wiskobas bulletin

Jaargang 1, nr. 4
Juni 1972

WISKOBAS-BULLETIN

— Bulletin ter begeleiding van het eksperiment 'Wiskunde — op de Basisschool'.

— Verschijnt gedurende de eerste jaargang 5 keer (± 64 pagina's per aflevering).

JAARGANG 1, NR. 4 — JUNI 1972

REDAKTIE:
F.Goffree, R.A. de Jong (eindredakteur), G.H.Meijer, Drs.A.Treffers, Drs.E.J.Wijdeveld.

MEDEWERKERS:
Prof. Dr. F. van der Blij, J. van de Brink, W.M.F.Bronnenberg, J. van Bruggen, K.Frenay, Prof. Dr. H. Freudenthal, L. H. Jansen, H. ter Heege, Drs. K. B. Koster, F. du Maine, E. de Moor, D. W. Oort, L. Streefland.

VORMGEVING:
Interes Reclame

LAY-OUT:
Rob Timmer

CARTOON:
Hans de Boer

REDAKTIEADRES:
INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS
Tiberdreef 4, Utrecht.
t.a.v. R.A. de Jong.

ABONNEMENTSPRIJS:
f 25,-- per jaargang.
Men abonneert zich door dit bedrag over te maken op girorekening 500167 van Vlaer en Kol te IJsselstein, t.n.v. V.V.C., rek.nr. 218401450, onder vermelding van 'WISKOBAS-BULLETIN'.

Verzamelabonnementen voor studenten Pedagogische Akademies en kursisten Heroriëntering f 15,-- per jaargang (aanmelden via docent).

INHOUD

EEN UITGAVE VAN HET INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS

WISKOBAS-BULLETIN

— Bulletin ter begeleiding van het eksperiment 'Wiskunde — op de Basisschool'.

— Verschijnt gedurende de eerste jaargang 5 keer (± 64 pagina's per aflevering).

JAARGANG 1, NR. 4 — JUNI 1972

REDAKTIE:
F.Goffree, R.A. de Jong (eindredakteur), G.H.Meijer, Drs.A.Treffers, Drs.E.J.Wijdeveld.

MEDEWERKERS:
Prof. Dr. F. van der Blij, J. van de Brink, W.M.F.Bronnenberg, J. van Bruggen, K.Frenay, Prof. Dr. H. Freudenthal, L. H. Jansen, H. ter Heege, Drs. K. B. Koster, F. du Maine, E. de Moor, D. W. Oort, L. Streefland.

VORMGEVING:
Interes Reclame

LAY-OUT:
Rob Timmer

CARTOON:
Hans de Boer

REDAKTIEADRES:
INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS
Tiberdreef 4, Utrecht.
t.a.v. R.A. de Jong.

ABONNEMENTSPRIJS:
f 25,-- per jaargang.
Men abonneert zich door dit bedrag over te maken op girorekening 500167 van Vlaer en Kol te IJsselstein, t.n.v. V.V.C., rek.nr. 218401450, onder vermelding van 'WISKOBAS-BULLETIN'.

Verzamelabonnementen voor studenten Pedagogische Akademies en kursisten Heroriëntering f 15,-- per jaargang (aanmelden via docent).

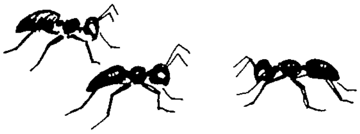
INHOUD

EEN UITGAVE VAN HET INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS

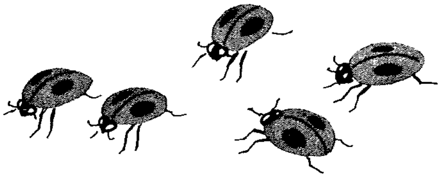
Tineke Brinkman

INHOUD

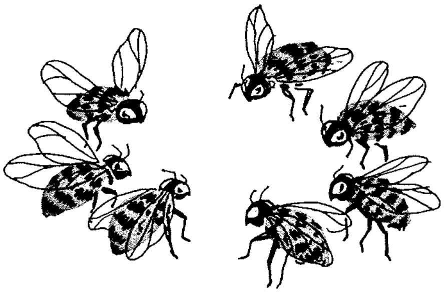
Teken een kring om het getal, dat aangeeft hoeveel elementen elke verzameling telt.



0 1 2 3

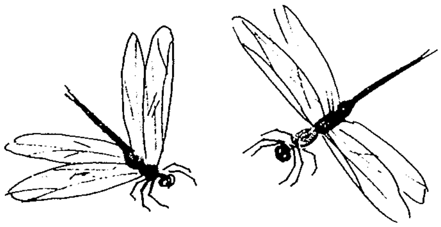


4 5 6 7



4 5 6 7

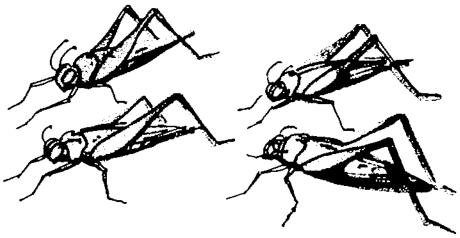
0 1 2 3



0 1 2 3

0 1 2 3

4 5 6 7



2 3 4 5

Kolommen

H. FREUDENTHAL

ONTSPORINGEN

Is dat moderne wiskunde?

Het zijn mooie plaatjes. In het ouderwetse rekenonderwijs werd de juffrouw geacht de vraag te stellen 'hoeveel mieren zijn dit? ', 'hoeveel vlinders zijn dit? ' enz., of algemener: **'hoeveel beestjes zijn dit?'**

In het 'moderne' wiskunde-onderwijs op de basisschool luidt de vraag:

'Hoeveel elementen heeft de verzameling? '

Wat is nu goed?

Doe dit boekje dicht en denk er zelf over na. Kijk, ontdek, maar denk ook na.

* * *

U weet zeker wat dikdoenerij is?

'Hoe gaat het met Pietje?'. 'Hij bezoekt een instelling van voorbereidend lager onderwijs.'

Ik heb niets tegen instellingen van voorbereidend lager onderwijs, alleen noem ik ze, wanneer een van mijn kleinkinderen er op zit, kleuterscholen, anders zou het dikdoenerij zijn.

Als ik de hik heb, noem ik het niet 'singultus' hoewel het medisch zo heet, en als ik het licht uitdoe, zeg ik niet dat ik de stroomkring onderbreek. Mocht ik 'per benenwagen' reizen, dan weet u dat het dit keer grappig bedoelde dikdoenerij is.

* * *

Hoe is het nu met 'hoeveel beestjes zijn dit? ' of 'hoeveel elementen heeft die verzameling? '

Hoe moet het? Mag de groenteboer nog vragen 'Hoeveel sinaasappelen had u gehad willen hebben?' of moet het zijn: 'Hoeveel elementen zijn er in de verzameling sinaasappelen, die u gehad had willen hebben? ' Of misschien zelfs: 'Hoe groot is het kardinaalgetal van de verzameling der door u gewenste sinaasappelen? '

Wees gerust — ook bij Wiskobas blijft het: 'Hoeveel beestjes zijn het? ' Al het andere is dikdoenerij en een groot deel van de zogenaamde moderne wiskunde die handige auteurs aan u trachten te slijten, is dikdoenerij, en met wiskunde — modern of niet modern — heeft het niets te maken. Laat u zich niet de stuipen op 't lijf jagen door auteurs die u willen vertellen, hoe het echt wiskundig moet en die het zelf niet weten.

* * *

Het is niet alleen dikdoenerij — het is gewoon fout.

U kunt van het aantal elementen van een verzameling spreken als er van een verzameling sprake is. Dit is in 't afgedrukte voorbeeld niet het geval. Als u het plaatje rechts boven bekijkt dan ziet u daar 5 onzelieveheersbeestjes. U mag het wel als een verzameling van onzelieveheersbeestjes opvatten, die dan 5 elementen heeft, maar u mag er ook een verzameling ronde zwarte stippen in zien, die 10 elementen heeft, of een verzameling pootjes, met 30 elementen.

Een stapeltje van dit of dat *is* niet een verzameling, maar het *wordt* er een wanneer ik het als zodanig opvat en daarvoor moet ik duidelijk aangeven, wat de elementen ervan zijn. Is één suikerbus een verzameling? Neen, maar ik kan hem opvatten als een verzameling — van suikerklontjes, suikerkorreltjes, suikermolekulen.

Ik kan zoiets als verzameling opvatten — dit betekent niet dat ik het moet doen. Wanneer ik het zonder noodzaak doe, dan hoort dit weer in het chapiter 'dikdoenerij' thuis. Met verzamelingen kun je heel wat doen, bijvoorbeeld kunnen verzamelingteoretische bewerkingen en afbeeldingen veel verhelderen. Ontbreekt die kontekst er, dan is het dikdoenerij, die spoedig zelfs tot fouten leidt.

* * *

Auteurs die zo iets fabriceren weten meestal niet beter. Uitgevers die zo iets verspreiden, aanvaarden een enorme verantwoordelijkheid. Immers, onderwijzers en kleuterleidsters die het spontaan wellicht goed zouden doen, worden onzeker gemaakt of verleid tot een dikdoenerij die op kolder uitloopt.

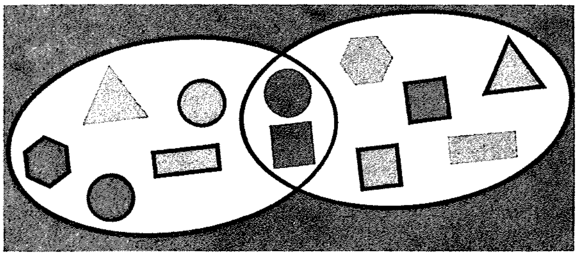
Tot kort geleden is Nederland gespaard gebleven voor dit soort uitspattingen, maar het begint nu ook onze grenzen te overspoelen.

Zal de heroriëntering der onderwijzers hiertegen kunnen opboksen?

Het hoeveelheidsbegrip

Uit de folder 'Symbooltrainer':

SYMBOOLTRAINER



HANDLEIDING

De belangrijke rol van het hoeveelheidsbegrip in de moderne Schoolwiskunde vereist van de zijde van de leerlingen een voortdurend oefenen en van de zijde van de ouders informatie over het eigen karakter van de gebruikelijke termen.

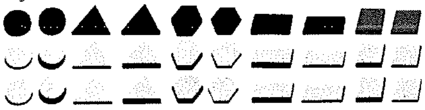
Het verdient aanbeveling deze handleiding voor het begin van het werken met de SYMBOOL-Hoeveelhedentrainer zorgvuldig te lezen.

Het gebruik van de termen is voor kinderen van de eerste klassen van de basisschool zonder twijfel nog erg moeilijk, hoewel zij de aan deze termen ten grondslag liggende handelingen gemakkelijk uitvoeren. De leer van de hoeveelheden geeft de kinderen nieuwe kennis in tegenstelling met de rekenmethode, welke tot nu toe gebruikt werden, en versterkt bovendien het logisch denken. Het begrip Getal wordt op het begrip Hoeveelheid teruggevoerd. Het rekenen wordt door werken met hoeveelheden gemotiveerd. Ter invoering in de leer van de hoeveelheden worden de volgende voorwaarden gesteld:

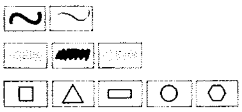
1. Er wordt een **aantal figuren** als basisvoorraad bepaald, d.w.z. men stelt vast over welke figuren gesproken zal worden.
2. De **hoedanigheden** van deze figuren worden vastgesteld.
3. Met behulp van deze hoedanigheden worden **hoeveelheden** uit het aantal figuren afgezonderd.

1

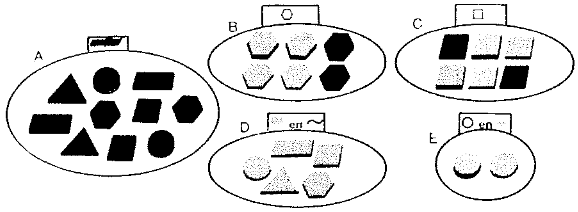
Kiest men als **basisvoorraad** Figuren (bijv. gestruktureerd materiaal zoals o.a. vorm-blokjes) dan ontstaat het volgende beeld voor de basisvoorraad:



De **eigenschappen** zijn
de dikten: dik of dun
de kleuren: blauw, rood, geel
de vormen: vierkant, driehoek, rechthoek, cirkel, zeshoek.

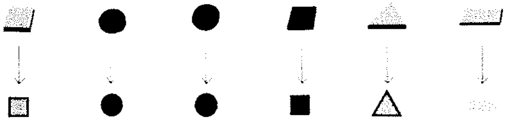


Voorbeelden van **hoeveelheden** uit de basisvoorraad:



A is de hoeveelheid van de rode figuren. B is de hoeveelheid van de zeshoeken. C is de hoeveelheid van de vierkanten. D is de hoeveelheid figuren, die tegelijk blauw en dun zijn. E is de hoeveelheid van de figuren, die tegelijk cirkelvormig en geel zijn.

In deze 5 voorbeelden zijn enige figuren meermalen gebruikt. Dat is alleen bij het na elkaar leggen mogelijk, d.w.z. niet alle hoeveelheden kunnen tegelijkertijd en onafhankelijk van elkaar gelegd worden omdat er van elke soort maar één stuk is. Voorstellingen van hoeveelheden van deze soort kunnen echter ook door middel van tekens worden voorgesteld. Daarom gebruikt men in plaats van de voorwerpen, tekens (symbolen). Deze tekens kunnen zo vaak als men wenst herhaald worden.

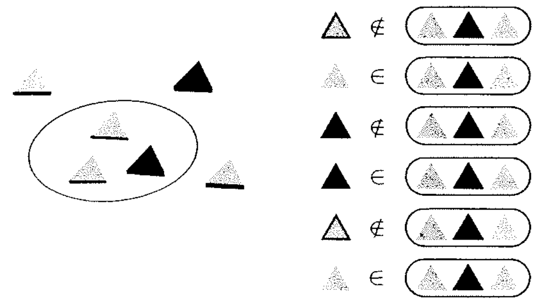


Hier enige voorbeelden van tekens, die in plaats van de figuren gebruikt worden.
De dikke figuren worden bij de getekende voorstelling door een zwarte rand kenbaar gemaakt.

2

Met deze tekens kan men zoveel voorstellingen maken als men wil.

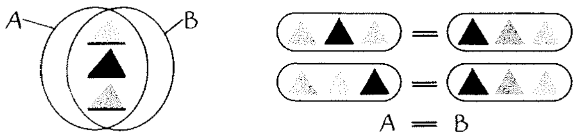
VOORSTELLING VAN DE VOORWERPEN: VOORSTELLING VAN DE TEKENS:



Dat wil zeggen:
de hoeveelheid dunne driehoeken is omlijnd. De dikke driehoeken zijn geen elementen van de omlijnde hoeveelheid. De **dikke** blauwe driehoek hoort niet bij (∉) de 3 dunne driehoeken. De dunne blauwe driehoek hoort wel bij (∈) de dunne driehoeken.

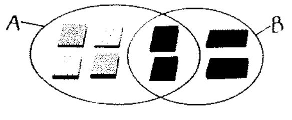
In dit verband is het nodig te weten wanneer hoeveelheden aan elkaar gelijk zijn: twee hoeveelheden A en B zijn gelijk als zij uit dezelfde elementen betaan. Bij gebruik van figuren kan men geen twee gelijke hoeveelheden leggen omdat elk element slechts éénmaal voorkomt.

VOORSTELLING VAN DE VOORWERPEN: VOORSTELLING VAN DE TEKENS:



Ook bij het experimenteren met hoeveelheden is het zinvol tekens te gebruiken. (∩) opzoeken van gelijke figuren. (∪) het samenvoegen van figuren. (\) verschil tussen de figuren.

VOORSTELLING VAN DE VOORWERPEN:



Dit geeft aan:
A is de hoeveelheid vierkanten
B is de hoeveelheid rode vierhoeken.

3

Weet u wat het hoeveelheidsbegrip is en dat het in de moderne schoolwiskunde een belangrijke rol speelt — leest u maar de handleiding van de 'SYMBOOL-hoeveelheden-trainer' zorgvuldig.

Wist u al dat in de moderne wiskunde het begrip Getal op het begrip Hoeveelheid terug wordt gevoerd?
A is de hoeveelheid van de rode figuren en B de hoeveelheid van de zeshoeken, en die twee hoeveelheden zijn gelijk als ze uit dezelfde elementen bestaan. Wist u dat voorstellingen van hoeveelheden ook door middel van tekens kunnen worden voorgesteld?
Wist u dat ∩ het opzoeken van gelijke figuren en ∪ het samenvoegen van figuren betekent en dat A ∪ B ook het in elkaar opgaan van A en B heet?

