelen'* van J. Nieland e.a. De eerste negen kaarten, die wij tot nu ontvangen hebben, zijn gevarieerder van inhoud dan de bovengenoemde. Er bevindt zich een uitgebreide handleiding bij, waarin net als bij de kaarten 'Wees wijs met wiskunde' gewezen wordt op de overgangsfase waarin wij ons in het huidige rekenonderwijs bevinden en op het belangrijke aspekt van het 'zelfontdekken' in het wiskunde-onderwijs.
Het is wellicht goed te bedenken dat schrijver dezes dit alles vanachter zijn bureau mededeelt.

Tot slot wijden wij nog enige aandacht aan *'Teachware'*, tijdschrift over 'software' en 'hardware' voor het onderwijs, uitgegeven door Olivetti Nederland N.V.
In 'Teachware' zal regelmatig verslag worden gedaan van hetgeen in het onderwijs gebeurt

rondom de 'kantoormachine' in de ruimste zin van het woord.
Uiteraard handelen enkel artikelen over rekenrobots, deftig 'komputers' genoemd, die her en der al in het beroeps- en voortgezet onderwijs worden gebruikt. Een knipoog naar het basisonderwijs was natuurlijk te verwachten. Eén uitspraak over de elektrische schrijfmachine wil ik u niet onthouden:

'Een groot voordeel van de toepassing van de elektrische schrijfmachine is ook de geringe rol van de vermoeidheid waardoor meer arbeidsvreugde wordt verkregen'.

Voorwaar een stelling om bij een proefschrift te gebruiken'.



'nieuw op de markt'

JAN POSTEMA

piagetalbegrip

In het vorige artikel[1]) hebben we in grote lijnen aangegeven hoe Piaget de geestelijke ontwikkeling ziet als een voortschrijdend proces van assimilatie en akkommodatie, waarbij de mentale strukturen waarover het kind beschikt steeds omvangrijker en vooral ook beweeglijker worden. In deze ontwikkeling onderkent Piaget fasen. Vooral de fase van het *intuïtieve denken* (van 4 tot 7/8 jaar) heeft onze belangstelling.

De fase van het intuïtieve denken is een onderdeel van een lange periode (van 2 tot 11/12 jaar), de *periode van de konkrete handelingen*. Wat wil dit nu zeggen: konkrete handelingen? Piaget stelt, dat de verstandelijke ontwikkeling gebaseerd is op de eigen handelingen van het kind zelf. Het zijn deze konkrete handelingen die de grond van het denken vormen. Doende en doende met konkrete dingen in reële situaties denkt het kind. Van dit 'doen' ontstaan innerlijke beelden.
Aanvankelijk op grond van weinig ervaring en daarom star, onbeweeglijk. Maar van lieverlee wordt de struktuur van de begrippen rijker, als deze begrippen worden gevoed door en worden ontwikkeld vanuit vele konkrete handelingen. De zo ontstane begrippen zijn niet logisch in de zin zoals wij, volwassenen, logisch denken. Onze begrippen en onze konklusies zijn de resultaten van (onder anderen) ons logisch denken. We gaan redeneren en in het verlengde hiervan ligt onze konklusie. Maar in de intuïtieve fase wordt het denken niet bepaald door een redeneren over het ervarene, het zijn veeleer de waarnemingen en ervaringen zèlf die het denken bepalen. Het kind denkt datgene wat het ziet en doet.

Wij ervaren iets en denken er dan (op logische wijze) over na. Bij het kind zijn het vooral de handelingen en de waarnemingen die het denken bepalen. Je zou kunnen zeggen: het zijn geen logische redeneringen, maar waarnemingsredeneringen.
Een voorbeeld om dit te illustreren:
bij het kind van deze leeftijd zijn acht ver uit elkaar liggende knikkers meer dan acht dicht bij elkaar liggende.

Het kind dat zo 'denkt' wordt door Piaget een *non-conserver* genoemd. Onder konservatie verstaan we, dat een hoeveelheid onveranderlijk blijft ondanks veranderingen in de uiterlijke verschijningsvorm. Dit konservatie-begrip blijkt essentieel te zijn als het gaat om het verwerven van getalbegrip.

Hoe komt het nu dat een *non-conserver* de acht uit elkaar liggende knikkers 'meer' noemt dan de dicht bij elkaar liggende?
Wel, zegt het kind, dat zie je toch!
Wij denken (logisch): in beide gevallen zijn er acht.
De non-conserver kàn zo niet eens denken; daarvoor ontbreekt hem de mentale struktuur. Kritici van Piaget stellen wel eens dat hier de taal voor het kind anders funktioneert. Als iemand vraagt wat meer is, bedoelt het kind die ver uit elkaar liggende groep. Die is langer, het kind ziet daar dus meer.

Een kwestie dus van taal?
Toch niet. Deze taal is gewone, dagelijkse taal en als zodanig door het kind te verstaan. Maar het soort denken in deze taal vervat kan het kind niet begrijpen. Het kind kan hier niet assimileren, omdat zijn denkvermogen daartoe niet gestruktureerd is.
Je zou het kind kunnen vergelijken met een blinde die zo graag wil weten wat blauw is. Welnu, dat leggen we hem haarfijn uit. (in uitleggen zijn we meesters!) Maar weet de blinde nu wat blauw is? Zo weet een kind niet wat 13 is. Wel min of meer natuurlijk,

1) Wiskobas-Bulletin 4

maar niet echt. Daarvoor ontbreekt hem, als de blinde, het vermogen.
Daarom ook moeten we afzien van eenzijdig uitleggen en van het laten maken van rijtjes sommen. Niet door sommetjes maken en de uitleg daarvan, maar door *ervaringen met veelsoortig materiaal zal het kind komen tot getalbegrip*. Door aktief en konstruktief met hoeveelheden bezig te zijn verwerft het kind echte kennis. Het kind leert slechts kennen doordat het op de dingen inwerkt. Dat wil zeggen: doordat het ze op de een of andere manier omvormt en dan opneemt in zijn eigen strukturen, de kennis dus assimileert.
Piaget onderscheidt aan het getalbegrip twee aspekten, die verbonden zijn met het kardinale en ordinale aspekt van het getal

Een kind kan een element van een verzameling toevoegen aan een element van een andere verzameling. Iemand is jarig en een element van de verzameling snoepjes wordt toegevoegd aan een element van de verzameling kinderen. Wordt nu aan elk snoepje juist één kind toegevoegd en aan elk kind juist één snoepje dan is er een *één-één-duidige relatie* tussen de verzameling snoepjes en de verzameling kinderen. We zeggen: er zijn evenveel snoepjes als kinderen. Dit 'evenveel' verwijst naar het aantal, naar de kardinaalwaarde van de verzamelingen.
Ga ik nu een verzameling snoepjes tellen, dan orden ik. 1, 2, 3 is eigenlijk: de eerste, de tweede, de derde. Tel ik het laatstgetelde element van mijn verzameling snoepjes als 31, dan bedoel ik weer: de een en dertigste. Hier komt dus de volgorde, het ordinale aspekt naar voren.

Zo funktioneren in het getalbegrip kardinaal- en ordinaalaspekt en wel tegelijkertijd: '.. 29, 30, 31 (ordinaal) dus nu zijn er 31 snoepjes (kardinaal)'. U ziet hoe ingewikkeld het bij nader inzien is als wij zeggen: 'hier liggen 31 snoepjes'. Voor het jonge kind zijn de genoemde aspekten niet zo in het denken geïntegreerd dat het werken met getallen probleemloos geschiedt.
We moeten ons beperken en willen stellen dat in de ontwikkeling van het getalbegrip de volgende aspekten een belangrijke rol spelen: konservatie, één-één-duidigheid, kardinaal- en ordinaalaspekt.

Aanleiding tot dit artikel was een onderzoek van drs. B. Remmo Hamel en H. de Tombe. Het doel van hun onderzoek was om na te gaan hoe en in welke mate bovengenoemde 4 aspekten met elkaar en met de ontwikkeling van de algemene intelligentie samenhangen[2]). Zij toetsten de hypotese, dat er een nauwe samenhang is. Een door hen gekonstrueerde *getalbegrip-test* werd afgenomen bij 42 kleuters. Hierbij bleek dat er inderdaad een behoorlijke samenhang is. Op grond van de verkregen uitkomsten komen Hamel en de Tombe tot de volgende konklusies:

1 Het denken in de intuïtieve fase wordt sterk bepaald door stimulusfaktoren. Het is noodzakelijk om hierover meer onderzoek te verrichten. Binnen niet al te lange tijd kunnen we de resultaten van dit onderzoek verwachten (Hamel en v.d. Veer).

2 Dat de verschillende aspekten van het getalbegrip nauw samenhangen is in overeenstemming met het feit dat Piaget de ontwikkeling van het getalbegrip ziet als een onderdeel van zijn intelligentie-teorie.

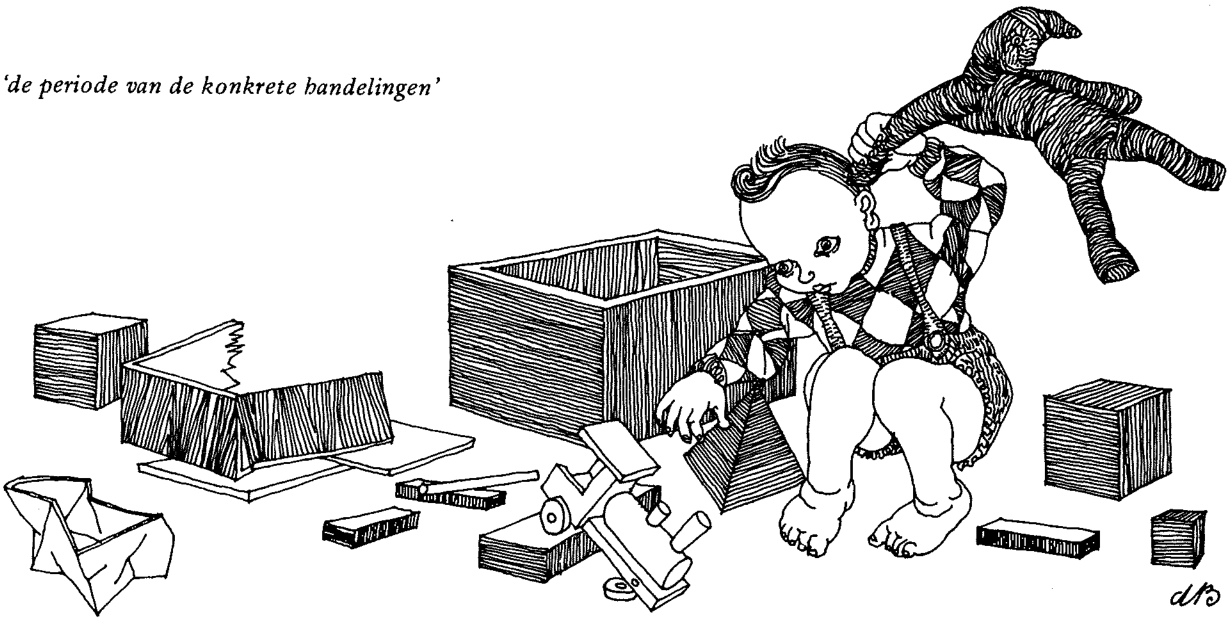
Teneinde nu een inzicht te krijgen in de aard en hoeveelheid van intelligentie-faktoren die een rol spelen in de getalbegripsontwikkeling, werd een nieuw onderzoek verricht.
149 kleuters van 11 kleuterscholen in Haarlem en omgeving namen deel aan het onderzoek. Op basis van de gegevens uit het eerste onderzoek werd een nieuwe versie van de getalbegripstest gekonstrueerd. Daarnaast werd de AKIT (Amsterdamse Kinder Intelligentie Test) gebruikt. Het bleek dat de aspekten van het getalbegrip (o.a. konservatie, één-één-duidigheid, kardinaal- en ordinaalaspekt) een nauwe relatie met elkaar hebben en dat er tevens een nauw verband is met de perceptuele abstrakte redeneerfaktor van de AKIT.

De konklusie die (met enige voorzichtigheid) hieruit getrokken kan worden is, dat de ontwikkeling van het getalbegrip bij de kleuter eerder gezien moet worden in nauwe samenhang met de algemene intelligentie dan dat er sprake is van een zich specifiek ontwikkelende

2) B. Remmo Hamel en Hans de Tombe 'Piagets Zahlbegriff bei Kindern'. Zeitschrift für Entwicklungspsychologie u. Päd. Psychologie 1972, S. 77-91 (Band IV, Heft 2).

vaardigheid. De ontwikkeling van het getalbegrip is dus ingebed in de algehele ontwikkeling van de intelligentie.
Betekent dit nu dat we in ons onderwijs niet zozeer datgene dat tot voorbereiding van het getalbegrip dient, moeten onderwijzen maar dat er veeleer naar gestreefd moet worden om de algemene intelligentie te bevorderen? Immers dan wordt daarmee tevens het getalbegrip ontwikkeld!
Deze konklusie lijkt ons voorbarig. Juist omdat er nauwe verbanden bestaan moeten *beide* in ons onderwijs tot hun recht komen. Daarnaast is de vraag van belang in hoeverre – omgekeerd – een onderwijs dat gericht is op het verwerven van getalbegrip de algemene intelligentie kan bevorderen.
Voor ons was het interessant te ervaren hoe de research van de ontwikkelingspsychologen zich bezig houdt met belangrijke aspekten van ons onderwijs. We hopen dat ons in de toekomst nog meer informatie van die zijde zal bereiken.

'de periode van de konkrete handelingen'



4

In het Wiskobas-Bulletin nr.2/3 ging Prof. v.d. Blij in op de wiskunde, die te vinden is op de prent 'Melencolia' van Albrecht Dürer. U herinnert zich wellicht het magische vierkant dat op deze prent voorkomt:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Wanneer u de som van de getallen berekent resp. van de vier kolommen, vier rijen en de twee hoofddiagonalen, dan is de uitkomst steeds: 34.

De historie van deze magische vierkanten is zeer oud, terwijl er een uitgebreide literatuur over bestaat.
We hopen hier later nog op terug te komen. Ditmaal beperken we ons tot het volgende 'magisch probleem':

Probeer bovenstaand 3 bij 3 vierkant te vullen met getallen, zodanig dat het *produkt* van de getallen in elke *rij* en elke *kolom* 120 bedraagt.

Merk op dat *niet* vereist wordt dat de getallen opeenvolgend zijn zoals in de prent van Dürer waar de getallen van 1 t/m 16 gebruikt worden, terwijl ook *niet* vereist wordt dat het produkt van de diagonalen 120 is.

Wij wensen u — en eventueel uw leerlingen — sukses bij het zoeken naar een oplossing. Misschien wordt u nog gestimuleerd door de mededeling, dat er meerdere mogelijkheden zijn.

skriptoteek

HENK MEIJER
JOHAN VAN BRUGGEN

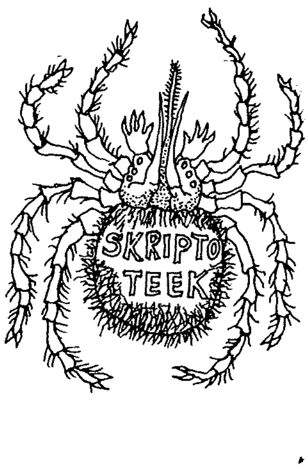
In Wiskobas-Bulletin nr. 2/3 (januari 1972) hebben we medewerking gevraagd bij de opbouw van een z.g. skriptoteek. Enkele docenten en studenten hebben skripties uit het kursusjaar 1970/1971 opgestuurd; één daarvan is onderwerp van bespreking geweest in Wiskobas-Bulletin nr.4. Verder hebben een aantal docenten gehoor gegeven aan het verzoek om een briefje te sturen met de onderwerpen, waaraan gewerkt wordt. Helaas hebben lang niet alle docenten gereageerd. Mogen we er nog eens op wijzen dat het idee van een zekere koördinatie en samenwerking alleen goed gerealiseerd kan worden als zoveel mogelijk docenten en studenten meewerken?

Dat zou inhouden:
- doorslagen van skripties inzenden naar I.O. W.O., Tiberdreef 4, Utrecht (t.a.v. J.C. van Bruggen);
- in het nieuwe kursusjaar zo snel mogelijk een briefje sturen naar hetzelfde adres met de titels van de gekozen onderwerpen, zodat enige koördinatie kan ontstaan (zie: Wiskobas-Bulletin nr. 2/3, blz.117).

We nemen nu een aantal onderwerpen op waaraan op enkele P.A.'s is gewerkt tijdens het kursusjaar 71/72. Misschien kunnen anderen erop voortbouwen (we hopen dat de te noemen skripties hier ter inzage komen).

* Het gebruik van logiblokken en colour-factor materiaal in de metode 'Denken en Rekenen' (Malmberg).
* Optellen over de 10. (Remedial teaching aan 2 leerlingen uit een 2e klas).
* Het gebruik van logiblokken in de metode 'Wiskunde voor de basisschool' (Samson).
* Logiblokken.
* Introduktie van de breuken in klas 4.
* De struktuur van het honderd-veld.
* Grafieken op de basisschool.
* De vernieuwing van het rekenonderwijs.
* Een vergelijking tussen de metode 'Rekenen' (Wolters) en de metode 'Denken en Rekenen' (Malmberg).
* Ontwerpen van werkkaarten ter inoefening van de tafels van vermenigvuldiging.
* Optel- en aftrekoefeningen in het getallengebied van 1-20; nadruk op opdrachtkaarten en hun eisen.
* Over schaken, psychologisch en didaktisch.
* Eisen te stellen aan opdrachtkaarten.
* Eisen te stellen aan leermiddelen; inventarisatie van leermiddelen in de handel, vervangende leermiddelen.
* Opdrachten rond verzamelingen in de basisschool.

Natuurlijk zijn er nog veel meer onderwerpen waaraan gewerkt is. We zouden het graag horen! Ook verzoeken om inlichtingen, literatuur, advies, kontakt met studenten van andere P.A.'s, e.d. zijn welkom en zullen zoveel mogelijk worden gehonoreerd.



5

Een, door zijn simpelheid, aantrekkelijk spelletje vonden we in het boekje 'More mathematical puzzles and diversions' door Martin Gardner.
Het spel is door twee mensen te spelen op een gewoon stuk papier. Op dat papier worden punten en cirkels getekend zoals op de afbeelding hieronder te zien is (fig.1).

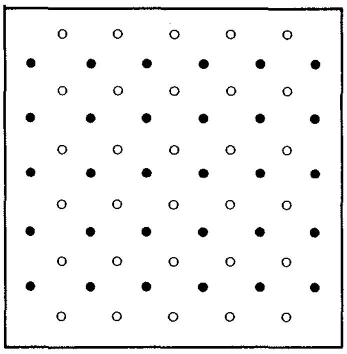


fig. 1

De ene speler moet de punten met elkaar verbinden, de andere speler moet de cirkeltjes (of punten met een andere kleur) verbinden. Ter onderscheiding dienen de spelers met verschillende kleuren te werken. Per beurt mogen twee naast elkaar gelegen punten d.m.v. een vertikale of horizontale lijn verbonden worden. Het doel van de ene speler is een doorlopende lijn te verkrijgen van de linker naar de rechterkant van het veld. De andere speler moet hetzelfde proberen maar nu van boven naar onder.
Niet toegestaan is het dat een lijn van een speler een lijn van zijn tegenstander snijdt. Hieronder een voorbeeld van een dergelijk spel, waarbij de speler die van boven naar onderen speelde, de overwinning behaalde (fig.2).

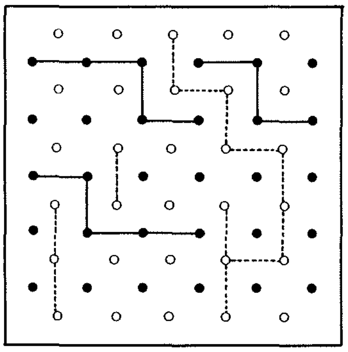


fig. 2

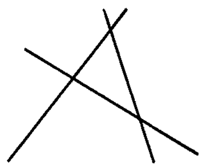
Mocht u het spelletje kinderachtig vinden, dan kunt u het nog altijd doorgeven aan uw leerlingen, die voor deze spelletjes vaak belangstelling èn de tijd vinden.
Zelf kunt u dan proberen uit te zoeken welke strategie de beste is. U mag daarbij bedenken dat reeds bewezen is, dat de speler die begint, altijd een winnende strategie kan ontwikkelen.

een jonge onder basje zoeker

DIK OORT

... EN EEN ZOEN VAN DE ESKIMO

Vader tekent de volgende figuur:



Vader: Zo Henk, hier heb je drie lijnen; die hebben drie snijpunten.

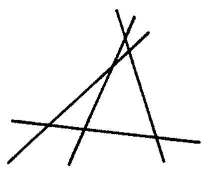
Henk: Ja, maar je kunt ze ook zo tekenen dat er maar één snijpunt is.

Vader: Goed zo, maar we spreken af dat er door één snijpunt slechts twee lijnen gaan; bovendien mogen twee lijnen ook niet evenwijdig lopen.
Wat denk je nu van vier lijnen?

Henk: Die zullen dan wel vier snijpunten hebben.

Vader: Teken 't maar eens!

Henk tekent onderstaande figuur:



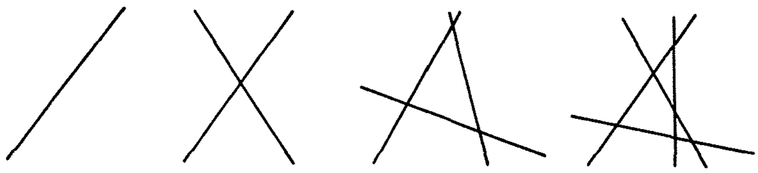
Henk: Ik zie 't al, 't zijn er meer: zes.

Vader: Kun je beredeneren dat het er drie meer zijn dan zoëven?

Henk: Ja, die vierde lijn snijdt de drie lijnen, die er al waren elk in één punt, dus er komen net zoveel punten bij als er al lijnen waren.

Vader: Goed zo, je moet nu eens alle gevallen tekenen, te beginnen met één lijn tot en met vier lijnen.
Daaronder zet je dan het aantal lijnen en weer daaronder het aantal snijpunten.

Met hulp van vader komt Henk tot het volgende overzicht.



lijnen	**1**	**2**	**3**	**4**
snijpunten	**0**	**1**	**3**	**6**

Vader: Heel mooi; en wat is nu het volgende getal op de onderste regel?

Henk: Dan moet je 4 optellen bij 6. Je kunt dus elk volgend getal op de onderste regel krijgen door de vorige twee getallen, die in dezelfde kolom staan, op te tellen. Zo:

$$\binom{1}{0} \searrow \binom{2}{1} \searrow \binom{3}{3} \searrow \binom{4}{6} \searrow 10$$

Dus het aantal snijpunten bij 5 lijnen is 10.

Vader: Juist; het leuke is dat je het volgende getal op nog veel meer manieren kunt afleiden uit de vorige getallen.

Henk: Ik zie niet hoe.

Vader: Daar moet je rustig de tijd voor nemen. Ik zal je nu even helpen. Deel elk onderste getal maar door het daarbovenstaande en zet het antwoord er tussen.

Henk krijgt de volgende tabel:

1	**2**	**3**	**4**
0	$\frac{1}{2}$	**1**	$1\frac{1}{2}$
0	**1**	**3**	**6**

Henk: Wacht, ik zie het al; de uitkomst is steeds $\frac{1}{2}$ meer. Als het zo doorgaat komt er bij 5 lijnen 2 als quotiënt en is het aantal snijpunten dus 10.
Maar waarom dat zo is begrijp ik niet.

Vader: Daarover een andere keer. Toch moet je zelf maar eens naar andere maniertjes zoeken.
Probeer 't ook eens door steeds twee naast elkaar staande snijpunten-aantallen op te tellen.
Maar nu iets anders:
Twee lijnen hebben één...?

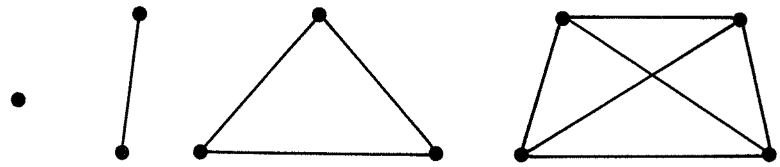
Henk: snijpunt.

Vader: Juist; en twee punten hebben één ...?

Henk: verbindingslijn.

Vader: Mooi, we gaan nu hetzelfde doen, maar verwisselen lijn en punt.
Maak maar weer een overzicht; begin bij één punt en ga door tot en met vier punten; zorg dat drie punten niet op één lijn liggen.

Henk maakt het volgende overzicht.



punten	**1**	**2**	**3**	**4**
verbindingslijnen	**0**	**1**	**3**	**6**

Henk: Dat is leuk; je krijgt precies dezelfde getallen.

Vader: Precies, en kun je nu ook verklaren dat vier punten drie verbindingslijnen meer hebben dan drie punten?

Henk: Ja, dat gaat ongeveer net zo als straks. Als er een vierde punt bijkomt, komen dié verbindingslijnen er bij die je van het vierde punt kunt trekken naar de drie punten die er al stonden.

Vader: En nu iets heel anders, of misschien toch hetzelfde.
Er zijn vier eskimo's. Elke twee eskimo's geven elkaar één eskimozoen d.w.z.: ze wrijven hun neuzen tegen elkaar. Hoeveel zoenen zijn dit in totaal?

Henk: Elke eskimo geeft drie zoenen. Er zijn vier eskimo's: 4 x 3 = 12.

Vader: Dus 12 zoenen in totaal?

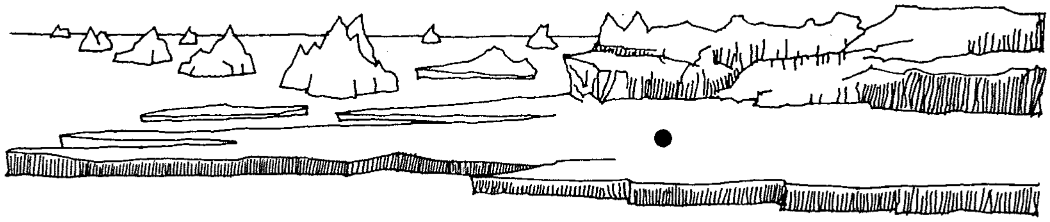
Henk: O, nee, ik vergis me; bij elke zoen zijn twee eskimo's betrokken. Ik heb elke zoen dus tweemaal geteld. Het antwoord is dus de helft van twaalf: zes!

Vader: En wat heeft dat nu te maken met wat we daarvoor gedaan hebben.

Henk: O, ik zie 't al:

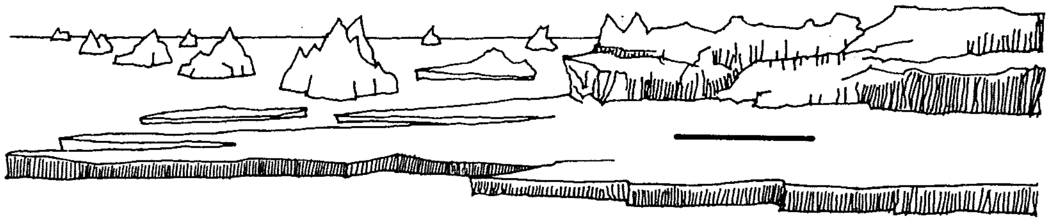
4 eskimo's	**6** zoenen
4 lijnen	**6** snijpunten
4 punten	**6** verbindingslijnen

Je kunt een eskimo voorstellen door een punt en dan is een zoen een verbindingslijn.



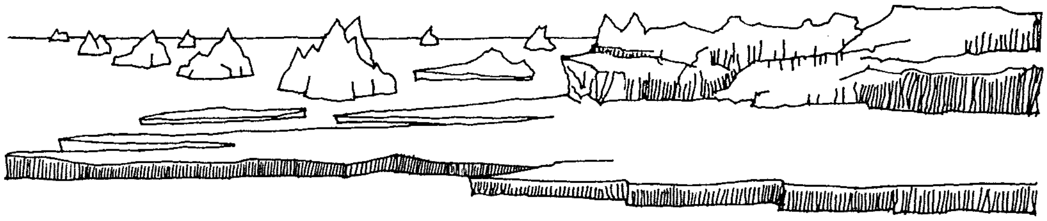
'je kunt een eskimo voorstellen als een punt'

Vader: Je kunt ook zeggen dat je een lijn kunt voorstellen door een eskimo en dan wordt een snijpunt een ...?



'je kunt een eskimo voorstellen als een lijn'

Henk: eskimozoen.



'je kunt je geen eskimo voorstellen'

Vader: Dat ging goed, maar nu lijkt het me bedtijd voor je.

Henk: Dan ben ik nu een punt en zal ik eerst even m'n verbindingslijnen trekken met de andere punten in huis.

INHOUD

variabel blok

4 BREUKEN IN DE SCHOOLPRAKTIJK

MEDEWERKERS AAN DIT BLOK
Jaap Boerema, Jan van de Brink, Wil Bronnenberg, Jille Eilander, Otto van Engelen, Louis Gilissen, Fred Goffree, Hans ter Heege, Ger Jansen, Huub Jansen, Rob de Jong, Daan Karman, Henk Meyer, Dik Oort, Piet Scholten, Leen Streefland, Adri Treffers

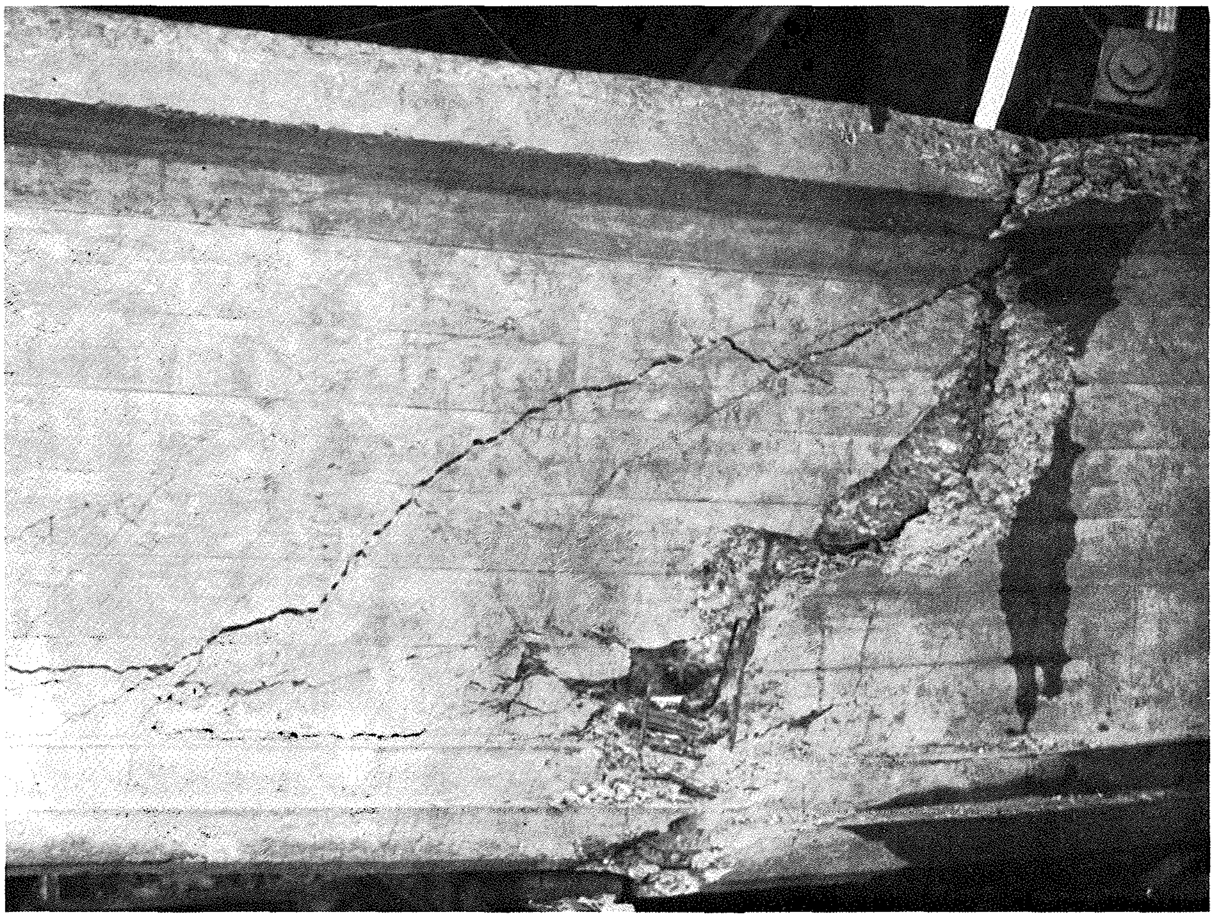


Foto ontleend aan fotoarchief tijdschrift CEMENT.

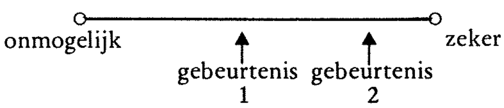
4.2 TOEVALLIG OOK NOG EENS EEN KEER BREUKEN

Waarschijnlijk heeft deze titel bepaalde herinneringen bij u opgeroepen. Zeer waarschijnlijk denkt u in dat geval aan een verloren gegaan T.V.-programma. Hoogstwaarschijnlijk herinnert u zich niet meer alle – omstreden – medewerkers. Het is niet onwaarschijnlijk dat u met enig ongenoegen aan dit alles herinnerd wordt. Hoogst onwaarschijnlijk koestert u nog persoonlijke wrok tegen een bekende nederlandse presentatrice, die ook aan dat programma medewerking verleende.

Onze taal heeft de beschikking over een groot aantal woorden waarmee de waarschijnlijkheid van het optreden van een of andere gebeurtenis wordt aangegeven. De eerste gebeurtenis, die in het bovenstaande stukje proza wordt genoemd, is 'een opkomende herinnering'. Deze vindt bij een bepaalde lezer van dit Bulletin wel of niet plaats na het zien van het opschrift. Dit hangt af van diverse faktoren, zoals de leeftijd, belangstelling, omstandigheden ten tijde van de betreffende uitzendingen, e.d. Van deze faktoren weet ik niets af.
Als ik een abonnee uit de adressograaf op goed geluk pak, is het al dan niet 'optreden van de herinnering' bij deze lezer een toevallige gebeurtenis. Ik zei het al, de gebeurtenis is waarschijnlijk. Dit betekent dat hij voor mij niet **zeker**, maar ook niet **onmogelijk** is.
't Is iets ertussen in.

Als er een herinnering is bij het lezen van de titel, dan is de kans op de tweede gebeurtenis 'zeer waarschijnlijk'. Als u zich iets herinnerde, dan moet het zeer waarschijnlijk wel dat T.V.-programma geweest zijn. Het is niet zeker, zeker niet onmogelijk, het is zekerder dan waarschijnlijk, het is zeer waarschijnlijk.

Terwijl ik dit woordenspel noteer heb ik de neiging een en ander toe te lichten met een plaatje. Ik teken een 'waarschijnlijkheidsschaal', lopend van onmogelijk naar zeker, en geef daarop mijn gebeurtenissen aan:



Het lijkt er op dat ik de genoemde gebeurtenissen nu alleen maar in volgorde van hun kans (op optreden) heb geplaatst.
Van grootste tot kleinste kans krijg je dan:

1 niet meer herinneren van alle medewerkers;
2 denken aan het bedoelde T.V.-programma;
3 een herinnering wordt opgeroepen;
4 gevoelens van ongenoegen komen op;
5 u koestert nog persoonlijke wrok.

In het aanvankelijk wiskundeonderwijs komen we ditzelfde tegen.

Kinderen krijgen verzamelingen blokjes, centen, speelgoeddieren, plaatjes, snoepjes e.d. Dat zijn er **meer** dan die. Hier heb je **evenveel** als daar...
Verzamelingen worden op een rijtje gezet onder het kriterium: **is minder dan**.
Dezelfde kinderen krijgen een verzameling van ongelijke stokjes, stroken, rietjes of iets dergelijks. De ene is **langer dan** de andere, die twee zijn **even lang**. Ze worden op een rijtje gelegd onder de voorwaarde: de voorgaande **is korter dan** de opvolger.

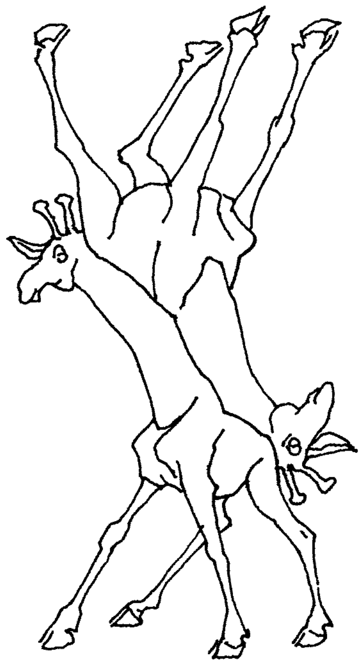
In beide gevallen is het leerproces met deze aktiviteiten niet beëindigd. Bij de verzamelingetjes komen (kardinaal)-getallen, bij de stokjes (meet)-getallen. Deze wiskundige voortzetting heeft ertoe geleid dat begrippen als veel, weinig, lang en kort, die in absolute zin nietszeggend zijn, gekwantificeerd worden.
Over de pogingen om eveneens gebroken

glaswerk, stukken gescheurd papier, punten van een taart of delen van een pannekoek te kwantificeren (van een getal te voorzien), is in deze aflevering al het een en ander gezegd. De hiervoor benodigde getallen heten tenslotte niet voor niets *breuken*.
Terug naar onze 'geserieerde' gebeurtenissen. Ze staan in volgorde van hun kansen. Kunnen we nu ook een poging doen om deze kansen te kwantificeren?

Ik houd een enquête. Eén voor één vraag ik aan alle abonnees:
Toevallig ook nog eens een keer breuken! Waaraan denkt u nu...?
Van de 10.000 abonnees blijken er 9.567 direkt aan het T.V.-programma te denken. Zo, dat weet ik alweer.

Dan schrijf ik dit artikel en hoop dat Rob de Jong het wil plaatsen. Bij het verzenden van het tijdschrift zet ik op één eksemplaar heel onopvallend een kruisje. Ik weet niet welke abonnee dit nummer ontvangt. Toevallig bent **u** het, kijk maar: ik zette het kruisje boven aan bij de titel. De kans dat deze abonnee (u!) bij het lezen van de titel aan het T.V.-programma werd herinnerd is 9567 op de 10.000.
Ik geef die kans aan met een breuk: 0,9567.

Zo is het toevallig ook nog eens een keer!



4.3 BREUKEN IN DE LAGERE LEERJAREN

Bij het rekenonderwijs in de lagere leerjaren zullen de breuken een bescheiden plaats innemen; het gaat dan voornamelijk om het taalaspekt. Een kind moet een bepaald gedeelte van een geheel en van een hoeveelheid kunnen benoemen. Tenminste, voor zover dit in verband met de omgeving van het kind en het verdere onderwijs nodig is.

Daarnaast zou het zinvol kunnen zijn om de wiskundige notatie van de voor het kind belangrijke breuken aan te leren[1]). Bij dit onderwijs in breuken in de lagere klassen gaan we uit van de dagelijkse omgeving van het kind en ruimen we een belangrijke plaats in voor het handelend bezig-zijn. Om aan deze beide eisen te voldoen maken we gebruik van een **fysisch-didaktisch model**, dat wil zeggen: van materiaal waarmee we een bepaalde situatie, die we willen bestuderen, kunnen voorstellen en wel zodanig dat alleen de voor het probleem belangrijke aspekten naar voren komen. De vormgeving van zo'n model geschiedt veelal vanuit didaktische kriteria.

Een voorbeeld:
We willen met kinderen van een tweede klas bespreken: het in drieën verdelen, het begrip 'een derde deel van', 3 derde delen vormen samen één hele. We hangen deze les op aan een verhaal over vader die een hek moet maken. Hij heeft de beschikking over 2 even lange planken. Het hek moet even lang zijn als die planken en moet er als volgt uit zien (fig. 1).

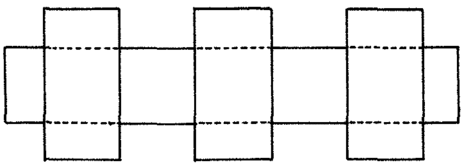


fig.1

Hij zal dus één van de planken in drie grote planken moeten zagen. Het materiaal dat we hierbij gebruiken is het *Cuisenaire-materiaal.* Elk kind krijgt 2 stokjes van 9 en enige (minstens 3) stokjes van 3.
Het zagen van een plank in 3 gelijke stukken wordt gesimuleerd door het inwisselen van één staafje van 9 voor 3 staafjes van 3.

De Cuisenaire-staafjes, samen met de aktiviteiten die de kinderen ermee moeten ontplooien vormen het fysisch-didaktisch model. U ziet ook dat dit fysisch-didaktisch model staat tussen de abstrakte begrippen die we de kinderen willen leren en een situatie uit de dagelijkse omgeving van het kind.

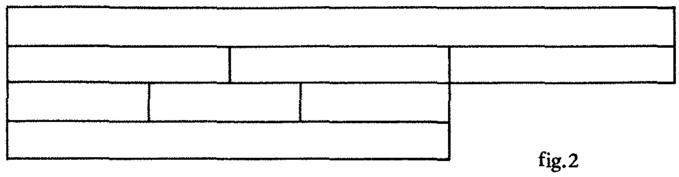


fig.2

Met behulp van het Cuisenaire-materiaal kunnen we kinderen laten ervaren dat het derde deel van een geheel slechts betekenis heeft in verband met dat geheel.
Om dit aan te tonen zouden we bijvoorbeeld een staafje van 6 in drie gelijke delen kunnen verdelen en vervolgens laten zien dat deze *derde delen* niet even groot zijn als de delen die we kregen van het staafje van 9.

Nu zijn de Cuisinaire-staafjes niet het enige materiaal dat we bij het breuken-onderwijs kunnen gebruiken, daarvoor is het te eenzijdig.

Er zijn vele andere dingen dan planken en staven waar gedeelten van genomen kunnen worden.

Een volgend voorbeeld:
We willen de kinderen van de derde klas laten

[1]) Zie hiervoor het artikel van Adri Treffers in aflevering 4 (pag. 263 en v.)

zien dat een derde van iets kleiner/minder is dan de helft van datzelfde iets.
We verplaatsen ons naar de bakker die ronde taarten maakt. Niet iedereen wil een hele taart kopen. Sommige mensen hebben genoeg aan een halve, anderen aan een derde deel van de taart. De bakker maakt nu een aantal van die taarten allemaal precies even groot. Een gedeelte laat hij heel. Een ander gedeelte snijdt hij doormidden en de resterende taarten verdeelt hij elk in drie gelijke stukken.

Waarvoor zou je nu meer moeten betalen voor een halve of voor een derde taart?

Het materiaal dat we gebruiken kan bestaan uit zelf-gefabriceerde papieren rondjes, waar de gedeelten al met potloodlijntjes op zijn aangegeven.
Het fysisch-didaktisch model bestaat hier uit het materiaal, de blaadjes en het knippen van die blaadjes.

Dit zou nog uitgebreid kunnen worden met het vergelijken van derde en vierde delen. Ook zou het te overwegen zijn ditzelfde te doen met rechthoekige taarten van dezelfde samenstelling.

De vraag of een derde deel van de ronde taart goedkoper is dan de helft van de rechthoekige taart kan niet zonder meer beantwoord worden.

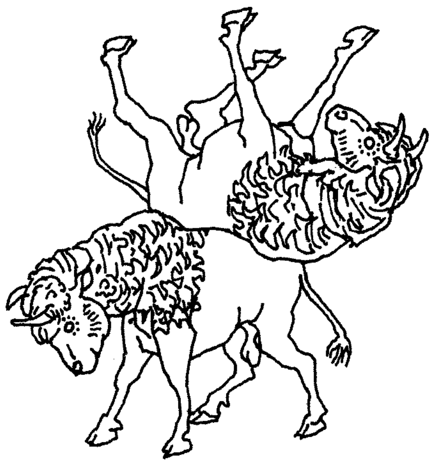
We hebben in het voorgaande willen beweren dat we – als we iets aan breuken willen doen in de laagste leerjaren – het beste zo veel mogelijk van de dagelijkse omgeving van het kind kunnen uitgaan en dat we de belangrijke aspekten in de klas moeten halen in de vorm van voor het onderwerp geeigend materiaal.

In zijn artikel in de vorige aflevering[2]) schrijft Jan Nieland: 'In de praktijk van het leerproces horen denken en handelen bij elkaar... (denken met de handen door gebruik van leermiddelen)'.

Dat 'denken met de handen door gebruik van leermiddelen' zal de brug moeten zijn tussen de wiskunde (in dit geval: het systeem van de gebroken getallen) en de werkelijkheid, de omgeving van het kind.

---

[2]) Wiskobas-Bulletin 4, (pag. 324 en v.)



4.4 DEEL-GEHEEL RELATIE

LESSUGGESTIES VOOR BREUKEN IN DE LAGERE LEERJAREN

INLEIDING

Gelet op situaties, waarin gebroken getallen voorkomen, zou men de volgende verschijningsvormen van de breuk kunnen onderscheiden:

- de breuk als verhouding
- de breuk als operator
- de breuk als element van een verzameling getallen, waarbinnen bepaalde bewerkingen (operaties) gelden.

Aan de eerste twee aspekten ligt een deel-geheel relatie ten grondslag. Deze relatie biedt de mogelijkheid eigenschappen van en bewerkingen met de breuken als systeem te konkretiseren, bij het werken met de breuk als verhouding en de breuk als operator.

De deel-geheel relatie ligt echter ook ten grondslag aan andere leerstofonderdelen, zoals de ontwikkeling van het getalbegrip, getalstrukturering en het meten.

Door deze fundamentele overeenkomst is het mogelijk, om problemen, die in het traditionele rekenen geïsoleerd aan de orde kwamen en vaak in verschillende leerjaren waren ondergebracht, van het begin af aan met elkaar in verband te brengen.

De oefeningen in dit artikel zijn bedoeld als een introduktie van gebroken getallen in de eerste klassen van de basisschool, maar zij passen tevens in een opbouw van de getalontwikkeling (o.a. met het materiaal van Cuisenaire) en zij vormen een eerste kennismaking met het vergelijken van grootheden naar oppervlakte.

DE BEGINSITUATIE

Ieder kind heeft reeds veel ervaringen opgedaan ten aanzien van de 'breuk als verhouding' door middel van veelsoortige *Original-Begegnungen* in zijn onmiddellijke omgeving. Bv. samen met je vriendje één appel delen, één koekje, één reep chocolade enz. Deze situaties kunnen als uitgangspunt dienen bij het werken met de breuk als verhouding.
In de eerste klas leert de leerling verder een hoeveelheid op verschillende wijzen te struktureren, eventueel met behulp van diverse materialen.
Deze situatie kan als uitgangspunt dienen bij het werken met de breuk als operator.

DOELSTELLINGEN

Bij het kind de ervaring verruimen van de 'deel-geheel relatie' door middel van:

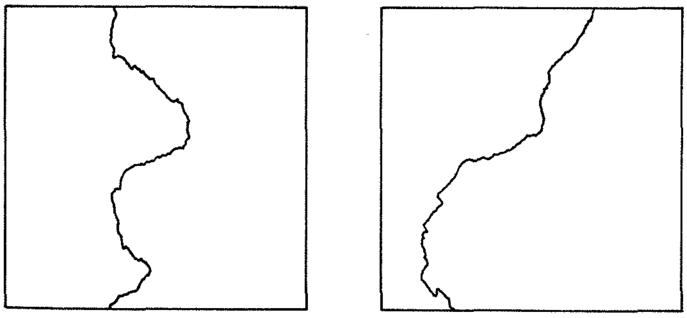
- de begrippen groter en kleiner dan
- het begrip 'even groot als',
- de begrippen 'meer en minder dan',
- het begrip 'evenveel als'.

ONDERWIJSLEERSITUATIES

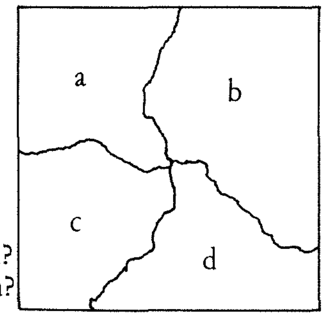
Met behulp van in de klas voorhanden materiaal leren de kinderen individueel en in klein groepsverband, oplossingen te zoeken in meerzijdige probleemsituaties, waarin hoegrootheden (hoeveelheden) vergeleken en geordend moeten worden.
Door deze empirische eksploratie komen zij tot het struktureel leren verdelen van hoegrootheden en hoeveelheden om vervolgens de gestruktureerde delen te leren ordenen door middel van vergelijking.

1e Fase:
Uitbreiding van de kinderlijke ervaring van de deel-geheel relatie.
Benodigd materiaal:
Oude tijdschriften.
Aktiviteiten:
- De leerlingen knippen een overzichtelijke en niet te kleine foto uit een tijdschrift, in stukken.
- Deze stukken worden door elkaar gemengd en aan een medeleerling gegeven (oversteken!).
- De puzzel wordt in elkaar gezet.
- Samen nagaan hoe men het heeft gevonden:
  - beginnen met de kanten,
  - beginnen met de gemakkelijk herkenbare details enz.

2e Fase:
Konkretisering van de begrippen 'groter dan' en 'kleiner dan'.
Benodigd materiaal:
Vouwblaadjes.
Aktiviteiten:
- Scheuren van een vouwblaadje in twee willekeurige stukken.
  - Welk is het grootste, het kleinste?
  - Manieren ontdekken om zo goed mogelijk te kunnen vergelijken (schatten, op elkaar leggen).



- De twee stukken nogmaals scheuren.
  - Ordenen naar grootte: welk is het grootste, het kleinste enz.
  - Wat is groter?
    a Het grootste en het op een na grootste bij elkaar of het kleinste en het op één na kleinste bij elkaar?
    b De stukken a en c samen of b en c samen?
    c De stukken a en d samen of b en c samen?



- Scheuren van een vouwblaadje in 6 stukken, 8 stukken.
  - Ordenen naar grootte van de stukken.

3e Fase:

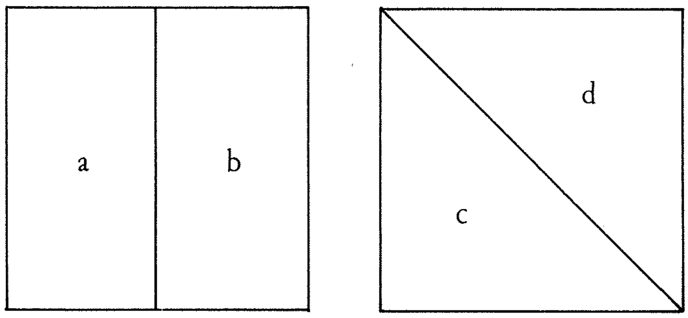
Konkretisering van het begrip 'even groot als'.

Benodigd materiaal:

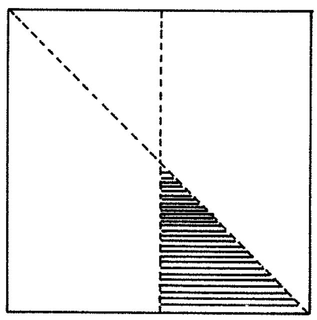
Vouwblaadjes, schaar, plaksel.

Aktiviteiten:

- Deel een vouwblaadje precies middendoor.
- Deel een vouwblaadje précies middendoor, maar nu op een andere wijze.



- Welk stuk is groter: a of b
  c of d
  a of c?
- Zelf laten ontdekken en kontroleren door knippen, bedekken en plakken.



4e Fase:

Konkretisering van het begrip 'even veel als'.

Benodigd materiaal:

Kastanjes, knikkers, stokjes, knopen, enz.

Aktiviteiten:

- Verdeel deze kastanjes (enz.) in twee hoopjes zó dat elk hoopje er evenveel bevat.
- Hoe heb je dat precies gedaan?
  – Intuïtief; gelet op Gestalt van hoeveelheid.
  – Via één-éénduidige relatie.

Uit de 3e en 4e fase resulteert de invoering van 'de helft' als verhouding.

5e Fase:

Ontdekking door de leerlingen van technieken om de helft te vinden van verschillende hoegrootheden. De kinderen moeten leren zich te behelpen met de middelen, die er zijn.

Aktiviteiten:

- Hoe vinden wij de helft van een touw, een potlood, een lat?
  Mogelijkheden: schatten, afpassen, vouwen, evenwicht.
- Hoe vinden wij de helft van de lengte van een boek, de breedte van een bank, de breedte van het bord?
- Hoe vinden wij de helft van de lengte van de klas?
  Mogelijkheden: afpassen met de voeten, een stuk touw gebruiken, een meetlat.

6e Fase:

De helft is lang niet altijd gemakkelijk vast te stellen. Meerdere faktoren kunnen meespelen: lengte-gewicht. Vaak kan 'de helft' alleen benaderd worden.

Aktiviteiten:

- Wat is de helft van een koekje?
- Wat is de helft van een appel?
- Wat is de helft van een aardappel?
- Wat is de helft van een vouwblaadje?

De noodzaak wordt ervaren om hoegrootheden te struktureren naar vorm en grootte als hulp bij het verdelen.

7e Fase:

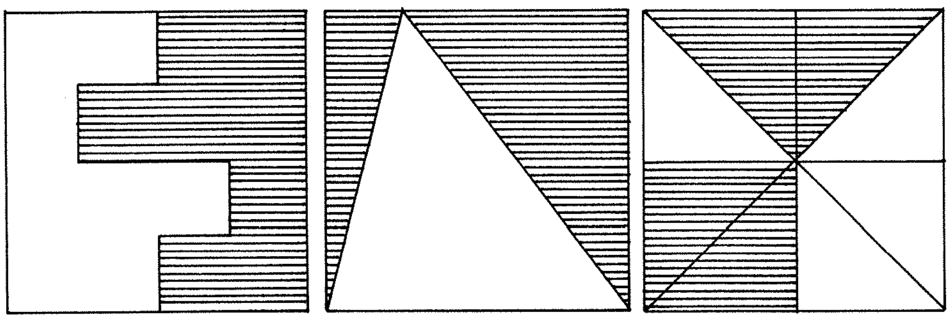
De helft is niet gebonden aan een bepaalde vorm.

Benodigd materiaal:

Vouwblaadjes.

Aktiviteiten:

- Hoe kunnen wij 'gekke' helften maken?



- Laten aantonen, waarom het de helft is.
- Resultaten ophangen op prikbord: vele verschillende 'helften'.
- Helft laten ervaren als konstantie.

8e Fase:

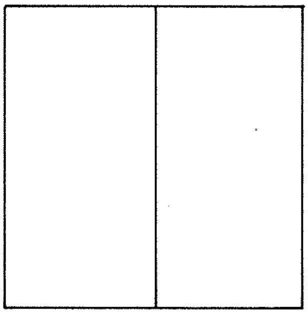
Het gestruktureerd verdelen van hoegrootheden en het vergelijken van de stukken onderling.

Benodigd materiaal:

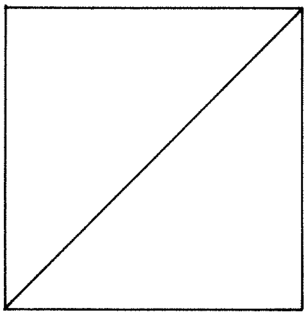
Vouwblaadjes van *verschillende* kleuren.

Aktiviteiten:

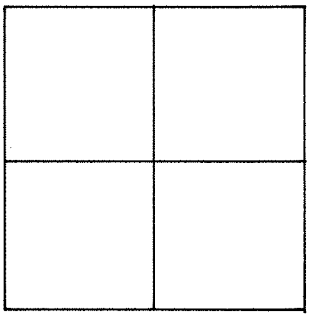
- Verdeel een *geel* blaadje in 2 gelijke delen.



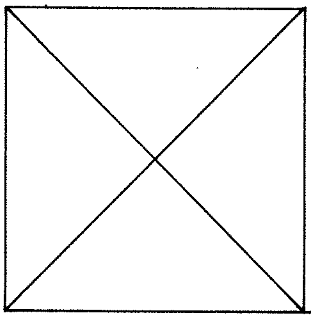
of



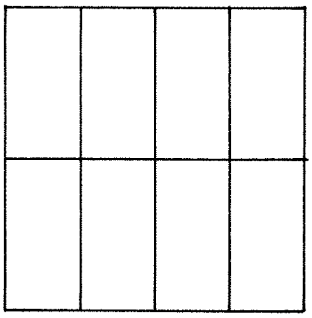
- Verdeel een *rood* blaadje in 4 gelijke delen.



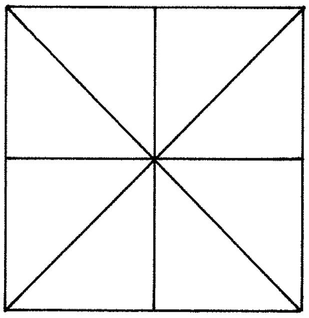
of



- Verdeel een *blauw* blaadje in 8 gelijke delen.



of



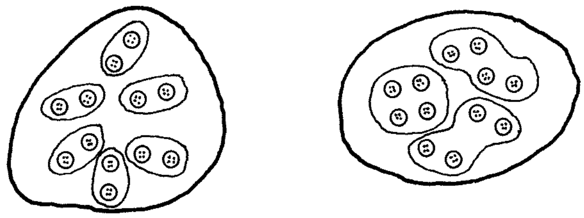
- Wat is groter?
  1 rood of 1 geel
  1 rood of 3 blauw
  2 rood en 2 blauw of 5 blauw
  1 geel en 1 rood of 7 blauw
  Kontrôle door bedekken.

– Zoek stukken, die even groot zijn als: 1 geel, 2 rood, 4 blauw.

- Zoek de oplossing:
  1 geel en ... rood = 1 heel blaadje.
  1 geel en ... blauw = 1 heel blaadje.
  1 geel en 1 rood en ... bl. = 1 heel blaadje.
- Invoering andere benaming:
  1 geel stuk: spreek uit 1 van de 2 stukken.
  1 rood stuk: spreek uit 1 van de 4 stukken.
  1 blauw stuk: spreek uit 1 van de 8 stukken.
  – Wat is groter?
  1 van de 2 of 3 van de 4.
  2 van de 4 of 3 van de 8.

9e Fase:
Breuk als operator bij gestruktureerde hoeveelheid.
Benodigd materiaal:
Knopen, kastanjes enz.
Aktiviteiten:

- Verdeel 12 knopen in groepjes van 2; van 4.



- Hoeveel groepjes van 2 krijg je van 12?
  Hoeveel knopen in 1 van de 6 groepjes van 12?
  Hoeveel knopen in 2 van de 6 groepjes van 12?
  Hoeveel knopen in 3 van de 6 groepjes van 12?
  Hoeveel knopen in 4 van de 6 groepjes van 12?
- Hoeveel groepjes van 4 krijg je van 12?
  Hoeveel knopen in 1 van de 3 groepjes van 12?
  Hoeveel knopen in 2 van de 3 groepjes van 12?
- Waar zit meer in?
  In 1 van de 6 groepjes of in 1 van de 3 groepjes?
  In 3 van de 6 groepjes of in 1 van de 3 groepjes?
- Waar zit even veel in?
  In 2 van de 6 groepjes en in ... van de 3 groepjes.
  In 4 van de 6 groepjes en in ... van de 3 groepjes.
  In 6 van de 6 groepjes en in ... van de 3 groepjes.
- Andere schrijfwijze en benaming:
  2 van de 6 groepjes van 12: schrijf: $\frac{2}{6}$ deel van 12.
  1 van de 3 groepjes van 12: schrijf: $\frac{1}{3}$ deel van 12.
- Bepaal: $\frac{2}{6}$ deel van 12.
  $\frac{2}{3}$ deel van 12.

Deze oefeningen zijn ook te konkretiseren met behulp van het materiaal van Cuisenaire.

4.5 BREUKEN IN HET STADSPLAN

WERKBLADEN VOOR DE LEERLINGEN

INTRODUKTIE OP DE WERKBLADEN

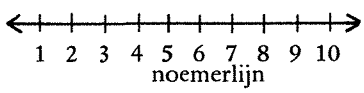
1 Inleiding
Bij het samenstellen van werkbladen over *Breuken in het stadsplan* is uitgegaan van de volgende beginsituatie:

- De leerlingen hebben op konkreet nivo uitvoerig kennisgemaakt met de breuken.
- De schrijfwijze van breuken, het vereenvoudigen, het optellen en aftrekken van breuken met verschillende noemers (in eenvoudige gevallen) zijn aan de orde geweest.

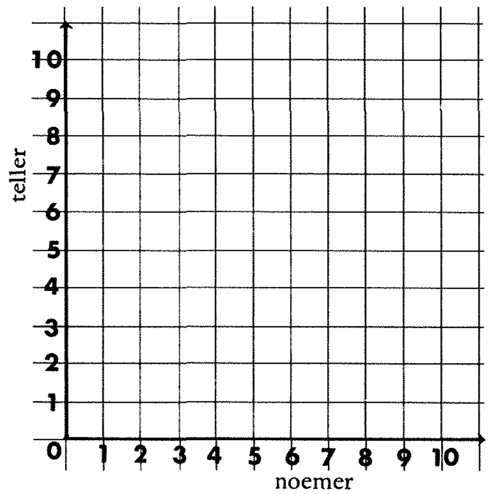
De werkbladen dienen inhoudelijk dus gezien te worden als herhaling en verdieping van hetgeen aan breukenkennis bij de leerlingen aanwezig is.