Dit fraais komt van een uitgever uit Naarden.

Als je bananen importeert, verdient het aanbeveling te weten hoe die dingen in 't nederlands heten. Als je moderne wiskunde-kolder importeert, hoef je niet te weten dat het kolder is, maar evenmin hoe die kolder in 't nederlands heet.
Bananen zijn bananen – er is altijd een importeur die ze invoert.

U hebt misschien al begrepen dat het vertaald duits is. In het duitse origineel stond er 'Menge'. Volgens het woordenboek is dat 'menigte, hoop, troep, hoeveelheid, kwantiteit' – een keuze uit zes – dat is lastig! Had de vertaler 'hoop' of 'troep' gekozen, dan was hij tenminste in de buurt gebleven.
'Verzameling' stond er niet bij. Het is vreemd, dat dit in de diverse talen zo verschillend vertaald is. Cantor zei oorspronkelijk 'Mannigfaltigkeit'; hij maakte er later 'Menge' van, en daar hebben ze in Duitsland in 't onderwijs nog veel last van, want de gewone betekenis van Menge is inderdaad 'hoeveelheid' (denk aan rekensommen met Menge-Einheitspreis-Preis).
Er verschijnt in ons land ontzaglijk veel dat uit het duits is vertaald. Ik lees zo iets weinig. Een enkele keer deed ik het wel omdat het een duits boek was waaraan ik had medegewerkt. Het was volgens hetzelfde recept vertaald:
manchmal → vaak, manche → velen, Art (in de zin van biologische soort) → aard, enz.
Ik vrees dat meer vertalingen uit het duits van dit soort zijn.
Maar hoe als een uitgever een handleiding uit het duits laat vertalen? De ijzeren wet voor vertalers is, dat je niets kan vertalen of je hebt het begrepen. Is die wet bij sommige uitgevers nog niet bekend?

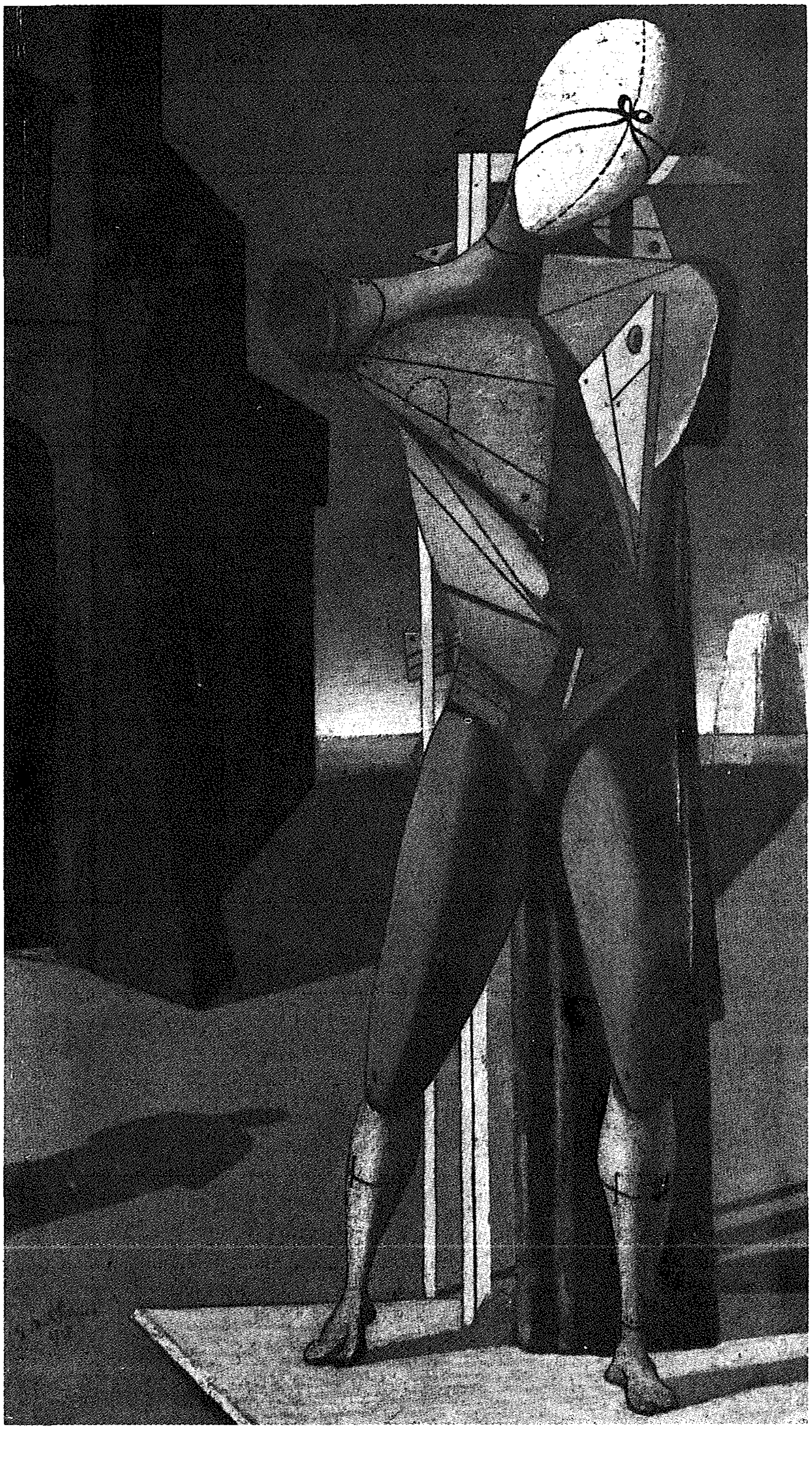
* * *

Tot zover de taal van de handleiding.
De inhoud is navenant. Komt zo'n uitgever niet op 't idee bij de eerste de beste deskundige naar de waarde te informeren? Als je bananen importeert doe je dat toch ook.

U ziet daar de befaamde Venn-diagrammen! Een Venn-diagram is een plaatje, een schotel met objekten erop. Bij Venn-diagrammen tekens als ∈, ∉, ∪, ∩ plaatsen is precies hetzelfde als het meer ouderwetse:
2 x oog + mond + neus + 2 x oor = gezicht *(wordt door tekening vervangen).*
Hoe je daarmee in de bonen raakt, zie je bij de plaatjes van vereniging en doorsnee. Je kunt ze niet eens leggen, want de 'SYMBOOL-hoeveelheden-trainer' bevat precies een dun rood vierkant, en als hij er twee zou bevatten, dan zouden die verschillend zijn – alle doorsneden, die je met Venn-diagrammen vormt, zijn a priori leeg. Je kunt nooit 'rood vierkant ∈ A' met die plaatjes leggen, want wat buiten het Venn-diagram A ligt is beslist verschillend van wat er in zit.

Ik zou zo een poosje kunnen doorgaan. Wat ik hier vertel, is bepaald niet nieuw. Er is vaak genoeg tegen dit soort nonsens gewaarschuwd, maar het haalt niets uit.
Nog eens: zal de heroriëntering der onderwijzers hiertegen kunnen opboksen?

Hoeveel beestjes zijn dit?



Il Trovatore (1917)
Giorgio de Chirico

F. VAN DER BLIJ

ABRACADABRA

Toen ik het vorige nummer van Wiskobas-bulletin las, viel mijn aandacht op de telpuzzles 'Egmond' en 'Wiskobassianen' (pag. 120).

Zo'n telpuzzle zit ook in het amulet dat, aan een vlasdraad om de hals gehangen, tegen kiespijn en andere kwalen helpt. Ik bedoel de in 200 n.Chr. voor 't eerst vermelde bezweringsformule:

A B R A C A D A B R A
A B R A C A D A B R
A B R A C A D A B
A B R A C A D A
A B R A C A D
A B R A C A
A B R A C
A B R A
A B R
A B
A

Deze formule vond ik ook op de omslag van het tweede deel van Gustav René Hocke: *Manierismus* (Rowolt, Hamburg 1957, 1959). De ondertitels zijn veelzeggend: Die Welt als Labyrinth, Manier und Manie in der Europäischen Kunst und Manierismus in der Literatur; Sprach-Alchimie und esoterische Kombinationskunst.

Vele elementen van relaties tussen kunst en wiskunde zijn in de manieristische kunstvormen te vinden. Eigenlijk behoren ook de strakke vorm van het sonnet met 4+4+3+3 regels in vast rijmschema en het acrostichon, het gedicht waarin beginletters van regels een naam vormen (zoals bij het Wilhelmus) er toe, soms ook eindletters of middenletters. In de rederijkersdichtkunst waren dit welhaast matematische strukturen. Een wat moderner voorbeeld vindt u bij S. Vestdijk in zijn *Rembrandt en de engelen* (Bert Bakker/Daamen, Den Haag 1956).

* * *

Giuseppe Arcimboldi, 'Der Bibliothekar'

De illustraties bij dit artikel vond ik in het deel van Hocke over de schilderkunst. De eerste is naar een schilderij van Giuseppe Arcimboldi (1527-1593), een 'surrealistisch' schilder die zijn portretten opbouwde uit afbeeldingen van geheel andere objekten. U ziet nogal eens zijn uit vruchten of bloemen opgebouwde portretten (met bijv. kersen als ogen, een peer als neus, etc. etc.). Ik koos een portret van een bibliothekaris (uit boeken opgebouwd) om u duidelijk te maken waarom het portret van Euclides van Max Ernst (geb. 1891) eruit ziet zoals het er uitziet. Een wiskundige, opgebouwd uit wiskundige objekten.

Ik kan het niet laten nog even te wijzen op Giorgio de Chirico (geb. 1880); op zijn *Il Trovatore* (de ontdekker) kunt u differentiaalmeetkunde toepassen. En dan is de ruimte voor illustraties bij dit verhaaltje wel verbruikt en dus gaan we nog even terug naar de letterkunde.

Max Ernst, 'Euklid'

* * *

Ik begon bij abracadabra en kwam tot letterspelletjes in gedichten. Het meest konsekwent werden letterspelgedichten bedacht en bewerkt door Stéphane Mallarmé (1842-1898) in zijn projekt *Le livre* met het sleutelgetal 3.628.800. Herkent u dit getal? Voor u verder leest moet u even proberen het thuis te brengen. Ik zal het verklappen, het is 10! , dus 1.2.3....10; het aantal mogelijke permutaties van 10 objekten. Met permutaties, kombinaties van letters tot woorden moest in een boek de gehele kosmos begrepen worden. We hebben alleen maar wat ontwerpen, becijferingen e.d. in het nagelaten werk van Mallarmé teruggevonden.

Op geheel andere wijze is dit werk voortgezet door Gerrit Krol in zijn APPI (Automatic Poetry by Pointed Information) (Querido, Amsterdam, 1971).

Of is de denkbeeldige lijn Raymundus Lullus (1223-1316) via Athanasius Kirchner (1601-1680) (de uitvinder van de toverlantaarn) naar Mallarmé, toch een andere dan die welke via Jonathan Swift (de dichterswerkplaats in de akademie van Lagado in Gullivers Reizen) naar 'poëzie met een komputer' voert? Misschien komen we er nog wel eens op terug.

* * *

Terug naar Mallarmé, één van de vele voorbeelden in de franse literatuur van relaties tussen wiskunde en letterkunde. Ik noem slechts enkele tema's en voorbeelden. Naast Stéphane Mallarmé kan Paul Valéry genoemd worden. Maar in onze tijd ook Raymond Queneau, wiskundige en letterkundige. Niet alleen zijn boekje 'Bords; Mathématiciens, Précurseurs, Encyclopédistes', dat een bizonder aardige kollektie essays over wiskunde en wiskundigen bevat, maar ook in zijn andere werken vindt u wiskundige reminiscenties.

Ik heb zijn bekende *Zazie dans le Métro* er niet op nagelezen en de film niet gezien, dat moet ik dus aan u zelf overlaten, maar in *Les Oeuvres complètes de Sally Mara* van R. Queneau vind ik bij 'Sally plus intime' een stukje Arithmétique affective:

L'amour	:	$1 + 1 = 1$
L'orgeuil	:	$1 \times 1 = 10$
La vanité	:	$0{,}1 \times 0 = 10$
Le complexe d'infériorité	:	$1 \times 1 = 0$
Le complexe d'Oedipe	:	$1 + 2 = -2$
L'angoisse	:	$1 \times \infty = 13$
La volonté	:	$0 \times 0 = 0{,}01$
Le crime	:	$1 + 1 = 1 + 0$
La justice des hommes	:	$(1 + 1)(0 + \frac{1}{2}) = 0 + 0$
Le mysticisme	:	$1 \times \infty \doteq 7$
La connerie	:	$\frac{1}{\infty} = 0$
La foi	:	$3 = 1$
La charité	:	$1000 - 1 = 999$
L'espérance	:	$x = 15.000.000$
La gourmandise	:	$1 + 10.000 = 1.08$
La luxure	:	$1 + 1 = 32$
La colère	:	$1 \times 1 = 36$
L'avarice	:	$1000 + 1000 = 0{,}25.$

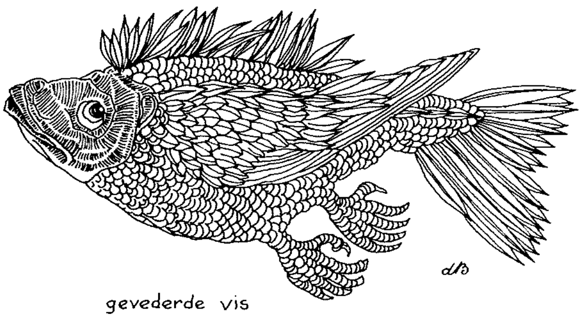
Er is voor u nog wel wat puzzle werk om deze rekenkunde te 'duiden'. Iets duidelijker is het gedicht Cygnes uit *L'Instant fatal* van R. Queneau (Gallimard, Paris, 1948).

Wie vertaalt dit gedicht?
De beste vertaling wordt gehonoreerd met een boekenbon van *f* 25,–.

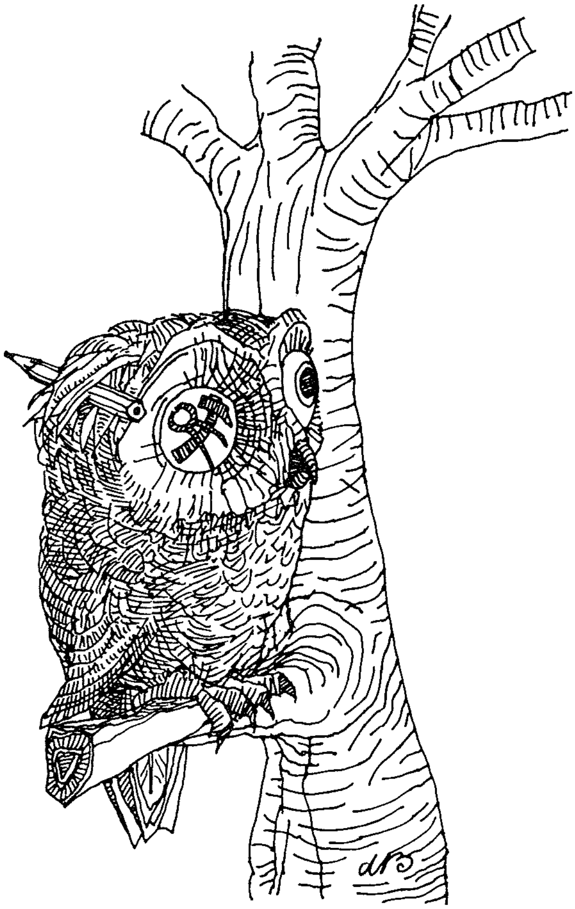
CYGNES

Quand Un fit l'amour avec Zéro
Les sphères embrassèrent les tores
Et les nombres premiers s'avancèrent
Tendant leurs mains vers les frais sycomores
Et les fractions continues blessées à mort
Dans le torrent des décimales muettes se couchèrent

Quand B fit l'amour avec A
Les paragraphes s'embrassèrent
Les virgules s'avancèrent
Tendant leur cou par-dessus les ponts de fer
Et l'alphabet blessé za mort
S'évanouit dans les bras d'une interrogation muette



gevederde vis



COUNSELLOR UIL MET
ZIJN TIMMERMANSOOG

Wiskobas bulletin

ROB DE JONG

JE HEBT HET OF JE HEBT HET NIET

Sommige gedachten, die tot voor kort nogal eens over het beroep van onderwijzer geformuleerd werden, zijn kort te karakteriseren met de uitspraak: *'Je hebt het of je hebt het niet'*. En 'hèb je 't niet', dan is daar verder niets aan te doen. Zoek maar een andere betrekking. Wij – leraren aan pedagogische akademies en hoofden van oefenscholen – kunnen je niet helpen. Met een timmermansoog is snel vast te stellen of iemand *'het'* heeft. Opleiders proberen dit 'geërfde het' te ontwikkelen, wat bij te schaven en presenteren daartoe enige leerstof.
Achter deze gedachte schuilt een opvatting over de 'geboren onderwijzer'. Fijn, wanneer je als zodanig bewerktuigd ter wereld komt! Jammer, als dat niet zo is!