2 Motivering van de gevolgde strategie
Het plausibel maken van het gebruik van het stadsplan als visualiseringsmiddel voor breuken is geen eenvoudige zaak, te meer daar iedere aanzet vanuit een 'kant-en-klaar' stadsplan gekunsteld aandoet.
Om de keuze, ook voor de leerlingen, te motiveren, is gekozen voor de samenstelling van een *breukenzoekplaat*.

Uitgaande van het breukbegrip als gegeven wordt deze zoekplaat opgebouwd. Eerst wordt de 'noemerlijn' geïntroduceerd:

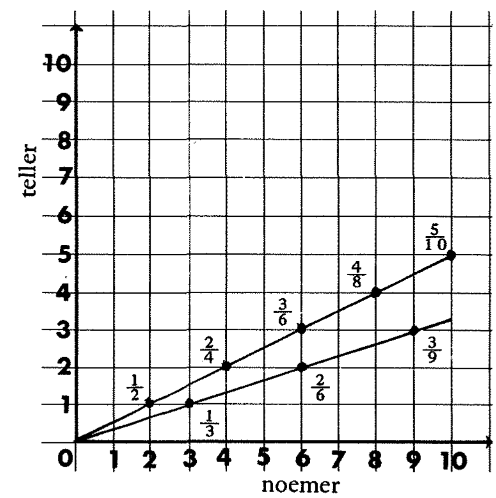


Het ontbreken van de 0 op deze lijn geeft direkt al aanleiding tot enige lastige opdrachten. Het is mogelijk, en misschien zelfs wenselijk om over het ontbreken van de 0 met geen woord te reppen en pas achteraf in een toegift (in de vorm van een ekstra werkblad) op deze kwestie in te gaan.
Vervolgens wordt de 'tellerlijn' geïntroduceerd



De breukenzoekplaat is gereed en de leerlingen kunnen overgaan tot het *verstoppen* van de eerste breuk. Hierna kan de relatie met het stadsplan ontdekt worden.
'Het gaat net zo als bij het stadsplan! '
De 'zoekplaat-idee' speelt verder een belangrijke rol. Het verstoppen van de breuken leidt tot allerlei ontdekkingen.
Voor wat deze inleiding betreft komen we vanzelf tot:

3 Wat voor wiskunde zit er achter?
Uitgaande van het volgende stadsplan zullen we één en ander toelichten:



De stippen voor de breuken $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$, enz. liggen op één lijn, de zg. *half-lijn*.
Zo liggen de stippen voor de breuken $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}$ etc. op de *één-derde-lijn*. Twee breuken waarvoor de stippen op *een dergelijke lijn* liggen noemen we equivalent (gelijkwaardig).

Elke lijn geeft dus een klasse van equivalente breuken aan. Hierbij dient overigens wèl aangetekend te worden, dat het dan gaat om lijnen door (0,0). In dit verband kunnen we verwijzen naar werkblad 4, waar in een drietal opdrachten duidelijk moet worden, dat ook stippen voor niet-equivalente breuken op een lijn (kunnen) liggen, nl. voor bv. de breuken $\frac{1}{2}, \frac{2}{6}$ en $\frac{3}{10}$, voor breuken met gelijke noemers of gelijke tellers.

Het vereenvoudigen van breuken geschiedt op de volgende wijze:

> 'Verstop $\frac{4}{8}$ in het stadsplan. Op welke lijn komt de stip? In plaats van $\frac{4}{8}$ kun je dus ook de breuk $\boxed{-}$ schrijven. Noem nog eens twee breuken, die dezelfde waarde als $\frac{4}{8}$ hebben, etc.'

Moet de volgende opgave gemaakt worden: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$ ...., dan wordt op de half-lijn en de één-derde-lijn gezocht naar stippen voor breuken, die precies boven elkaar liggen.[1])
Wiskundig gezien komt het sommeren van ongelijknamige breuken er dus op neer, dat uit de equivalentieklassen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$, die representanten gekozen worden, welke dezelfde (kleinste) noemer hebben, i.c. $\frac{3}{6}$ en $\frac{2}{6}$, waarna tot optelling kan worden overgegaan.

Tenslotte geeft het stadsplan ook nog aanleiding tot het ordenen van breuken.

Kort samengevat kan gesteld worden, dat bij *Breuken in het stadsplan* aan de orde komen:

- Waarde van een breuk.
- Equivalentieklassen van breuken.
- Vereenvoudigen van breuken.
- Gelijknamig maken van breuken.

Bij het onderzoek naar het weglaten van de 0 bij de *noemerlijn* speelt het begrip 'breuk als deling' een rol.

4 Slotopmerkingen

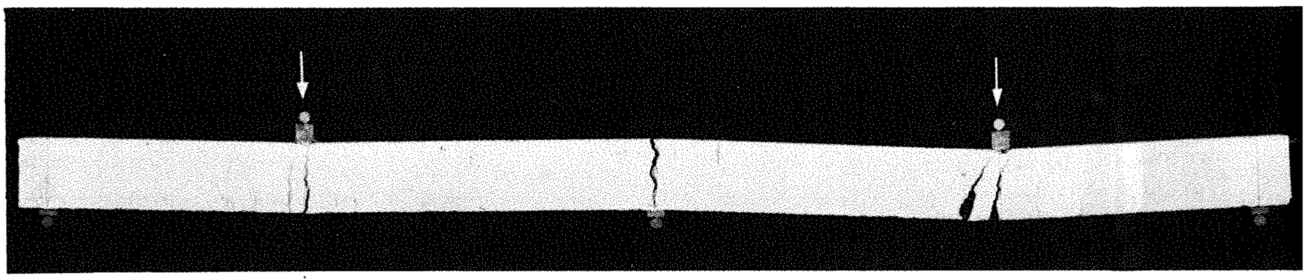
We beperkten ons bij *Breuken in het stadsplan* tot de roosterpunten. Op de halflijn bv., gaat het alleen om de stippen voor $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$ etc. Zouden we ook andere punten van de halflijn betekenis willen geven, dan leidt dit tot uitdrukkingen als $\frac{1\frac{1}{2}}{3}$, $\frac{1\frac{3}{4}}{3\frac{1}{2}}$, etc. hetgeen volkomen buiten het kader van de nu volgende werkbladen valt.

Hierover nog één opmerking:
Indien u de werkbladen met uw leerlingen wilt gaan doorwerken, is het raadzaam ieder werkblad te doen volgen door een bespreking, waarin dan tevens soortgelijke probleempjes ter sprake komen. De inhoud van de werkbladen kan zeker niet uitputtend genoemd worden. De bladen zijn bedoeld als voorbeeld en behoeven op diverse punten ekstra oefening.
Behalve tijdens de klasse- of leergesprekken, waarin ook telkens de bespreking is opgenomen, zou u zelf enige werkbladen met ekstra oefenstof kunnen ontwerpen en deze inlassen op die momenten, welke u daartoe geschikt acht. De bladen lenen zich zowel tot individuele verwerking, als verwerking in kleine groepjes (2 à 3 leerlingen).

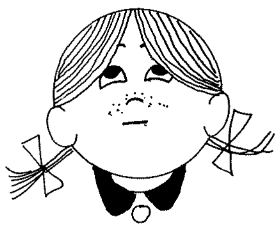
---

[1]) De leerlingen hebben inmiddels ontdekt, dat breuken met dezelfde noemer stippen hebben, die in een – vertikale – lijn liggen.

Foto ontleend aan fotoarchief tijdschrift CEMENT.



werkblad 1



a Lees je wel eens in een kindertijdschrift of bekijk je de kinderrubriek in een krant wel eens? Vast en zeker. Je bent dan ongetwijfeld wel eens een 'Zoekplaatje' tegengekomen, zoals bv.

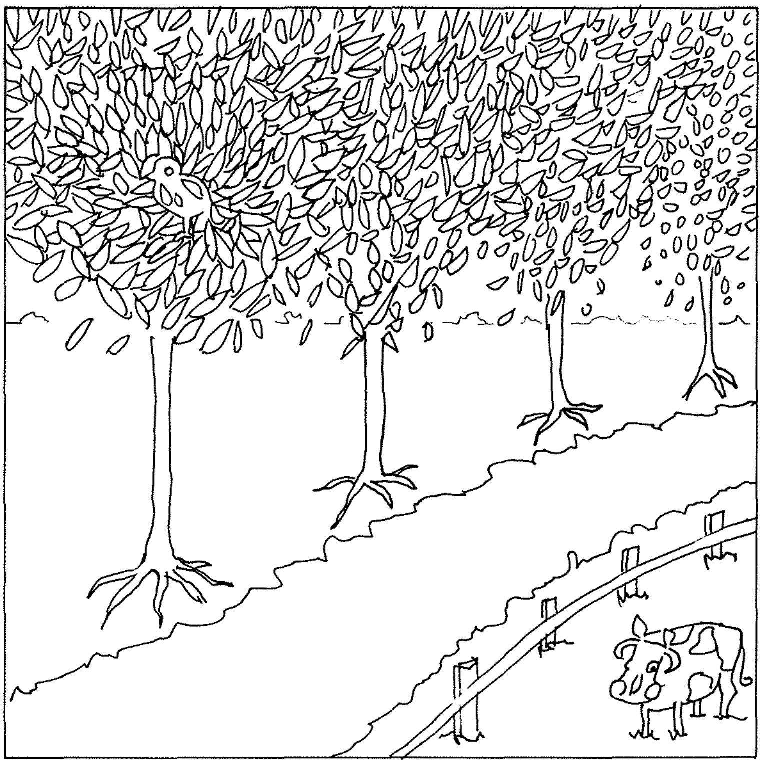


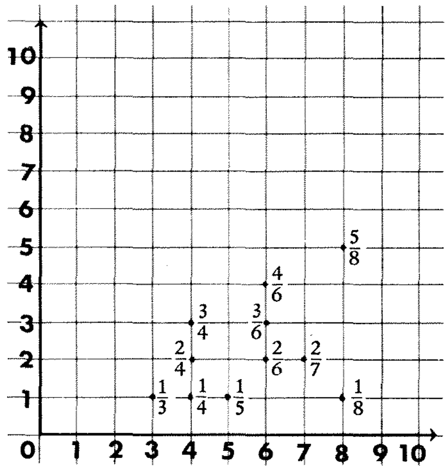
fig.1

WAAR ZIT DE VOGEL?

b Geef de vogel een kleurtje, zodat hij beter zichtbaar wordt.

Nog een zoekplaatje:

WAAR ZIT DE $\frac{1}{2}$?



▶ **c** Kleur de stippen waarbij een breuk is geschreven die gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Kleur nog meer stippen waarbij je een breuk *kunt* schrijven die gelijk is aan $\frac{1}{2}$.
We gaan nu samen dit rekenzoekplaatje onderzoeken. Als je goed oplet en *alle* opdrachten nauwkeurig volgt, zul je ontdekken, dat er ontzettend veel in zit.

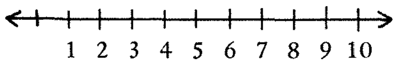
Daar gaan we dan:

▶ **d** Schrijf eens een breuk op, die *groter is* dan $\frac{1}{2}$ en *kleiner dan* 1. [—]

Het getalletje *boven* de breukstreep heet de [ ]

Het getalletje *onder* de breukstreep heet de [ ]

▶ **e** Zoals de tekenaar de vogel in het zoekplaatje verstopte, zo gaan wij nu in onze rekenzoekplaat breuken verstoppen. Daarvoor hebben we de volgende lijn nodig:



Deze lijn noemen we: de *noemerlijn*!

▶ **f** Welk getal zou eigenlijk bij het beginpunt van de noemerlijn moeten staan? [ ]

▶ **g** Dit getal is *met opzet* weggelaten. Weet je ook waarom? Schrijf het maar op.

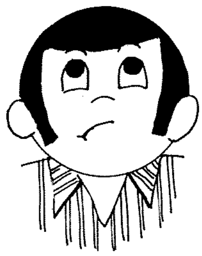
[ ]

▶ **h** Opdracht **g** is wel wat moeilijk. Misschien helpt dit: Schrijf eens een breuk op met het getalletje van opdracht **f** in de *noemer* (dat is *onder* de breukstreep): [—]

▶ **i** Wat zeg je van die 'breuk'? Schrijf het maar op:

[ ]

werkblad 2



In werkblad 1 hadden we een lijn getekend. Die lijn noemden we de *noemerlijn*. Een breuk heeft *boven* de breukstreep ook nog een getalletje: *de teller*.
We hebben, om breuken in onze rekenzoekplaat te plaatsen, ook nog een *tellerlijn* nodig.
Die tekenen we aan de noemerlijn vast, zo:

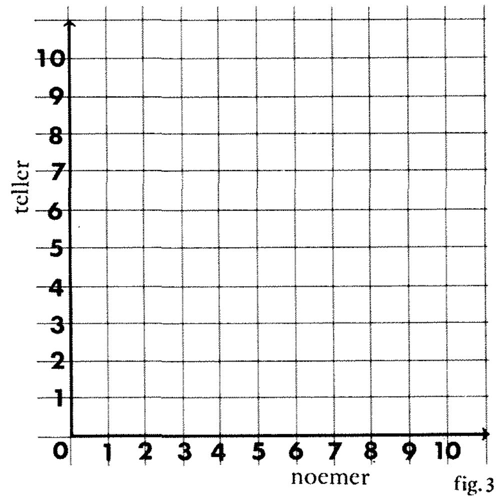


fig. 3

▶ **a** Bij de tellerlijn staat bij het beginpunt wel een 0. Waarom kan het daar wèl en bij de noemerlijn niet?
Schrijf het maar op:

▶ **b** Deze vraag was lastig hè? Misschien helpt dit:
Schrijf eens een breuk op met 0 als teller (dat is *boven* de breukstreep): —

▶ **c** Aan welk getalletje is een breuk met 0 als teller gelijk? —

Zie zo, nu kunnen we eindelijk breuken gaan verstoppen in onze *rekenzoekplaat*.
De vraag is alleen: Hoe?
Nu, heel eenvoudig.

Zó: Neem bv. $\frac{3}{4}$. De noemer is 4. Ga nu op de *noemer*lijn tot het punt waar 4 bij staat. De teller van de breuk is 3. Ga vanaf 4 op de noemerlijn omhoog totdat je net zo hoog bent als het punt op de *teller*lijn, waar 3 bijstaat; dus zó:

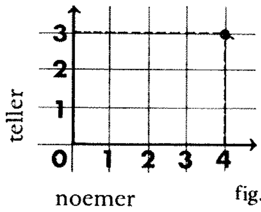


fig.4

d Heel eenvoudig zul je zeggen. Het gaat net zo als bij het ______

Daarom tekenen we onze breukenzoekplaat bij de volgende opdrachten ook zo.

e Plaats jij eens de breuken $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{8}$ en $\frac{4}{7}$ in de volgende tekening.
Zet voor elke breuk een stip.
(*Kijk ook nog eens naar het voorbeeld van* $\frac{3}{4}$).

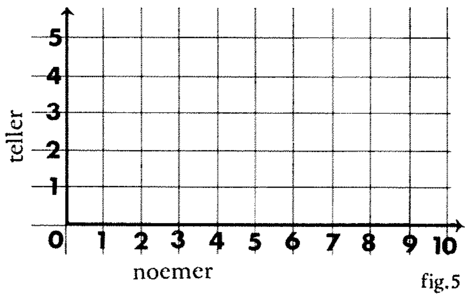
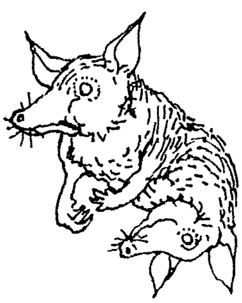
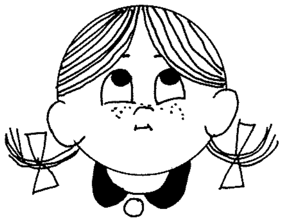


fig.5



werkblad 3



Je hebt in werkblad 2 al wat breuken *verstopt*. Daarmee gaan we nog even door. Misschien doe je wel verrassende ontdekkingen.

▶ **a** Hier volgt een rijtje breuken: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$.
Merk je iets op aan die breuken? Schrijf het maar op:

▶ **b** Stel, dat we dit rijtje nog langer wilden maken, wat zouden dan de *twee* volgende breuken zijn? — en — .

▶ **c** De breuken in opdracht **a** en **b** zijn allemaal gelijk aan: —

▶ **d** Plaats de breuken van opdracht **a** in de volgende tekening. Zet weer stippen.

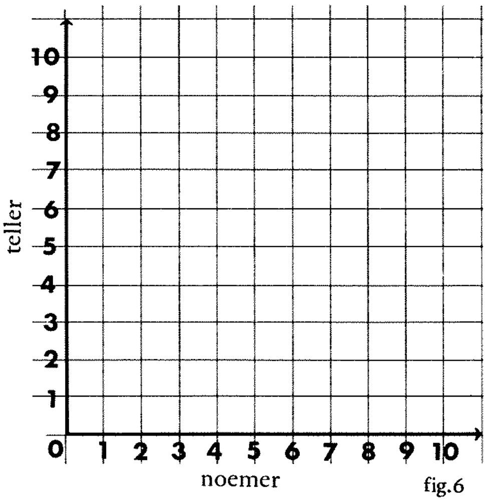


fig.6

▶ **e** Kijk goed naar de stippen. Schrijf maar op wat je er aan opmerkt.

▶ **f** Nog een rijtje breuken: $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$.
Wat merk je op aan de breuken van dit rijtje?
Schrijf het maar op:

VERVOLG WERKBLAD 3

▶**g** Voor elke breuk van het rijtje in opdracht **f** kun je ook schrijven (welk getalletje?). $\boxed{\frac{\ }{\ }}$

▶**h** Schrijf jij de drie *volgende* breuken van het rijtje van opdracht **f** eens op.

$\boxed{\frac{\ }{\ }}$, $\boxed{\frac{\ }{\ }}$ en $\boxed{\frac{\ }{\ }}$.

▶**i** Plaats de breuken van **f** en **h** in het volgende Stadsplan.

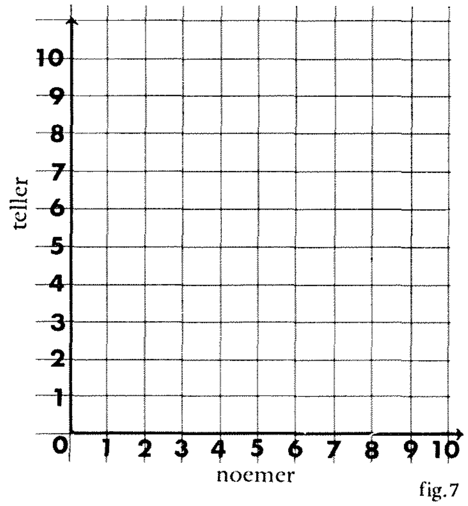


fig.7

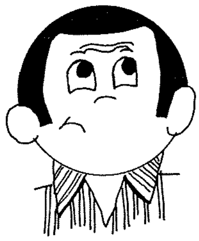
▶**j** Kijk goed naar de stippen en schrijf maar op wat je invalt:

▶**k** Draai nu dit werkblad even om, zodat je de volgende regels kunt lezen en invullen:

Je hebt het natuurlijk al lang gezien. De stippen liggen op een
Teken deze maar in het stadsplan (fig.7).

▶**l** Verstop nu de breuk $\frac{9}{9}$ in fig.7 (teken een stip)! Waar komt de stip? Schrijf het maar op:

werkblad 4



In het volgende stadsplan zie je nog eens de lijnen voor de breuken, die je in werkblad 3 geplaatst had.

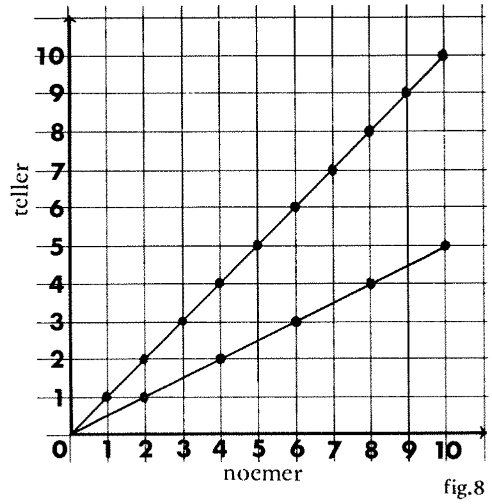


fig.8

De ene lijn is voor de breuken $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ enz.
Deze breuken zijn allemaal gelijk aan 1. We zullen deze lijn daarom de *één-lijn* noemen.
De andere lijn is voor de breuken $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ enz. Die lijn noemen we de *half-lijn*, omdat deze breuken steeds $\frac{1}{2}$ als waarde hebben.

Onderzoek
- Zijn de breuken $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ en $\frac{3}{10}$ gelijk aan elkaar?
- Zullen de stippen voor deze breuken op een rechte lijn liggen?
- Onderzoek dit eens op het stadsplan. Wat merk je op?

▶ **a** Welke breuken op de *één-lijn* en op de *half-lijn* in fig. 8 hebben dezelfde noemer?
Schrijf deze breuken, die twee aan twee bij elkaar horen op:

$\boxed{\frac{4}{4}}$, $\boxed{\frac{2}{4}}$; $\boxed{\frac{\ }{\ }}$, $\boxed{\frac{\ }{\ }}$; $\boxed{\frac{\ }{\ }}$, $\boxed{\frac{\ }{\ }}$; $\boxed{\frac{\ }{\ }}$, $\boxed{\frac{\ }{\ }}$; $\boxed{\frac{\ }{\ }}$, $\boxed{\frac{\ }{\ }}$.

▶ **b** Plaats nu de breuken $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$ en $\frac{5}{2}$ in het bovenstaande stadsplan. (teken weer stippen!)

▶ **c** Kijk nu goed naar de stippen voor alle breuken met noemer 2, die in het stadsplan staan. Schrijf, wat je opmerkt.

▶ **d** Verstop de breuken $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ en $\frac{5}{4}$ ook in het stadsplan van fig. 8. Zet weer stippen.

▶ **e** Kijk nu goed naar de stippen voor alle breuken met noemer 4, die in het stadsplan staan. Schrijf, wat je opmerkt.

▶ **f** Je hebt het natuurlijk al lang in de gaten: Vul de volgende zin dan maar aan:
Als je breuken met dezelfde noemer in het stadsplan plaatst, dan

▶ **g** Zou dat nu voor breuken met dezelfde teller ook zo zijn? Zoek dat zelf eens uit. Gebruik het volgende stadsplan (fig.9) en schrijf in de ruimte er onder een kort verhaaltje over wat je gedaan en ontdekt hebt. (De breuken die je '*verstopt*' hebt, moeten er *zeker* in komen te staan).

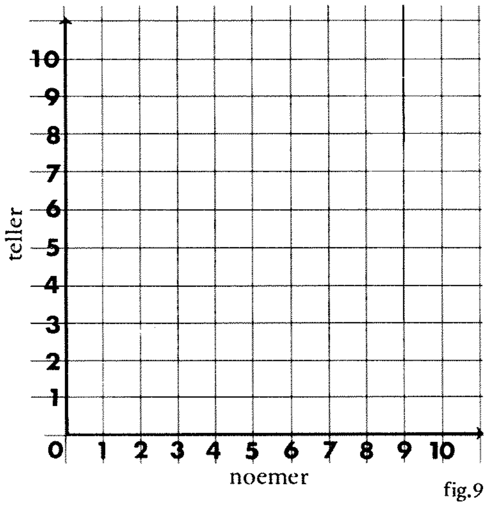


fig.9

▶ **h** En..? Wat vond je? Laat het maar zien door de volgende regel aan te vullen: als je breuken met dezelfde teller in het stadsplan plaatst, dan

We schrijven nog eens even op, wat we allemaal gevonden hebben:
- De stippen voor breuken met dezelfde waarde liggen op een lijn in het stadsplan.
- De stippen voor breuken met dezelfde noemer liggen op een lijn in het stadsplan.
- De stippen voor breuken met dezelfde teller liggen op een lijn in het stadsplan.
- Er zijn ook nog andere breuken, waarvoor de stippen op een lijn in het stadsplan liggen, zoals bv. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{10}$.

In het volgende stadsplan is van elk van deze gevallen een voorbeeld getekend:

Bij de lijnen in het stadsplan zijn de letters a,b,c en d geschreven. Bekijk het stadsplan goed en beantwoord de volgende vragen:

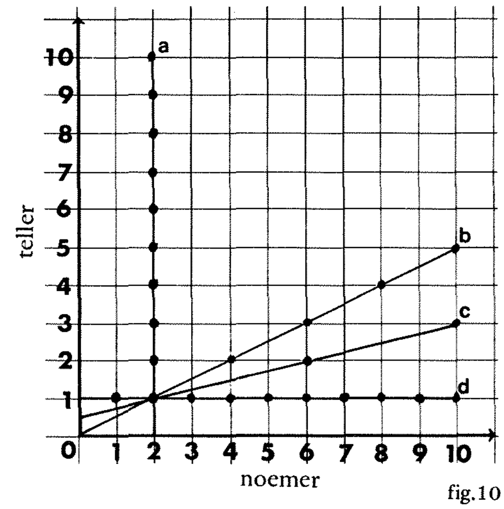


fig.10

▶ **i** Voor welke breuken staan er stippen op lijn a?

▶ **j** Zoek dit ook uit voor de lijnen b, c en d.

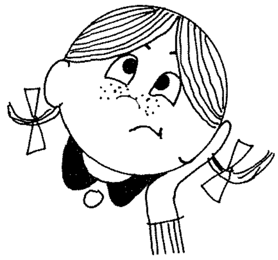
lijn b:

lijn c:

lijn d:

▶ **k** De vraag is nu: hoe kun je meteen *zien* aan een lijn in het stadsplan, of er stippen voor breuken op liggen, die dezelfde waarde hebben?
Bekijk het stadsplan (fig.10) nog eens goed en schrijf het maar op:

werkblad 5



▶ **a** Bekijk het volgende stadsplan goed:

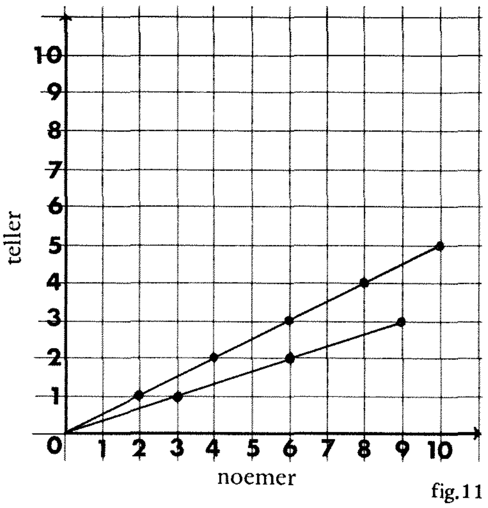


fig.11

▶ **b** Op de bovenste lijn staan stippen voor de breuken:

$\boxed{—}$, $\boxed{—}$, $\boxed{—}$, $\boxed{—}$, $\boxed{—}$.

Hoe noemden we deze lijn ook al weer? De ______ -lijn.

▶ **c** Op de onderste lijn staan stippen voor de breuken $\boxed{—}$, $\boxed{—}$, $\boxed{—}$

▶ **d** Bedenk jij nu zelf een naam voor de onderste lijn. De onderste lijn noem ik de ______ -lijn.

▶ **e** Schrijf van de volgende breuken telkens de *grootste* op:

- $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$: $\boxed{—}$.
- $\frac{2}{4}$ en $\frac{2}{6}$: $\boxed{—}$.
- $\frac{5}{10}$ en $\frac{3}{9}$: $\boxed{—}$.

f Zou je dat met behulp van de lijnen in het stadsplan direkt kunnen laten zien? Schrijf het maar op:

Onderzoek
'Verstop' de volgende breuken in het stadsplan:
$\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{8}$.
Schrijf daarna de breuken nogmaals op in een rij van *groot naar klein*. (De lijnen waarop de stippen voor deze breuken in het stadsplan liggen, kunnen je hierbij helpen).

g Plaats de volgende breuken in het stadsplan (fig. 11):
$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}$ en $\frac{6}{9}$. Zet weer stippen!

h Schrijf jij de volgende breuk van het rijtje van **g** eens op: $\boxed{\frac{\ }{\ }}$

i De breuken in **g** en **h** hebben steeds de waarde: $\boxed{\frac{\ }{\ }}$

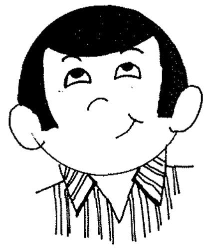
De lijn waarop de stippen voor deze breuken liggen noemen we de *twee-derde-lijn*.

j Schrijf nu van de volgende breuken telkens de grootste op:

- $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ en $\frac{2}{6}$: $\boxed{\frac{\ }{\ }}$
- $\frac{4}{6}, \frac{4}{8}$ en $\frac{1}{3}$: $\boxed{\frac{\ }{\ }}$
- $\frac{3}{9}, \frac{2}{3}$ en $\frac{5}{10}$: $\boxed{\frac{\ }{\ }}$

k Hoe zou je opdracht **j** met behulp van de lijnen in het stadsplan direkt kunnen zien?
Schrijf het maar op:

werkblad 6



a Teken de één-vierde-lijn, de één-derde-lijn en de half-lijn in het volgende stadsplan:

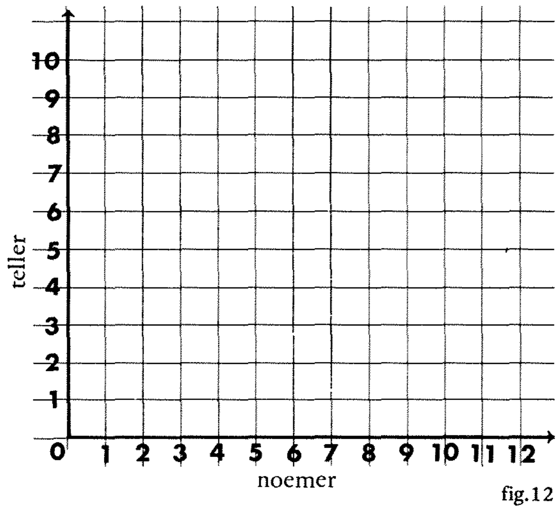


fig.12

b Zet stippen op de lijnen voor de breuken die er op liggen.

c Voor welke breuken liggen de stippen op de één-vierde-lijn? Schrijf de eerste drie breuken maar eens op:

$\boxed{\frac{\quad}{\quad}}$, $\boxed{\frac{\quad}{\quad}}$, $\boxed{\frac{\quad}{\quad}}$.

d Voor welke breuken liggen de stippen op de één-derde-lijn. Schrijf ook hiervan de eerste drie breuken op:

$\boxed{\frac{\quad}{\quad}}$, $\boxed{\frac{\quad}{\quad}}$, $\boxed{\frac{\quad}{\quad}}$.

e Bij rekenen ben je natuurlijk optel- en aftreksommen over breuken tegengekomen, zoals bv.
$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} =$ of: $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$
Waarom kun je zulke breuken niet meteen optellen of van elkaar aftrekken?
Schrijf maar op:

▶ **f** Wat deed je dan eerst met die breuken, zodat je ze wèl kon optellen of van elkaar aftrekken?
Schrijf het maar weer op:

We zullen nu eens gaan proberen of onze breukenzoekplaat ons hierbij kan helpen. Daarvoor moet je eerst nog even de volgende zin aanvullen:

▶ **g** Als je breuken met dezelfde noemer als stippen in het stadsplan plaatst dan:

(op werkblad 4 heb je deze opdracht ook al gemaakt).

▶ **h** We nemen bv. het sommetje $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$
De stip voor een half in het stadsplan ligt op de ☐ -lijn.

▶ **i** De stip voor $\frac{1}{3}$ ligt op de ☐ -lijn.

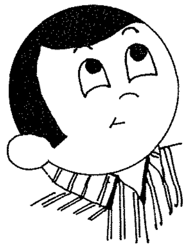
▶ **j** Zoek op *deze* lijnen naar stippen voor twee breuken met dezelfde noemer. Welke noemer vind je? ☐

▶ **k** Voor welke breuk staat daar een stip op de half-lijn? $\boxed{\frac{\ }{\ }}$.

▶ **l** Voor welke breuk staat daar een stip op de één-derde-lijn? $\boxed{\frac{\ }{\ }}$.

m Dus je kunt nu zeggen: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{\ }{\ }} + \boxed{\frac{\ }{\ }} = \boxed{\frac{\ }{\ }}$.

werkblad 7



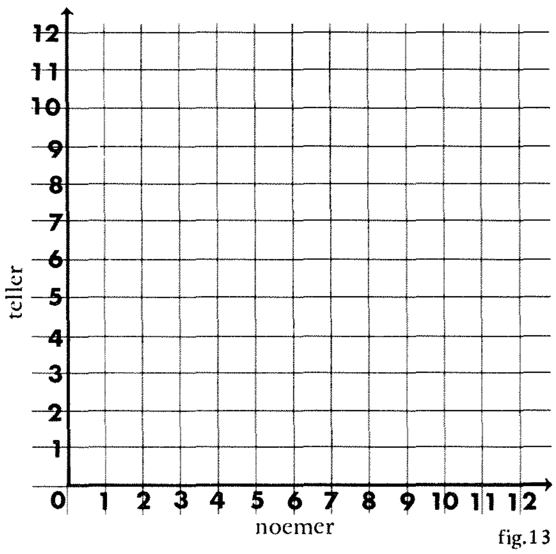


fig.13

▶ **a** Teken de *half-lijn*, de *één-vierde-lijn* en de *twee-derde-lijn* in de bovenstaande tekening.

▶ **b** Schrijf de eerste 6 breuken op, waarvan de stippen op de half-lijn liggen:

—, —, —, —, —, —.

▶ **c** Zet stippen voor deze breuken op de half-lijn.

▶ **d** Schrijf de eerste 4 breuken op, waarvan de stippen op de twee-derde-lijn komen te liggen: —, —, —, —.

▶ **e** Zet stippen voor deze breuken op de twee-derde-lijn.

▶ **f** Schrijf de eerste drie breuken op, waarvan de stippen op de één-vierde-lijn komen te liggen: —, —, —.

▶ **g** Zet stippen voor deze breuken op de één-vierde-lijn.

▶ **h** De breuk $\frac{4}{6}$ ligt op de ☐ -lijn.

▶ **i** Welke breuk heeft dus dezelfde waarde als $\frac{4}{6}$? $\boxed{\frac{\ }{\ }}$.

▶ **j** De breuk $\frac{3}{12}$ ligt op de ☐ -lijn.

▶ **k** Welke breuk heeft dus dezelfde waarde als $\frac{3}{12}$? $\boxed{\frac{\ }{\ }}$.

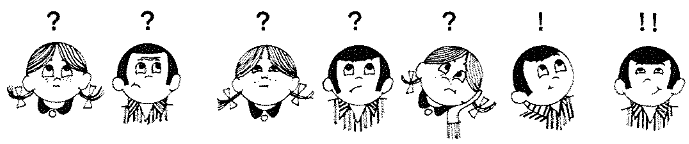
▶ **l** De opdrachten **h, i** en **j, k** hebben te maken met het ☐ van breuken.
Schrijf eens op, hoe je met behulp van de breukenlijnen breuken kunt vereenvoudigen. Vertel het maar met behulp van een voorbeeld bv. $\frac{8}{12}$.

In werkblad 6 waren we begonnen met het optellen en aftrekken van breuken met verschillende noemers. Daarbij konden we de breukenlijnen heel goed gebruiken.

▶ **m** Maak met behulp van die breukenlijnen nog eens de volgende sommen:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$	+	=	$\frac{2}{3} - \frac{3}{6} =$	−	=
$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} =$	+	=	$\frac{6}{9} + \frac{1}{2} =$	+	=
$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} =$	−	=	$\frac{3}{6} - \frac{3}{12} =$	−	=
$\frac{4}{8} - \frac{1}{4} =$	−	=	$\frac{8}{12} + \frac{1}{4} =$	+	=

Zo, hier laten we het bij.
En... hoe vond je de breukenzoekplaat?
Er zat veel in, hè?



4.6 KOMMAGETALLEN

SUGGESTIES VOOR INTRODUKTIE-MOGELIJKHEDEN

In de gangbare rekenleergangen worden de kommagetallen aan de orde gesteld na een min of meer systematische behandeling van de breuken. Het tijdstip waarop de kommagetallen geïntroduceerd worden varieert gewoonlijk van eind vierde tot eind vijfde klas.
In aflevering 4 van het Bulletin heeft u kunnen lezen over de strijd om voorrang en alleenrecht tussen decimale en gewone breuken. De decimale richting lijkt steeds meer gewicht te krijgen; het aantal aanhangers van deze richting is groeiende.[1]) Mede om deze reden schenken we nu aandacht aan kommagetallen.

Vergelijk eveneens het volgende citaat uit het artikel van Jan Nieland: 'In onze kultuur wordt er decimaal gerekend en dus moet daarop ook de nadruk vallen.'[2])

In het algemeen vindt een eerste kennismaking met kommagetallen plaats via geldbedragen (f 2,45) of afstanden (2,45 m).
Deze metode biedt goede mogelijkheden, maar legt – zeker als het daarbij blijft – geen voldoende basis.
Een goede interpretatie van bedragen zoals f 2,45 is noodzakelijk.
Niet: 2 honderden (guldens), 4 tienen (dubbeltjes) en 5 enen (centen).
Wel: 2 enen (guldens) en 45 honderdsten (centen).

Nodig voor een goed begrijpen van de kommagetallen is een helder inzicht in het systeem van de gehele getallen met grondtal tien en in de plaatswaarde van de cijfers in deze getallen.
Voldoende is dit echter niet!

We vragen van de meeste basisschoolleerlingen te veel als we – uitgaande van dit begrip – de kommagetallen op abstrakte wijze invoeren en doen alsof het een simpele uitbreiding is.

Evenmin is het juist als we net doen alsof het na de breuken alleen nog maar een kwestie van invoering van een andere notatie is.

Door het signaleren van deze drie benaderingen (geldbedragen, abstrakte uitbreiding, een andere notatie voor een aantal breuken), worden we ons ervan bewust dat ze elk slechts één aspekt aan de orde stellen. Door dit te konstateren verplichten we ons erover te gaan denken.

Kommagetallen waren al bij de Babyloniërs in gebruik.
Simon Stevin introduceerde in de zestiende eeuw de kommagetallen in Europa met de schrijfwijze ⓪ ① ②
2 4 5
Eenheid in notatie is er nog niet.
Wij schrijven 2,45. In de V.S. 2.45. In Engeland 2·45.
Enkele afspraken over de in de lessuggesties te gebruiken terminologie lijken ons nuttig.

KOMMAGETALLEN: 0,3
1,35
$2,\overline{3}$

DECIMALEN:
de cijfers 4 en 5 in 2,45, waarbij we 4 de eerste en 5 de tweede decimaal noemen.

REPETERENDE BREUKEN:
kommagetallen waarbij een groep van decimalen (deze groep kan uit één decimaal bestaan) zich oneindig vaak in een vaste volgorde herhaalt: 2,1454545...;
notatie $2,1\overline{45}$ (dit kommagetal krijgt u door uitdeling van $2\frac{8}{55}$).

[1]) Alles nog eens netjes op een rijtje – Adri Treffers (WB 4 – pag.319 en v.)

[2]) Frontale aanval – Jan Nieland (WB 4 – pag.324 en v.)

De verzameling van deze kommagetallen valt samen met de verzameling van de breuken. Bij elke breuk is een kommagetal met dezelfde waarde, en andersom. De verzameling van de gehele getallen kunnen we dan zien als een deelverzameling hiervan: $5 = \frac{5}{1} = 5{,}0$

Alhoewel het mogelijk is om van de lessen die met behulp van de lessuggesties gegeven kunnen worden, doelen te formuleren in termen van waarneembaar gedrag, vinden we dat dit meer op de weg ligt van degene die de suggesties voor zijn/haar leerlingen konkretiseert. Wij geven enkele aspekten aan, waarvan we menen dat daarop in de betreffende les aksenten geplaatst kunnen worden.

De onder 1, 2 en 3 gegeven suggesties hoeven zeker niet in de aangegeven volgorde aan de orde te worden gesteld.

Suggestie 1

Aspekten

- Inzicht krijgen in de bruikbaarheid en de toepasbaarheid van kommagetallen.
- Het kunnen herkennen van situaties waarin het gebruik van kommagetallen gewenst is.
- Het kunnen leggen van een relatie tussen verfijningsprocessen en kommagetallen.

En... misschien ook:
- Het kunnen afronden op een gegeven aantal decimalen.
- Van een afgerond kommagetal kunnen bepalen van welke verzameling kommagetallen het de afronding is;
  bv. het getal a is afgerond op twee decimalen:
  $2{,}45 \Rightarrow 2{,}445 \leqslant a < 2{,}455$.

Leerlingen uit de 4e klas van de Ontwerpschool te Arnhem hebben gewerkt aan suggestie 1. In de *kanttekeningen* geven we enkele ervaringen weer.

1

Op het bord staat:
Tijdens de wereldkampioenschappen schaatsen 1972 in Oslo won Schenk (samen met Grönvold) de 500 m in een tijd van 40,14 sekonden.

Een klassegesprek volgt. Een aantal opmerkingen uit dit gesprek worden genoteerd.
- Ard Schenk is wereldkampioen geworden.
- 40,14 sekonden is meer dan 40 maar minder dan 41 sekonden.
- Grönvold komt uit Noorwegen.
- Als ze alleen maar hele sekonden meten, is er kans dat er veel schaatsers dezelfde tijd maken.
- Heya Keessie!
- De snelheid is bijna 50 km per uur.
- Hoe meer cijfertjes achter de komma, hoe nauwkeuriger.
- Ard is vizioterapuit.
- Het is iets meer dan 40,1 sekonden.

– Het is nog geen 40,2 sekonden.
– Jammer dat Jan Bols net geen zilver heeft gehaald.
– Op het horloge van mijn vader kun je het niet zo precies zien.

We spitsen het klassegesprek toe op de opmerkingen die verband houden met de 40,14 sekonden.
Hierbij kan ter sprake komen:
- hoe de tijd zo nauwkeurig gemeten kan worden;
- een sekonde wordt in 10 gelijke delen verdeeld, elk deel wordt weer in 10 gelijke deeltjes verdeeld, ...;
- bij het meten van lengten gebeurt dat ook (laten uitvoeren met stroken karton).

Kanttekeningen bij 1:

- *Op het moment van uitproberen (medio juni) miste deze suggestie de aktualiteit. Uiteraard kan dit opgevangen worden door de keuze van een ander onderwerp, hetzij uit de sportwereld (bv. wielrennerij) hetzij uit een ander gebied waar nauwkeurige tijdwaarnemingen een rol spelen. Te denken valt bv. aan remtijden van voertuigen.*
- *Indien de klas niet gemakkelijk tot een klassegesprek komt, is het raadzaam om met de leerlingen naar vragen te zoeken waartoe de zin op het bord aanleiding geeft.*
  Bv. 'Waarom is hardrijden op de schaats een spannende sport? '
- *O.i. is de moeilijkheid bij deze suggestie dat het verdelen van de sekonden in 10 (en in 100) gelijke delen niet aanschouwelijk gemaakt kan worden. De chronometer kan hier helpen.*
  Het is eveneens mogelijk om de leerlingen de met een bal gegooide afstand precies te laten meten met een lat: 2463 cm of 24,63 m?

Suggestie 2

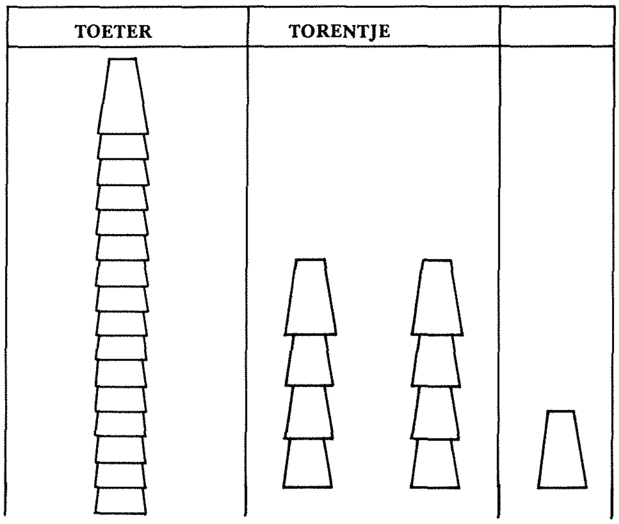
Aspekten

– Verdieping van het inzicht in ons positionele getallensysteem.[1])
– Het kunnen lezen en schrijven van kommagetallen.
– Van twee kommagetallen de som en het verschil kunnen bepalen.

Suggestie 2 biedt voldoende materiaal voor een hele serie van lessen. Met een groepje van 4 leerlingen uit de vierde klas van de openbare basisschool 'Apollo' (Hoevelaken) is gedurende een drietal zittingen aan suggestie 2 gewerkt. Deze leerlingen kenden de komma, voor zover in de notatie van geldbedragen gebruikt. Systematisch breukenonderwijs heeft nog niet plaatsgehad.

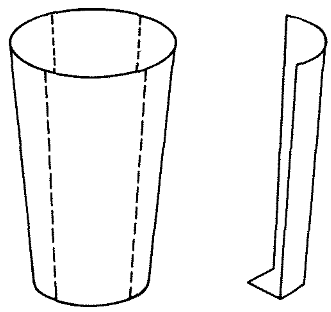
2a

Metode d'Augustine[2])
We spreken af dat vier 'te veel' is en dat we vier drinkbekertjes in elkaar schuiven tot een 'torentje' en vier 'torentjes' tot een 'toeter'. Vijfentwintig bekertjes worden zo gegroepeerd tot:

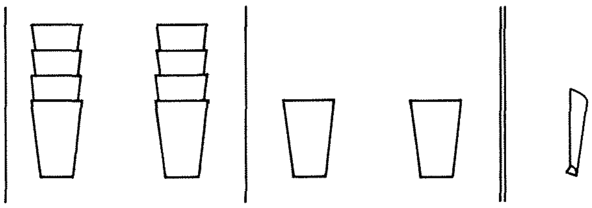


met als schrijfwijze: **1** **2** **1**

We kunnen vervolgens enige bekertjes in vier gelijke delen verdelen waarbij we vier van deze delen weer inruilen voor een hele beker.



Indien we 9 bekers en 5 delen neerleggen, groeperen de kinderen dat evenals bij het vorige voorbeeld (waarbij ze 4 delen hebben omgeruild voor 1 beker) tot:



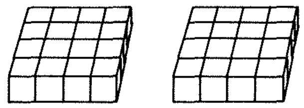
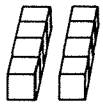
De dubbele lijn is hier de scheiding tussen het vak met losse bekers en de (vierde) delen.
We noteren dit dan als:

2 **2** **, 1**

waarbij de komma de funktie van de dubbele lijn overneemt.
Bij dit spel is ,2 of 0,2 dus de helft van 1.

We kunnen dit spel ook met MAB-materiaal spelen waarbij we nu het staafje van vier de rol laten spelen van de eenheid en de kleine kubusjes (blokjes) van (vierde) delen van de eenheid.

Negen staafjes en vijf blokjes worden dan gegroepeerd tot (na inruiling):

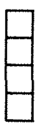
platten	staafjes	blokjes
		

met de schrijfwijze: 2 2 , 1

Naderhand kunnen we ook de platte als eenheid invoeren, waarbij bovengenoemde materiaal leidt tot de schrijfwijze: 2,21.

Kanttekeningen bij 2A:

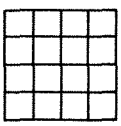
- *De beginsituatie van de leerlingen – geen enkele ervaring met de inwisselprocedure – maakte het noodzakelijk om vrij langdurig aandacht aan genoemde procedure te schenken. De bekertjes en het MAB-4 materiaal werden daarbij gebruikt. Pas later hebben we aksenten geplaatst op de 'deel-geheel' relatie – met de 'dubbele-streep-' en de 'komma-notatie' –. Bij de bekertjes ging dit vlotter dan met de MAB-blokjes. Het 'deel'-karakter ligt bij de 'ge-vier-endeelde' bekertjes ook meer voor de hand.*
- *Het verplaatsen van de komma, of eigenlijk: het wisselen van 'eenheid' bleek een grote moeilijkheid. Nadat eerst de staaf als*

  'hele' was genomen en het blokje als 'deel',

  bleek de stap naar de platte als 'hele' en

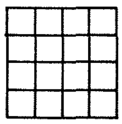
  

  zowel de staaf als het blokje als 'delen' te groot.

Ook de stap naar de platte en de staaf als 'helen' – zij het twee verschillende 'soorten' helen – en de blokjes als 'delen' is moeilijk.

De generalisering:
'wat je een deel noemt, hangt af van wat je als hele hebt gekozen'
kwam er op deze wijze niet uit.
Bij een volgende zitting zijn we – met meer sukses – uitgegaan van één soort 'helen' en één soort 'delen', met een wisselende keuze van de soort 'helen'.

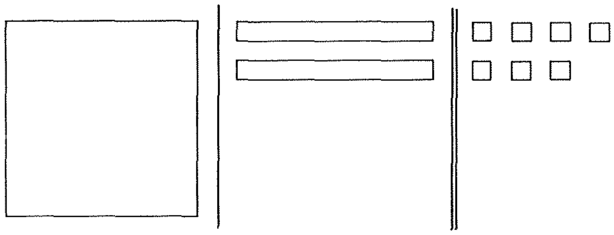
De volgende tabel illustreert de werkwijze:

		
	hele 3	deel 2
hele 3	deel 2	

[1]) Zie Wiskobas – Bulletin no.4, pag.306.
[2]) We noemen deze werkwijze de 'Metode d'Augustine' aangezien C.H. d'Augustine in zijn boek 'Multiple Methods of Teaching Mathematics in the Elementary Schools' (New York, 1969) gebruik maakt van de 'bekertjes-metode' bij de introduktie van talstelsels.

2b

Indien we voldoende geoefend hebben met dit spel van vier, van drie, van zes etc. kunnen we overgaan naar het MAB-materiaal voor *basis tien*. Nemen we de staaf als eenheid dan leiden twaalf staven en zeven blokjes tot:



en tot de schrijfwijze:

1 2 , 7

Is de platte de eenheid dan verschuift de dubbele lijn, dus de komma, en krijgen we: 1,27.

Net als 12,7 dm = 1,27 m (ook een kwestie van een andere eenheid kiezen). Bij elke basis kunnen we inmiddels optellingen en aftrekkingen maken waarbij we steeds het materiaal gebruiken. (Ook kunnen we zó al een kommagetal vermenigvuldigen met of delen door een geheel getal).

Hier (basis tien) kunnen de kinderen eveneens inzien dat 0,5 de helft is van 1 (vijf blokjes is de helft van een staaf).
Later: $0{,}5 = \frac{1}{2}$.

Kanttekeningen bij 2B:

- *We hebben de leerlingen m.b.v. het MAB-10 materiaal laten optellen en aftrekken.*
  Bij het optellen moest één van de leerlingen een aantal helen (staafjes) en delen (blokjes) pakken; een andere leerling voegde daar helen en delen aan toe.

  Voorbeeld:

  3 helen en 5 delen moest opgeteld worden bij 6 helen en 24 delen.
  Werkwijze: 6 helen en 24 delen werden omgezet in 8 helen en 4 delen.
  Toegevoegd werd: 3 helen en 5 delen.
  Antwoord: 11 helen en 9 delen.

  Bij het opschrijven kwamen de leerlingen er uit zichzelf toe om 10 helen te wisselen voor een grotere hele (platte), zodat ze konden noteren:

helen		*delen*
1	1	9

  Bij het aftrekken werd een soortgelijke procedure gevolgd. De leerlingen bedachten de opdracht: 2 helen en 2 delen; er af: 8 delen.
  Eén hele werd gewisseld voor 10 delen, waarna de oplossing direkt gevonden werd.

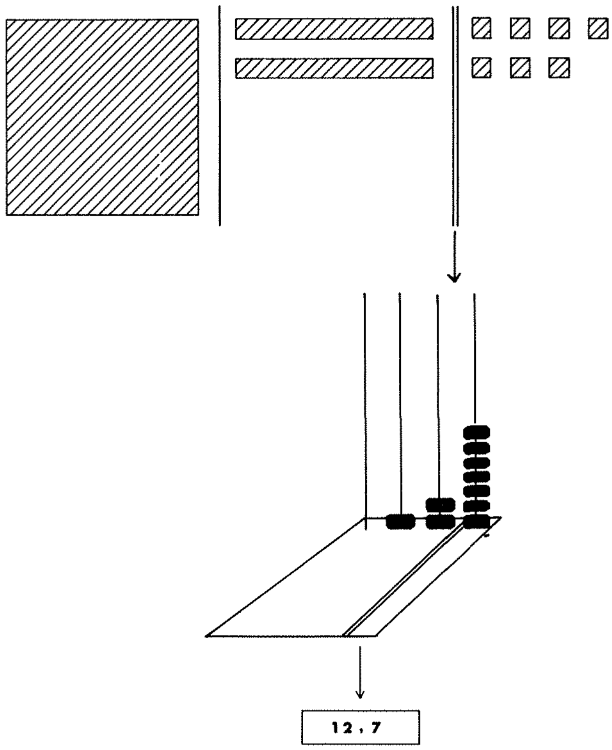
- *Het was overigens merkwaardig dat het uitvoeren van de opdrachten met het MAB-materiaal moeizamer verliep dan het uitschrijven van de som met het antwoord (zónder gebruikmaking van het MAB-materiaal):*

$$\begin{array}{r} 2{,}2 \\ \underline{0{,}8} \; - \\ 1{,}4 \end{array}$$

2c

Het verdient aanbeveling om niet alleen gebruik te maken van de werkwijze met de drinkbekers of MAB-materiaal, maar ook van de lus-abacus. Minder konkreet dan het MAB-materiaal, maar minder abstrakt dan de kommaschrijfwijze.

We krijgen dan:



Waarbij een dubbele krijtlijn op het horizontale plankje van de lus-abacus overeenkomt met de dubbele lijn boven en de komma in het kommagetal.

Kanttekeningen bij 2C:

- *In eerste instantie hebben we de lus-abacus gebruikt om na te gaan of de leerlingen getallen die m.b.v. de abacus gepresenteerd werden, korrekt konden noteren.*
  Op één abacus hadden we een dubbele lijn getrokken tussen de eerste en de tweede lus (van rechts af gerekend), op een andere abacus was de dubbele lijn tussen de tweede en derde lus geplaatst.
  Getallen van het volgende type werden korrekt genoteerd: 1,4; 1,23; 221,3; 1,53; 0,71.
- *De abacus werd vervolgens gehanteerd voor de operaties optellen en aftrekken. Dit liep allemaal erg vlot. Ook het inwisselen leverde nu weinig problemen.*

Suggestie 3

Aspekten

– Getallen die geschreven zijn als gewone breuk, of als gemengd getal met gewone breuk, kunnen schrijven als kommagetal.
– Het kunnen ordenen van een aantal kommagetallen naar grootte.

Bepaalde delen uit suggestie 3 zijn 'uitgeprobeerd' bij leerlingen uit een 4e klas van de Ontwerpschool te Arnhem.

3

We houden een inleidend klassegesprek over telmachines.
Eén of meer telmachines proberen we voor dit doel ergens te lenen. Wat kan een telmachine? Wie gebruikt een telmachine? Een telmachine kan snel en foutloos bijna onbeperkt gehele getallen optellen en aftrekken.
Maar met een opgave als $\frac{2}{5} + \frac{1}{2}$ weet de telmachine geen raad.
Zullen we de machine een hand helpen?

Op het bord staat de volgende tabel:

0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{10}$	1	$1\frac{1}{10}$	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{3}{10}$	$1\frac{2}{5}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{5}$	$1\frac{7}{10}$	$1\frac{4}{5}$	$1\frac{9}{10}$	2	$2\frac{1}{10}$	..
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	..

Onder $\frac{2}{5}$ staat 4 en onder $\frac{1}{2}$ staat 5.
$4 + 5 = 9$ en boven 9 staat $\frac{9}{10}$.
We noteren dit zo:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{2}{5} & + & \frac{1}{2} & = & \frac{9}{10} \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ 4 & + & 5 & = & 9 \end{array}$$

kontrole : $\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10}$.

Samen met de klas maken we een aantal optellingen (ook van meer dan twee getallen) en aftrekkingen. Daarna gaan de leerlingen zelf sommen maken en uitwisselen.

Via een leergesprek wordt ontdekt hoe de tabel gemaakt is. Ook de beperktheid van deze tabel (alleen breuken met noemers 1, 2, 5 en 10) komt aan de orde.

We toetsen het voorgaande door de tabel naar rechts te laten uitbreiden.

In groepjes van twee gaat de klas aan het werk met de opdracht: probeer een tabel te maken waarmee we opgaven kunnen oplossen als:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5}, \frac{1}{25} + \frac{3}{4}, \frac{1}{20} - \frac{1}{25}.$$

Kanttekeningen bij 3:

- *Het inleidend gesprek verliep anders dan boven voorgesteld is, nl. zonder inschakeling van de telmachine.*

De bedoeling met het gesprekje was om na te gaan in hoeverre de leerlingen in staat waren om breuken naar grootte te ordenen.

We vonden o.m.:

- *de leerlingen hadden vrij snel door dat de noemer van de breuk een aanwijzing(!) vormt (bij het vergelijken van $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{6}$ werd direkt $\frac{1}{6}$ als grootste genoemd);*
- *op de vraag om uit te leggen hoe je nu weet dat $\frac{1}{6}$ groter is, kwam geen bevredigend antwoord;*
- *de leerlingen merkten spontaan op dat bij gelijke noemers de tellers beslissend zijn ($\frac{2}{5}$ is groter dan $\frac{1}{5}$);*
- *bij het vergelijken van bv. $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{5}$ ontstonden problemen.*

- *In een volgende lesfase werd met elkaar onderstaande tabel afgemaakt:*

0	.	.	$\frac{3}{10}$	.	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	.	$\frac{9}{10}$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Een leerling vulde boven de 1 de breuk $\frac{1}{10}$ in en boven de 8 de breuk $\frac{8}{10}$.
Zonder veel moeite werd $\frac{8}{10}$ vervolgens omgezet in $\frac{4}{5}$.

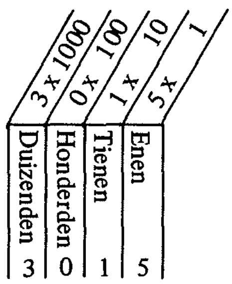
Nadat de tabel klaar was, leverden operaties als

$$\begin{array}{ccccc} \frac{2}{5} & + & \frac{1}{2} & = & \frac{9}{10} \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ 4 & + & 5 & = & 9 \end{array}$$

De opdracht om samen een tabel te maken met de noemers $\frac{\cdot}{2}$, $\frac{\cdot}{5}$, $\frac{\cdot}{10}$ en $\frac{\cdot}{100}$ kon alleen met intensieve begeleiding door de leerkracht, uitgevoerd worden.

Nog een laatste opmerking

Aangezien we steeds, welke introduktievorm we ook kiezen, zullen uitkomen bij het begrip *plaatswaarde*, willen we hierover nog het een en ander naar voren brengen.
Het begrip is zo nauw verbonden met ons positionele getallensysteem, dat het bij de verzameling van de (positieve) gehele getallen al regelmatig aan de orde is geweest.

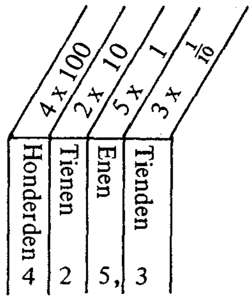


Van links naar rechts krijgen we achtereenvolgens:
1000 100 10 1
Wat valt op?

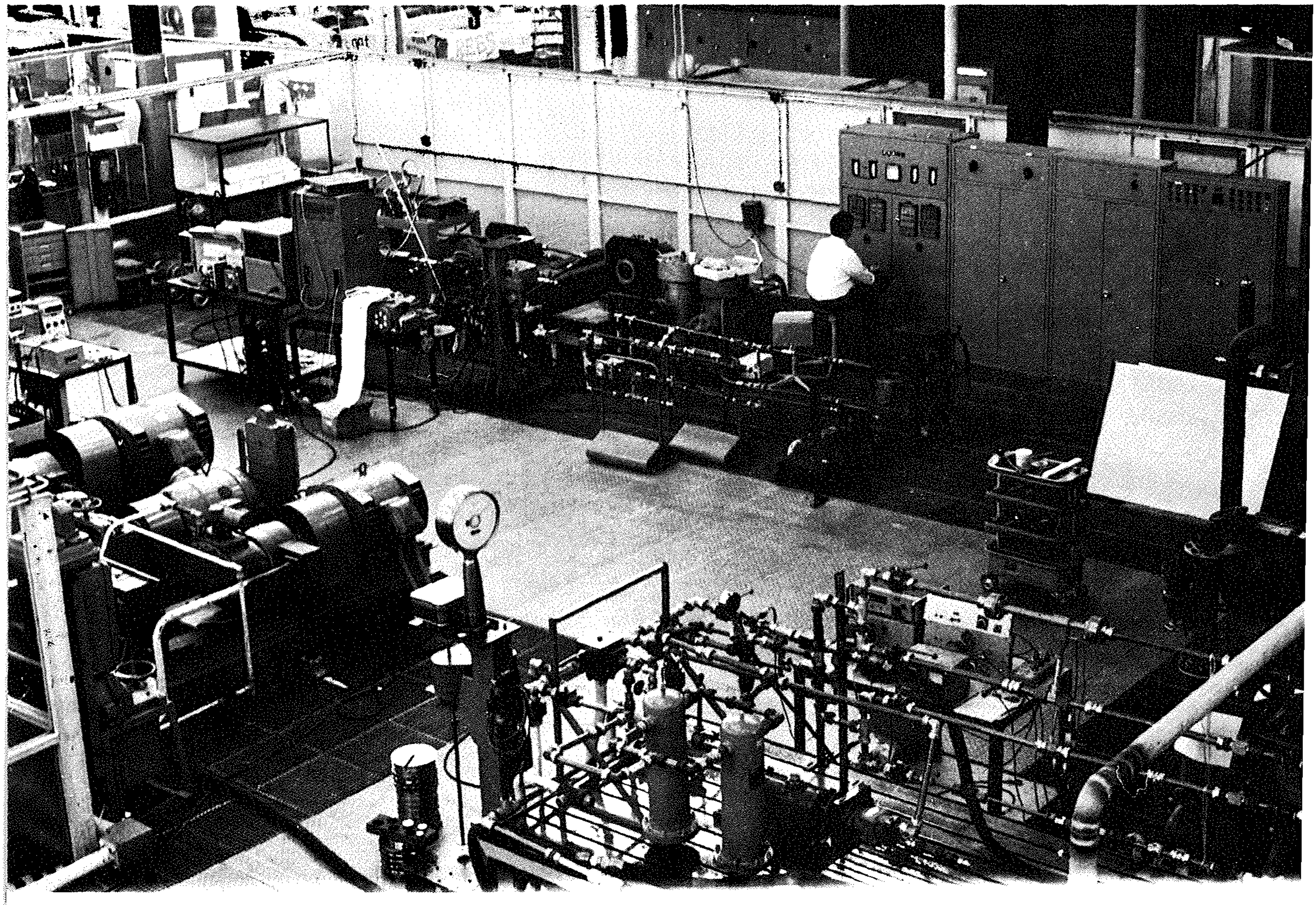
Steeds het tiende deel nemen!
Als we zo verder gaan wat krijgen we dan?
1000 100 10 1 $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$ ...