Voorwaar een prettige en rustgevende gedachte voor bv. de ouders van de leerlingen. Je kunt 't kaf heel duidelijk van het koren scheiden. En 't kaf zal wel nooit voor de klas komen.

Toch is het een wat primitieve gedachte. Immers, ook al zijn we er van overtuigd, dat de karakteristiek een stukje waarheid ontsluiert, de polariteit 'hebben – niet hebben' is te schematisch en de eraan ten grondslag liggende 'bezits'-filosofie sluit elk worden uit.
Op een bepaald moment hèb je *het* niet, wel kun je *het* gaandeweg wórden.
We zijn het hier met elkaar wel over eens, dacht ik.

Zo langzamerhand is zich een wetenschappelijke onderwijskunde (of, zo u wilt: didaktiek) aan het ontwikkelen. Een wetenschap die zich met problemen uit de onderwijspraktijk bezighoudt en die ze ook nog probeert op te lossen. Er is een reflektie op de praktijk, teorievorming vindt plaats en hulpverlening aan de praktijk resulteert.
Een reflektie die zich ook uitstrekt over de selektie en rekrutering van onderwijzers, en tracht te komen tot genuanceerde oplossingen.
Aan de andere kant:
als leraar een toenemende stapel onderwijskundige publikaties nalezend op hun relevantie voor het praktische werk van studenten P.A. en voor de onderwijzers op de kursussen, schiet me een verhaaltje te binnen dat ik u niet wil onthouden.

> Gedurende een hele strenge winter gaat de sprinkhaan op een dag naar zijn raadgever, de uil. Na te zijn binnengelaten, legt hij de uil zijn zorg en verdriet voor.
> 'Ik heb het deze winter zo koud. Op deze manier gaat het niet langer. Beste uil, heb je een advies voor me? '
> De uil krabt met een poot achter de oren en antwoordt:
> 'Weet je wat in jouw geval het beste is? Verander jezelf in een krekel en hou een winterslaapje. Je hebt dan nergens last van.'
> Na veel dankbetuigingen gaat de sprinkhaan opgewekt huiswaarts. Zijn probleem is opgelost.
> Nochtans... een week later reist de sprinkhaan opnieuw naar de uil.
> 'Beste uil, ik was erg blij met je advies. Je maakte de indruk een professionele andragoog te zijn. Het lukt echter niet. Ik kan mezelf niet veranderen in een krekel. Alsjeblieft, help me verder! '
> 'Tja', antwoordt de uil, 'ik vind het erg jammer voor je, maar ik heb je de grote lijnen aangegeven. Je hebt kunnen profiteren van m'n visie. De details moet je toch echt zelf oplossen'.

Onderwijskundige adviezen lijken soms sterk op tips als die van de uil in het verhaal.

Voorbeelden:
Als je nu maar zorgt dat je orde hebt, *dan*...

Als je in je gedrag iets laat blijken van Augustinus' 'Hilaritas', *dan...*
Als je je aandacht maar goed over de leerlingen verdeelt, *dan...*
Als je nu maar moderne wiskunde geeft, *dan...*

Deze 'als — dan redeneringen' (implikaties) zijn gemeengoed in de didaktische literatuur. En hoewel het zeker niet uitgesloten is dat iemand er ooit iets aan heeft, verwacht je toch eigenlijk iets meer. Bovenstaande uitspraken veronderstellen dat een heleboel problemen opgelost zijn.
Ook aan het 'geven van moderne wiskunde' gaat een langdurig en inspannend leerproces vooraf. Allerlei fasen moeten doorlopen zijn. Een bepaald kennen en kunnen moet als 'beheerst' verondersteld worden. Je kunt niet 'zo-maar' moderne wiskunde geven. Het is het resultaat van een proces. Het is een eindpunt!
Een slim didaktikus zal ongetwijfeld beamend knikken op deze aksentuering van de voorafgaande processen. En wellicht reageert hij met de opmerking dat deze processen al in het systeem zijn opgenomen.
Immers:
Als je je ogen goed de kost geeft, *dan* verdeel je je aandacht goed.
Als je ..., *dan* geef je je ogen goed de kost.
En misschien neemt hij ons in een meeslepend betoog mee langs paden en lanen van een perfekte hiërarchische opbouw naar zeer fundamentele gegevens.

'Ja, maar — zo kun je tegenwerpen — de praktijk, het handelen in de klas zie ik steeds minder duidelijk voor me.
Wat heeft meneer Karelsen met z'n veertig kindertjes hieraan, wanneer hij zijn fiets in de berging plaatst en vervolgens zijn lokaal betreedt? Ik vindt de teorie wel aardig, maar ze doet me toch nog te veel denken aan die 'je-hebt-het of je-hebt-het-niet' -idee. Je moet op al die nivo's een heleboel dingen 'kunnen', die in de praktijk helemaal niet zo eenvoudig zijn. Die dingen kún je niet 'zomaar', die heb je niet 'zomaar' van huis uit. Ook een geboren onderwijzer niet.'

We kunnen alleen maar hopen, dat de onderwijskundige nu niet reageert als onze counsellor uit het dierenrijk.

Is hij een échte deskundige dan zal hij dit verwijt met een zekere bescheidenheid aksepteren. Hij zal tevens niet kunnen nalaten om bezwaren te uiten tegen de suggestie dat 'het kunnen geven van wiskunde' een of ander eindpunt zou zijn. En terecht!
De suggestie is immers te interpreteren als representant van een soort 'kant-en-klaar' idee, van een — reeds genoemde — bezitsfilosofie.
Hèb je de akte behaald, dan ben je er. Van de bevoegdheid kan een leven lang geprofiteerd worden, in ieder geval ekonomisch.
De deskundige zal wijzen op een tegenstroming, die zich steeds duidelijker gaat aftekenen. Een stroming, die het eindpunt als *beginpunt voor vérdere vorming* opvat. Het 'hebben' van de bevoegdheid zegt niets over een in de onderwijspraktijk funktioneren van de kennis en vaardigheden, die beheerst moesten worden om die bevoegdheid te kunnen halen. Je bent nooit klaar. Je kunt nooit de wiskunde-didaktiek' als *produkt* in je rugzak stoppen. Je 'hebt' het nooit helemaal.
Beroepsvoorbereidende vorming (pre-service) en voortgezette vorming (in-service) moeten derhalve als een geheel gezien worden.

Het is aldus wenselijk dat de aktiviteiten in en voor de Pedagogische Akademie en de Heroriëntering gekoppeld plaats vinden. Wiskobas probeert dit te realiseren, al blijkt steeds opnieuw dat dit erg moeilijk is. Alhoewel de meeste vragen vanuit het gedifferentieerde 'client-system' konvergeren, toch lopen de verwachtingen met betrekking tot bijv. het Bulletin sterk uiteen.
Binnen de idee van een *'éducation permanente'* blijft de redaktie voor beide kategorieën lezers bijdragen opnemen. Uitwisselbare bijdragen, gekenmerkt door zowel een differentiatie in de afstemming als door een algemene leesbaarheid.

Tenslotte.
Ieder verhaal heeft een moraal.
Ten aanzien van het geven van wiskunde-onderwijs kan gesteld worden:
Je hebt het én je hebt het niet.
Wat kan een kleine verandering (een ander konnektief) veel betekenen.

KLAAS KOSTER

TAAL- EN WISKUNDE-ONDERWIJS

Binnen het onderzoek naar het leren van wiskunde is op dit moment over heel de wereld een groeiende belangstelling op te merken voor de relaties tussen de ontwikkeling van taalstrukturen en van logische redeneervormen. Voorbeelden daarvan treft men aan in Frankrijk, de Verenigde Staten en in Canada.
Vooral is men geïnteresseerd in de vraag welke relaties er bestaan tussen het redeneren in een alledaagse spreektaal (engels, frans of nederlands) en wiskundig redeneren.

Dit wiskundig redeneren vergelijkt men dan met het schrijven en spreken van zinnen. Aan beide aktiviteiten liggen een aantal regels ten grondslag, die door linguïsten en wiskundigen kunnen worden geformuleerd, maar waarvan de taal- of wiskunde-'sprekers' zelf nauwelijks ekspliciete noties hebben. Niettemin is het voor de meeste sprekers van een bepaalde moedertaal zeer goed mogelijk om overéénkomstig deze regels zinnen te vormen en uitspraken te doen.

Binnen de taalkunde is het vooral Noam Chomsky geweest, die de vraag gesteld heeft over welke inwendige grammatika's iemand moet beschikken om telkens opnieuw juiste zinskonstrukties te maken. Uiteindelijk hoopt Chomsky te komen tot het samenstellen van een universele grammatika, met behulp waarvan men alle talen kan beschrijven.

Een van de auteurs die zich bezig houdt met de verhouding tussen het leren van taalkundige, wiskundige en logische strukturen, is John Corcoran.
In de *'Journal of Structural Learning'* publiceert hij dit jaar een serie van drie artikelen, waarvan er inmiddels twee zijn verschenen.[1])
Volgens Corcoran kan men bepaalde nivo's in het taalgebruik vergelijken met nivo's in het wiskundig redeneren. Hij onderscheidt binnen het taalsysteem vijf nivo's. Als hoogste nivo noemt hij de verhandeling of het betoog (Engels = discourse); het laagste nivo is dat van de letters. Daartussen plaatst Corcoran de nivo's van de woorden, van de frasering en van de zinnen. Verder gaat hij ervan uit dat iedere konstruktie op een hoger nivo tot stand komt en beschreven kan worden als het toepassen van nieuwe regelsystemen op de basisgegevens van de voorafgaande nivo's.

In schemavorm geeft Corcoran het volgende voorbeeld:

A^0	alphabet
$P^1\ (A^0 + A^1) \rightarrow A^1$	lexicon
$P^2\ (A^0 + A^1 + A^2) \rightarrow A^2$	phrases
$P^3\ (A^0 + A^1 + A^2 + A^3) \rightarrow A^3$	sentences
$P^4\ (A^0 + A^1 + A^2 + A^3 + A^4) \rightarrow A^4$	discourses

A^0 geeft het alfabet weer, A^1 representeert de verzameling woorden, A^2 staat voor de frasen, A^3 voor de verzameling zinnen en A^4 voor de verhandelingen.
P^1, P^2, P^3, P^4 geven de regels weer, waarmee A^1, A^2, A^3 en A^4 kunnen worden beschreven (c.q. geproduceerd).
De pijl betekent dus: 'produceert' of 'beschrijft'.

Evenals binnen de taal onderscheidt Corcoran ook binnen de wiskunde vijf nivo's. Het nivo van de taalkundige 'verhandeling' stelt hij gelijk met het wiskundig 'bewijs'. Met het alfabetisch nivo binnen de wiskunde worden eenvoudige wiskundige symbolen aangeduid, zoals bv. X, 0, 1, +, <, >, =, enz.
Het leksikografisch nivo omvat naast deze symbolen ook de variabele grootheden, die men verkrijgt door konstrukties met de symbolen. Het fraseologisch nivo omvat alle uitdrukkingen waarmee een begin van vergelijkingen wordt gemaakt, zoals bv. ((0 + 1). 1).

Het nivo van de zinnen bestaat uit het werken met vergelijkingen en met gelijkheden en ongelijkheden.

Een grammatika van de engelse taal en van de wiskunde bestaat nu uit
a een beschrijving van het alfabetisch nivo en
b een regelsysteem, waarmee wordt beschreven hoe de opéénvolgende nivo's worden opgebouwd.
Langs de weg van de beschrijving van dergelijke regelsystemen hoopt men dan langzamerhand te komen tot een beter inzicht in de vraag hoe het komt dat sommige mensen beter dan anderen in staat zijn bekende regels tot nieuwe te kombineren.

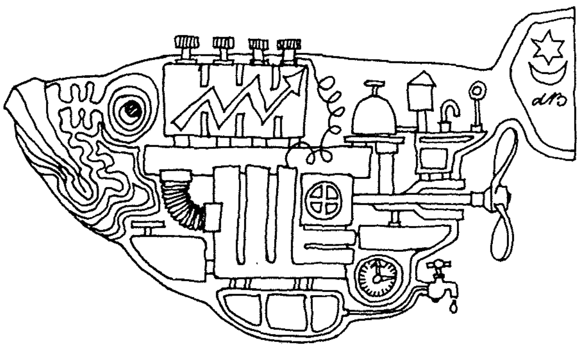
Scandura verwacht dat met name de leerplanen testkonstruktie gebaat is met een grotere kennis van de regelsystemen, die ten grondslag liggen aan het leren van taalkundige en wiskundige strukturen. De kwaliteit van de leerboeken zou een stuk verbeterd kunnen worden, wanneer de auteurs van die boeken kunnen beschikken over informatie t.a.v. de vraag op welke manier door de leerlingen bepaalde regels worden gehanteerd.
Bezinning op de vraag langs welke weg en volgens welke regels iemand tot een bepaalde konklusie komt, zal vermoedelijk ook de frekwentie doen afnemen van de opmerking: 'Dat zie je direkt'.

Voor de testkonstrukteurs opent het onderzoek naar het leren van regelsystemen binnen de taal en wiskunde de mogelijkheid testitems op te stellen waarmee de doelstellingen van nieuwe leerplannen adekwaat kunnen worden geëvalueerd.

In Nederland zal op het kongres van de Vereniging voor Onderwijs in het Nederlands van 4-7 april 1972 het tema 'taal- wiskundeonderwijs' aan de orde komen binnen de stroom *'moedertaalonderwijs en toch geen Nederlands; alle leraren zijn leraren moedertaal'.*

---

1 Journal of Structural Learning 1971, *3*, 1, pag. 69.



MOTORVIS

HUUB JANSEN

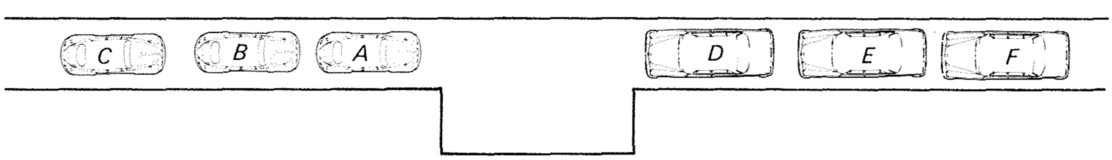
problematika

Het is bekend dat er vele raakvlakken bestaan tussen wiskunde enerzijds en spelletjes, puzzles e.d. anderzijds. Als gevolg hiervan hebben vele wiskunde-docenten en ook onderwijzers generaties lang hun wiskunde- en rekenonderwijs 'opgevrolijkt' met probleempjes, waarvan het rekreatieve aspekt hand in hand gaat met het wiskundig-didaktische aspekt.
De laatste jaren is in de didaktiek van het rekenonderwijs sprake van een toenemende belangstelling hiervoor. We denken bijvoorbeeld aan Dienes die het spelelement een belangrijke plaats geeft in zijn opbouw van het wiskunde- c.q. rekenonderwijs.
Zonder nu op allerlei teorieën in te gaan, willen we in dit nummer van het Wiskobas-Bulletin enige voorbeelden geven van spelletjes en puzzles, waaraan u zelf wat genoegen kunt beleven en die u wellicht ook uw leerlingen kunt voorschotelen. De spelletjes, die op verschillende plaatsen van het VAST BLOK staan, zijn herkenbaar aan het symbool

Uiteraard stellen wij uw reakties op prijs, waarbij vooral gedacht kan worden aan variaties op de in dit bulletin gegeven voorbeelden, mogelijkheden van toepassingen in de klas èn natuurlijk ook aan andere spelletjes en puzzles.
Wij wensen u bij voorbaat sukses en vooral veel plezier.

1

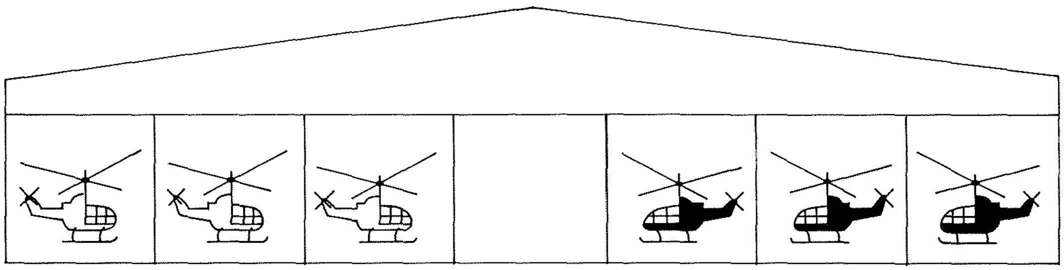
In het eerste puzzle-voorbeeld introduceren we een gefingeerd verkeersprobleem.
In de onderstaande afbeelding ziet u een éénbaansweg, waarop drie auto's A, B en C van de ene en drie auto's D, E en F van de andere kant elkaar naderen.
Omdat de weg te smal is, kunnen zij elkaar niet passeren.



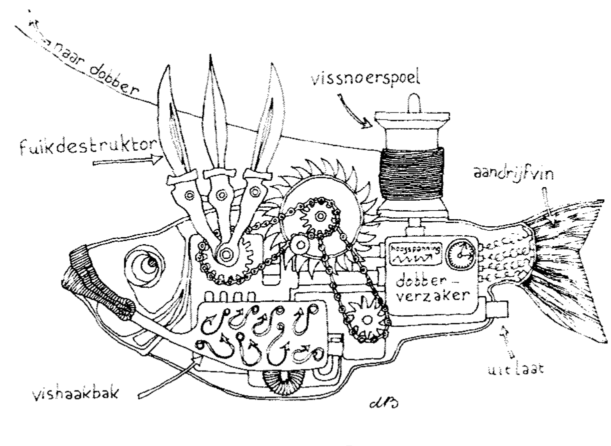
Gelukkig bezit de weg, zoals u ziet, een uitwijkstrook, waarop echter niet meer dan één auto kan plaats nemen.
Het probleem is nu uit te zoeken op wèlke wijze de auto's met gebruikmaking van de vluchtstrook (uiteraard!) hun weg kunnen vervolgen.
Bedenk daarbij dat de tegenwoordige automobielen ook achteruit kunnen rijden.

2

Ons eerste probleempje met de zes auto's op de smalle éénbaansweg is een van de vele rangeerproblemen.
Rangeren met auto's, schepen, maar vooral met treinen is kennelijk een bron van spelletjes en puzzeltjes.
Lezers, die zelf andere problemen van deze soort kennen nodigen wij hierbij uit ons dit te laten weten. Uiteraard geldt dit ook voor andere typen.
Het auto-probleem is aan de eenvoudige kant.
Iets ingewikkelder is het volgende helikopter-hangarprobleem:



De afbeelding stelt een hangar met drie witte en drie zwarte helikopters voor.
In het midden is nog plaats voor precies één helikopter. Het probleem is nu de drie witte naar rechts en de drie zwarte naar links te verplaatsen, waarbij geldt dat iedere helikopter naar 'n naastgelegen vak kan rijden, mits die leeg is en ook kan iedere helikopter over een er naast staande 'heli' heen 'vliegen', doch alleen wanneer het daarachter gelegen vak leeg is.
Een beperking is nog dat de witte alleen naar rechts en de zwarte alleen naar links vliegen en rijden kunnen.
Bovendien is maar één piloot beschikbaar om dit uit te voeren.



FOPVIS

een ↔ een korrespondentie

ED DE MOOR
LEEN STREEFLAND

Beste Ed,

Nu de samenstelling van een rapport over onze reis naar Edinburgh (Schotland) enige gestalte begint te krijgen moet ik al terugblikkend op mijn ervaringen tot de konklusie komen, dat een aantal zaken niet van zekere twijfels ontdaan kunnen worden.
Bovendien lijkt het mij zinvol enkele ervaringen te toetsen aan wat jij meemaakte tijdens jouw reis naar Londen.
Laat ik de kwesties, welke m.i. ook voor de nederlandse onderwijssituatie van belang zijn puntsgewijze aan de orde stellen.

I HET NUFFIELD PROJECT
Voor in elke Teacher's Guide, welke onder auspiciën van de Nuffield Foundation zijn uitgegeven, staat in de 'general introduction' o.a. het volgende:

> The aim of the Nuffield Mathematics Project is to devise a 'contemporary approach' for children from 5 to 13

Men is momenteel van mening, dat deze algemene doelstelling bereikt is en dat nu een periode van konsolidatie is aangebroken.
Wel verschijnen op dit moment de zogenaamde *'Modules'*, waarin bepaalde onderwerpen via series opdrachtkaarten aan de orde gesteld worden. Als voorbeeld noem ik je 'Speed and Gradient'. Dit moduul begint met enkele problemen, welke een intuïtieve introduktie op het limiet-begrip ten doel hebben.
Enkele ideeën:
* De leerlingen halveren een vierkant op de volgende wijze (fig. 1).
Oppervlakten worden berekend. Elk nieuw vierkant wordt opnieuw gehalveerd. Er worden vragen gesteld over vierkanten, die niet meer getekend zijn, enz.
* Een soortgelijke oefening is opgenomen naar aanleiding van de volgende figuur (fig. 2).

De diagonalen van een regelmatige vijfhoek sluiten zelf weer een regelmatige vijfhoek in, enz.

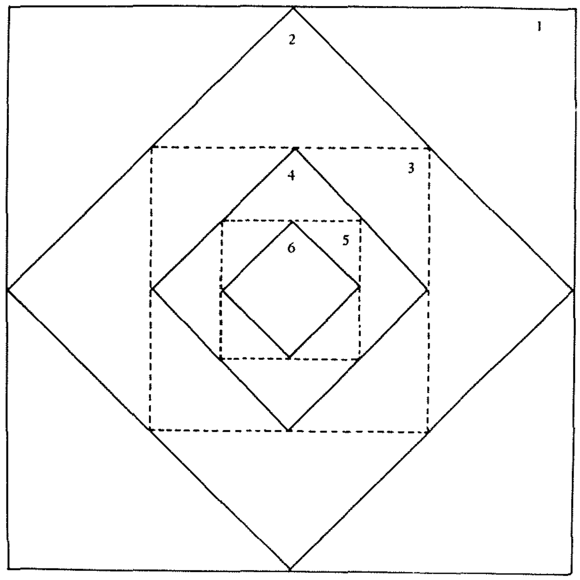


fig. 1

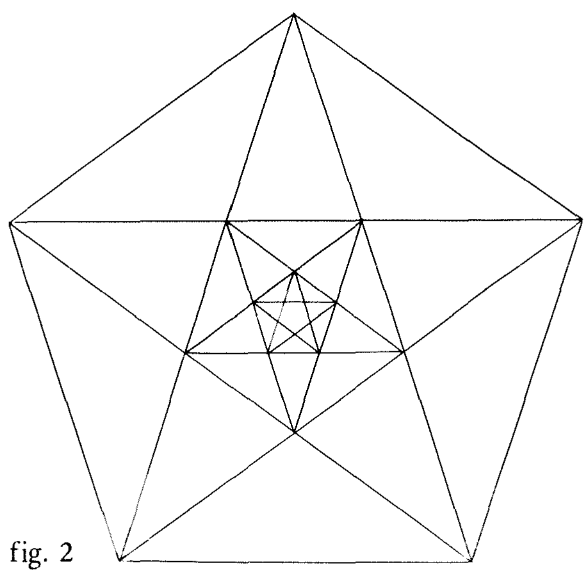


fig. 2

Om niet al te ver van de algemene lijn van het Nuffield Project af te dwalen noem ik je nog even de laatste twee Teacher's Guides, welke verschenen zijn, nl.:
'Logic' en 'Computers and young children'.
Rondom de huidige stand van zaken m.b.t. het Nuffield Project heerst onzekerheid (of misschien zelfs: onwetendheid).
Zo hoorde ik de volgende visies:
- het Nuffield Project is op een mislukking uitgelopen;
- het algemene doel is bereikt, waardoor kontinuering op z'n minst bevreemding zou wekken;
- de beschikbare materiële middelen zijn opgesoupeerd, zodat voortzetting uitgesloten is.

II COLLEGE OF EDUCATION (RESOURCE)
Voor het Moray House, College of Education te Edinburgh is op het ogenblik een nieuwbouwgedeelte in aanbouw.
Na gereedkoming hiervan wil men o.m. een ruimte inrichten als 'Resource'. Nu is het woord 'resource' in onze taal misschien nog het beste weer te geven met 'hulpbron', hoewel dit de zaak nog niet veel duidelijker maakt.
In een dergelijk 'resource zullen beschikbare boeken, video-banden, langspeelplaten etc. hun plaats krijgen, alwaar ze de aanstaande onderwijzers en leraren ten dienste staan bij hun lesvoorbereiding.
Gelet op een ontwikkeling in dezelfde richting van onze Pedagogische Akademie lijkt het verkrijgen van nadere informatie in een later stadium wenselijk.

III SECONDARY SCHOOL (EKSPERIMENT WISKUNDE)
Op een 25-tal scholen (Secondary), waarvan 3 in Edinburgh, is een wiskunde-eksperiment van start gegaan, dat de moeite van het signaleren waard is. Het eksperiment wordt georganiseerd door een (aparte) groep, die relaties heeft met de bekende Scottish Mathematics Group (van de 'Schotse Methode' welke veelvuldig in ons voortgezet onderwijs gebruikt wordt).
De leerstof is ingedeeld in *modulen*.
Een moduul is ingericht via werkkaarten en opdrachtbladen. Binnen een moduul is de leerstof vrij sterk geprogrammeerd, doch tussen de modulen onderling is geen lineariteit waar te nemen.
Vooral degenen, die uit hoofde van hun funktie (bv. de Primary Advisers van het Education Department in Edinburgh) nogal sterk betrokken waren bij de ontwikkelingen, welke geleid hebben tot de huidige stand van zaken binnen het basisonderwijs in Schotland, zagen met toenemende zorg de kloof tussen basisonderwijs en voortgezet onderwijs groter worden. Een kloof, die m.n. ontstaat door de ontwikkeling in de richting van een 'contemporary approach' met de daarmee gepaard gaande moderne didaktische werkvormen binnen het basisonderwijs en de handhaving van de traditioneel-klassikale benadering in Secondary Education.
Deze mensen nu, stellen met tevredenheid vast, dat de ingrijpende veranderingen welke het Nuffield Project teweeg heeft gebracht, door deze ontwikkelingen gaan doordringen in het voortgezet onderwijs, waardoor op den duur weer van een min of meer redelijk te achten aansluiting sprake zal zijn. Deze voorlopige tevredenheid stoelt op twee kenmerken van bedoeld eksperiment welke in iedere praktische situatie direkt te signaleren zijn, n.l.

1 De individuele benadering van de leerlingen.
  Deze benadering vindt op twee manieren plaats:
  a In de eerste plaats zijn de modulen ingericht met werkkaarten en -bladen in vier verschillende kleuren, n.l.
    Rood: Uitgangsnivo voor iedere leerling.
    Blauw: Remedialnivo voor die leerlingen, die in het 'rode nivo' zijn vastgelopen. Inhoudelijk gezien zijn deze blauwe kaarten en bladen zeer sterk geprogrammeerd, zodat de leerlingen stapje voor stapje naar het beoogde doel geleid worden.
    Oranje: De oranje serie is bedoeld als verdieping van de stof van de rode serie.
    Groen: In de groene serie tenslotte wordt het 'zware wiskundige werk' aangeboden.
  b Omdat in wiskundig-inhoudelijke zin geen lineair programma in het totaal van de modulen (voor het eerste jaar) is opgenomen, kunnen de leerlingen op basis van persoonlijke interesse een keuze doen, waardoor

2 de individuele benadering binnen het kader van groepswerk eveneens gestalte krijgt.

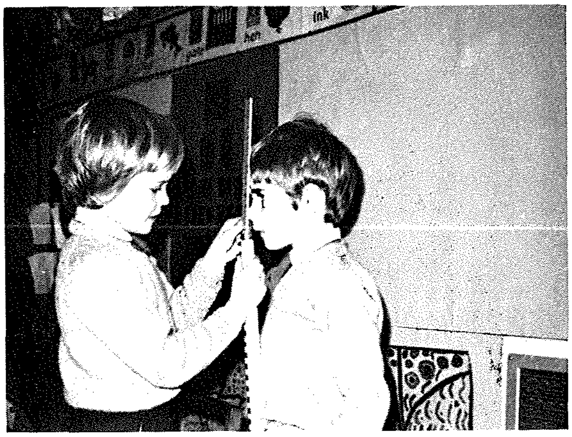
Mijn brief nog eens herlezend, Ed kom ik tot de konklusie, dat de zakelijkheid wel erg de boventoon voert. Toch hoop ik, dat je wat aanvullende of verhelderende ervaringen in je antwoord zult kunnen schrijven.

Met vriendelijke groeten,

Leen.

Beste Leen,

Hartelijk dank voor je uitgebreide informatieve brief. Uit de algemene teneur van je schrijven bespeurde ik enig skepticisme in Schotland ten aanzien van moderne onderwijsmetoden in het algemeen en wiskundemetoden in het bizonder. Ook in Londen, waarheen onze studiereis zich richtte, merkten wij een dergelijke houding op en ik denk, dat dit eigenlijk overal en altijd wel zo zal zijn.
Denk maar eens aan ons eigen dierbare vaderland. 't Is nu eenmaal moeilijk voor een mens om te veranderen en vooral om te veranderen in een situatie, waarvan je meent, dat die eigenlijk best goed is. 'Nou ja, niet ideaal, maar je kan ook niet alles willen.'
Welnu, wat het *'Nuffield Project'* betreft, hadden wij wel ongeveer dezelfde ervaringen als jullie. Onze informaties zijn ook slechts beperkt en misschien wat éénzijdig.
In verband met wat ik hierboven beschreef als de starheid van een éénmaal gevestigd systeem is het wel interessant om op te merken, dat de 'headmasters' van de 'primary schools' hier in Engeland vrijwel *autonoom* zijn en over het algemeen nogal konventioneel ingesteld. Ze zijn merendeels helemaal niet zo dol op de door jou genoemde 'contemporary approach' van het Nuffield Project. Hier komt nog bij, dat deze 'headmasters' de publieke opinie nogal eens aan hun zijde hebben. Wellicht wordt dit mede veroorzaakt door publikaties kontra de 'informal approach' en de 'discovery learning'. Deze publikaties, 'black papers' genaamd, zijn door personen van niet gering gewicht (figuurlijk) geschreven.
De auteurs maken zich zorgen over de geringe 'parate kennis' e.d., die de leerlingen – onderwezen volgens een progressief onderwijssysteem – zouden bezitten. Wel, ook dit soort zaken, klinkt ons niet onbekend in de oren. Reden te meer, lijkt mij om met WISKOBAS alles goed doordacht aan te pakken.
Dus: een langzame integratie van nieuwe inhoud en werkwijze en geen al te revolutionaire aanpak. Maar, dat wist jij natuurlijk al!
Interessant is ook een ander probleem, dat analogie met onze situatie in Holland bezit. Er wordt namelijk door de leerkrachten en vooral door de leraren van de 'Secondary Schools' bij voortduring om een volledig uitgewerkt schoolwerkplan gevraagd, dus om 'boekjes', waar je met kinderen uit kan werken en waaraan je precies kan zien, wat je moet doen. Opmerkelijk is, dat de onderwijzers van de 'Primary Schools' wat dit betreft veel inventiever blijken te zijn dan hun kollega's van de 'Secondary Schools'.
Dit probleem, dat ook 'bij ons in Holland' speelt is onder meer een probleem voor de opleider van de onderwijzer. Laten we hopen, dat we in Holland met de blokken van Fred voor de P.A. op de goede weg zijn.
De docenten van het *'Teacher College'* (St. Mary's College, Strawberry Hill), dat wij bezochten, hadden overigens veel belangstelling voor de spullen, die wij vanuit het I.O.W.O. hadden meegebracht en waren, leek mij, ook wel wat jaloers op de mogelijkheden voor leerplanontwikkeling wiskunde-onderwijs die via ons instituut zijn geschapen.
De studenten van zo'n 'Teacher College' krijgen toch wel erg weinig wiskunde. Alleen tijdens het eerste jaar 1½ uur per week verplicht en in de 2 daaropvolgende jaren fakultatief en... deze 'specialisten' worden dan meestal 'teachers' op een 'Secondary School'.
De wiskunde van dat eerste jaar bevat veel *meten en wegen.* Overigens schijnt dat niet door het 'Nuffield Project' uitgevonden te zijn, doch één van die bekende oude engelse tradities te zijn. Waar wij ook kwamen, op de 'Primary school' op het 'Teacher College' of op de 'In-Service' (heroriëntering onderwijzers), overal waren ze aan het meten. Nou kan ik zelf niet zo best meten en dat voel ik ook als een gemis, maar ik werd er op het laatst wel een beetje dol van.