Welk getal hoort bij 4 x 100 + 2 x 10 + 5 x 1 + 3 x $\frac{1}{10}$?
4253?

Nee, want dat betekent al 4 x 1000 + 2 x 100 + 5 x 10 + 3 x 1.
Uit de klas komt nu het voorstel om iets te plaatsen tussen de 5 en de 3.
Afspraak: een komma!



Na enige oefening kan uitbreiding tot honderdsten plaatsvinden.



4.7 BREUKEN ALS MACHIENTJES

LESSUGGESTIES

Inleiding

In de voorgaande aflevering van het Bulletin[1]) heeft Adri Treffers een metode voor het breukenonderwijs, die door de moderne groep van de vertikale richting geïntroduceerd is, nl. de breuk als machientje, beknopt aan de orde gesteld.
We hebben toegezegd dat we op deze benaderingswijze in aflevering 5 nader zouden ingaan.

We willen proberen enkele suggesties voor lessen die met behulp van 'machientjes' over breuken gegeven kunnen worden, te formuleren. Op grond van enige ervaringen met de 'machientjes-aanpak' bij leerlingen uit de basisschool, zijn de suggesties zodanig geordend dat er een zekere opklimming in moeilijkheidsgraad is te onderkennen.

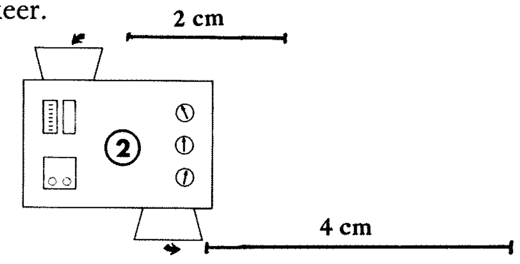
Uit een onderzoek dat Braunfeld en Wolfe[2]) in Illinois instelden, bleek dat de machientjes-benadering bizonder effektief was voor leerlingen die al een heleboel negatieve ervaringen met breuken hadden. De leerlingen ontdekten en begrepen wiskundige ideeën en relaties, zonder ze te hoeven memoriseren. Deze in het algemeen 'zwakke' leerlingen waren zeer gemotiveerd bezig met een onderwerp dat voor hen tot dan toe weinig populair was.

Alhoewel dit onderzoek, evenals ander in Illinois verrichte research, ons de indruk gaf dat 'machientjes' vooral geschikt zijn voor leerlingen van 12 à 13 jaar, is ons bij het 'uitproberen' steeds opnieuw gebleken dat ook leerlingen uit de 4e en 5e klas en incidenteel uit de derde klas, zonder veel ekstra uitleg in staat waren om met deze benadering te werken.

1 REKMACHINES

Inleidend verhaal over machines.
In een grote hal staan allerlei machines. Eén vreemde machine: een **rek**machine. Uitleg machine: alles wat je er in stopt, komt er aan de andere kant groter uit.

De ②-machines vergroot 2 keer.



Doe je er een stokje met een lengte van 2 cm in, dan komt er bij de ②-machine een stokje van 4 cm uit.

[1]) Wiskobas–Bulletin, nr. 4 (blz. 319 en v.)
[2]) The Arithmetic Teacher, Volume 13, number 8.

Gebruik kan worden gemaakt van Cuisenaire-materiaal, Colour-Factor-staafjes, MAB-stokjes, Stern-blokjes. Onze voorkeur gaat – voor wat de 'machine-lessen' betreft – uit naar het Stern-materiaal, en wel omdat:
- op de blokjes inkepingen zijn gemaakt.
- er blokjes zijn voor alle lengten t.e.m. 10.

Na enige oefening met de ②-machine kunnen de leerlingen een tabel maken als:

②-machine	
erin	eruit
4	..
5	..
..	8

Vervolgens kan met andere machines gewerkt worden, b.v. de ③-, de ④-de ⑤-machine. Deze fase kan afgesloten worden door de leerlingen een onvolledige tabel te laten afmaken.

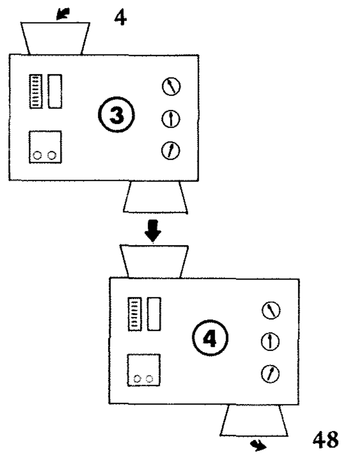
Bv.

erin	machine	eruit
2	②	..
4	⑦	..
5	..	20
..	④	24

Het is eveneens mogelijk en misschien zelfs wenselijk om de leerlingen zelf onvolledige tabellen te laten maken en deze door klasgenoten te laten invullen.
Eventueel kan hierop voortgebouwd worden met grotere machines en grotere getallen.

2 SCHAKELEN VAN REKMACHINES

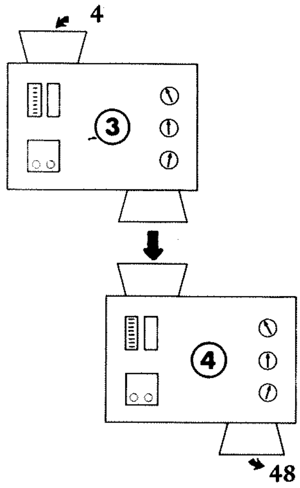
Bv.



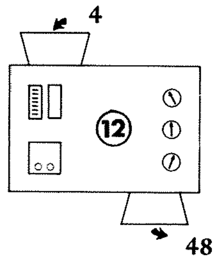
Het verdient aanbeveling om enige aandacht aan de notatie te schenken. De 'input' wordt tussen haakjes genoteerd, de 'schakeling' wordt weergegeven met een open punt.

Bovenstaande kunnen we dus opschrijven als: $3 \circ 4(4)$

We kunnen de leerlingen laten ontdekken dat *elke* schakeling van twee of meer rekmachines vervangen kan worden door één enkele rekmachine. Het *vermenigvuldigen* komt aldus aan de orde:



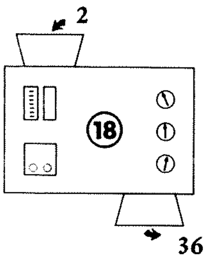
$3 \circ 4(4) = 48$



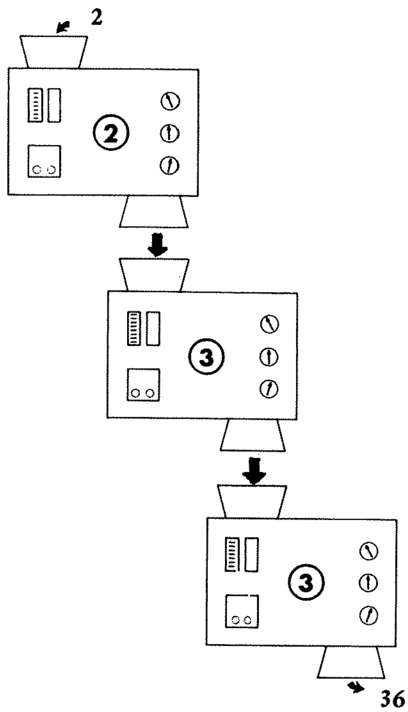
$12(4) = 48$

De vraag of één rekmachine vervangen kan worden door een schakeling van twee of meer machines, kan aanleiding geven tot een tweetal belangrijke ontdekkingen, nl.

- *het ontbinden in faktoren*



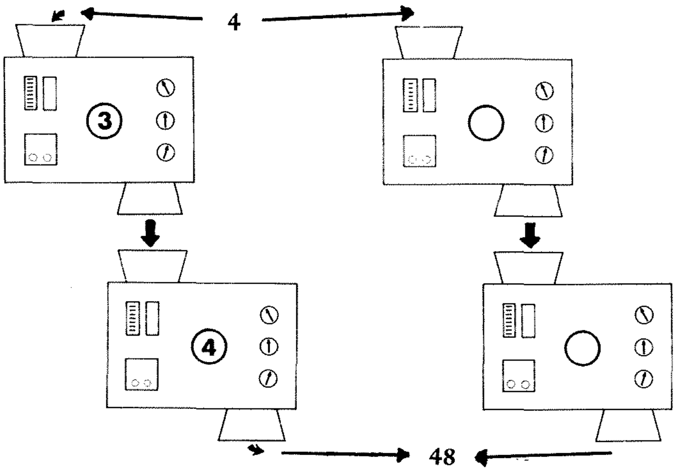
$18(2) = 36$



$2 \circ 3 \circ 3(2) = 36$

- *priemgetallen.*
  Er zijn rekmachines die niet door een schakeling vervangen kunnen worden, bv. de ⑲-machine.

Ook kunnen opdrachten van de volgende soort verstrekt worden:



$3 \circ 4 (4)$ ... $\dots \circ \dots (4)$

Welke getalletjes kun je in de rechter schakeling plaatsen?
Let op: de ③- en ④-machines zijn al in gebruik!

Deze fase kan weer afgesloten worden met het laten samenstellen en/of laten invullen van tabellen als:

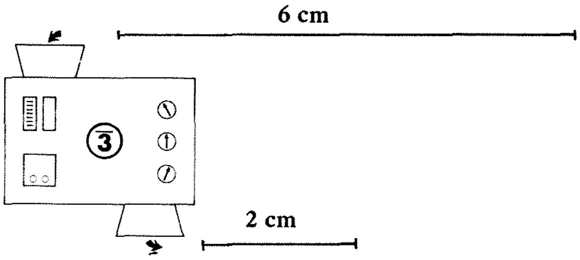
schakeling		één machine
3	4	..
4	..	36
..	3	18
..	..	13

erin	machines			eruit
3	4	3	..	72
7	..	4	..	168
..	2	2	2	40

Er zijn talloze tabellen van dit soort te bedenken. Men hoede zich echter voor overdrijving.

3 KRIMPMACHINES

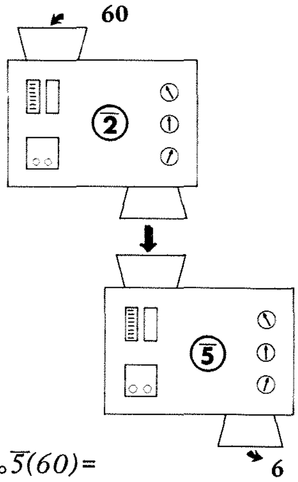
In de machinehal staat nog een heel vreemd apparaat, nl. de **krimp-machine**. Deze machines kunnen **verkleinen.**
Uitleg machine: alles wat je er in stopt, komt er aan de andere kant kleiner uit.
De ③-machine verkleint 3 keer:



Doe je er een stokje met een lengte van 6 cm in, dan komt er bij de ③-machine een stokje van 2 cm uit.

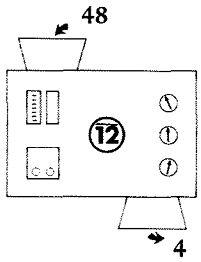
Bij de inleiding kan weer gebruik gemaakt worden van konkreet materiaal.
De krimpmachine kan aanleiding geven tot dezelfde aktiviteiten als de rekmachine.

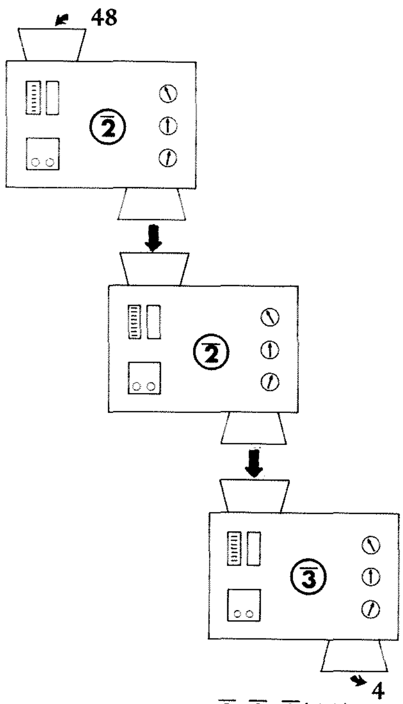
Bv. • *schakelen*



$\overline{2}\circ\overline{5}(60)=$

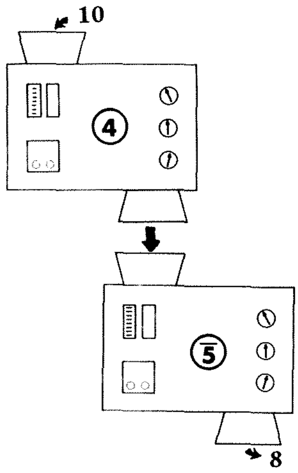
• *het ontbinden in faktoren*





$\overline{12}(48)= 4$ $\overline{2}\circ\overline{2}\circ\overline{3}(48)= 4$

4 SCHAKELEN VAN KRIMP- EN REKMACHINES

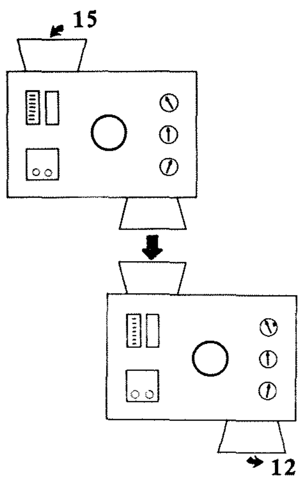


$$4_{\circ}\overline{5}(10) = 8$$

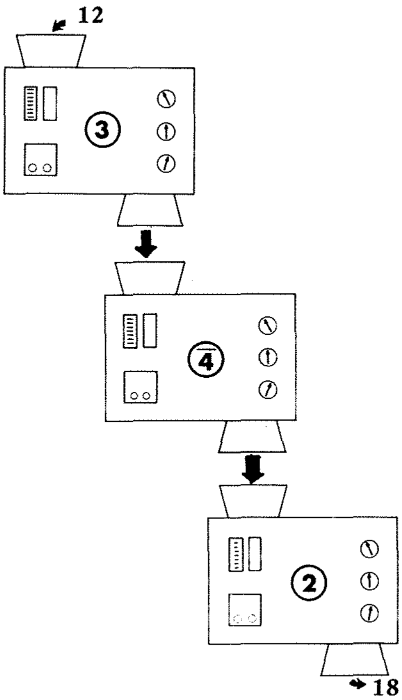
Alhoewel het mogelijk is om nu de bekende breuknotatie ($\frac{4}{5}$ van 10) in te voeren, is het toch beter om daar nog even mee te wachten. Het gevaar dat leerlingen de machinetaal te snel gaan omzetten in de bekende notatie is niet denkbeeldig. Diverse mogelijkheden die met behulp van de machine gerealiseerd kunnen worden (zie onder) blijven dan wat 'in de mist'.

Laat de leerlingen eerst nog wat oefenen en spelen met de machines:

- Van 15 moet 12 gemaakt worden.
  Deze opdracht kan uitsluitend door een schakeling van een **rek**- en een **krimp**machine uitgevoerd worden.



- We kunnen de leerlingen laten ontdekken dat de *volgorde* van de schakeling niet van belang is, door de machines op verschillende manieren te schakelen en te laten konstateren dat eenzélfde instop bij alle schakelingen hetzelfde resultaat oplevert.



$3\circ\overline{4}\circ 2(12) = 18$, maar ook:
$3\circ 2\circ\overline{4}(12) = 18$
$\overline{4}\circ 3\circ 2(12) = 18$
$\overline{4}\circ 2\circ 3(12) = 18$
$2\circ\overline{4}\circ 3(12) = 18$
$2\circ 3\circ\overline{4}(12) = 18.$

5 EQUIVALENTIE VAN BREUKEN

5.1 Elimineren van inversen

Inverse machines: de ene machine doet te niet wat de andere machine heeft bewerkstelligd:
bv. $4\circ\overline{4}(6) = 6$
Door het elimineren van inversen kan het vereenvoudigen van breuken aan de orde worden gesteld:
bv. $2\circ\overline{7}\circ 5\circ\overline{2}$.
We hebben gekonstateerd dat de volgorde bij het schakelen niet van belang is.
We kunnen dus de inversen bij elkaar zetten en noteren:
$2\circ\overline{2}\circ\overline{7}\circ 5$.
Na schrapping der inversen houden we over:
$\overline{7}\circ 5$
Of, volgens de bekende schrijfwijze:
$\frac{2}{7} \times \frac{5}{2} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$.

Bij het gegeven voorbeeld is het paar inversen ($2\circ\overline{2}$) direkt waarneembaar. Ze kunnen echter ook meer 'verborgen' zijn:
$6\circ\overline{4}$.
Bij splitsing krijgen we: $2\circ 3\circ\overline{2}\circ\overline{2}$.

Na herordening: $2\circ\overline{2}\circ 3\circ\overline{2}$.

Na schrapping: $3 \circ \overline{2}$.

In breukennotatie: $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

5.2 Toevoegen van inversen

Een omgekeerde werkwijze, nl. het toevoegen van paren inversen kan eveneens het inzicht in de equivalentie van breuken doen toenemen.

$\frac{4}{3} = 4 \circ \overline{3}$,
$= 4 \circ 5 \circ \overline{5} \circ \overline{3} = 20 \circ \overline{15} = \frac{20}{15}$,
$= 4 \circ 2 \circ \overline{2} \circ 3 = 8 \circ 6 = \frac{8}{6}$.

5.3 Equivalentie van schakelingen

Elke serie schakelingen kan vervangen worden door een schakeling van één rekmachine en één krimpmachine:
$6 \circ \overline{4} \circ 8 \circ \overline{9}$.
Na splitsing: $3 \circ 2 \circ \overline{2} \circ \overline{2} \circ 2 \circ 2 \circ 2 \circ \overline{3} \circ \overline{3}$.

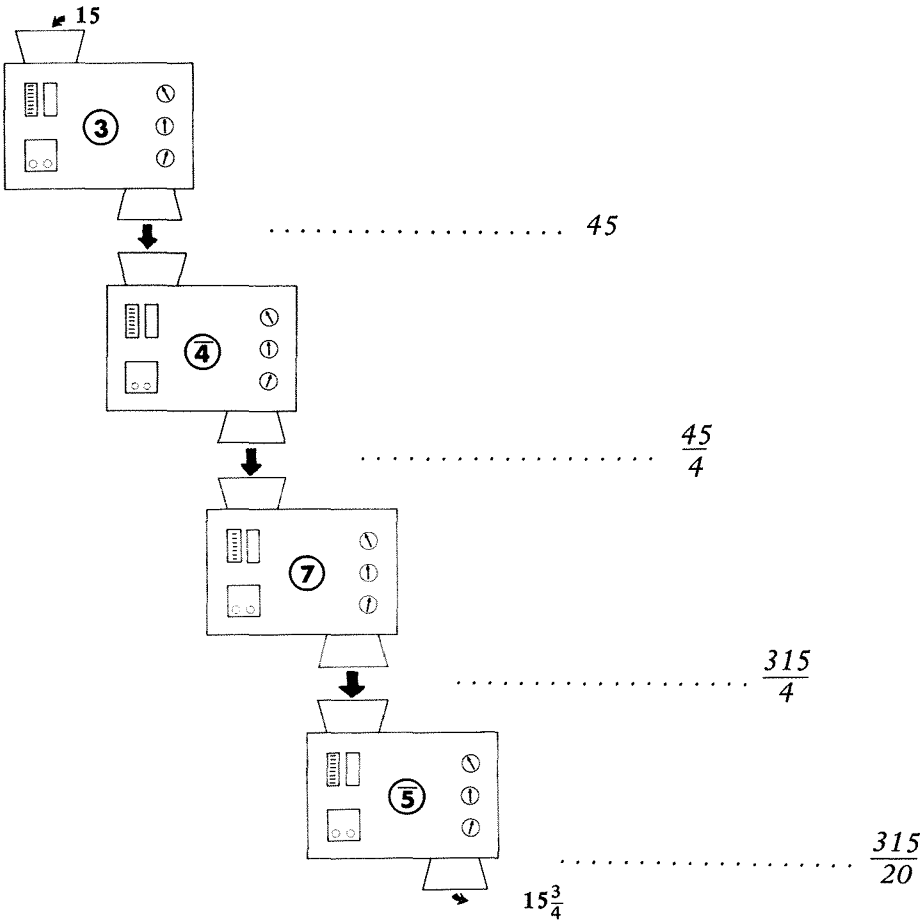
Na herordening: $3 \circ \overline{3} \circ$ $2 \circ \overline{2} \circ$ $2 \circ \overline{2} \circ$ $2 \circ 2 \circ \overline{3}$.

Na schrapping: $2 \circ 2 \circ \overline{3}$.

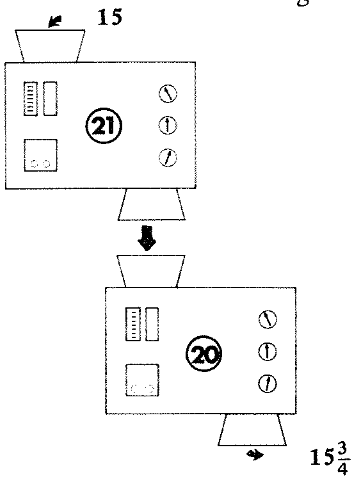
In breukennotatie: $\frac{6}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{48}{36} = \frac{4}{3}$.

6 VERMENIGVULDIGEN EN DELEN DOOR BREUKEN

Aan de hand van enkele voorbeelden lichten we een en ander toe:
$\frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = 3 \circ \overline{4} \circ 7 \circ \overline{5} = 3 \circ 7 \circ \overline{4} \circ \overline{5} = 21 \circ \overline{20} = \frac{21}{20}$.
Deze vermenigvuldiging kunnen we eveneens koppelen aan een 'instop':



Met de in 5.3 gekonstateerde 'equivalentie van schakelingen' kan bovenstaande procedure direkt vereenvoudigd worden:



Ook het **delen** van breuken kan door machines worden uitgevoerd.
We kunnen hierbij gebruik maken van de **regel**:
delen door n is hetzelfde als vermenigvuldigen met de inverse van n ($\overline{n}$).
Toegelicht: de inverse van $\frac{2}{3}$ is de schakeling die de $\frac{2}{3}$-opdracht te niet doet (hier: $\frac{3}{2}$):
$2 \circ \overline{3} \circ 3 \circ \overline{2}$.

In letters: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \circ \frac{\overline{c}}{d} = \frac{a}{b} \circ \frac{d}{c} = a \circ \overline{b} \circ d \circ \overline{c} = a \circ d \circ \overline{b} \circ \overline{c} = \frac{ad}{bc}$.

Zoals u heeft kunnen konstateren komen de operaties vermenigvuldigen en delen op een heel natuurlijke wijze uit de machine-aanpak te voorschijn.

Alhoewel het eveneens mogelijk is om bij het optellen en aftrekken van breuken gebruik te maken van het machine-model, zou dit op bepaalde momenten toch te kunstmatig worden.
Wij hebben het derhalve in dit overzichtje niet opgenomen.

Naar aanleiding van het 'uitproberen' van deze aanpak bij leerlingen uit de klassen 3 t.e.m. 6, willen we u een viertal — o.i. interessante — ervaringen niet onthouden. Vervolgens plaatsen we nog enkele kanttekeningen.

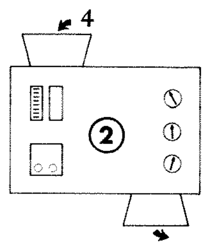
ERVARINGEN:

De taal

De 'taal der wiskunde' is een andere taal dan die we in ons dagelijks leven gebruiken. Of, beter geformuleerd: woorden krijgen in de wiskunde soms een andere inhoud dan in het dagelijks leven. Het komt nogal eens voor dat kinderen vanuit dat dagelijks leven aan woorden een betekenis geven, die voor ons — groot geworden met de wiskundige inhouden van deze woorden — heel anders is.

Een paar voorbeelden:

- *Nadat met de 2-machine was gewerkt en we er enige uitleg bij hadden gegeven ('de machine maakt alles 2x zo groot') kwam een leerling uit de derde klas bij de opgave*

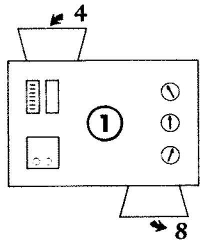


met het antwoord: 12.

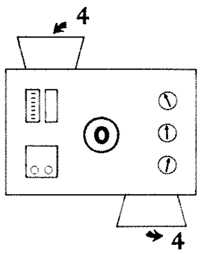
Bij 'doorvragen' bleek dat voor dit kind '2x zo groot' iets anders betekende dan wij

bedoelden, en wel 'vier en nog eens twee keer vier erbij' (4 + $\boxed{4 + 4}$).
Wanneer deze leerling de bewerking 'twee keer zo groot' wilde formuleren, dan gebruikte zij de uitdrukking 'eens zo groot'.

- *Het zal u duidelijk zijn dat bij het 'uitproberen' heel wat meer ter sprake komt dan uiteindelijk in de suggesties wordt vermeld. Zo is bv. de ①-machine aan de orde geweest. Deze machine maakt alles '1x zo groot'. Een leerling vertaalde dit tot: 'eens zo groot, dus ... 2x zo groot' en kwam tot het resultaat:*



De ⓪-machine leverde op:



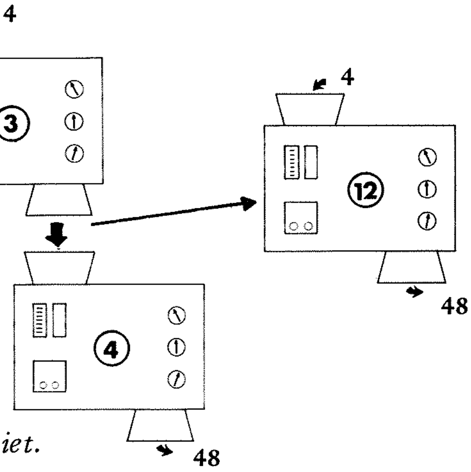
met als kommentaar: 'Geen enkele keer zo groot, dus even groot.'

De notatie
De notatie – bv. $3_{\circ}4(4)$ – leverde nogal wat moeilijkheden op. Het was voor de leerlingen logischer om te schrijven: $(4)3_{\circ}4$.

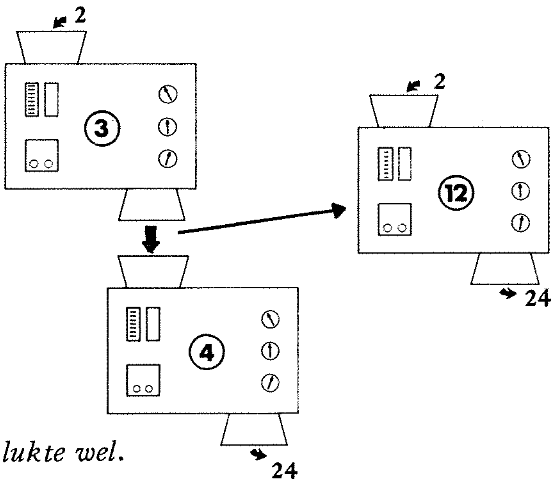
Leergangen uit de V.S. gebruiken – veelal om wiskundige redenen – de eerstgenoemde notatie. Het lijkt de moeite waard om na te gaan of de 'voor-het-kind-logische'-notatie als startpunt kan fungeren.

Met of zonder input
Een belangrijk gegeven troffen wij aan bij leerlingen van de derde klas. Zij konden de machines niet **op zichzelf** *beschouwen en waren niet in staat om geschakelde machines te vervangen,* **los van de input.**

Een voorbeeld:



lukte niet.



lukte wel.