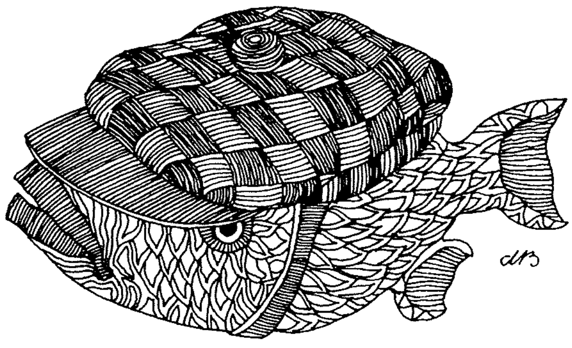
Ik heb ook de indruk, dat er bij zo'n heroriëntering, die overigens buitengewoon geanimeerd verloopt, geen enkele verdieping van de stof plaats vindt. En dat vind ik een nadeel. Je kunt pas goed begrijpen waarom je dit of dat onderwijst, als je weet wat er achter steekt. Anders heb je als onderwijzer het idee slechts één pagina voor te zijn. Het was wel een goed idee, dunkt mij,- dat men de heroriëntering gelijktijdig aan 'primary school-teachers' en 'secondary school-teachers' gaf.
Ik vind, dat wij veel geleerd hebben van deze reis, vooral de 'In-Service Training' was interessant voor mij, maar ook waren onze bezoeken aan het 'Teacher College' de 'Primary School', het 'Schools Council Center' en het 'Teacher Center' waardevol.

Al is het alleen maar om vast te stellen, dat overal, waar men met onderwijs en onderwijsvernieuwing bezig is, het een kwestie van vallen en opstaan, maar vooral van opstaan is.

Beste Leen, lees dit alles goed. Je kunt er vast nog wat van leren!

Hartelijke groeten van,

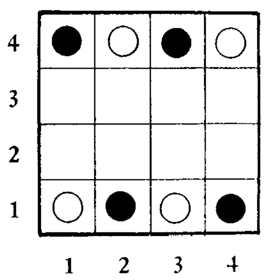
Ed.



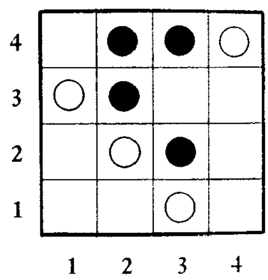
PETVIS

3

Een variant op het welbekende 'boter-kaas-en-eieren' (tik-tak-tor) is het volgende spelletje, dat door 2 personen op een vierkant veld met 4 x 4 hokjes gespeeld kan worden (zie afbeelding 1).
Op het veld liggen, zoals de eerste tekening aangeeft, 4 witte en 4 zwarte fiches. Een speler speelt met wit, de ander met zwart. De spelers doen om de beurt een zet in horizontale of vertikale richting naar een naast-gelegen veld. Wit begint en het doel is een horizontale, vertikale of diagonale rij van drie naast elkaar liggende fiches te krijgen.
De speler, die dit het eerste bereikt, heeft gewonnen (zie afbeelding 2).



afb. 1

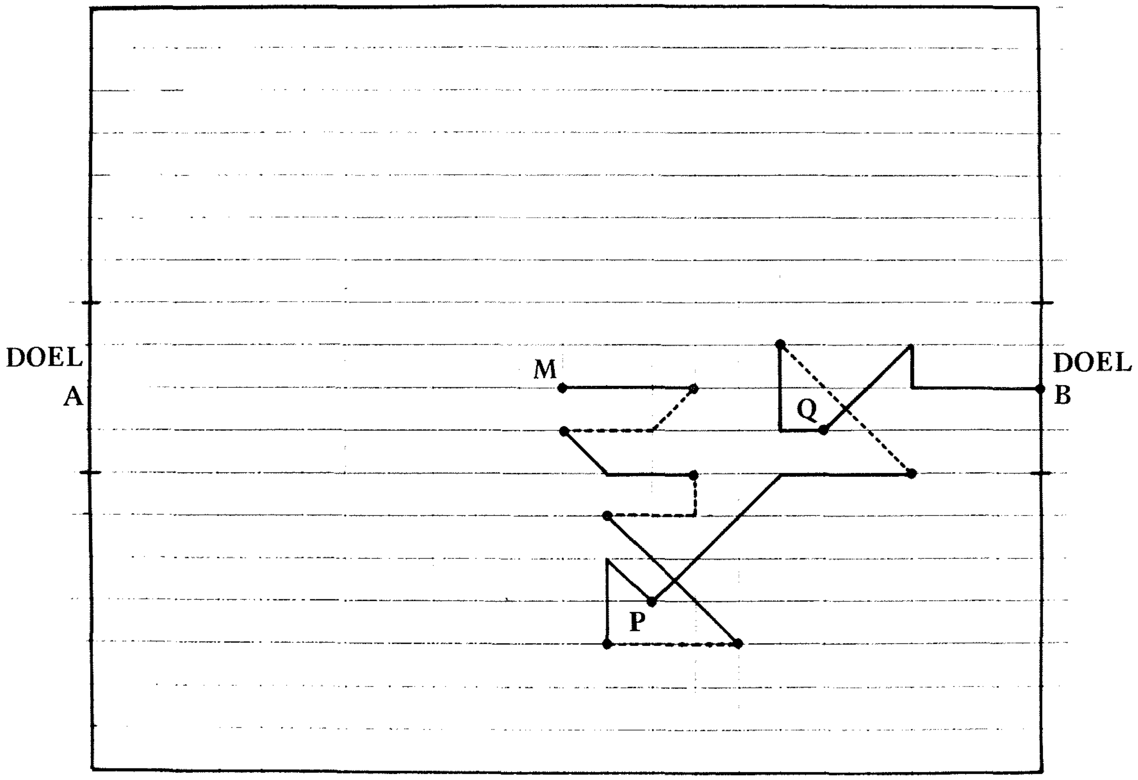


afb. 2

Een bijkomstige aardigheid is, dat het noteren van de opeenvolgende zetten d.m.v. koördinaten (bijv. Z: (1,4) → (2,3)) een leuke aanvulling is op het werken met het 'Stadsplan'.

4

Het volgende spelletje stond enige jaren geleden vermeld in het wiskundetijdschrift voor jongeren 'Pythagoras'. Naar verluidt is het afkomstig uit Rusland. Het wordt gespeeld op een vel ruitjespapier binnen een daarop afgebakende rechthoek. (zie afb.)
Vanaf de middenstip beginnen de spelers om beurten te zetten. Elke zet bestaat uit het trekken van *drie* lijnstukken langs de zijden of over de diagonaal van de hokjes. Bij het trekken van de lijnstukjes mag de rand van het 'speelveld' niet geraakt worden, terwijl een reeds getekende lijn niet *geraakt* of *gesneden* mag worden.
Degene, die de doellijn van zijn tegenstander het eerst bereikt, heeft gewonnen.
De aardigheid van dit spelletje wordt veroorzaakt door een ekstra spelregel: een speler kan nl. zijn tegenstander in een zodanige positie manoevreren, dat deze niet meer verder kan spelen. In dat geval mag hij een nieuwe zet doen van *zes* lijnstukjes lang, waarbij hij wèl andere lijnstukken mag raken of snijden.
Het lijkt wat ingewikkeld maar het volgen van de gespeelde partij op onderstaande afbeelding maakt het wel duidelijk.



U ziet een gespeeld spel tussen A (on-onderbroken lijn) en B (stippellijn). Begonnen is vanuit het midden M door A. A speelde dit spel slimmer dan B, want tot 2x toe wist hij zijn tegenstander vast te zetten (in punt P en Q), waarna A zetten mocht doen met lengte 6, wat hem dan ook de overwinning opleverde.
Variaties op dit spelletje (bijv. kleiner speelveld, zetten met andere lengte, geen zetten over de diagonalen, enz.) zijn gemakkelijk te bedenken.

ADRI TREFFERS

de voetbaltabel

EN DE DRIE FASEN IN DE LEERPLANONTWIKKELING

INLEIDING

We kunnen in de ontwikkeling van Wiskobas drie fasen onderscheiden:

- de fase van de *eksploratie* (1971-1973)
- de fase van de *integratie* (1973-1975)
- de fase van de *fundamentele opbouw* (vanaf 1975)

Het is de bedoeling om u een duidelijk zicht te geven op de plaats van de heroriëntering binnen de leerplanontwikkeling aan de hand van een klein stukje (mogelijke) leerstof. We zullen daarbij de vragen, die aanleiding waren tot het artikeltje in de vorige aflevering van het Wiskobas-Bulletin, nog duidelijker trachten te beantwoorden.

* * *

1 EKSPLORATIE (1971-1973)

'Wiskunde beoefenen is het ontdekken van regelmatigheden, patronen of strukturen'.
Deze uitspraak van Sawyer raakt een wezenlijk aspekt van het wiskunde-onderwijs.
Stel nu, dat een ontwerper het idee krijgt, dat er met de voetbaltabel iets van deze doelstelling — het ontdekken van regelmatigheden — te realiseren valt, wat tevens past in een leerstofpakket voor ordenen en klassificeren. Je kunt je dan afvragen hoe hij op dit idee komt en vervolgens informeren hoe dat idee verder uitgewerkt wordt tot een bruikbaar onderwijspakketje.
Nu, wat betreft het onstaan van het idee kunnen we kort zijn: 't was een kwestie van *zoeken, tobben* en *zwoegen.*
Vele ideetjes waren niet vruchtbaar en toen opeens op een maandagmorgen in de trein kwam de voetbaltabel en zie...!
Ontwerpers zijn dus vooral ook tobbers.
Eigenlijk is het onbegrijpelijk, dat tien jaar geleden de ontwerpfase voor een leerplan (lees: metode) vaak slechts enkele weken duurde, terwijl de fasen van uitproberen en het herzien jaren in beslag namen.
Het lijkt dan zoiets als met een kanon op een mug schieten: immers in de fase van het tobben worden de didaktische mogelijkheden voor een groot deel vastgelegd en daarmee de mogelijkheden om wiskunde te bedrijven.
Komen er rijke problemen uit de bus dan is het vervolg een kwestie van bijschaven om tot wiskunde-onderwijs te komen, blijft de oogst echter beperkt tot een opsomming van geïsoleerde leerstofeenheden, die vertaald kan worden in een lijst van aan te brengen kennis en vaardigheden bij de leerlingen, dan is de verdere ontwikkeling gedoemd tot... *'rekenen'*.
Wat we met dit *'rekenen'* als benaderingswijze tegenover wiskunde bedoelen zullen we nu toelichten aan de voetbaltabel.

Een voetbaltabel kan er als volgt uitzien:

Feyenoord	10	9	1	0	19	21-2
Ajax	10	7	3	0	17	18-3
FC Den Haag	10	7	1	2	15	18-9
FC Twente	10	5	4	1	14	10-4
enz.						

(Dit was de stand in de Nederlandse voetbalkompetitie in oktober 1971. 't Kan verkeren!)

Nu kunnen we met behulp van de tabelgegevens *'rekenen'* en allerlei regelmatigheden ontdekken.
Zo blijkt bijvoorbeeld, dat er tussen de gegevens van kolom 1 (het aantal gespeelde wedstrijden) en de gegevens van kolom 2, 3 en 4 (respektievelijk het aantal overwinningen, gelijke spelen en verliespartijen) een bepaalde betrekking bestaat.
Eveneens tussen de gegevens van kolom 2, 3 en 5 (het aantal wedstrijdpunten).

Welnu, de ontwerper wil betrekkingen tussen de getallen in de tabel laten ontdekken door de leerling.

Globaal genomen heeft hij drie mogelijkheden bij het samenstellen van zijn leerstofpakket: *'rekenen', rekenen en wiskunde.*

- *'Rekenen'.* De tabel wordt gegeven met daarbij opdrachten als:
  * Bepaal de som van het aantal wedstrijdpunten.
  * Bepaal de som van het aantal gespeelde wedstrijden.
  * Bepaal de som van het aantal doelpunten 'voor'.
  * Bepaal de som van het aantal doelpunten 'tegen'.

  De leerlingen ontdekken bij het 'REKENEN' de regelmatigheden, die uit de detailvragen volgen.
  Het 'waarom' kan hun volledig ontgaan: er is sprake van inzichtsloos manipuleren. Of beter: de aanbieding van het pakket werkt inzichtsloos manipuleren in de hand.
  Doelstellingen van *kennis en vaardigheden* komen bij het *'rekenen'* op de eerste plaats.

- *Rekenen.* Het is ook mogelijk om na de detailvragen naar het 'waarom' te vragen:
  * Waarom is de som van de doelsaldo's van de verschillende klubs gelijk aan nul?
  * Waarom is de som van de getallen van kolom 1 gelijk aan de som van de getallen van kolom 5?

  De leerlingen ontdekken bij het REKENEN de regelmatigheden die uit de detailvragen volgen en zijn ook in staat om het 'waarom' te achterhalen.
  Er is tenslotte sprake van inzicht. Of beter: de aanbieding van het pakket werkt dit inzicht in de hand.
  Doelstellingen van *kennis, vaardigheden en inzicht* komen bij het *rekenen* op de eerste plaats.

- *Wiskunde.* De leerlingen krijgen een tabel aangeboden waarop een inktvlek gekomen is.

  De opdracht luidt:
  Vul achter Vitesse, FC Den Bosch, Volendam en Excelsior de ontbrekende getallen in en beschrijf op grond van welke overwegingen de (juiste) getallen zijn ingevuld.

  Er worden dus géén detailvragen gesteld, maar het komplekse probleem wordt als 'n eenheid

Feyenoord	10	9	1	0	19	21-2
Ajax	10	7	3	0	17	18-3
FC Den Haag	10	7	1	2	15	18-9
FC Twente	10	5	4	1	14	10-4
Sparta	10	4	5	1	13	26-12
FC Utrecht	10	5	2	3	12	16-10
MVV	10	5	1	4	11	11-10
DWS	10	4	3	3	11	8-10
NEC	10	5	0	5	10	10-13
NAC	10	2	5	3	9	11-16
Telstar	10	3	3	4	9	7-14
PSV	10	3	2	5	8	15-9
Go Ahead E.	10	3	2	5	8	16-16
FC Groningen	10	1	5	4	7	12-16
Excelsior	10	1	4	5	[illegible]	4-10
Volendam	10	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-16
FC Den Bosch	10	[illegible]	3	7	3	4-19
Vitesse	[illegible]	1	1	8	3	4-26

aangeboden. Nu blijkt bijvoorbeeld dat de ontwerper, die deze probleemstelling geschreven heeft voor klas 6 van de basisschool – er vanuit gaande dat de onderwijzer de betekenis van de verschillende kolommen verklaard heeft voor de leerlingen – de moeilijkheid van het probleem niet juist getakseerd heeft, zodat de voorlopige konklusie dan moet zijn:
De leerlingen ontdekken bij deze WISKUNDE-AANPAK de regelmatigheden NIET.
Nu zouden we kunnen gaan *rekenen* of *'rekenen'*, zodat de gewenste doelstelling – het ontdekken van de verschillende regelmatigheden in de voetbaltabel – wel bereikt wordt, zoals we zojuist veronderstelden.

Maar op dit moment gaat de werker in het onderwijsveld tobben.
Daar waar de schrijftafelontwerper faalt in de didaktische verpakking van het rijke probleem, begint de tobberij van de onderwijzer die de heroriënteringskursus volgt. Hij stelt zich ten doel om het probleem schoolrijp te maken, zonder daarbij in de benaderingswijze van het *rekenen* of het *'rekenen'* te vervallen.
Ook in zijn geval waren vele ideetjes niet vruchtbaar en toen opeens op een maandagavond zag hij in de Volkskrant een voetbalrooster en zie...

thuis \ uit	AZ'67	BLAUW WIT	CAMBUUR	DFC	EINDHOVEN	FORTUNA VL.	FSC	GRAAFSCHAP	HAARLEM	HEERENVEEN	HELMOND SP.	HERACLES	HVC	PEC	RODA JC	SVV	VEENDAM	VOLEWIJCKERS	VVV	WAGENINGEN	WILLEM II
AZ'67		2-1	1-1	1-0	0-0	1-1	5-0		0-1		3-1	4-0		3-1	1-0	3-0	3-0	1-0			
BLAUW WIT	2-0		1-0	1-0	0-0		1-1		1-6		2-0	2-1	0-2		2-1	2-1	3-0	2-0	1-2		
CAMBUUR	1-0	0-1		5-1		0-1	3-2	3-0	4-1	1-2			1-1	0-2		0-0			0-2	1-0	1-1
DFC	0-0	0-1	1-0		0-1	3-0	0-1	1-0	1-1	1-2			1-3	2-0					1-1	0-3	2-1
EINDHOVEN	4-3	4-1	3-1	3-1		1-1		2-0	0-3	2-0			3-2	0-0	0-0	2-1			2-1	1-0	2-0
FORTUNA VL.	0-1	- 1-0		4-1			1-1		0-2	2-0	1-1	0-1	0-1		2-0	0-1	1-1	0-1	1-0	1-1	
FSC	1-1	1-1	0-0	4-1	0-1				0-1		1-0	3-1	0-2		1-2	2-0	3-1	4-0	2-0	1-1	
GRAAFSCHAP	1-1	1-0				1-0	2-3			1-1		1-1	5-1	2-3	0-1	2-0	3-2	1-1		5-1	0-0
HAARLEM		2-0	3-0	6-0	1-1	2-0	2-0	1-0		2-0	2-0		2-0	4-0					1-0	2-2	2-1
HEERENVEEN	2-0	1-0				1-0	0-0	1-0			3-1	0-0	2-0	3-0	1-2	3-1	1-2	0-0			3-0
HELMOND SP.	0-2		3-0	2-2	3-1			2-1	0-3	0-2			0-1	1-1	2-1	-0-		1-3	3-1	1-2	1-1
HERACLES			0-1	2-0	1-0			0-1	0-1	1-1	1-0				5-0	2-0	3-1	1-1	3-0	1-2	1-2
HVC	0-0	2-0	3-1	1-1	1-1	1-1	0-0		1-0		0-0	2-1			0-2	3-2	1-0	3-2			
PEC	0-1	1-0				4-0	2-0	0-1	1-1	1-2		2-1	2-0		0-0	4-1	0-1	1-2	3-3	3-1	
RODA JC			3-2	1-1	1-0	1-1		1-0	1-0		1-1	1-0		1-0			0-1	3-1	2-1	6-0	1-0
SVV			1-4	2-0	1-1	1-1	2-1		1-1		3-1	0-3		1-0	1-1		0-1	1-0	2-0		2-1
VEENDAM	2-2		1-1	1-0	1-1			1-1	0-0	1-1	3-0	2-2			2-1	2-2		0-0	3-2	2-1	4-3
VOLEWIJCKERS			0-1	1-1	0-0			0-1	0-1	1-1	1-1			1-0	0-1		1-1		0-0	3-1	0-0
VVV	0-0	0-0	1-1		1-0	1-2	2-0	1-0		0-1	4-0	2-0	1-0	1-2			3-1			0-0	3-1
WAGENINGEN	2-1	3-2			2-2	1-1	1-0	3-1		1-4		3-0	3-1	2-0		1-0	1-0				1-0
WILLEM II	1-1	0-0				2-1	3-0	2-3		2-0			2-0	1-1	0-2	1-0		0-1	0-0	1-0	

Hij stuurt tenslotte de volgende suggesties in voor de aanpak van het probleem van de voetbaltabel voor leerlingen van klas 6:

- ▶Biedt de leerlingen de voetbaltabel met de inktvlek aan.
- ▶Verklaar de betekenis van de verschillende kolommen.
- ▶Leg het probleem van de verdwenen getallen aan de leerlingen voor.
- ▶De leerlingen die de oplossing niet gevonden hebben (en dat was 90%) geven we een nieuwe opdracht:

  Ga met behulp van de gegevens in het uitslagenrooster zelf een voetbaltabel samenstellen.

  Let daarbij vooral op de strategie die gevolgd wordt: 'handig' tellen en skoren.

  Het blijkt dan dat tegelijkertijd met het efficiënt werken, de struktuur van de tabel blootgelegd wordt.

  Laat de leerlingen de verschillende strategieën vertellen.
- ▶Konfronteer de leerlingen opnieuw met het inktvlekprobleem.

Konklusie:
De leerlingen ontdekken bij de WISKUNDE—AANPAK de regelmatigheden zelfstandig.

Kenmerkend voor deze benaderingswijze is, dat de leerlingen zelfstandig de struktuur van de tabel hebben ontdekt: geen kleine 'duwtjes' in de rug voor degene die de oplossing in eerste instantie niet vindt, maar een in werking stellen van aktiviteiten die het probleem van een totaal andere kant verdekt benaderen. De oorspronkelijke probleemstelling blijft op de achtergrond. De hulpaktiviteiten zijn, naast de bijdrage voor de oplossing van het oorspronkelijke probleem, ook op zichzelf genomen belangrijk: systematisch tellen, ordenen, tabelleren, e.d. passen evenzeer binnen de doelstellingen van het wiskunde-onderwijs. Stellen we deze aanpak naast die voor *rekenen* en *'rekenen'*, dan valt allereerst de benaderingswijze op. Het probleem wordt in al zijn rijkdom gesteld en bij het stagneren van de oplossing wordt een veelheid van aktiviteiten opgeroepen, die ver uitgaat boven de algemene doelstelling van het ontdekken van regelmatigheden. Het probleem ligt a.h.w. aan de grens van de wiskunde en door de opgeroepen aktiviteiten moet de leerling zelfstandig het probleem naar binnen halen.
In het andere geval verricht de didaktikus zelf de grensoverschrijding door z'n gedetailleerde vraagstelling en daardoor gaf hij geen gelegenheid tot matematiseren. De vragen waren te

eng: ze bleven opgesloten binnen het rekengebied. Matematiseren bestaat nu juist in de grensoverschrijding. De ontwerper (voetbaltabel) en de praktikus (voetbalrooster) zijn er in gezamenlijke inspanning in geslaagd een ruimte voor dit matematiseren te kreëren.

Kenmerkend voor de benaderingswijze van het probleem in z'n totaliteit in de fase van de eksploratie is het gezamenlijk tobben. We kunnen het ook minder 'tobberig' zeggen: de eksploratie-fase wordt gekenmerkt door kreativiteit. De kreativiteit krijgt binnen het IOWO en de Ontwerpschool gestalte in de verschillende blokken voor de Pedagogische Akademie en voor de Heroriëntering van Onderwijzers; in het onderwijsveld (i.c. de HOO-kursussen) worden de suggesties kreatief verwerkt, waarna er een terugkoppeling plaatsvindt naar het oorspronkelijke ontwerp. In het Wiskobas-Bulletin no. 2/3 (jrg. 1) bleek de kreatieve respons ten aanzien van het Stadsplan duidelijk (zie o.m. de bijdrage uit Oirschot).

Samenvatting van de eksploratie-fase (1971-1973)

De bedoeling van de eksploratie-fase werd toegelicht aan een geïsoleerd voorbeeld van het ontdekken van de regelmatigheden in een voetbaltabel.

De ontwerpers en de werkers in het onderwijsveld vulden elkaar kreatief aan: de eerste groep bood een rijk geschakeerd probleem aan en de tweede maakte het stuk schoolrijp door een geraffineerde aanpak. De oorspronkelijke bedoeling van de ontwerpers kan echter ook verminkt worden door de schrale aanpak van het *'rekenen'* of de weinig verrassende benaderingswijze van het *rekenen.*

De kreatieve ontwerp- en ontwikkelingsaktiviteiten nemen veel tijd in beslag, de uitkomsten ervan vormen echter de enige basis voor de verdere uitbouw: *tijd is fundament!*

In leerplanprojekten uit de V.S. en Zweden is de eksploratie veelal te kort geweest, een reden waarom men nu weer aan een totale verandering toe is.

In Nederland duurt de eksploratie-fase relatief zeer lang. Het nadeel ervan is duidelijk. Vandaar ook, dat alleen de onderwijzers, die zich mede willen inzetten voor de leerplanontwikkeling een heroriënteringskursus volgen. Bij de inleiding van BLOK 1 werd hierover duidelijke taal gesproken, dit om te voorkomen dat de onderwijzer een kant-en-klaar stuk zou verwachten.

Wij zijn nu bijna op de helft van de eksploratie-fase, waarin we met elkaar tobben en zwoegen. Voor sommigen is dit frustrerend, velen echter vinden intens genoegen in dit pionierswerk.

Laten we nu schetsen — ook weer met het voorbeeld van de voetbaltabel — welke werkzaamheden ons in de volgende fase wachten.

* * *

2 INTEGRATIE (1973-1975)

In de heroriënteringskursussen en op de Pedagogische Akademies werden in de eksploratiefase een aantal blokken aangeboden.

De kursisten onderzochten verschillende leerstofgebieden op hun didaktische bruikbaarheid, zonder dat nochtans de werkzaamheden geïntegreerd waren in het huidige rekenonderwijs.

Welnu, nadat in de periode 1971-1973 een overzicht gekregen werd van de mogelijkheden vindt de integratie plaats. Laten we de voetbaltabel — als 'n nieuw uitgangspunt voor ons onderwijs — eens bekijken op z'n integratie-mogelijkheden. De eerste vraag die we ons stellen:

Past de wiskundige benaderingswijze van de voetbaltabel met behulp van inktvlek en uitslagenrooster binnen het huidige rekenonderwijs?

JA!

Daarmee is dan tevens duidelijk, dat bij een vernieuwing van het rekenonderwijs het procédé van *'schrappen'* en *'bijstoppen'* niet zonder meer past.

In de aanbevolen werkwijze wordt
 opgeteld
 vermenigvuldigd
 handig geteld
 systematisch gewerkt
 geredeneerd.

Een rijtje van verschillende oefeneenheden uit het rekenboek minder laten maken en de ruimte is gekreëerd...

Zo eenvoudig is het echter ook weer niet. We moeten immers met dit voorbeeld — dat op zichzelf al vrij eenvoudig is — ook de vraag

stellen, of de benaderingswijze past binnen een vernieuwd rekenonderwijs (lees wiskunde-onderwijs) op de basisschool.
Daarbij komen de volgende gebieden in het gezichtsveld:

negatieve getallen (i.v.m. doelsaldo)
ordenen en klassificeren (zie: IN ORDE)
grafische verwerking (uitslagen)
relaties
koördinaten (netwerk)
kansrekening (via netwerk naar de voetbaltoto).

De voetbaltabel — als tema — zou dan goed kunnen dienen om de elementen van deze gebieden met elkaar te verbinden.
In het integratie-plan zou een reeks van lessen voor klas 6 uitgaande van de voetbaltabel passen in:

- Een *kursorische* opzet. Het zou dan bijvoorbeeld als startpunt kunnen dienen voor het onderwerp 'Ordenen en klassificeren'.
- Een *tematische* behandeling, waarin de juist genoemde onderwerpen met elkaar verbonden worden. Het tema is de voetbaltabel en de leerstofgebieden zijn dan van afgeleid belang. In het vorige geval was dit juist andersom.
- Een *projekt* over sport, waarbij het meten en verwerken van gegevens centraal gesteld wordt als wiskundige bijdrage aan de veelzijdige benaderingswijze.

Het is nu de bedoeling om in het INTEGRATIE-PLAN, dat na afloop van de integratieperiode gepubliceerd zal worden, de veelheid van mogelijkheden — kursorisch, tematisch en projektief — tot uitdrukking te brengen. Wij kunnen dit realiseren als we met elkaar gegevens uitwisselen over de integratie-mogelijkheden.
Het IOWO zal van haar kant alle relevante gegevens — die voornamelijk uit de ontwerpschool komen — vanaf 1973 in het tijdschrift publiceren. De pioniersgroep kursisten wordt uitgenodigd het RESPONS-BLOK te vullen met bijdragen.
Het integratie-plan zal een bron zijn waaruit men kan putten voor de samenstelling van onderwijs-leerpakketten en er zal een verantwoording van de doelstellingen gegeven worden.

Onderwijl zullen de heroriënteringskursussen voortgang vinden, waarbij wellicht gebruik gemaakt zal worden van de T.V. (TELEAC). In N.O.T. programma's zal getracht worden om enkele tema's voor verschillende klassen te behandelen.
Tot 1975 zal de nadruk gelegd worden op de handhaving van de thans gebruikte rekenmetode onder het motto:
verlevendig het huidige rekenonderwijs!

Pas als het integratie-plan er ligt zijn de voorwaarden voor een homogene vernieuwing gekreëerd. U kunt dan modern wiskundeonderwijs geven in *alle* klassen: een kenmerk van het integratie-plan is immers, dat het de totaliteit van het basisonderwijs bestrijkt. Door deze gelijktijdigheid is een eerste snelle en weldoordachte verandering mogelijk gemaakt voor de zeventiger jaren. Op lange termijn (tachtiger jaren) zal er echter een fundamentele wijziging noodzakelijk zijn.
Vanuit het IOWO en in kleine kring zal deze hele opbouw vanaf 1976 gerealiseerd worden.

* * *

3 FASE VAN DE FUNDAMENTELE OPBOUW (VANAF 1975)

Het Wiskobasprojekt zal voltooid worden met een gedetailleerde uitwerking van het integratie-plan voor de alledaagse schoolpraktijk. Leerlingenmateriaal, teksten, hulpmiddelen e.a. zullen in het uiteindelijke pakket opgenomen worden. De invloed van deze opbouw van onderaf — in tegenstelling tot het integratie-plan dat de zaak in de volle breedte aanpakt — op de totale onderwijspraktijk zal pas ver in de tachtiger jaren merkbaar worden. Het integratie-plan biedt echter genoeg houvast om een nieuwe generatie van leerboeken te ontwikkelen voor de duur van tien jaren. Op dit moment kunnen we het integratie-plan (1975) als voorlopig einddoel formuleren, daarom zullen we hier geen aandacht schenken aan de planning op langere termijn.

* * *

4 SAMENVATTING

- *Eksploratie-fase (1971-1973)*

Ontwerpen van leerstofpakketten uit leerstofgebieden, die aanleiding geven tot een didaktisch relevante aanpak.

Samenwerking tussen ontwerpers en praktici.
In de nieuwe onderwijsprodukten trachten om de doelstellingen te konkretiseren (zie de voetbaltabel).
Bezinning op het huidige leerstofprogramma van rekenen in verband met het kreëren van ruimte voor integratie van nieuwe elementen.

• *Integratie-plan (1973-1975)*

Integreren van nieuwe leerstofeenheden in het oude programma en de totale onderwijsaanpak doordringen met mogelijkheden tot matematiseren (zie voetbaltabel).
Tijdschrift, T.V. (N.O.T. en TELEAC) en kursussen kunnen koördinatiepunten zijn.
Was de vorige fase gekenmerkt door uitbundige kreativiteit, deze fase is voor de pioniersgroep gekarakteriseerd door ingetogen realiteit.
Het probleem van integreren is wezenlijk anders dan het proces van 'schrappen' en 'bijstoppen'.
Het integratie-plan is geen minimumplan, maar een bron van integratie-mogelijkheden en het zal zowel kursorische, tematische als projektieve elementen bevatten.
De bron zal opwellen uit de lagen van PA, WIS, KO en BAS.
Met het integratie-plan zal de voorlopige eindfase van Wiskobas bereikt zijn. Het plan leent zich voor direkte en integrale toepassing in alle klassen.

• *Fundamentele opbouw (vanaf 1975)*

Op langere termijn zal Wiskobas een onderwijs-leerstofpakket uitwerken voor de leerlingen van 4-12 jaar.
De aanzet tot het ontwerpen van deze pakketten geschiedt in 1976. Leerjaar voor leerjaar zal de opbouw geschieden. Pas in de tachtiger jaren zal het totale pakket klaar zijn. Maar, zoals gezegd, het voorlopige einddoel ligt in 1975. De publikatie van het integratieplan is dan in 1976 te verwachten.

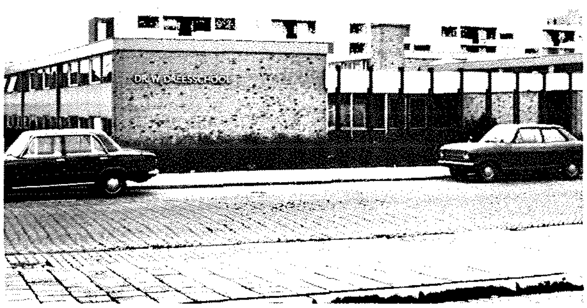
Met dit artikeltje probeerden we ook iets van de Wiskobasfilosofie te beschrijven.
Wiskobas betekent:
WISkunde **O**p de **BAS**isschool, of
WISkunde **K**leuter**O**nderwijs **BAS**isschool
Wiskunde duidt in dit verband vooral op 'n benaderingswijze van het onderwijs en niet in de eerste plaats op een leerstofgebied. We hebben laten zien, dat er mogelijkheden zitten in een voetbaltabel, maar in groter verband zijn er een aantal onderwerpen te noemen, die goed wiskunde-onderwijs mogelijk maken. Op de heroriënteringskursussen e.d. trachten we hieruit 'n selektie te doen. Het gaat in het onderwijs niet alleen om kennis en vaardigheden (we noemden dit *'rekenen'*) of inzicht (*rekenen*), maar ook om 'n specifieke benaderingswijze van problemen (*wiskunde*, het proces van het matematiseren).
Met deze terminologie betekent dit, dat een goede onderwijzer altijd al bezig is geweest met *wiskunde op de basisschool*; nieuwe onderwerpen zullen hem echter nog meer mogelijkheden bieden.