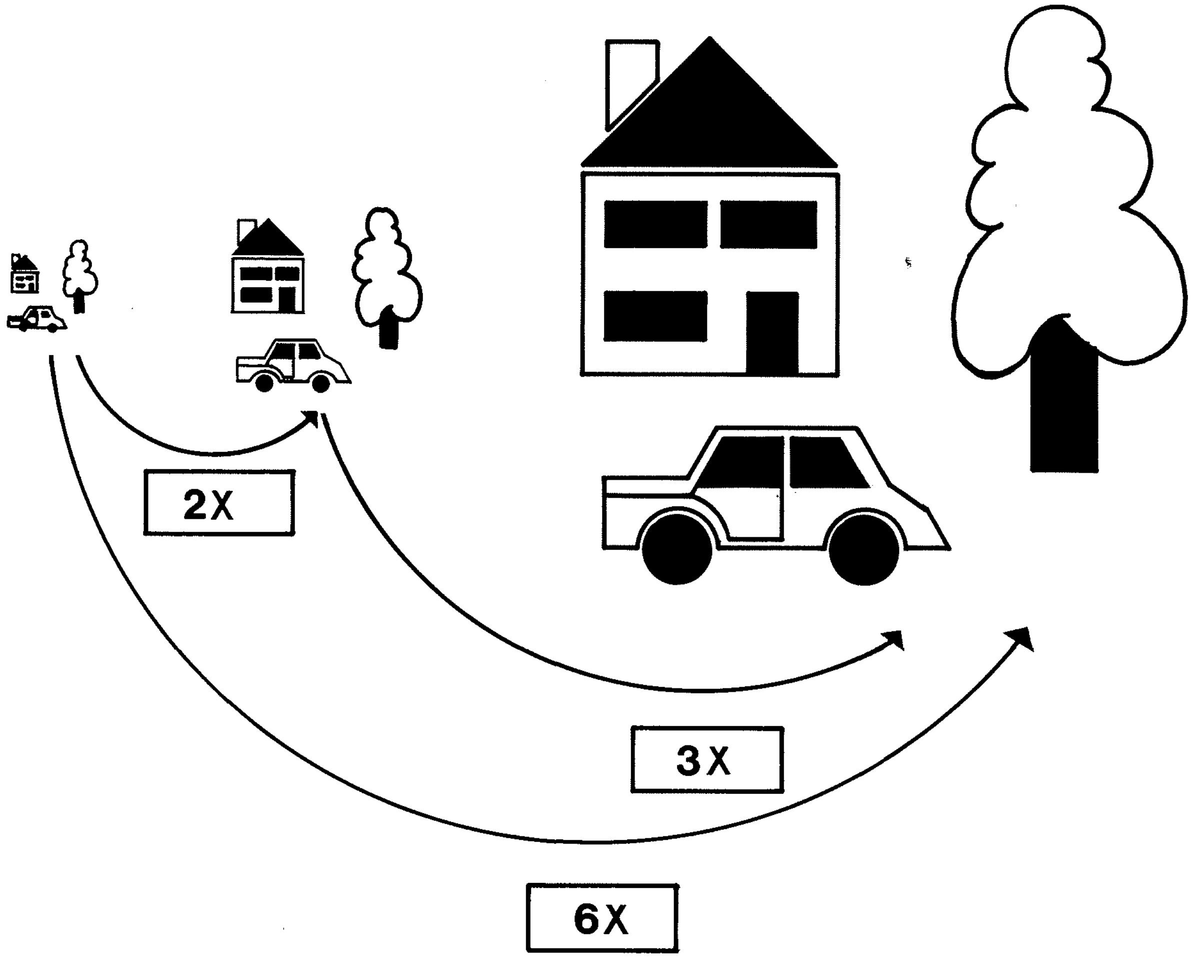
Leerlingen uit de vijfde klas hadden hiermee niet de minste moeite. Toch vallen ze bij opdrachten waarin zij zich onzeker voelen (als bij de ⓪-machine) terug op de input. 'Even met een getalletje proberen.'

De leerlingen uit alle klassen willen graag zèlf sommen bedenken en vervolgens aan elkaar opgeven.

KANTTEKENINGEN

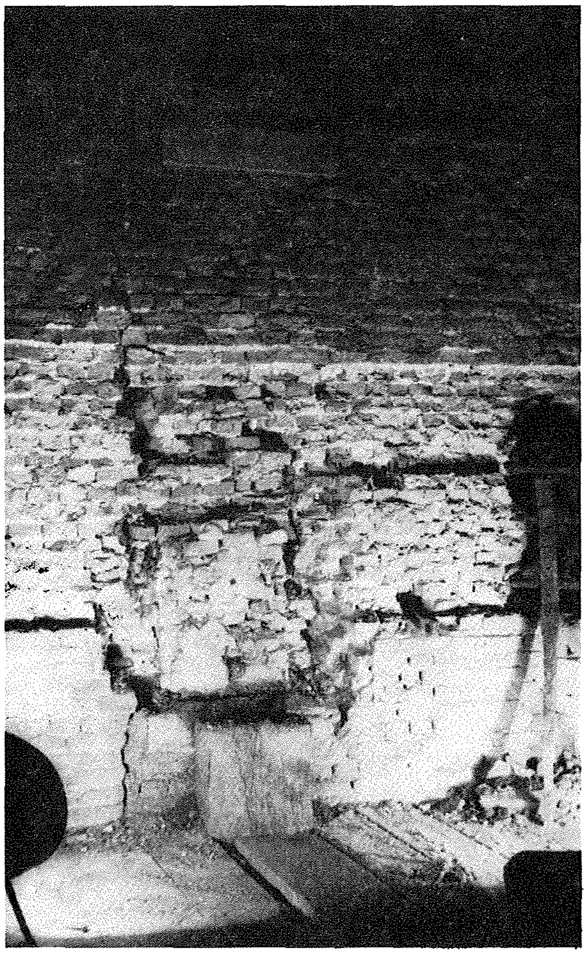
1. *De machine-aanpak kan o.i. tegelijk met het inoefenen van de tafels van vermenigvuldiging beginnen.*
2. *De bizondere rol van de getallen 0 en 1 – voor bijna alle leerlingen moeilijk – kan met de machines verduidelijkt worden.*

3 Een visualisering van de schakeling van machines kan bv. met een tekening:



4 Met machientjes wordt de breuk vooral gebonden aan meetgetallen, eventueel aan aantallen. De vraag is of de verbinding met (fysische) eenheden ook kan worden gelegd, bv. een machine die pannekoeken kan halveren. We krijgen dan het probleem van ②*als machine en* $\frac{1}{2}$ *als de helft van een pannekoek.*

5 Overigens vinden we de namen 'rekmachine' en 'krimpmachine' niet zo erg geslaagd. We hopen dat deze woorden niet in het nederlandse wiskunde-taaleigen worden opgenomen. Wie helpt ons aan een betere vertaling van 'stretcher' en 'shrinker'?



Foto's ontleend aan fotoarchief tijdschrift CEMENT

4.8 BREUKENMATERIAAL

HULPMIDDELEN VOOR HET BREUKEN-ONDERWIJS

1 Inleiding

Het is gezien de voorgaande bijdragen niet verwonderlijk dat de roep om goede hulpmiddelen ter begeleiding van het breukenonderwijs luid klinkt. Al vinden we in de wereld van het kind en de volwassene voldoende aangrijpingspunten ten behoeve van dit breukenonderwijs, toch lijkt het gebruik van goede leermiddelen onmisbaar. We willen immers het inzicht van de leerling niet — door te snel tot formalisering over te gaan — blokkeren. Het blijkt echter dat er niet veel hulpmiddelen voor het breukenonderwijs verkrijgbaar zijn. De leermiddelen die er zijn komen vrijwel allemaal neer op de verhouding van oppervlakken of op de verhouding van lengten. Dit nu is weer in strijd met de didaktische wens de breuken pluriform, d.w.z. op velerlei wijzen, in te bedden in liefst levensechte situaties. Op de Nederlandse Onderwijs Tentoonstelling was dit jaar overigens een recent verschenen serie hulpkaarten te zien, waarin een leergang breuken.

2 Breuken in het voorbereidende en aanvankelijke rekenonderwijs

In deze fase van het, soms onopzettelijke rekenonderwijs, komen zeer gangbare en eenvoudige breuken zoals $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$ op een natuurlijke of speelse wijze in de 'les'-situatie voor. Het materiaal dat men gebruiken kan is vrij eenvoudig te vinden: kastanjes, appels, het ouderwetse lichtknopje — tweemaal een halve draai en het licht is weer uit. Verder kan men de kinderen zelf gebruiken:

- De helft van dat groepje loopt naar de overkant.
- Geef de helft van je appel aan Jan.
- Van je stapeltje lucifersdoosjes geef je de helft aan je buurman.

3 Introduktie van breuken in klas 4 of 5

De voor de begeleiding van het breukenonderwijs op de markt aanwezige leermiddelen zijn voornamelijk gebaseerd op de verhouding van de oppervlakte van een cirkelsektor met de oppervlakte van de gehele cirkel. Bekend zijn de breukencirkels, die in allerlei uitvoeringen verkrijgbaar zijn: voor klassikaal en voor individueel gebruik, voor het flanelbord, het magnetisch bord, enz.
De eenvoudige wijze waarop de onderwijzer zijn bordtekeningen aan dit materiaal kan aanpassen — 'jongens, ik teken hier een pannekoek die in 3 gelijke delen verdeeld is' — maakt dit leermiddel erg aantrekkelijk.
Hetzelfde principe vindt men toegepast bij de breukenrechthoeken en -vierkanten, die allemaal op het oppervlakte-principe zijn gebaseerd.

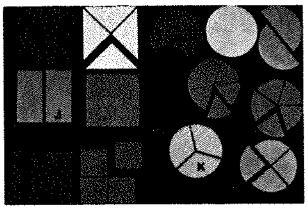


fig.1

De sektoren van de cirkels zijn uiteraard met elkaar te vergelijken door ze op elkaar te leggen. Met kombinaties van cirkelsektoren zijn optellingen en aftrekkingen van breuken aanschouwelijk te maken. Ook hier geldt echter dat de mogelijkheden van deze leermiddelen in kombinatie met werkkaarten aanzienlijk kunnen worden uitgebreid.
Andere leermiddelen, zoals de breukenstaaf, zijn gebaseerd op de verhouding van lengten. Het didaktisch pluspunt van dit leermiddel lijkt te zitten in de mogelijkheid om de staaf ook werkelijk te breken. (de delen zijn door middel van elastiek verbonden.) Ook hiermee zijn eenvoudige optellingen en aftrekkingen aanschouwelijk te maken.

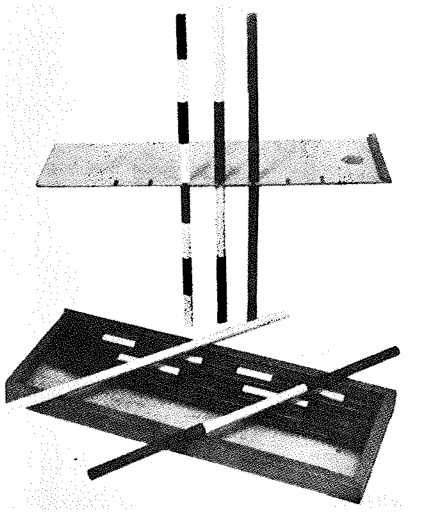
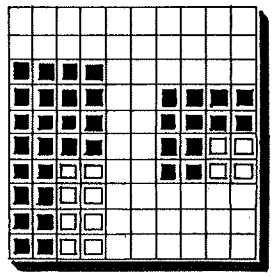


fig.2

Het Cuisenaire-materiaal en het materiaal dat hiermee verwant is (Colour-factor, Rekenmateriaal Vandersteegen, Stern-materiaal) kan eveneens zinvol in het breukenonderwijs gebruikt worden.
'Als de blauwe staaf 1 is, wat is dan de groene staaf? '
Een ander voordeel is dat bij deze materialen begeleiding (handleidingen) verkrijgbaar is.

Het honderdveld is, evenals het daarmee verwante materiaal zoals het pennenbord, zeer goed in het breukenonderwijs te gebruiken.



Het vierde deel

fig.3

Toelichting bij figuur 3:

Hier wordt gewerkt met zwarte en witte fiches. In de linker figuur is een rechthoek van 2 bij 4 fiches wit, de rest zwart. In de rechter figuur bestaat een vierkant van 2 bij 2 fiches uit witte fiches en de rest uit zwarte fiches. Uiteraard kan men het vierde deel (in deze gevallen resp. het rechthoekje en het vierkantje) op diverse manieren in de hele figuur leggen.

4 Vervolg

Nadat de breuken 'geïntroduceerd' zijn, gaat men meestal al spoedig over tot het laten inoefenen van de operaties met breuken.
Ook hiervoor zijn hulpmiddelen verkrijgbaar, bijvoorbeeld in de vorm van een 'breukendomino':

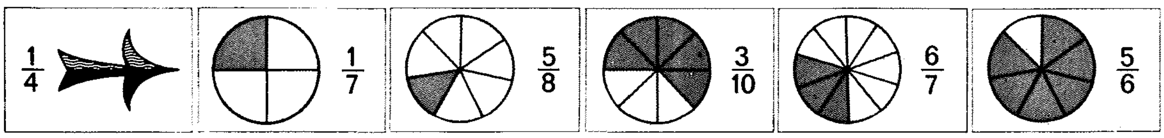


fig.4

4.9 OVERZICHT BREUKENLEERGANGEN

Uit de metodenbibliotheek hebben we – min of meer aselekt – de volgende rekenmetoden gepakt:
DE GRONDSLAG
Jo Haack en L. Lieffering (Uitg.: Dijkstra, Zeist),
REKENEN VOOR DE BASISSCHOOL
J.C. van Gerven e.a. (Uitg.: Malmberg, Den Bosch),
NIEUW REKENEN VOOR HET BASISONDERWIJS
Hermien van de Heuvel,
A. van Lierop, G.J. van Wijk, D.J. van Zuilekom (Uitg.: Bosch en Keuning, Baarn).

We wilden gegevens verzamelen m.b.t. de vragen:
- Welke breuken-leerstof wordt door de metoden aan de orde gesteld en hoe is de verdeling over de leerjaren?
- Zijn er grote onderlinge verschillen tussen de drie metoden?

Na een algemene inventarisering hebben we vervolgens de breukenleerstof per leerjaar gegroepeerd.
Een weergave van het resulterend totaaloverzicht zou te veel ruimte innemen.
We geven derhalve een paar korte karakteristieken van de breukenleergang in elke metode en zetten daarna de gegevens naast elkaar.

LEERJAAR 1, 2, 3

1 DE GRONDSLAG
Alhoewel een systematische behandeling van de breuken eerst vanaf deel 7 plaatsvindt (totaal: 12 delen), wordt in de eerste zes boekjes toch reeds aandacht besteed aan zaken als:
- begrippen (de helft, het derde deel, het vierde deel..., het negende deel);
- de notatie $\frac{1}{2}$;
- oefeningen als: 'schrijf het zesde deel op van 360',
  '$2\frac{1}{2}$ gld. = ... cent'.

2 REKENEN VOOR DE BASISSCHOOL
Waar het beginpunt voor het systematisch breuken-onderwijs in de metode 'De Grondslag' heel duidelijk te identificeren is, is dat in 'Rekenen voor de basisschool' veel moeilijker te bepalen.
Er is een *vloeiende* overgang van de voorbereidende naar de meer systematische fase te onderkennen.
Uit de 'Algemene Inleiding' is op te maken dat de auteurs onder 'voorbereidend breukenonderwijs' al datgene verstaan wat voorafgaat aan een stelselmatige oefening van de operaties met breuken.
De breuken $\frac{1}{2}$ t.e.m. $\frac{10}{10}$ vormen als 'Bruchoperator' in de delen voor het derde leerjaar een soort 'breukenbrug'.
De eerste 6 delen (totaal: 12) stellen aan de orde:
- begrippen (de helft, het dubbele, een kwart, een part, één heel, het derde deel, het vierde deel, ... het tiende deel);
- notaties $\frac{1}{2}$ tot $\frac{10}{10}$;
- oefeningen als: 'de helft van 4 is', 'anderhalf keer zo lang';
- operaties
  – optellen ($\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$)
  – aftrekken ($\frac{6}{10} - \frac{5}{10}$; $1 - \frac{3}{5}$)
  – vermenigvuldigen ($4 \times \frac{1}{5}$; $\frac{1}{7} \times 420$);
  – delen ($\frac{4}{5} : 2$).

Bij de introduktie wordt gebruik gemaakt van het z.g. 'staafmodel': | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

3 NIEUW REKENEN VOOR HET BASISONDERWIJS
Evenals in de onder 2 genoemde metode is er sprake van een vloeiende overgang van het voorbereidende naar het meer systematische breukenonderwijs.

De delen voor de eerste drie leerjaren (1a t.e.m. 3b) presenteren aan 'breukenstof':

- begrippen (halve, de helft, door midden, het derde deel, het vierde deel, het vijfde deel, het tiende deel);
- oefeningen als: 'de helft van 164', 'het derde deel van 360', 'verdeel in tweeën;
- notaties: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$;
- operaties
  - optellen ($6\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}$)
  - aftrekken ($9 - \frac{1}{2}$)
  - vermenigvuldigen ($\frac{1}{4}$ x 24)
  - delen (9 : 2).

Vergelijking van de leerstofselektie der drie metoden.
Leerjaren 1, 2, 3.

- In 'De Grondslag'(1) wordt aanzienlijk minder aan breuken gedaan' dan in 'Rekenen voor de basisschool' (2), terwijl deze laatste er ook meer aandacht aan schenkt dan 'Nieuw Rekenen' (3). Vgl.:

- de notaties

1	2	3
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ t.e.m. $\frac{10}{10}$	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$

- de operaties

	1	2	3
optellen	—	$\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$	$6\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}$
aftrekken	—	$1 - \frac{3}{5}$	$9 - \frac{1}{2}$
vermenig-vuldigen	—	$\frac{1}{7}$ x 420	$\frac{1}{4}$ x 24
delen	—	$\frac{4}{5}$: 2	9 : 2

Leerjaar 4, 5, 6

X — in 4e klas gepresenteerd
O — in 5e klas gepresenteerd
* — in 6e klas gepresenteerd

Operaties	1	2	3	
Optellen				
Gelijknamige breuken				
geheel getal en breuk	X	X	X	
geheel getal en gemengd getal	X	X	X	
twee gemengde getallen	X	X	X	
gemengd getal en breuk		X		
met 'helen' uithalen		X		

Ongelijknamige breuken			
twee breuken	O	O	*
twee gemengde getallen	O	O	*
Aftrekken			
Gelijknamige breuken			
geheel getal en breuk	X	X	X
geheel getal en gemengd getal	X	X	X
twee gemengde getallen (zonder lenen)	X	X	X
twee gemengde getallen (met lenen)	O	X	*
gemengd getal en breuk	X	X	*
Ongelijknamige breuken			
twee gemengde getallen	O	O	
Vermenigvuldigen			
geheel getal en breuk	O	X	X
gemengd getal en geheel getal	O	X	
twee gemengde getallen	O		
twee breuken (met wegstreeptruc)	O	*	*
gemengd getal en breuk		*	*
geheel getal en breuk (met 'helen uithalen')		X	
Delen			
breuk en geheel getal		X	X
gemengd getal en geheel getal	O	X	*
twee breuken (met wegstreeptruc)	*	*	
twee gemengde getallen		*	*

Aan dit overzicht van de 'operaties' dient nog een enkele opmerking te worden toegevoegd:

- de drie metoden brengen de breuken in verband met de procentrekening;
- aan het omzetten van 'gewone' breuken in decimale getallen (en omgekeerd) wordt door de drie metoden aandacht geschonken;
- de teller en noemer als termen van een verhouding komen alleen in metode 1 aan de orde;
- het naar grootte ordenen van breuken komt vooral in de onder 2 genoemde metode voor;
- kombinaties van operaties (gelijknamig maken, optellen, helen uithalen, vereenvoudigen) krijgen in metode 2 het meeste aksent;
- in de metoden 1 en 2 komen samengestelde breuksommen voor;
  – vb.: $3\frac{1}{5} + \frac{3}{4} : \frac{2}{3} \times 2\frac{1}{4} - \ldots = 1{,}715$ –.

De laatste 6 delen van metode 1 hebben we nog eens doorgebladerd teneinde een indruk te krijgen van het aantal pagina's dat aan 'breuken' is besteed.
We vonden (globaal):

Deel 7 – 7 pagina's
Deel 8 – 25 pagina's
Deel 9 – 23 pagina's
Deel 10 – 20 pagina's
Deel 11 – 13 pagina's
Deel 12 – 11 pagina's

Alhoewel deze aantallen geen *precies* beeld geven van de hoeveelheid tijd die aan breuken besteed wordt, kan toch wel opgemerkt worden dat m.n. in de tweede helft van het vierde leerjaar en tijdens het vijfde leerjaar een aanzienlijke plaats van het programma door breuken wordt ingenomen.

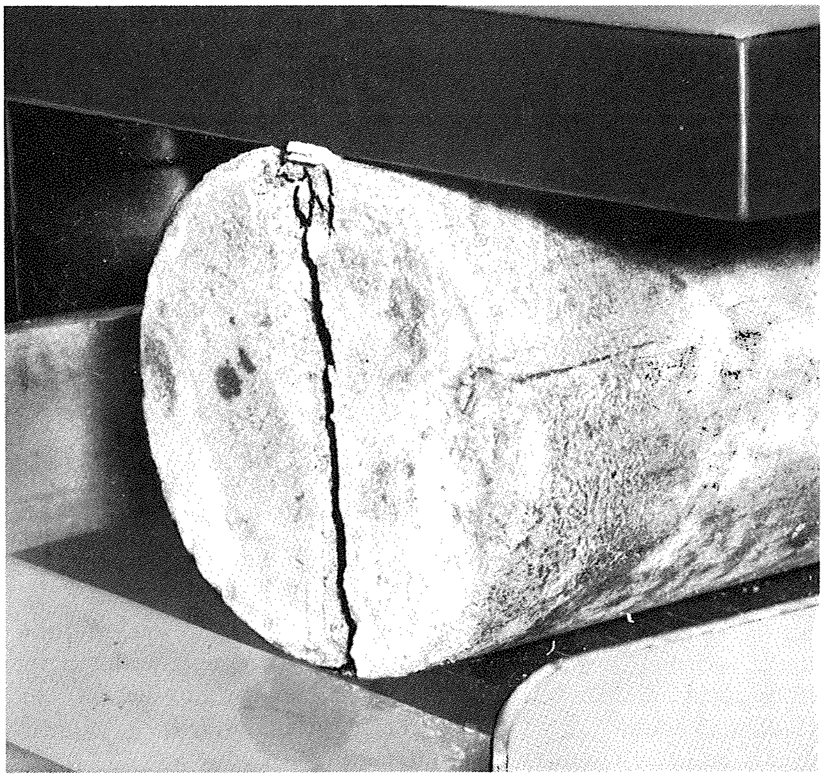
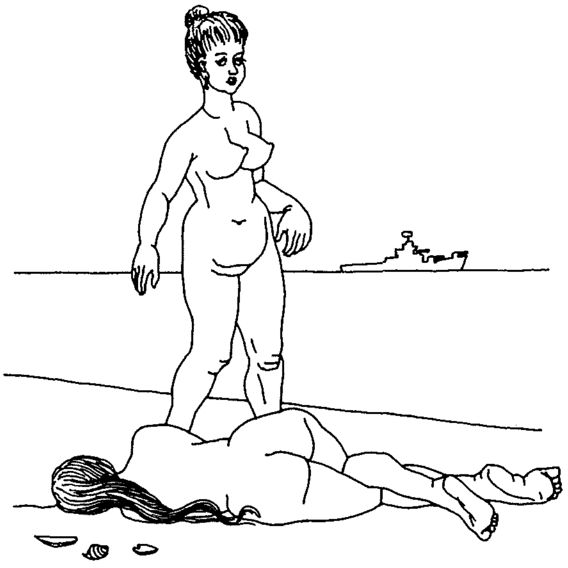


Foto ontleend aan foto-archief tijdschrift CEMENT

4.10 TOEVALLIG OOK NOG EENS EEN KEER BREUKEN

BREUKEN EN LEERPLANONTWIKKELING

Na alles wat u over breuken gelezen hebt in het Wiskosbas-Bulletin kunnen we ons afvragen:
Wat nu?
Gaan we frontaal in de aanval of zijdelings in de verdediging?



'frontaal in de aanval of zijdelings in de verdediging'

Laten we de breuken maar voor wat ze zijn en gaan we weer over tot de orde van de dag?

Het zou jammer zijn als de geleverde bijdragen over breuken als het *einde* beschouwd zouden worden, terwijl ze juist als een begin bedoeld zijn van een stukje leerplanontwikkeling, dat in 1975 afgesloten wordt.

Daarom nogmaals de vraag: Wat nu?

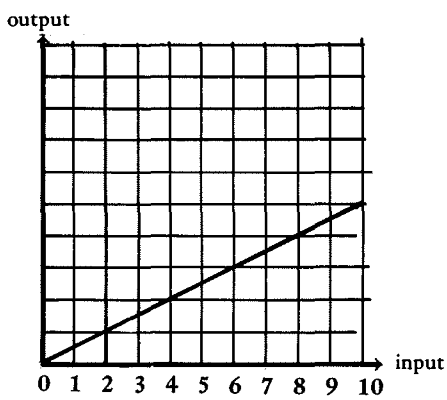
Welnu, u kunt als schoolteam een belangrijk stuk van die leerplanontwikkeling mede gestalte geven vanuit de heroriënteringskursus om tenslotte een totale herziening van het werken met gebroken getallen op uw school te bewerkstelligen en ons uw programma mede te delen. Allereerst dan iets over de heroriënteringskursus.

Bij het *Stadsplan* kunt u – vooral in de hoogste klassen – de breuken laten herontdekken op de wijze als in 'Breuken in het stadsplan' (4.5) wordt aangegeven. Wellicht is het ook mogelijk om reeds in klas vier een soortgelijke aanpak te realiseren.

Bij het onderwerp *Grafische verwerking* komt de getallenrechte te pas en daarmee: 'Breuken en kommagetallen' (4.6).

Bij *In Orde* was er sprake van machientjes.
'Breuken als machientjes' (4.7) kan daarbij in de klas uitgeprobeerd worden en de resultaten grafisch verwerkt.

De rationale getallen 0 t.e.m. 10 in een ②-machine, kunnen we als volgt visualiseren:



Merk op, dat de breuk
als rationaal getal (input)
als verhoudingsgetal
als equivalentieklasse
als operator
in dit plaatje weergegeven is, waarmee een verbinding tot stand gekomen is met 'Breuken in het stadsplan'.

Ook in andere HOO-blokken kan de aandacht zinvol op breuken gericht worden. Het *Spijkerbord* geeft aanleiding om breuken i.v.m. oppervlakte te brengen; bij het cirkelspijkerbord kan een soort pannekoekmodel geïntroduceerd worden van regelmatige veelhoeken en vlakvullingen.

Bij *Open Beweringen**) kan door de keuzeverzameling de aandacht op gebroken getallen gericht worden.

Tel op tal kan benut worden voor kommagetallen vooral wanneer we meer speciaal de talstelsels beschouwen. De nadruk kan tevens komen te liggen op bepaalde eigenschappen van natuurlijke getallen, die een goede introduktie van breuken waarborgen (zie de bijdrage van Jan Nieland in Bulletin 4).

Het blok *Meten* geeft onder meer aanleiding tot een behandeling met vouwblaadjes.

De *Waarschijnlijkheidsrekening* biedt vele mogelijkheden om met breuken te werken. Tolletjes, dobbelstenen, toevalsgetallen zijn kansmodellen, die in verband met breuken gebracht worden. Optellen en vermenigvuldigen van breuken en ook de breuk als operator krijgen hier een toepassingsgebied.

Kortom, vrijwel ieder blok van de HOO-kursus brengt een bepaald aspekt van het breukbegrip naar voren en als zodanig krijgt een stukje leerplanontwikkeling van gebroken getallen zijn natuurlijk startpunt in de heroriënteringskursus.

Na één jaar kan het schoolteam trachten een nieuwe leergang voor gebroken getallen in te voeren. De ervaringen vanuit de HOO-blokken plus de suggestie voor een nieuwe leergang van Jan Nieland gevoegd bij de specifieke bijdragen uit het Wiskobas-Bulletin vormen een goed uitgangspunt.

Voorzichtig zou men kunnen aanbevelen om de breuk vroegtijdig te introduceren, het breukbegrip te ontwikkelen aan meten, schatten, verdelen van hoeveelheden, verdelen van fysische eenheden, werken met machientjes en kwantificeren van kansen.
Daarbij kunnen dan adekwate hulpmiddelen gebruikt worden: de meetlat, de getallenrechte, het rooster, de pannekoek, tolletjes, strips en dobbelstenen. Het rekenen met gebroken getallen kan plaatsvinden nà of nàast het rekenen met kommagetallen en dient sober te geschieden. In enkele traditionele metoden is een duidelijke tendens naar besnoeiing te bespeuren; men kan er zijn voordeel mee doen.

Als we op deze manier met elkaar proberen om vanuit de heroriëntering het onderwijs in gebroken getallen opnieuw te bezien, moeten we in staat zijn om in 1975, als het integratieplan voltooid wordt, een gefundeerde aanbeveling te doen over het rekenen met breuken. In de komende jaren dienen we dan omzichtig te werk te gaan.

Wellicht is de hier aangegeven lijn — werken met het hele schoolteam én vanuit de H.O.O.-kursus een nieuw breukenprogramma samenstellen — een waarborg om *geen brokken met breuken* te maken.
Vergeet vooral niet om uw ideeën naar Wiskobas te sturen; we kunnen er dan met z'n allen van profiteren.
We hopen met voorgaande opmerkingen nog eens onderstreept te hebben, dat leerplanontwikkeling een proces is dat een produkt oplevert. De waarde van dit produkt hangt dan vooral af van de participatie der betrokkenen: het laatste woord over breuken is dus gelukkig nog niet gesproken. Met name de studenten van de P.A. kunnen via de skriptoteek hun bijdrage leveren.

* 'Open beweringen', 'Tel op Tal' en 'Meten' zijn onderwerpen die gedurende het tweede kursusjaar behandeld worden.

INHOUD

MEDEWERKERS AAN DIT BLOK: Valeer van Achter, Ger Blaauw, Chris Boekkooi, Tineke Brinkman, N.G. de Bruyn, T.A. van den Dool, Daisy Howell, Rob de Jong, Daan Klaassen, Hans du Maine, A. Marinus, N.Matze, docenten en kursisten Meppel, P. Woestenenk.

respons blok

4.1 INLEIDING

Een belangrijk gedeelte van dit RESPONS-BLOK is samengesteld uit reakties op aflevering 4 ('breukennummer 1'). Vanuit de idee dat een diskussie over 'breuken in de basisschool' wenselijk is voor alle werkers in het onderwijsveld, is eind juni aan een aantal deskundigen gevraagd om te reageren op het VARIABEL BLOK van aflevering 4.

Wel, de vakantie-periode speelde parten. Veelal was het onmogelijk om op korte termijn te reageren. Soms ook omdat de wens naar voren werd gebracht, om het onderwerp eerst nog eens met een groep kollega's door te spreken. Deze bijdragen zullen in volgende afleveringen geplaatst worden.

Toch hebben we nu reeds een aantal reakties ontvangen, die zeker het publiceren waard zijn.
P. Woestenenk — rekendidaktikus en auteur van 'Rekendidaktiek' — beschrijft in **4.2** twee kriteria, te weten: aanschouwelijkheid en dinamiek.

Daisy Howell — leidster van het SOSO-projekt in Cleveland — heeft ons een uitgebreide set 'aktiviteits-kaarten' gestuurd, die we onmogelijk allemaal kunnen opnemen. Uit de 'breukenserie' hebben we één kaart gekozen (**4.3**).

Valeer van Achter — rekendidaktikus en auteur van vele artikelen en boeken op het gebied van de modernisering van het rekenonderwijs — heeft als bijdrage een artikel over 'Breukenmachientjes' gestuurd (**4.4**).

A. Marinus — leraar aan een leao-school te Groningen — stuurde cijfermateriaal over een 'breuken-test' (**4.5**).

In **4.6** hebben we vier korte reakties bijeengeplaatst.