5

Spelletjes met lucifers (of stokjes) zijn er legio. Dit spelletje wordt gespeeld met 40 lucifers, die op een stapeltje tussen de twee spelers in liggen.
Ieder neemt om beurten lucifers van de stapel, waarbij de beperking geldt dat een speler minstens 1 en hoogstens 6 lucifers per keer mag wegnemen.
Degene, die de laatste lucifer van de stapel neemt, heeft gewonnen.

bericht uit de ontwerpschool

KEES FRENAY



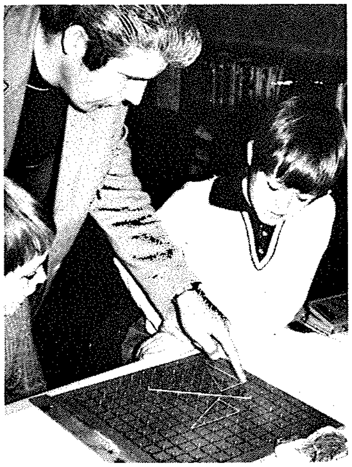
Uit kontakten met kollega's blijkt dat er nog veel misverstanden bestaan over de funktie van de ontwerpschool. Men moet het woord *'ontwerp'* letterlijk opvatten. Het werk van het personeel van de Dr. W. Dreesschool, onder leiding van Wiskobas-medewerkers, is in de eerste plaats gericht op het ontwerpen van bruikbaar materiaal voor de heroriënteringskursussen. Dat onze leerlingen iets mee-eten van het heerlijke maal dat in de Wiskobaskeuken bereid wordt, is een plezierige bijkomstigheid, maar in deze fase niet meer dan dat!
De opmerking dat de optimale begeleiding van onze school de betrouwbaarheid ten aanzien van de bruikbaarheid in andere basisscholen ongunstig beinvloedt, stoelt eveneens op de onjuiste opvatting dat het materiaal van de ontwerpschool regelrecht naar 'het basisonderwijs' gaat.
Wil de vernieuwing, ja zelfs de verlevendiging van het rekenonderwijs binnen afzienbare tijd kans van slagen hebben dan is het noodzakelijk dat de kollega's, die nu voor de klas staan, op grote schaal gelegenheid krijgen zich te herscholen. Maar dan wel op een andere wijze dan de enorme hoeveelheid kursussen die sinds 1950 door ontelbare instellingen zijn georganiseerd. Er is heel wat vernieuwingswerk bij de praktische realisatie de mist ingegaan omdat de kloof tussen teorie en praktijk onoverbrugbaar bleek. Het blijkt erg moeilijk te zijn de resultaten van wetenschappelijke arbeid te 'vertalen' voor de werkers in het veld.
Alleen bij een voortdurend overleg en een goed samenspel, gebaseerd op vertrouwen en begrip kan er een vernieuwingsaktiviteit ontstaan waarbij optimaal gebruik kan worden gemaakt van wetenschappelijke research en praktische ervaring.
Het is om deze reden dat Wiskobas-Centraal zoveel medewerkers, pedagogen en wiskundigen, maar allen met onderwijservaring, parttime aan onze school heeft toegevoegd. Nogmaals, het kan niet dikwijls genoeg gezegd worden, deze intensieve begeleiding is er niet om de Dr. W.Dreesschool in een bevoorrechte onderwijssituatie te plaatsen, maar om voor meer dan duizend kollega's blokken te ontwerpen met voldoende teoretische achtergrond om het praktische werk in alle opzichten verantwoord te realiseren; blokken die uitnodigen tot meedenken en meewerken aan ons aller doel:
een maksimaal beschrijvend leerplan voor het reken-wiskunde onderwijs in de basisschool.
Het zal duidelijk zijn, gezien het bovenstaande en de uiteraard beperkte mankracht, dat er maar één ontwerpschool kan zijn. Later kunnen er misschien meerdere eksperimenteerscholen komen.
Wat gebeurt er nu in de ontwerpschool?
Hoe komt nu zo'n blok tot stand?
Het KO-boekje, in de nulde versie (er zijn soms enige negatieve versies aan vooraf gegaan), ontworpen door medewerkers van Wiskobas-Centraal, wordt tijdens een wekelijks kollege aan het hele personeel zeer kritisch doorgenomen. Daarbij zijn steeds enkele ontwerpers en specialisten-basisonderwijs aanwezig.

Omdat er op onze school zowel mensen van de oude kweekschool als van de nieuwe P.A. werken; onderwijzers die bezig zijn met l.o. wiskunde en leerkrachten die het met de oude schoolse wiskunde niet verder brachten dan een mager vijfje, is er een team dat min of meer representatief geacht kan worden voor het korps bij het basisonderwijs.
In dit kollege worden alle vragen en opmerkingen, ook de schijnbaar onbelangrijke, serieus genomen. Geeft het KO-boekje niet te veel, niet te weinig, maar voldoende wiskundige informatie? Komt de tekst goed over? Is de opbouw logisch? Zijn de opdrachten voor de basisschool uitvoerbaar en inpasbaar? Zijn er voldoende aanknopingspunten bij de huidige onderwijspraktijk?
Prikkelt de tekst tot kreativiteit, dagen de opdrachten uit tot nader onderzoek?
De ontwerpers hebben alle antennes uitstaan. Er wordt geschrapt, herschreven, wat toegevoegd, anders geformuleerd en geordend; soms gaat een hele pagina eruit, zelfs een volledig KO-boekje kan in de prullemand verdwijnen. (Dat het KO-boekje toch nog op tijd verschijnt is te danken aan de onvoorstelbare werkkracht van de ontwerpers van Wiskobas-Centraal!)
Het BAS-boekje, een hulpmiddel voor de onderwijspraktijk, is de neerslag van het werk in de klas met de kinderen.

Bij het maken van de lessen wordt uitgegaan van:

a de suggesties voor de basisschool van het KO-boekje;
b de inventiviteit van de klasse-onderwijzer(es);
c opdrachten van de specialisten basisonderwijs Wiskobas.

Voor alle drie uitgangspunten geldt dat er eerst overleg wordt gepleegd over de wijze waarop de les zal worden gegeven. In de eerste plaats met de reeds meerdere malen genoemde specialisten, maar ook met de kollega's van de parallelklassen en/of de kollega's van de onderbouw of bovenbouw.
Zoveel mogelijk lessen worden bijgewoond door de medewerkers van Wiskobas, die observeren, protokolleren, analyseren, van kommentaar voorzien en na afloop de les met de onderwijzer bespreken. Deze deskundigen geven zelf ook lessen; zowel aan een klas als aan kleine groepen. Dit laatste omdat zij soms, voordat een opdracht geformuleerd wordt, enig inzicht willen hebben in de aanspreekbaarheid van de stof. Alle leerkrachten doen verslag van hun lessen (lesschema plus op- en aanmerkingen plus leerlingenwerk). Dan komt het moeilijke werk van kiezen, ordenen en herschrijven om een bruikbaar BAS-boekje samen te stellen.



Wanneer er twijfel bestaat of een bepaald onderwerp wel of niet moet worden opgenomen, hebben de Wiskobas medewerkers nog de mogelijkheid dit onderdeel nader te bekijken in een andere school. Zij hebben uiteraard nog veel relaties met scholen overal in het land en daar wordt zo nodig dankbaar gebruik van gemaakt.
Als het BAS-boekje in koncept klaar is neemt ieder het mee naar huis; na her-bestudering ervan volgt dan weer een plenaire vergadering waar de definitieve vorm wordt vastgesteld.
Ondanks het vele werk aan het BAS-boekje besteed, heeft het geen pretentie. De kollega's van de H.O.-kursussen kunnen het gebruiken als informatie-materiaal, als handreiking voor hun eigen lespraktijk of als inspiratiebron.
Maar hoe het BAS-boekje ook gebruikt wordt, het vraagt om respons!
Elke kollega van de H.O. kursus kan de inhoud van het toekomstige reken-wiskundewerkplan mee bepalen, als hij/zij maar reageert en zijn licht niet onder de korenmaat zet. De docent van de H.O. zal de bevindingen graag doorzenden aan de koördinator in Utrecht.
Het zal duidelijk zijn dat er veel werk verzet moet worden, zoveel zelfs dat de vraag wel

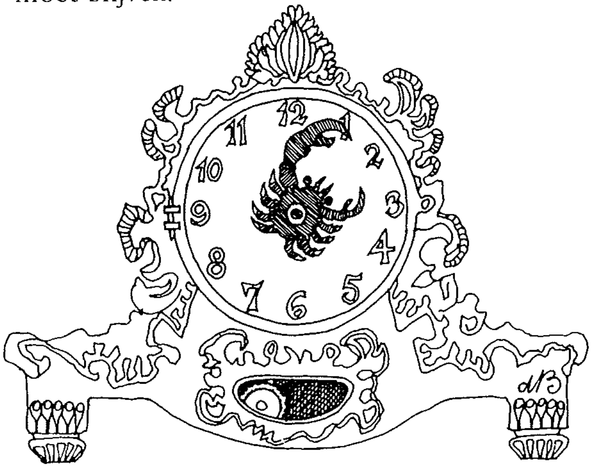
eens gesteld wordt of de leerlingen van de ontwerpschool nog wel wat leren. Het antwoord kan kort zijn: 'Ja'!
Maar ik wil niet verhelen dat we de vinger aan de pols moeten houden en waakzaam moeten blijven om te zorgen dat b.v. de ekspressievakken en de wereldoriëntatie niet in het gedrang komen. Wij zijn ons goed bewust dat bezinning op de reken-wiskunde-didaktiek niet het enige is wat de nederlandse basisschool nodig heeft.
Maar bovenbedoelde zorg hoeft niet overdreven te worden. De Wiskobasmedewerkers zijn geen vak-idioten, integendeel, steeds wordt gezocht naar integratie met andere vakken zodat de eventueel nieuwe stof ook funktioneel gebruikt kan worden.
Bij het 'Stadsplan' ging het meer om de nieuwe ontdekkende werkwijze; bij 'Grafische verwerking' werd steeds in het oog gehouden dat het maken van grafieken geen doel is, maar een middel dat dienstbaar gemaakt moet worden aan het ordenen, overzichtelijk maken en interpreteren van gegevens. In de BAS-boekjes en het Wiskobas-Bulletin zult u verschillende voorbeelden aantreffen die duidelijk maken op welke wijze getracht wordt de wiskobas-stof te laten aansluiten bij de huidige onderwijspraktijk en te integreren in het totale onderwijspakket.
Het werken in groepen geeft nog wel eens problemen.
De vraag: 'Hoe doe je dat nu? ' is helaas niet te beantwoorden. Primair is, dat het pedagogisch klimaat op school goed is. Er moet een oprecht goede relatie kind-onderwijzer zijn en de omgang met de kinderen moet een ongedwongen, natuurlijk karakter hebben. Ook de sfeer tussen de kinderen onderling moet prettig zijn. Als aan deze pedagogische voorwaarden niet wordt voldaan, moet men niet met groepswerk beginnen. (Elke werkvorm is dan tot mislukken gedoemd, maar bij groepswerk valt het eerder op). De didaktische voorwaarden zijn veel moeilijker te formuleren omdat deze afhankelijk zijn van de opdracht. Een vuistregel zou kunnen zijn: een duidelijke instruktie, bij opdrachtkaarten lette men vooral op eenvoudig taalgebruik en leesbaar lettertype, een goede taakverdeling, afgestemd op de kwaliteiten van de groepsleden, zodat ieder zich bij de opdracht betrokken voelt.
Groepswerk is natuurlijk geen typische Wiskobas-aangelegenheid; wel blijkt uit het werk op de ontwerpschool steeds dat het 't IOWO niet alleen gaat om de inhoudelijke vernieuwing van het reken-wiskunde-onderwijs, maar ook om de vernieuwing van de didaktische werkvormen.
De Dr. W.Dreesschool heeft vanaf zijn oprichting in 1968 geprobeerd zich modern op te stellen, d.w.z. het hele team heeft zich volledig ingezet voor

a het scheppen van een in alle opzichten goed pedagogisch klimaat, waarin het kind zich thuis voelt;
b een evenwichtige verdeling van de aktiviteiten over de kultuur-technische vaardigheden, de wereldoriëntatie en de kreativiteit.

Als men dan bedenkt dat onze school voor alle leerjaren parallelklassen heeft, de stad Arnhem centraal ligt en goed bereikbaar, dan is de vraag waarom de Dr. W.Dreesschool geadopteerd is als ontwerpschool, beantwoord.
Vanzelfsprekend is ook de klassegrootte van invloed op de mogelijkheden om nieuwe stof en nieuwe werkvormen uit te proberen. Twaalf van onze veertien klassen hebben een bezetting van rond de 30 leerlingen. De twee vierde klassen hebben ieder 41 leerlingen. Dat in een dergelijke situatie het ontwerpen bizonder moeilijk is, hoeft hier niet uiteengezet te worden.

Men informeert nogal eens belangstellend (of angstig) naar het aantal uren dat bij ons gemaakt wordt.
70 uur per week is dan het antwoord.
Dit is, over een jaar gerekend, natuurlijk enigszins gechargeerd. Hetgeen niet wegneemt, (en veel kollega's zullen dit helaas moeten beamen) dat er nog wel eens weken zijn waarin elke avond een vergadering bezocht moet worden.
Het normale werk, zoals o.a. lesvoorbereiding, evaluatie, teambespreking, begeleiding van studenten, kontakten met ouders, om van alle randdiensten maar te zwijgen, moeten dan tussen neus en lippen worden afgehandeld. De zaterdag en zondag moeten dan gebruikt worden om de administratie, in de meest ruime betekenis, bij te werken. Het gaat natuurlijk niet om het juiste aantal uren; maar het is duidelijk dat we in ons land, waar her- en

bijscholing van onderwijzend personeel onder schooltijd nog niet mogelijk is, geen stap verder komen, als 'eigen tijd' onaangetast moet blijven.



DE TIJD IS AANGETAST

Het kwalificeren van het schoolmilieu is een moeilijke zaak. Wat is de norm? Het I.Q. van de leerlingen? Het beroep van de ouders? De prijs van de huizen?
De video-bandopname van drie lessen in onze school die op enige H.O.O.kursussen vertoond is, geeft sommige mensen de indruk dat de Dr. W.Dreesschool een instelling 'voor het betere publiek' (wat is dat?) zou zijn. Deze indruk is onjuist. Wanneer men de beroepenlijst van onze ouders doorneemt dan ontbreken de ongeschoolde arbeiders en komen kommerciële, technische en administratieve beroepen veel voor. Als men ons deswege wil indelen bij de scholen 'boven het gemiddelde', mag ik geen bezwaar maken.

Veel belangrijker is, en dat is niet gebonden aan het milieu, dat er een goed samenspel is tussen school en huis. Met onze maandelijkse kontaktavonden proberen wij deze samenwerking optimaal gestalte te geven en dat verschaft de school natuurlijk een goed uitgangspunt bij al haar handelen.
Een gunstige faktor bij ons werk is de trouw van de kollega's aan de school. Mutaties komen niet veel voor. Omdat we een snel groeiende school zijn, moesten er dikwijls leerkrachten op grond van art.56 II worden aangetrokken, maar we zijn er steeds in geslaagd het team aan te vullen met enthousiaste mensen, die bereid zijn veel te doen, die weten wat er van ieder gevraagd wordt en die zich met elkaar verantwoordelijk voelen voor de hele gang van zaken in de school. Kortom, een goed op elkaar ingespeeld team, waar dankbaar gebruik wordt gemaakt van de speciale kwaliteiten die men bezit en waar graag geholpen wordt om elkaars tekortkomingen op te vangen.
Gezegd mag worden dat de onderwijssituatie op onze school vrij gunstig is. Ongetwijfeld is dit optimale uitgangspunt voor het IOWO ook een reden geweest de school als ontwerpschool te kiezen. Bij eksperimenteerscholen moet men bewust alle soorten scholen in het programma opnemen, maar wil een ontwerpschool aan haar doel beantwoorden, dan moet men kunnen werken vanuit een onderwijssituatie, die zo is, dat men enig risiko kan nemen, zonder welke ontwerpen onmogelijk is.