Het leek ons niet juist om deze eerste reakties al van kommentaar te voorzien. We zouden dan toch wat in strijd handelen met de **open werkwijze** *— scharnier in de leerplanontwikkeling van wiskobas —*
U heeft immers nog geen gelegenheid gehad om te reageren op de 'uitwerkingen voor de schoolpraktijk' in het VARIABEL BLOK van deze aflevering. Uw ideeën willen we graag mede in beschouwing nemen bij het leveren van kommentaar. Kommentaar dat u tegemoet kunt zien in één van de eerste twee nummers van de nieuwe jaargang en dat zowel uit meer algemene wiskundig-didaktische opmerkingen, als uit kanttekeningen bij brieven en te signaleren tendenzen zal bestaan.
De bijdragen in dit RESPONS BLOK kunt u het beste opvatten als een soort inleiding op de dialoog. Een dialoog die na de 'uitwerkingen' in het VARIABEL BLOK heel konkreet kan worden.
U doet toch ook mee?
U heeft ongetwijfeld uw ideeën over het onderwijs in breuken. Dat kan niet anders!

Op een bloknoot-velletje kunt u heel wat schrijven.

Naast deze reakties wilden we toch ook plaats inruimen voor een aantal korte bijdragen die niet direkt met 'breuken' te maken hebben.

In **4.7** staat onder de kop 'Meer lef hebben' een verslag van een bijeenkomst voor kursisten-vertegenwoordigers. Deze bijeenkomst vond plaats op vrijdagmiddag 9 juni j.l.

In de schoolkrant van de 'School met de Bijbel' te St. Annaland heeft een artikel gestaan over 'Wiskunde op de basisschool? Ook bij ons!' In **4.8** wordt hieraan enige aandacht besteed.

Een 'praktisch' probleem (**4.9**) is geïnspireerd op blok 3 uit de blokkenserie voor de heroriëntering.

Van hetzelfde blok zijn op alle kursussen 'ervaringen in de klas' onderwerp van bespreking geweest. Uit het verslag van deze besprekingen in Meppel hebben we in **4.10** enkele gedeelten opgenomen.

In Wiskobas-Bulletin nr. 4 is een fragment van een brief uit Delfzijl aan de orde gekomen. In deze brief staan nog enkele vragen, die echter niet goed in kort bestek zijn te beantwoorden. De vragen die de briefschrijver — de heer Roggen — stelt, zijn:

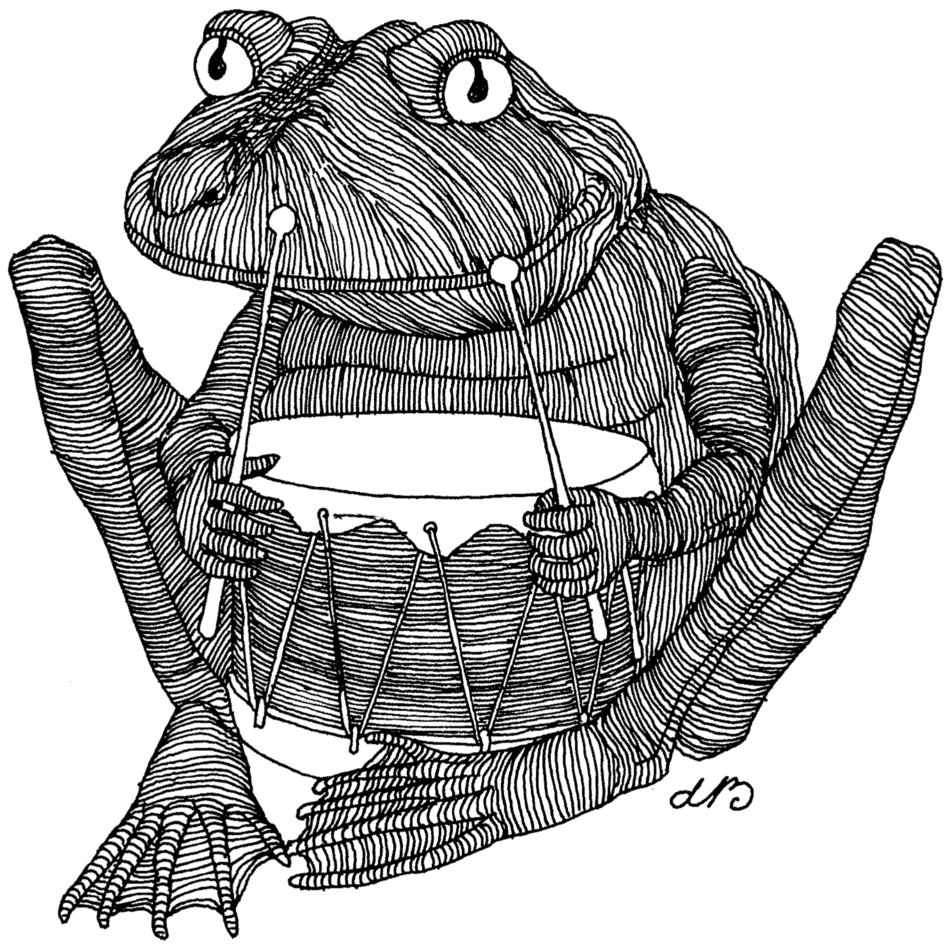
- Is het mogelijk om de leerlingen beter te leren denken?
- Kan de denkfunktie van de hersenen ontwikkeld worden door het oplossen van problemen?

Mochten er meer lezers zijn die het wenselijk achten dat deze vragen uitgebreid in het Bulletin aan de orde komen, dan zullen we dat graag doen. Dan even een briefkaartje naar de redaktie. Voorlopig volstaan we met het noemen van enkele boeken over deze problematiek, n.l. Lee S. Shulman & Evan R. Keislar
— Learning by discovery — A critical appraisal (Rand McNally & Company, Chicago — 1966).
Lezing van het artikel van Robert Davis kunnen we van harte aanbevelen.

Benjamin Kleinmuntz
— Problem Solving: research, method and theory (John Wiley & Sons Inc., New York — 1966).
Hierin staat zeer veel informatie van een twaalftal vooraanstaande auteurs. M.n. de bijdrage van Gagné is de moeite van het lezen waard.

Rektifikatie

In aflevering 4 staat tot onze spijt in het RESPONS BLOK een storende fout.
De auteurs van GRAFIEKEN 'OP DE KLOKKENBERG' zijn geen studenten P.A., maar kursisten van de heroriëntering.



TROMMELKIKKER

4.2 AANSCHOUWELIJK - DINAMISCH

P. WOESTENENK

Het is evident dat *'breuken-ja-of-nee'* een probleem is waarvan de oplossing alleen gegeven kan worden in het licht van een duidelijke doelstelling. Welke is die? Treffers en Goffree zeggen daar het een en ander over. In de 'eksploratiefase' komen enkele zaken aan de orde; die werken we didaktisch uit en dan zien we wel waar we terecht komen.
Wélke zaken?
Is er enig richtsnoer, enig kriterium?
'Rekening houden met de plaats die deze (problematieken) kunnen innemen bij de a.s. leerlingen,' zegt Goffree.
Vager kan het niet. Verheug ik me enerzijds dat de afgesleten kriteria (praktisch nut, vervolgonderwijs, vormende waarde) niet meer opdraven, anderzijds zou het te betreuren zijn als we nu, de traditie op de korrel nemend, persoonlijke of groeps-voorkeur als kompas nemen.
Overigens is het denkbeeld: problemen aanpakken, zien welke aanpak daarvoor (in wiskundige zin) verantwoord en doelmatig is, en n.a.v. de bevindingen je wiskundeprogram opstellen – dat denkbeeld is m.i. gezond. Konsekwent geredeneerd zou de wiskunde dan geïnkorporeerd moeten worden bij de z.g. wereldoriëntatie. Dan komen we natuurlijk nooit op het schoollokaal als bruine-bonensilo of op het terugzoeken van zoekgeraakte getallen in een voerbaltabel. Deze tendens zie ik trouwens ook niet bij Wiskobas en ik ben er niet rouwig om.

Soms bekruipt me de gedachte dat de 'integratie-fase' in principe allang klaar ligt en in deze 'eksploratiefase' enkel gezocht wordt naar bruikbare wegen die daar naar toe leiden. Ik weet dat natuurlijk niet en deze opmerking is ook niet als een insinuatie bedoeld. Ik zou het helemaal zo'n gek procédé niet vinden. Wél zitten we dan nog net zo met die kriteria – of liever: zonder.

In een paar alinea's een mij bevredigende reeks stofkriteria ontwikkelen, is me niet mogelijk. Laat ik er dit van mogen zeggen.
De basisschool moet evenmin proberen wiskunde te onderwijzen als geografie, biologie of taalkunde. Wat ze wèl moeten doen is: *een lichtend perspektief openen.* Wie de enormiteiten kent die door het grote kontingent middelmatig-begaafden, enkele jaren na de basisschool, worden gedebiteerd – wie ooit heeft mogen opboksen tegen hun uitgesproken reken-aversie, die weet dat de basisschool wat deze eisen betreft, doorgaans volledig faalt.
Waar zit dat in?
Ik zoek de oorzaak in eerste instantie in het ontbreken van een aanschouwelijke ondergrond. Er zijn maar weinig z.g. zwakke (volwassen) rekenaars die een antwoord weten op de vraag:
'Om 3x84 uit te rekenen neem jij eerst 3x80 en dan 3x4; maar als je 3+84 uitrekent neem je *niet* eerst 3+80 en dan 3+4. Waarom eigenlijk de ene keer anders dan de andere?'
Men stelt zich n.l. bij 3x84 niets voor, kán zich er misschien zelfs niets bij voorstellen. Wie beide gevallen (3x84 en 3+84) konkretiseert, vindt het een belachelijk eenvoudige vraag.
Hopelijk geeft dit voorbeeld enigszins aan, wat ik met aanschouwelijkheid bedoel. De ellende is, dat die aanschouwelijkheid veelal uitsluitend een rolletje speelt bij de introduktie van iets nieuws.
'Hoe eerder ze het zonder die hulpmiddelen kunnen stellen, hoe beter. Ze moeten immers tot abstraktie komen!'
Weinig dogma's hebben zoveel didaktisch onheil aangericht als dit. De aanschouwing is franje, geen ondergrond. En dat betekent dat er geen ondergrond, geen basis overblijft.

Telkens weer doe ik de ervaring op dat een figuur waarmee ik een probleem tracht te ver-

duidelijken, nauwelijks wordt aangekeken, laat staan dat iemand ooit op het idee komt uit zichzelf zo'n figuur te ontwerpen. Kennelijk is zo'n vertaling van getallenproblemen in een figuur erg ongewoon en meteen ook geheimtaal.
Als 4 hokjes op ruitjespapier gearceerd zijn en f 60,– voorstellen (dat wordt wel aanvaard) en het blok van 4 tot 7 hokjes wordt uitgebreid, dan is het voor de meesten een groot probleem, wat dit nieuwe blok nu wel voorstelt.
Als ik het getal 4 *noem*, is er al meer kans dat iemand op 60:4 komt; *noem* ik de 3 (het aantal hokjes dat er bij komt), dan is het vrijwel zeker dat de meesten op zijn best 3x15 uitrekenen en niet op het idee 7x15 komen. Ik bedoel: niet wat ze *zien* geeft steun, maar wat ik *zeg*, Kom me niet aandragen met auditieve en visuele typen; het is overduidelijk: figuren zijn nooit een steun geweest, enkel een vervelend of amusant inleidinkje tot stom gecijfer.

Die aanschouwelijkheid moet bovendien *dinamisch* zijn; in zo'n figuur moet iets gebeuren. Voor voorbeelden zie men mijn 'Rekendidaktiek', bijv. bij de verhoudingen. In de povere aanschouwelijkheid van de traditionele rekenmetoden zijn de figuren doorgaans statisch. Vandaar dat drie-dimensionaal materiaal (MAB, logiblokken, Cuisinaire, enz.) zoveel beter aanslaat dan figuren. Maar helaas: zulk materiaal leg je na een inloopperiode op zij, je 'maakt je er los van'. Jawel, zeg liever: je bent je ondergrond kwijt.
Montessori-leerlingen die met de deelbak hebben gemanipuleerd, zijn na een jaar niet meer in staat het ding te gebruiken. Maar wat heb je er dan aan? Misschien heb je de gangbare algoritmus er indertijd mee leren doorzien – maar als dat inzicht verloren is gegaan, is het via het leermiddel niet meer terug te vinden. Is dat inzicht ook eigenlijk overbodig, dan was het leermiddel al bij voorbaat zinloos. Kort gezegd: *een aanschouwelijke basis die niet permanent funktie-bereid is, is waardeloos.*

De taak van de basisschool, met name wat de wiskunde betreft, zie ik nu hierin: Zij leert de kinderen, ruimtelijke voorstellingen te onderzoeken op regelmatigheden, patronen of strukturen (Sawyer); ze leert om deze voorstellingen te gebruiken als modellen voor allerlei processen en omgekeerd: die voorstellingen te lezen als simulanten voor processen. Ik geloof niet dat dit wiskunde is; wél meen ik dat het een uitstekende, om niet te zeggen: onmisbare voorwaarde is om ooit tot wiskunde te komen.

Wat heeft dit hele verhaal met het breukenprobleem te maken?
Wel:
1 Wat we van breuken behandelen blijft beperkt tot datgene wat helder en dinamisch is uit te beelden.
2 Die uitbeelding mag geen illustratie, nog minder: franje zijn, maar is de feitelijke grond waarop de kennis wordt gebaseerd.
3 De leerlingen worden doordrongen van deze regel: wat ik niet eenvoudig in een figuur kan demonstreren, daaraan brand ik mijn vingers niet door 'maar wat te doen'. (Als die kindertjes bij Nieland dat eens deden bij hun verhaal $\frac{4}{5} + \frac{3}{7} = \frac{7}{12}$!)
4 Geplaatst voor de keuze: koekmetode (ontbijt- of pannekoek) of machientje, opteer ik voor het machientje, als zijnde meer dinamisch.
In grove trekken zijn er twee manieren om de breuken in te leiden:
* de breuk als (*statisch*) resultaat van een bewerking (Nieland) en
* de breuk als signaal voor een (*dinamische*) bewerking.
Daarmee is meteen voor mij de keus bepaald. Een film doet het altijd beter dan een dia.

Geen lezer zal boosaardig genoeg zijn, het bovenstaande te willen beschouwen als een komplete teorie. Bij het neerschrijven borrelen ook bij mij van alle kanten de ja-maar's op. Als Leitmotiv bij de stofkeuze en -behandeling is er toch wel iets mee te beginnen. De tot nu toe verschenen blokken van Wiskobas zijn er, meen ik, niet mee in strijd.

4.3 SOSO

Dr. Daisy Howell, leidster van het projekt SOSO (Save Our Slow Ones) stuurde als respons een serie aktiviteitskaarten. Een gedeelte van deze serie is aan breuken gewijd.*

Informatie over het projekt:

Doel was: het toetsen van de bruikbaarheid van speciaal ontwikkelde 'multi-sensory aids' voor zwakke leerlingen uit het zesde leerjaar.

Allerlei 'aids' werden gebruikt: lollie-stokjes, Cuisenaire-staafjes, plakplaatjes, spatels, houten blokken, plastic figuurtjes, enz.

'Breuken' was één van de 7 units waar het projekt op gericht was. Andere 'eenheden': geometrie, getalteorie, waarschijnlijkheid, operaties met hele getallen.

De eerste fase van het projekt startte in juni 1970 met 16 zwakke leerlingen (IQ tussen 75 en 90) uit een zesde klas. Hun prestaties op schoolvorderingentests lagen beneden de 30ᵉ percentiel.

Een paar opmerkingen van de proefleiders:

- Een duidelijke attitude-verandering m.b.t. de 'eenheden' was te konstateren; op de vraag wat de leerlingen het leukst hadden gevonden, werd zonder uitzondering geantwoord: breuken.
- De leerlingen waren steeds enthousiast aan het werk, met zelfvertrouwen, trots en een gevoel van écht sukses; herhaaldelijk wilden ze anderen laten zien hoe goed ze het wel deden.

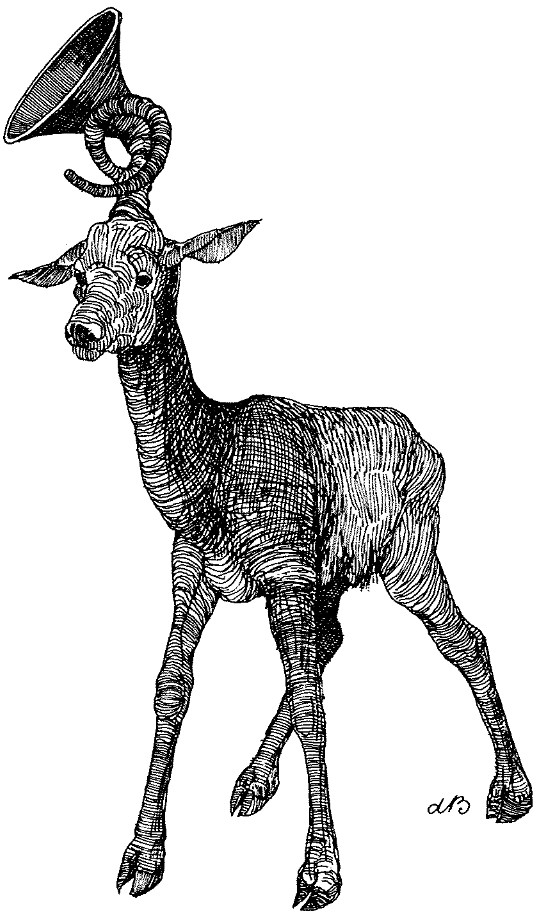
* Delta State College, Cleveland

De veronderstelling dat een leerling een wiskundig begrip beter zal begrijpen wanneer hij een visuele voorstelling of een konkreet objekt bij de hand heeft op het moment van presentatie, werd door het onderzoek bevestigd.

In een serie van 12 aktiviteitskaarten komen de breuken aan de orde. De titels van de kaarten zijn — met tussen haakjes het gebruikte materiaal —:

- equivalente breuken (rechthoekjes)
- equivalente breuken (cirkels)
- optellen van gebroken getallen (rechthoekjes en cirkels)
- aftrekken van gebroken getallen (rechthoekjes en cirkels)
- equivakente breuken (getallenlijn)
- equivalente breuken (breukenstroken)
- optellen, aftrekken en delen van breuken (breukenstroken)
- breuken op het stadsplan (geordende-paren-boom)
- equivalente breuken (geordende-paren-boom)
- ordenen van breuken (geordende-paren-boom)
- optellen en aftrekken van breuken (geordende-paren-boom)
- vermenigvuldigen van breuken (tegeltjes en roosters)

Om u een indruk te geven van deze kaarten, nemen we laatstgenoemde kaart integraal op



HOORNHERT

Activity 25: Multiplying Fractions (Tiles and Grids)

The purpose of this activity is to provide the student with a concrete object which will illustrate multiplication of fractions. This will be accomplished through the use of tiles, grid sheets and plain paper.

Objectives

1 With the aid of pencils and paper the student will multiply two fractions by dividing a rectangle into vertical and horizontal regions and shading the appropriate parts.
2 With the aid of tiles and grids the student will illustrate multiplication of fractions.

Development of the Activity

Each student should be provided with a set of tiles, grids, paper and pencils for use in the development of this activity.
1 On a plain sheet of paper draw a rectangle. Divide this rectangular region into two congruent parts. If we consider the entire region as a whole, then one of these congruent parts is one half. Now divide each of these regions into two congruent parts. What part of the whole is one of these regions? Repeat activity with other fractions such as fourths, thirds, and fifths.
2 Draw another rectangle and divide it into two congruent parts. Shade one of these parts red. Now divide each of the congruent regions into two congruent parts and shade one half of the region blue. What part of the entire region is shaded both red and blue? (note here intersection of sets.) We represent this as $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
3 Draw another rectangle and divide it vertically into three congruent regions. Shade one of the regions red. What part is shaded? Divide the rectangle horizontally into four congruent regions. Shade three of these regions blue. What part of the rectangle is shaded blue? Now what part of the rectangle is shaded both red and blue? How do we state this mathematically? ($\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$) How many small regions have we divided the rectangle into?
4 Repeat this activity until the student can multiply one fraction by another and can tell you that the number of small regions a rectangle is divided into is the product of the denominators of the fractions.
5 Now let's multiply using our set of tiles. Take the 2x2 tile from your kit. Divide this tile into two congruent parts by finding two tiles which exactly cover it. One of these tiles can be denoted by one half. Now divide one tile into two congruent parts by finding two tiles which will exactly cover it. This small tile is what part of the whole tile? In other words $\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{2}$ or $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ is $\frac{1}{4}$.
6 Suppose we wanted to multiply $\frac{1}{3}$ by $\frac{1}{4}$. Can you make a rectangle of small tiles which will illustrate the number of divisions we would have when multiplying $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$?(Student should know from exercises 1 and 2.) Place these tiles on a grid sheet with 12 small regions. Keep $\frac{1}{4}$ of the tiles on the grid and remove the others. Now keep $\frac{1}{3}$ of these remaining tiles. How many tiles do you have? What part of the whole is this? In other words: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.
7 Repeat this activity with several other fractions.

Resource Materials

Tiles of three different sizes
Grid sheets
Paper and pencils

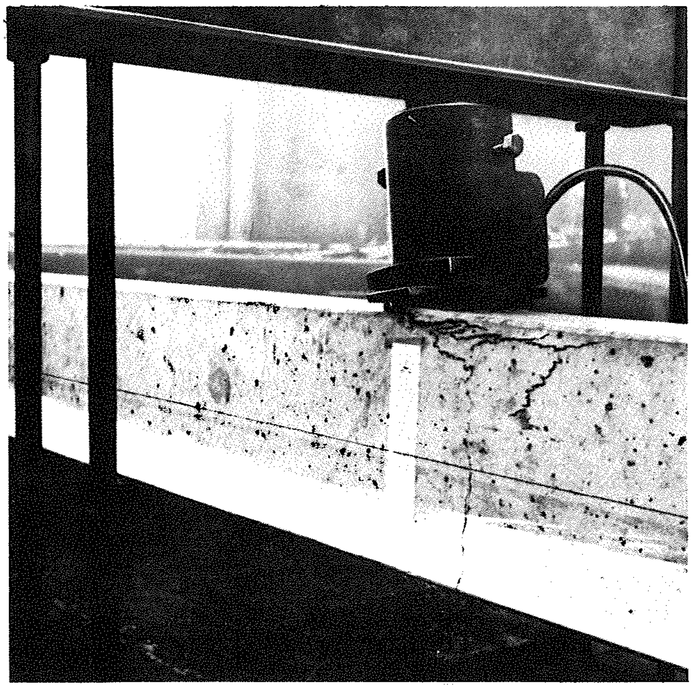


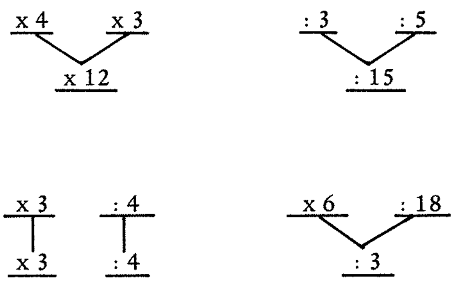
Foto ontleend aan fotoarchief tijdschrift CEMENT.

4.4 BREUKMACHIENTJES EN HET TRADITIONELE REKENEN

VALEER VAN ACHTER

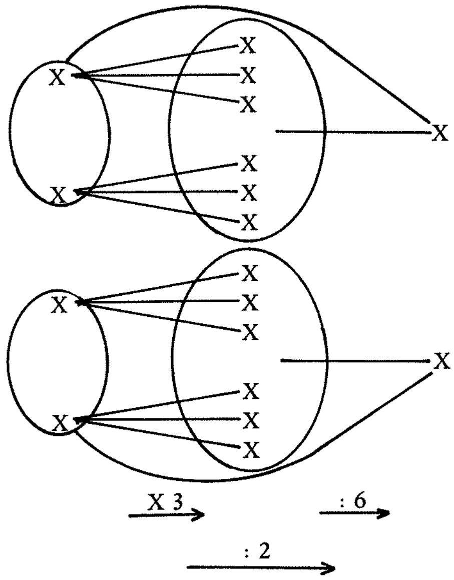
Met breukmachientjes, voorzien voor de vijfde klas van de basisschool, hebben we in nederland en belgië nog geen praktijkervaringen. Vanaf augustus-september 1972 zullen we die wel hebben. De redaktie van Wiskobas vraagt nochtans nu reeds 'de onderwijspraktijk meer direkt in beeld' te brengen. We zullen dit doen door het verhaal van *Bertrand Caillard* te vertellen.
Bertrand is een leerling van de vijfde klas van de 'Ecole Alsacienne' te Parijs. Hij gaf me zijn 'Cahier de Mathématiques, Année 1971-72' als herinnering aan mijn bezoek. Ik heb deze school bezocht in mei 1972. Het schrift van Bertrand geeft een goed beeld van de onderwijspraktijk in deze school.
De oefeningen zijn gedateerd van 1 tot 23 oktober 1971. Ik zie er volgende zeven fasen in:

1 Het *vervangen van een ketting* van twee machientjes door één enkel machientje:

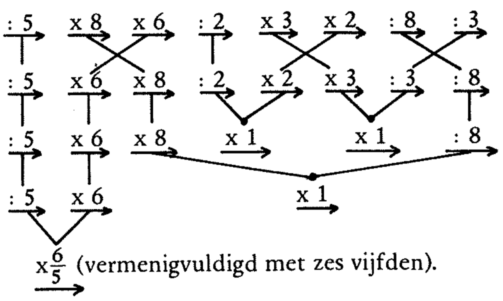


In bepaalde gevallen kan een ketting van twee machientjes (één maal- en een deelmachientje) vervangen worden door een ketting van één machientje dat precies hetzelfde werk doet; in andere gevallen gaat het niet.
We zijn hier in de fase dat het kind in de gelegenheid is te ontdekken dat *elke* ketting, hoe lang ook, van vermenigvuldig- en deelmachientjes kan worden ingekort tot een ketting van één of twee machientjes. De lezer mag niet vergeten dat Bertrand vanaf de tweede klas vertrouwd is gemaakt met machientjes.

2 *Madame Belloncle,* zijn onderwijzeres, heeft vervolgens gevraagd een plaatje te maken van één van zulke oefeningen. Bertrand doet volgende keuze, en werkt deze in een plaatje met funktionele kleuren uit:

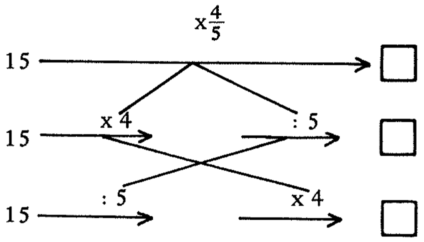


3 Volgt dan het *probleem:* kan men van bijvoorbeeld $\xrightarrow{:5}$ $\xrightarrow{\times 6}$ toch één enkel machientje maken?
Bertrand komt als volgt tot de nieuwe leerstof:



Bertrand leert hier het nieuwe machientje kennen, resp. maken vanuit goed gekende zaken: een opeenvolging van een maal- en een deelmachientje of van een deel- en een maalmachientje. Dit is ook per definitie het nieuwe machientje; we noemen het een breukmachientje.

4 Madame Belloncle geeft vervolgens een breukmachientje op, om dit breuk*machientje* te laten *uiteenvallen* in een ketting van twee machientjes:

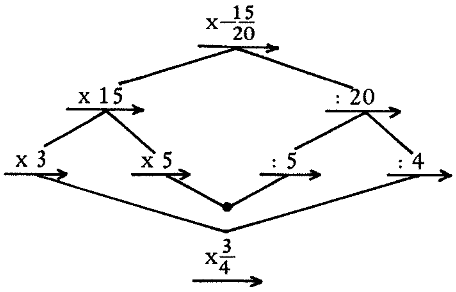


Even komt ook het passend woordgebruik naar voren:

$\times\frac{4}{5}$ is een breukmachientje

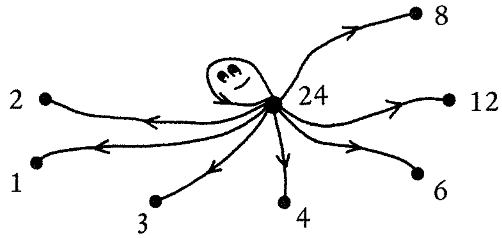
$\frac{4}{5}$ is een breuk

5 Dan volgen vijf bladzijden oefeningen in het *vereenvoudigen* van een breukmachientje. We nemen er de eerste oefening uit:

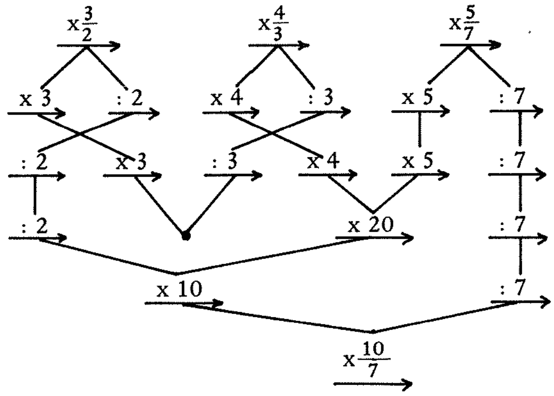


De lezer zal hier wel het vereenvoudigen van breuken uit het traditionele rekenen herkennen. Bertrand heeft hier geen moeite mee, omdat hij in deze opbouw gewoon gebruik maakt van gekende zaken. Wel is het aan te raden dat oefeningen worden gemaakt in het zoeken van de delers van een bepaald getal. Dat is ook gebeurd. Bertrand heeft een bladzijde gemaakt waarbij hij plaatjes maakt van de delers van 24 en 36.

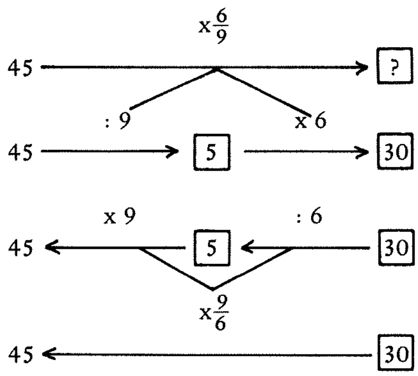
We geven dat van de delers van 24:



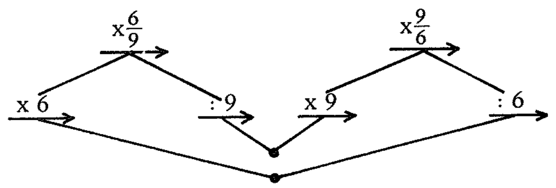
6 Daarna volgen oefeningen in het *verkorten van kettingen* van breukmachientjes. Elke ketting van breukmachientjes kan worden verkort tot een ketting van één breukmachientje. In het werkschrift van Bertrand zien we als eerste oefening hierop een ketting van drie breukmachientjes verschijnen:



7 Tenslotte gaat Bertrand op zoek naar het *omkeermachientje* van een breukmachientje.



Vermeldenswaardig is dat Bertrand nu onmiddellijk 'de proef' maakt: het breukmachientje gevolgd door zijn omkeermachientje moet gelijkwaardig zijn met het niksmachientje:



Tot daar het werkschrift van Bertrand.

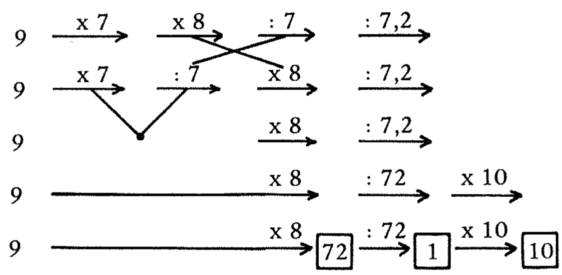
NICOLE PICARD, die deze school begeleidt, geeft het volgende kommentaar bij deze opbouw:

> 'Het is belangrijk vast te stellen dat rekenen met breuken de vrucht is van het voorafgaande werken met kettingen van vermenigvuldig- en deelmachientjes; ze laten toe dat op een zeer gemakkelijke manier gewerkt wordt met deze breuken: vermenigvuldigen, vereenvoudigen en delen van breuken onderling. Men zal ook bemerken dat in het traditionele rekenonderwijs breuken nooit anders gebruikt werden dan als operatoren, d.w.z. als machientjes. Jammer genoeg heeft men dit zelden op een expliciete wijze gedaan, met als gevolg ernstige verwarringen bij de kinderen. Meer nog, doordat de kinderen onvoldoende inzicht hadden werden zij verplicht bepaalde regeltjes te leren. Maar, zoals men hier kan vaststellen kunnen deze regels door de kinderen zelf ontdekt worden, en dit door zich uitsluitend te baseren op een nieuwe notatie van het vroeger geleerde[1]).

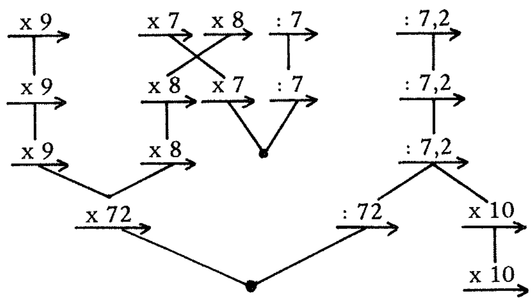
We besluiten hieruit: breukmachientjes lijken alleen maar nieuw.
We willen ons besluit verantwoorden door uit een traditioneel leerboek van de zesde klas een paar oefeningen heel willekeurig te kiezen en op te lossen in de nieuwe stijl.

Een eerste voorbeeld:

$$\frac{9 \times 7 \times 8}{7 \times 7{,}2} = \square$$



We hebben in dit voorbeeld 9 als een getal beschouwd omdat het een oefening betreft in het vereenvoudigen van een breuk; het resultaat is ook een getal (een geheel getal of een niet te vereenvoudigen breuk).
We kunnen natuurlijk 9 ook als een machientje opvatten. Het resultaat zal dan eveneens een machientje zijn:



Om te eindigen een traditioneel vraagstuk, genomen uit hetzelfde leerboek van de zesde klas:

> Een rol draad van 25 m weegt 6,25 kg. Welk is het gewicht van de draad om een weide van 268 m omtrek tweemaal te omspannen?

Bertand zal waarschijnlijk volgende ketting van machientjes opschrijven:

$$6{,}25 \xrightarrow{:\,25} \xrightarrow{\times\,268} \xrightarrow{\times\,2}$$

Dus eerst $\xrightarrow{:\,25}$ om het gewicht per meter te kennen, vervolgens $\xrightarrow{\times\,268}$ om het gewicht van de draad eenmaal de omtrek van de weide te kennen en tenslotte $\xrightarrow{\times\,2}$ omdat gevraagd werd de weide tweemaal te omspannen.
We hebben ditmaal geen behoefte aan een breukmachientje: het kàn wel maar het zou al te kunstmatig zijn en eenvoudige zaken moeilijk maken. Dit voorbeeld toont wel het belang aan van het vinden van een passende ketting van machientjes.

[1]) Nicole Picard-Journal de Mathématique II. Commentaires pour le maître. (Paris, O.C.D.L. 1970, p.40).

MUZIKALE GEIT

4.5 GEBROKEN SUKSES

A. MARINUS

Gevraagd om een reaktie op het onderwerp 'Breuken', ben ik in mijn overzichten gedoken, die ik gedurende enkele jaren heb opgesteld. Dit naar aanleiding van een opmerking, dat een daling van het peil der leerlingen eerst maar eens cijfermatig moet worden aangetoond.
Mede naar aanleiding van die opmerking heb ik voor enkele onderdelen van het vak rekenen een aantal tests samengesteld, waarvan de stof uit bestaande rekenmetodes voor het basisonderwijs is gehaald. Deze tests werden aan het begin van de brugklas van een school voor lager beroepsonderwijs afgenomen. Uit deze tests zijn gegevens over het onderwerp 'Breuken' genomen zonder de pretentie te hebben van volledigheid en absolute betrouwbaarheid.
Hieronder volgt dan allereerst de samenstelling van de test zelf:

Rekenen	Breukentest A	Brugjaar
Tijd: 45 minuten		
I **Optellen:**		
1 $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} =$	**2** $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} =$	**3** $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} =$
II **Aftrekken:**		
4 $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} =$	**5** $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} =$	**6** $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} =$
III **Vermenigvuldigen:**		
7 $6 \times \frac{2}{3} =$	**8** $3 \times \frac{2}{5} =$	**9** $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} =$
10 $.. \times \frac{1}{4} = 5$	**11** $.. \times \frac{2}{3} = 12$	**12** $.. \times 1\frac{1}{2} = 12$
IV **Delen:**		
13 $\frac{4}{5} : 2 =$	**14** $\frac{3}{5} : 2 =$	**15** $\frac{4}{5} : \frac{1}{5} =$
16 $40 : \frac{1}{5} =$	**17** $60 : \frac{2}{3} =$	**18** $3\frac{1}{5} : \frac{1}{2} =$
V **Vereenvoudig:**		
19 $\frac{15}{25} =$	**20** $\frac{24}{32} =$	

De totale uitslag was in de genoemde jaren:
1968: aantal leerlingen 38 met gemiddeld 62% van de opgaven goed.
1969: aantal leerlingen 28 met gemiddeld 57% van de opgaven goed.
1970: aantal leerlingen 16 met gemiddeld 51% van de opgaven goed.
Een dalend gemiddelde dus, hetgeen ook bij de andere onderdelen overwegend het geval was.

De reden, dat het jaar 1971 niet opgenomen is, ligt in een verandering van betrekking.

Uit het nu volgende zal m.i. duidelijk blijken, waardoor de daling van het gemiddelde veroorzaakt wordt.
Door de minder goede leerlingen werden vooral de opgaven 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17 en 18 verkeerd gemaakt. Dit is dus 40% van het totaal. Indien ze de andere opgaven wel konden maken zouden ze een skore van 60% kunnen bereiken.

Beneden 60% zaten:
1968: van de 38 leerlingen hadden 12 leerlingen minder dan 60% goed, dit is 31,6%
1969: van de 28 leerlingen hadden 13 leerlingen minder dan 60% goed, dit is 46,4%
1970: van de 16 leerlingen hadden 10 leerlingen minder dan 60% goed, dit is 62,5%

Terwijl het totaal aantal leerlingen sterk daalt blijft het aantal minder goede leerlingen min of meer stabiel waardoor de laatstgenoemden een steeds groter wordend percentage van de klas uitmaakt. De betere leerlingen verdwijnen naar een ander (meestal hoger) schooltype.

Indien we het aantal moeilijke opgaven uitbreiden tot de opgaven 7 tot en met 18, ziet het beeld er als volgt uit:

Bij een skore van 40% of minder:
1968: van de 38 leerlingen hadden 7 leerlingen niet meer dan 40% goed, dit is 18,4%
1969: van de 28 leerlingen hadden 7 leerlingen niet meer dan 40% goed, dit is 25,0%
1970: van de 16 leerlingen hadden 5 leerlingen niet meer dan 40% goed, dit is 31,3%

Halen we het aantal leerlingen eruit, dat hoogstens $\frac{1}{4}$deel van het aantal opgaven goed maakte, dan komen we voor de eerdergenoemde jaren achtereenvolgens tot de volgende aantallen: 3, 4 en nog eens 4.

Konklusies:
1 De leerlingen, die het huidige lagere beroepsonderwijs volgen, kennen de breuken niet of nauwelijks. Indien zij deze stof op de afleverende basisschool wel gehad hebben, weten zij er niet mee om te gaan. Dit laatste blijkt overduidelijk uit de foutenanalyses, die na een dergelijke test gemaakt worden. Gelijknamig maken van breuken wordt namelijk te pas en te onpas gebruikt, zoals b.v. bij het vermenigvuldigen van breuken. Dit maakt het werken ermee voor de betrokken leerkracht in de brugklas moeilijker zodat hij licht tot de mening komt, dat hij de behandeling van dit (en ook andere) onderwerp(en) liever uitgesteld zag tot de huidige brugklas en dan ook nog sterk besnoeid.
2 Bij het opnieuw behandelen van breuken in de brugklas blijkt ook telkens weer dat toch nog wel een aantal leerlingen een beetje inzicht in breuken bijgebracht kan worden, zij het dan ook op een zeer eenvoudig nivo en met een andere didaktiek, dan waarmee op de meeste basisscholen wordt gewerkt.
3 De tijd, die aan deze leerlingen is besteed om hen de verschillende hoofdbewerkingen met breuken bij te brengen zou veel nuttiger besteed kunnen worden aan andere, belangrijker onderwerpen zoals procenten, en het omzetten van gewone breuken in decimale breuken. Procenten en decimalen worden in het dagelijkse leven veel meer gebruikt dan de gewone breuken. Ook de lagere beroepsscholen behoeven m.i. niet verder te gaan dan de zojuist genoemde onderdelen.

4.6 KORTE REAKTIES

Onderstaand hebben we enkele korte reakties op aflevering 4 bijeengeplaatst. Ze zijn afkomstig van:
– Daan Klaassen, onderwijzer basisschool te Assendelft.
– Hans du Maine, leraar wis- en natuurkunde te Den Bosch.
– T.A. van den Dool, hoofd van een basisschool te Zaltbommel.
– N.G. de Bruyn, hoogleraar wiskunde aan de T.H. te Eindhoven.

Enig gegrasduin in Bulletin 4, van juni 1972, brengt me – voornamelijk n.a.v. 3.8. – tot het volgende:
Sinds kort heb ik – omdat ieder vrij is '1' te noemen wat hij/zij wil – voor het *delen* van breuken de volgende *metode* ingevoerd (zie 4.2. van het artikel van Adri Treffers):
$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =$
Wat noemen we '1'?
'$\frac{1}{4}$'.
Dus: $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ is gelijkwaardig aan $3:2 = 1\frac{1}{2}$

Ik weet niet of dit wiskundig verantwoord is, maar denk: laten we maar gaan spelen met die getallen.
Verder: één van de jongens uit het vijfde jaar loste al dit soort werk – zonder instruktie vooraf – op zoals hier volgt:
$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = (3 : 1) : (4 : 2) = 1\frac{1}{2}$.
Ik heb hem zijn gang laten gaan, want het is vaak minder omslachtig dan de metode 4.2.2. uit bovengenoemd artikel en evenmin voor mij te snappen (fysisch gezien). De uitkomst blijkt altijd juist te zijn, evenals bij 4.2.2.
(Daan Klaassen, Assendelft).

* * *

In ieder geval zal het volgende op de basisschool aan breuken gedaan moeten worden:

- Eenvoudige breuken herleiden tot tiendelige breuken.
- Eenvoudige breuken optellen als één noemer veelvoud is van de andere. Dus wel: $1\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, maar niet: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.
- Aftrekken, mits zonder ondoorzichtige leentoestanden.
Wel: $8 - \frac{1}{3}$, $1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$, niet: $8\frac{1}{5} - \frac{7}{10}$.
- Vermenigvuldigen: natuurlijk getal ($\mathbb{N}$) x breuk;
– breuk x $\mathbb{N}$;
– breuk x breuk, mits schematisch te doorzien ($\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{3}$ is een grensgeval);
– wel: 1,5 x 2,5, niet: $1\frac{1}{2}$ x $2\frac{1}{2}$.
- Delen: niet behandelen, behalve $1\frac{1}{2}$ op 6 e.d.

(Hans du Maine, Den Bosch).

* * *

Reaktie op de stellingen op blz. 322 van het VARIABEL BLOK. Van harte eens met de gehele frontale aanval.
Zijn volop bezig met de reorganisatie van het rekenonderwijs en zullen hier zeer zeker van profiteren. Elke aflevering van het Bulletin is ons een verkwikking.
(T.A. van den Dool, Zaltbommel).

* * *

Mijn eigen neiging zou zijn om het breukrekenen op de basisschool beperkt te houden. En het krampachtig vasthouden aan aanbrengen van 'begrip' vind ik verwerpelijk. 'Begrip' is mooi als het geen moeite kost; als het moeite kost is het al gauw bedrog.
Ik denk dat het niet veel moeite kost om breuken als $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ te verwerken. Ze worden druk gebruikt in de reklame, en die richt zich tot de gehele natie; en niet alleen tot de intelligentsia.

Het zou me het beste lijken de zaak op te hangen aan het verdelen van een lijnstuk: $\frac{1}{2}$meter, $\frac{1}{4}$meter, $\frac{1}{7}$meter, enz. Ik zou $\frac{4}{7}$meter alleen interpreteren als 4 keer $\frac{1}{7}$meter, (en niet als $\frac{1}{7}$ keer 4 meter). Ik dacht dat $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ nog wel aanslaat, door de $\frac{1}{6}$ stukjes te gebruiken.
Vermenigvuldigen van breuken lijkt me poppenkast, en delen van breuken door breuken regelrechte waanzin, tenminste wanneer men er 'begrip' bij wil halen. Dit past wèl goed in het elementaire algebra-onderwijs (of dat nu in basisschool of brugklas is doet er niet toe). Het met elkaar in verband brengen van gewone en decimale breuken lijkt me goed mogelijk, als men er niet te moeilijk mee wil doen.
Op de basisschool mag men nooit proberen iets te definiëren. Het onderwijzend personeel weet trouwens in het algemeen niet wat dat is.
(N.G. de Bruyn, Eindhoven).

Naar aanleiding van 'De Kleine Wereld' (zie Blok 3, P.A.) ontving Chris Boekkooi — docent wiskunde in Middelburg — de volgende reaktie:

Eén van de **twee drie**lingen **vier**de op de **vijf**de van de **zes**de maand hun **zeven**de verjaardag.

Hoog**acht**end,
Uw toege**negen**
Tienus.

4.7 MEER LEF HEBBEN

De kollegezaal van het instituut was op vrijdag 9 juni 1972 gevuld met 55 afgevaardigden van de heroriënteringskursussen voor onderwijzers.
Een belangrijke middag.
WAAROM DEZE MIDDAG?

Wel, we hadden er bepaalde bedoelingen mee.

In de eerste plaats leek het ons goed dat de kursisten op een meer direkte manier zouden kennismaken met het instituut en met de mensen die er werken. Mensen waarvan alleen de namen bekend zijn via de blokken en het bulletin.

'Je weet nu tenminste wie Adri en Henk en Ed en Johan en al die anderen zijn.'

Het bood vervolgens een unieke gelegenheid om nog eens duidelijk iets te vertellen over Wiskobas: planning, strategie, ontwerpschool, enz. Ook al zijn tijdens de kursussen deze onderwerpen in de meeste gevallen aan de orde geweest, toch waren er hier en daar nog misverstanden. Mede om deze misverstanden op te ruimen, maar ook om aktuele ontwikkelingen over te dragen leek het ons noodzakelijk om in het programma van deze middag een informatief gedeelte op te nemen.

'De zaak van leerplanontwikkeling zit solide in elkaar. Ik had me dat van te voren niet goed gerealiseerd.'

De mogelijkheid om ervaringen uit te wisselen met kollega's van andere kursussen was tijdens groepsgesprekken en maaltijd duidelijk aanwezig.

'Ongelooflijk wat een grote verschillen. Toch dacht ik dat de Wiskobas-filosofie ondanks die grote verscheidenheid in alle kursussen tot uitdrukking komt. Het zelfontdekken. Het aktieve leren.'

De middag was ook voor onszelf belangrijk. We waren benieuwd naar de reakties der kursisten op de kursussen, het kursusmateriaal, en de mogelijkheden tot verwerken. We hadden daar al wel een idee van door de telefoontjes en brieven die we dagelijks ontvingen. De bijeenkomst zou toch, zo dachten we, dit idee verder kunnen scherpen.

* * *

Betrokkenen in het Wiskobas-projekt zullen geïnteresseerd zijn in datgene wat tijdens de groepsgesprekken aan de orde is gekomen. We kiezen enkele punten om u een indruk te geven.

- De aanwezigen zijn voor het merendeel werkzaam in het basisonderwijs; een enkeling werkt bij het beroepsonderwijs, kleuteronderwijs, buitengewoon onderwijs.
- Alle groepen – in totaal waren er 5 groepen met 10, 11 of 12 deelnemers – zijn van mening dat het kursusmateriaal (blokken en bulletin) in hoge mate aanleiding geeft (kan geven) tot 'zelfontdekkend' leren. Dit geldt zowel voor de leerkracht (tijdens de kursus) als voor de leerling (in de klas).

'De leerlingen krijgen een houding om problemen denkend te benaderen.'

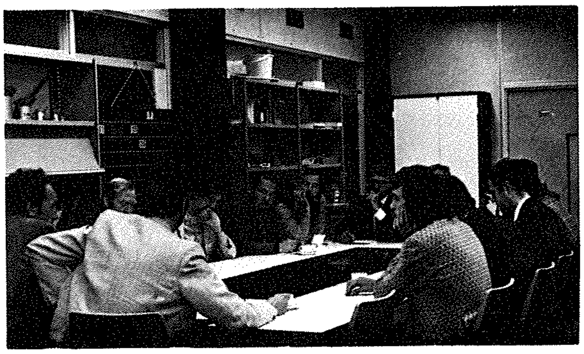
- De overbrugging van 'oud' naar 'nieuw' biedt nogal eens problemen. Het gebrek aan geschikt materiaal speelt hierbij een rol. Op een bepaalde school is men – heel voorzichtig

– aan het proberen om 'gedeelten' uit de blokken in het programma op te nemen. Tijdens personeelsvergaderingen wordt hieraan gewerkt. Op een andere school waar het oude rekenprogramma al – in verband met nivo-kursussen – 'losbladig' is gemaakt, is men vrij ver gevorderd met de inpassing van de onderwerpen, die gedurende het afgelopen jaar tijdens de kursus verwerkt zijn.
• Het gebruik van de blokken bij andere vakken is voor de meeste kursisten geen probleem. Alle blokken die tot nu toe verschenen zijn, bieden daartoe talloze mogelijkheden.

Waar bovenstaande punten in vrijwel alle groepen onderwerpen van bespreking waren, geven we nog enkele suggesties die dan wel niet zo algemeen naar voren kwamen, maar die bij elkaar toch vermeldenswaard zijn:

- Nadenken over het toetsen van leerlingenprestaties bij groepswerk.
- Streven naar meer differentiatie in de blokken.
- Meer relaties met de moedertaal in de blokken leggen.
- Het moet op de kursussen niet te snel gaan. We hebben allemaal behoefte aan een uitgebreide bespreking van de praktijkervaringen.
- Zorg voor goede kontakten met het kleuteronderwijs en met het voortgezet onderwijs.

U begrijpt dat we met dit soort opmerkingen ons voordeel kunnen doen. Niet dat we er tot nu toe geen aandacht aan schonken; er zíjn kontakten met k.o. en v.o.; we wéten dat het soms te vlug gaat op de kursussen; we stréven naar differentiatie en naar het leggen van relaties met de moedertaal; we dókteren aan het **toetsingsprobleem.**



Het belangrijkste voor ons is niet zozeer dat de suggesties veel nieuwe gezichtspunten openden, maar wèl de gesprekken die zich rond deze punten ontwikkelden en de daarin naar voren komende argumenten. Daarbij komt – en dat is van niet te onderschatten betekenis – dat de suggesties uit de groep der kursisten kwamen en derhalve een soort bevestiging vormden van datgene wat we als belangrijke momenten een hoge prioriteit hebben toegekend.

Aan een tweetal vragen willen we nog aparte aandacht geven, n.l.
* Kunnen in het BAS-boek uitgewerkte lessen worden opgenomen? Wanneer je een dergelijke les hebt gezien, en eventueel gegeven, kun je met de resterende suggesties sneller en beter lessen samenstellen.
  De samenstellers der BAS-boeken zullen deze suggestie bespreken. De resultaten van de bespreking zult u ongetwijfeld in de nieuwe BAS-boeken kunnen konstateren.
* Is het mogelijk om leerlingenmateriaal goedkoper te produceren? B.v. door aan elke kursus 'kant-en-klare' moederbladen van stencils te verstrekken.
Iedere kursusdocent dan dan zelf de benodigde hoeveelheden materiaal vervaardigen.
  Bij het BAS-boek 'Open Beweringen' zal dit als een soort 'proef' gedaan worden. We zijn benieuwd naar uw ervaringen.

De opinies der deelnemers over de wenselijkheid om als een vaste referentiegroep te gaan funktioneren waren eensluidend. De afgevaardigden waardeerden deze wenselijkheid positief. Een referentiegroep als groep om 'tegen aan te praten', als groep die anderzijds een bijsturingsfunktie kan hebben, is voor een open projekt als Wiskobas onmisbaar.

Tenslotte:

Een hoofd van een school in Appingedam zei:

> *'We moeten meer lef hebben. Lef om in de klas met de suggesties uit de BAS-boeken te werken. Lef om dit met een 'open mind' te doen'.*

Wel, de groep die op 9 juni bijeen was, heeft lef.
En dat is een geweldige stimulans voor iedereen die bezig is aan het karwei 'Wiskobas'.

4.8 UIT EEN SCHOOLKRANT

De heer N. Matze, onderwijzer aan de school met de Bijbel te St. Annaland heeft in zijn schoolkrant een artikeltje geschreven, onder de titel:

WISKUNDE OP BASISSCHOOL?
OOK BIJ ONS!

Na een korte inleiding, worden de ouders opdrachten m.b.t. HET STADSPLAN verstrekt. Het is de bedoeling dat de ouders deze opdrachten – wandelen door het stadsplan, afstandswegen, ganzeborden – uitvoeren. Ze kunnen hun kinderen daarbij om raad vragen.

We citeren uit de inleiding:

'In de zeer nabije toekomst zal het op onze school gonzen van de wiskunde-aktiviteiten. Misschien hebben de kinderen er thuis al iets over verteld en heeft het u nieuwsgierig gemaakt. Wellicht heeft u zich het *hoe* en *waarom* afgevraagd, met: 'Ik dacht dat zoiets op de scholen van het voortgezet onderwijs thuishoorde? '
Inderdaad, dat heeft men ook altijd gemeend, maar.....de tijden veranderen.
Men is tot de overtuiging gekomen dat de eerste stappen in de wiskunde gemakkelijk, ja zelfs beter, door kleuters en eerste-klassertjes gedaan kunnen worden, om vervolgens in de hogere klassen te leren lopen in de wiskunde.
Dat de ene leerling dit eerder onder de knie zal hebben dan de andere, spreekt vanzelf.
De kinderen kunnen dan later, gewapend met wiskundige denkwijzen en vaardigheden naar het voortgezet onderwijs. U begrijpt dat het basisonderwijs aldus beter aansluit. Over 4 jaar zal men algemeen met het wiskunde-onderwijs op de basisschool kunnen starten. Dan is het leerplan klaar, dat in Utrecht door de kommissie Wiskobas ontwikkeld wordt. Deze ontwikkeling moet rusten op ervaringen van onderwijsmensen die werkzaam zijn op de basisschool. Deze ervaringen worden doorgespeeld naar 'Utrecht'.
Vandaar dat wij als personeel nu reeds ervaringen op doen en – wat zeer belangrijk is – we laten de kinderen vast de eerste stappen doen. Iedere week wordt drie kwartier aan wiskunde besteed.
De vraag of het rekenonderwijs zoals we dat kenden straks helemaal zal verdwijnen, kan ontkennend beantwoord worden. Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, breuken, procenten, enz. blijven bestaan. Het rekenonderwijs zal meer *van binnen uit* vernieuwd worden.
Vreemd voor U?
Voor ons niet minder.
We hebben een tweejarige kursus voor de boeg om de nodige bijscholing op te doen. Heel wat wekelijkse team-besprekingen zullen nodig zijn om opgedane ervaringen uit te wisselen, om lestips door te geven en verslagen voor Wiskobas op te stellen.

Dit alles naast andere werkzaamheden, die onze aandacht evenzeer vragen.
Van onze kant willen we u graag op de hoogte houden van deze nieuwe werkwijze en leerstof. U begrijpt echter, dat dit in een schoolkrant nooit volledig kan zijn. Informeert u er eens naar tijdens het ouderbezoek of tijdens voorkomende ontmoetingen. Wat nog dichter bij huis is: vraag het aan uw kinderen, laat ze het eens vertellen, doe eens zo'n wiskundespelletje waar ze mee thuis komen, lok uw kinderen uit tot verdere ontdekkingen in het wiskunde-wereldje.'

PROBLEMATINEE

TINEKE BRINKMAN

Het is bekend dat vele onderwijzers menen de jeugd te moeten beleren en/of amuseren. Voor deze lieden zijn spelletjes en puzzels ter opvrolijking van de belezerij vrijwel onontbeerlijk.
De problematika-spelletjes waren leuk. Ik heb me best geamuseerd. Uw leerlingen hopelijk ook, want velen van ons vormen een volgzaam volkje.

Doe het eens anders! Doe het niet! Bied uw leerlingen aan dat zij elkaar èn u mogen laten denken aan hun probleempjes. Ze lenen die uit boekjes van pa en u plukt de vruchten.
Mogen zij sappig zijn!

Een voorbeeld waarmee ik werd gekonfronteerd:
Barbara, 8 jaar, komt thuis en vraagt terwijl ze drie vingers opsteekt: 'Hoeveel zijn er dat?'
Ik, onnozel: 'Drie'.
Barbara: 'Nee hoor, negen! En dit?'
Ze houdt nu een wijdgespreide hand voor mijn neus.
'Goed denken hoor mamma!'
Ik denk, zeg; 'veertien'.
B: 'Ha,ha! Vijf natuurlijk'

Denkt u: 'Flauw!' Of denkt u 'Breuken?!'

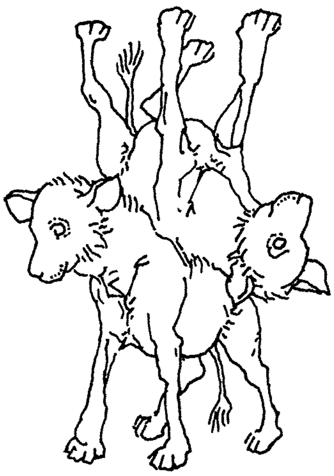
4.9 EEN 'PRAKTISCH' PROBLEEM

Van Ger Blaauw ontvingen we een probleem dat ten behoeve van de kursussen in Amstelveen en Amsterdam werd samengesteld. We willen het de lezers niet onthouden.
Het probleem dat geschikt is voor de hogere leerjaren van de basisschool moet door de kursisten eerst zelf geanalyseerd worden.
De bedoeling kan getypeerd worden met aktiviteiten als: tabel korrekt invullen, eksploreren, samenwerken.
Een geschikte werkvorm is: oplossen van het probleem in groepjes. Een favoriete sport als voetbal of korfbal biedt een goede introduktie-mogelijkheid.

'In de volgende tabel zijn een aantal getallen uitgeveegd. Proberen jullie nu eens om met elkaar die getallen weer te vinden'.

KLUBS	gewonnen	gelijk	verloren	punten
Hup vooruit	3	1	0	–
Moedig Voorwaarts	–	2	0	–
Steeds Hoger	–	0	–	4
Pas Op	–	–	1	–
De Dappere Strijders	–	–	–	2
De Rode Lantaarndrager 0	0	–	–	2

- Alle klubs hebben evenveel wedstrijden gespeeld.
- Voor elke gewonnen wedstrijd krijgt men 2 punten.
- Elk gelijkspel geeft 1 punt.
- Voor een verloren wedstrijd krijgt men 0 punten.



4.10 BASBOEK DRIE

De kursusdocenten uit Meppel — Jaap Groothuis en Gerrit Kolthof — hebben hun kursisten gevraagd om ervaringen met de suggesties uit Basboek 3 met elkaar te bespreken en vervolgens te noteren. Uit het resulterend verslag hebben we enkele opmerkingen gelicht:

KLAS 1
Het werken met de getallenrechte (Basboek 3, pag. 24 en v.) vonden de leerlingen leuk; het sprak wel aan.

KLAS 2
De suggesties m.b.t. de tafels van vermenigvuldiging (Basboek 3, pag. 28 en v.) vormen een goede oefening voor de leerlingen van klas 2. Voor de andere klassen was het vrij gemakkelijk. Zij ontdekten wel bepaalde wetmatigheden. Het visualiseren van de struktuur der tafelgetallen is zinvol. De leerlingen deden het met veel plezier.

KLAS 3
Het uitgangsprobleem — Vader Abraham — (Basboek 3, pag. 33 en v.) was te moeilijk. Een klas van 34 leerlingen leverde slechts één goede oplossing op.
De symbolen $<$, $>$, $=$ werden al gauw begrepen, evenals het begrip transiviteit. De spelletjes met getallen (Basboek 3, pag. 36) werden zonder veel moeite uitgevoerd.

KLAS 4
Om te starten op bekend terrein is uitgegaan van het Stadsplan. De overgang van (2,3) naar ($\frac{2}{3}$) verliep zonder problemen. Vrij vlot kon iedereen het Stadsplan van breuken voorzien. Bij het zetten van pijltjes van een kleinere naar een grotere breuk (Basboek 3, pag. 42 en 43) konstateerden we als volgorde: eerst de vertikale, daarna de horizontale en tenslotte — maar lang niet spontaan door alle leerlingen — de diagonale pijltjes. Het spelen met de dominostenen draagt weinig bij tot verheldering van het breukbegrip.

KLAS 5
Uit de gegeven lessen over 'Van schaatstijden tot schaatspunten' (Basboek 3, pag. 45 en v.) bleek, dat enkele leerlingen op de hoogte waren van de 'omrekenmetode' en dat de gepresenteerde stof over meerdere lessen moet worden uitgesmeerd.

KLAS 6
Het uitgangsprobleem — planning bij Hoogovens — (Basboek 3, pag. 51 en v.) was te ver verwijderd van de gedachtenwereld der leerlingen. Het projekt is voor basisschool-leerlingen te groots opgezet. Het inzicht in de voorwaarden en noodzakelijke voorzieningen inzake de plaats van vestiging was onvoldoende aanwezig. Meer geschikte onderwerpen:

- Rekreatie. Kampeerterrein. Met of zonder caravanterrein. Wel of geen kampwinkel of kantine. Wel of geen speeltuin. Wel of geen speeltuin in de buurt.
- Schoolreis.
- Nieuw sportterrein.
- Nieuw schoolgebouw.
- Kaartsysteem ontwerpen van de eigen klas.

Omslag: Hans Gauw
Druk: De Gulden Pers N.V.