JAN POSTEMA

piagetalbegrip

In het januari-nummer van ons bulletin is aangekondigd, dat ik zou rapporteren over een onderzoek van B. Remmo Hamel en H. de Tombe over 'Getalbegrip bij kleuters'. Voor een goed begrip van dit onderzoek is het noodzakelijk dat de lezer enigszins bekend is met het denken van de zwitserse psycholoog Jean Piaget. We willen aannemen dat een niet onbelangrijk deel van de lezers hierover onvoldoende geïnformeerd is.
Het lijkt me dan ook juist om eerst eens in te gaan op wat Piaget heeft geponeerd ten aanzien van de ontwikkeling van het kenvermogen van het kind. En dit te meer omdat zijn psychologie een grote rol speelt bij het moderne reken-onderwijs op de basisschool.

Jean Piaget werd in 1896 te Neuchatel in Zwitserland geboren. Hij is een geniaal student in de biologie en promoveert op tweeëntwintig-jarige leeftijd op een proefschrift gewijd aan de verbreiding van weekdieren in de Walliser Alpen. Maar beroemd is hij geworden als psycholoog en epistemoloog. Hij is een zeer origineel onderzoeker van de geestelijke ontwikkeling van het kind.
Momenteel mede-direkteur van het 'Institut de Sciences de l'Education' te Genève en hoogleraar in de eksperimentele psychologie. Zijn werk is aan veel kritiek onderhevig. Anderzijds is hij een baanbreker, terwijl vooral gesteld moet worden dat niemand die, hetzij als teoretikus hetzij als opvoeder-onderwijzer het zich ontwikkelende kind ontmoet, aan het werk van Piaget kan voorbij gaan. De Erasmusprijs 1972 is aan Jean Piaget toegekend.

Misschien denkt u, dat Piaget degene is die het verlossende woord heeft gesproken ten aanzien van het kind en dat op grond daarvan nu eindelijk eens een verantwoorde, zeg wetenschappelijke, aanpak van het rekenonderwijs kan worden verwacht. Welnu, dit is beslist niet het geval.
Om te beginnen is Piaget geen (reken-) didaktikus maar een psycholoog. En wel een kognitief-ontwikkelingspsycholoog. Hij bestudeert dus de ontwikkeling van het *ken-vermogen van het opgroeiende kind.* Daarnaast schenkt hij ook aandacht aan de ontwikkeling van de affektieve, sociale en morele gevoelens. Maar zijn aandacht gaat toch vooral uit naar de kognitieve ontwikkeling.

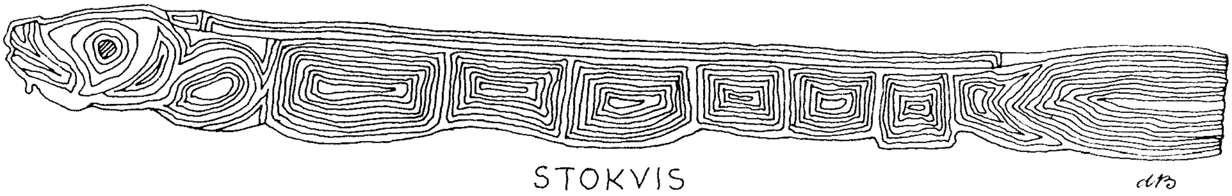
Piaget ziet de intelligentie als het *middel* waarmee het kind tracht greep te krijgen op zijn milieu. Tussen kind en milieu is er de relatie van de *adaptatie*, de aanpassing. Het is de intelligentie die in het adaptatieproces het denken en handelen organiseert en re-organiseert. Het kind moet zich op een steeds hoger nivo zowel organisch als psychisch aanpassen. Na het drinken van melk moet het op een bepaald moment vast voedsel opnemen en verteren. Zo ook: na eenvoudige reakties op bepaalde situaties zal het kind steeds intelligenter reageren tot tenslotte het hoge abstraktie-nivo van de volwassene is bereikt.
Zo ziet Piaget dus het aanpassingsproces vooral als een ontwikkeling.
'In zekere zin is de ontwikkeling een opmars naar een evenwichtstoestand van hoger nivo.' Deze *'evenwichtsteorie'* is bij Piaget essentieel. Vanwege de beknoptheid van het artikel moeten we er voor een goed deel aan voorbij gaan.
Laten we het als volgt formuleren: het kind gaat over steeds meer komplekse en beter geintegreerde gedachten- en handelingsstrukturen beschikken. Deze ontwikkeling nu verloopt in fasen. Al naar de fase waarin het kind verkeert zal het anders reageren op de prikkel van de omgeving en ook zal het op een andere wijze zelf de gegevens uit het milieu verwerken.

Daar ziet u die twee kanten van het adaptatieproces: opnemen en verwerken. Piaget spreekt hier van assimilatie en akkommodatie.
Assimilatie: Het kind neemt prikkels op uit de omgeving. Ziet u 'prikkels opnemen' vooral in ruime zin. Het is alles wat het kind hoort, ziet, ervaart etc. Deze ervaringen nu worden verklaard en benaderd aan de hand van de reeds bestaande, voor het kind vertrouwde denk- en handelingsstrukturen. De ervaringen, ook de nieuwe, worden dus ingepast in de aanwezige 'organisatie' of 'mentale struktuur'. Het kind reageert zoals het in vorige situaties deed.
Akkommodatie. Hier eisen de 'prikkels' van het kind een nieuwe reaktie. Het kind ervaart iets wat het met de aanwezige struktuur niet kan verwerken. En nu gebeurt er iets heel essentieels: de mentale struktuur moet worden uitgebreid, aangepast aan de nieuwe situatie. De strukturen worden zo meer kompleks, maar ook meer kompleet. Anders gezegd: iets in het milieu kan niet zonder meer eigendom worden van het kind. Dat 'iets' is voor het kind nu een uitdaging: het kind wil er op reageren. Hoe kan dat? Door zijn denkvermogen verder te ontwikkelen. En door dit te doen komt het kind op een hoger (evenwichts-)nivo.
We hebben nu gezien hoe de ontwikkeling door de beide processen van akkommodatie en assimilatie zich voltrekt. Zo groeit de intelligentie. In deze ontwikkeling onderscheidt Piaget fasen, stadia. Elk van deze fasen heeft zijn eigen kenmerkende struktuur. Een kind in een bepaalde fase zal zo en niet anders reageren, omdat het in zijn reakties en leren gebonden is aan de mentale struktuur van die fase. Om het eens heel konkreet te zeggen: Een kind van 5 à 6 jaar zal geen getalbegrip hebben, niet echt weten wat 7 is, omdat zijn mentale struktuur dit begrip niet kan inpassen.

Piaget onderscheidt 3 fasen, te weten
Fase I: de senso-motorische handelingen; tot 2 jaar
Fase II: de konkrete handelingen; 2-11 à 12 jaar
- a het pre-konceptionele stadium; 2-4 jaar (het kind gaat over taal beschikken)
- b de periode van het intuïtieve denken; 4-7 jaar
- c de periode van de konkrete operaties; 7/8 tot 11/12 jaar.

Fase III: de formele handelingen.

Dit schema is bedoeld om u enig idee te geven van Piaget's fasen-indeling.
Maar in verband met ons onderwerp (het getalbegrip) zal alleen fase IIb wat uitvoeriger worden behandeld. Het is de leeftijd waarop het voorbereidend en aanvankelijk rekenonderwijs plaats vindt. En in dit rekenonderwijs neemt het getalbegrip een zeer belangrijke plaats in.
Voorlopig is al genoeg van uw aandacht gevraagd.
In een tweede artikel zal hier verder op worden ingegaan.



STOKVIS

skriptoteek

HENK MEIJER
JOHAN VAN BRUGGEN

EEN SKRIPTIE OVER KOMPUTERKUNDE

A SKRIPTIE UIT AXEL
Uit Axel ontvingen we een skriptie van de heer J.P. Dieleman, oud-student van de Heer J.C. Boekkooi, docent wiskunde-didaktiek aan de Christelijke Pedagogische Akademie te Middelburg.
Een (uiterst) summiere samenvatting:
De schrijver vertelt in het kort iets over geschiedenis en gebruik van komputers, onderscheidt onderwijs met behulp van komputers (Computer Assisted Instruction) van onderwijs in de beginselen van de komputerkunde. De skriptie spitst zich toe op het laatste.
De vraag waarom dit nieuwe vak eventueel zou (moeten) worden ingevoerd, wordt beantwoord door te verwijzen naar de wereldoriënterende funktie van het onderwijs: je moet(!) er wat van weten. Er wordt tevens op gewezen dat in dit vak draden samenkomen uit de 'vakken' taal, wiskunde, natuurkunde, engels, maatschappijleer (automatiseringsproblematiek).
De schrijver spreekt derhalve liever van projektonderwijs.
Als mogelijke voordelen worden genoemd:
- maatschappelijke oriëntatie;
- ontwikkelen van een eksakte denkvorm door de noodzaak van scherp analyseren van een probleem;
- mogelijkheid tot didaktische 'verlevendiging' via projektvorm, groepswerk;
- wegnemen van de geheimzinnigheid rondom de komputer.

De schrijver heeft, jammer voor ons basisschoolmensen, lessen gegeven in een derde klas mavo-4 en hanteerde daarbij het klassegesprek, de doceervorm en het groepswerk.
Zijn programma kan als volgt geschetst worden:
1 inleidend klassegesprek over komputers;
2 onderscheiden van de funkties: invoer, geheugen, rekentuig, uitvoer, besturing; alsmede in groepjes werken aan enkele eenvoudige rekenproblemen ('we spelen komputertje');
3 gezamenlijk analyseren van probleempjes en daarna komputer-gewijs uitvoeren (hoge eisen van nauwkeurige analyse!);
4 analyseren van het vermenigvuldigen (gezien als herhaald optellen) en aan de hand van deze lessen iets vertellen over komputertalen (Algol, Cobol, Fortran, e.d.);
5 behandeling van het binaire stelsel;
6 maken en lezen van blokschema's.

De ervaringen die de schrijver verkregen heeft bij deze mavo-lessen, zijn nogal uiteenlopend: vaak interesse maar niet bij allen, veel onscherpe analyses van problemen en niet volledig-juiste blokschema's.
Aan het einde van deze skriptie keert de Heer Dieleman terug naar de basisschool met de vraag of daar iets aan komputerkunde zou kunnen/moeten worden gedaan. De moeilijkheid van sommige aspekten van het vak is geen hindernis, want men kan de problemen 'vertalen'. Toch weet hij eigenlijk geen duidelijk antwoord te geven op de vraag of er iets aan moet worden gedaan en zo ja, hoè dan.

B SUGGESTIES
Het is niet de taak van het IOWO om skripties te beoordelen, noch op estetische, noch op matematische, noch op didaktische kriteria. Wel willen we vragenderwijs aan de hand van deze skriptie enkele suggesties geven, die misschien voor anderen een stimulans kunnen zijn tot verder onderzoek:
* Is het mogelijk en zinvol om het 'komputer-spelen' verder uit te werken in een leergangetje voor bv. een vierde of vijfde klas basisschool?
  Enkele ervaringen wijzen in een positieve richting.
* Welke plaats kan het werken met een-

voudige rekenapparatuur hebben in of naast het 'komputerspel'?

* Is het noodzakelijk om op kinderlijk nivo wat in te gaan op de technische achtergrond van de komputer? Is dat mogelijk en zinvol op basisschoolnivo? Welke funktie kunnen zelfgemaakte leermiddelen hierbij vervullen om een globaal inzicht in komputers te geven?
* Is het zinvol om de komputer-oriëntering uit te breiden tot een bekijken van en 'uitleg' bij een werkende komputer? Leren de kinderen er iets van?
* Geeft het analyseren van rekenbewerkingen ('komputertje-spelen') resultaten t.a.v. het inzicht in en het vlot cijferend uitvoeren van die bewerkingen?
  Hierbij zou een vergelijkend onderzoekje met bv. twee vijfde klassen al enig uitsluitsel kunnen geven (zie schema):

Klas 5a	voortoets	→	gewoon 'rekenwerk'	→	natoets
Klas 5b	voortoets		komputertje spelen		natoets

* Is de funktie van het binaire stelsel zo essentieel voor de komputer, dat dat stelsel moet worden 'behandeld'? Kan het dan los van andere (niet – tien) talstelsels 'behandeld' worden of moet er juist tegen de achtergrond van andere talstelsels mee worden gewerkt? Hoe behandel je in de basisschool het tweetallig stelsel los van andere talstelsels? Welke werkvormen, oefeningen, leermiddelen kunnen ingeschakeld worden?
* Kenmerkend voor de komputer is het oplossen van geanalyseerde problemen d.m.v. programma's. Het analyseren gebeurt meestal via blokschema's. In de basisschool kan men bv. blokschema's laten maken van rekenvraagstukjes van eenvoudige of ingewikkelde verhaaltjes over alledaagse handelingen of procedures. Welke volgorde van deze gebieden is het best? Welke werk- en organisatievorm kun je hanteren?
  Leidt het werken met blokschema's tot inzicht bij het uitvoeren van bewerkingen? (zie boven).
* Welke mogelijkheden biedt het werken met ponskaarten met het oog op het ordenen van gegevens? Hoe organiseer je deze aktiviteiten in de school? Welke mogelijkheden en wenselijkheden liggen hier bij de inschakeling van een bezoek aan een komputer die met ponskaarten (betrekking hebbend op bv. voorraadadministratie) gevoed wordt?

C KOORDINATIEPUNT

In B zijn heel wat suggesties voor vervolgskripties gegeven. Misschien zijn er meer derdejaars-studenten die over dit onderwerp al eens iets gedaan hebben; we zouden er graag over willen horen! Misschien zijn er studenten die in één van bovenstaande onderwerpen zouden willen duiken; het zou niet denkbeeldig zijn dat een aantal skripties op elkaar afgestemd zouden worden, zodat de een kan profiteren van het werk van de ander. We willen graag als koördinatiepunt optreden! Geinteresseerden zouden zich dan voor 15 oktober 1972 moeten melden (liefst via de leraar P.A.) om zodoende enige tijd te hebben voor het arrangeren van een bespreking en om aan het werk te gaan.

D ENIGE LITERATUUR

Het is noodzakelijk iets te weten over de 'hardware' (hoe werkt een komputer in principe?; wat kan hij?; welke taken vervult hij meestal?)

J. J. Seidel e.a.
Computerkunde (Spectrum)
C. A. Ch. Görts e.a.
Computerkunde 1 en 2 voor a.v.o. en v.w.o. (Wolters-Noordhoff)
G. Zoutendijk
De mens en zijn computer (AO-reeks, nr. 1122) Eenvoudig, helder beginoverzicht
De computer, uw machtige dienaar (Univac, Vermeerstraat 7, Amsterdam)
Stichting School en Bedrijf
Van telraam tot computer (Serie, 'Op verkenning' postbus 1242, Den Haag) Een korte tekst over gebruik, techniek en mogelijkheden van de computers

Over computerkunde in het onderwijs:

Enige lessen in de 1^e jaargang van het 'Handboek voor de lespraktijk' van Wolters-Noordhoff
F. Goffree
Praktikum 5a 'Van abacus tot computer' (IOWO)
H.M.M. Jansen
Voor computerkunde moet plaats ingeruimd worden (artikel in 'Onderwijs en Opvoeding' jaargang 20, nr. 9)
G.A. Vonk
Werkschrift computerkunde (IOWO) Geschreven voor het voortgezet onderwijs

een jonge onder basje zoeker

DIK OORT

TAFELGENEUGTEN

Toen vader binnenkwam zat Basje zwaar te zuchten.

Vader: Wat is er jongen; moeilijkheden?

Basje: Ik moet vijftig keer de tafel van 7 opschrijven want 9 x 7 en 8 x 7 kan ik maar niet onthouden.

Vader: Zo, vind je dat zo moeilijk?

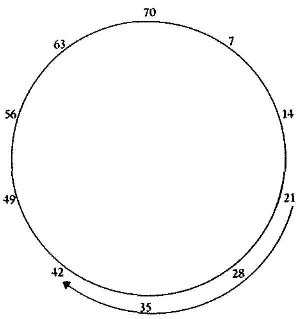
Basje: Nee, maar ik vergis me wel eens.

Vader: Heb je wel eens gezien hoe mooi de tafel van 7 in elkaar zit?

Basje: Ik heb er niet veel moois aan kunnen ontdekken; geef mij de tafel van 5 maar.

Vader: Nou, kijk nu maar eens hoe ik de tafel van 5 opschrijf.

Vader trekt een cirkel en plaatst de produkten even ver van elkaar, bij de cirkel.



Vader: Nou spreken we af dat we steeds over de eindcijfers praten. De tientallen laten we weg. Kijk eens wat je moet doen om van 1 naar 2 te komen.

Basje: Dan moet ik 3 plaatsen verder, rechtsom; en van 2 naar 3 weer drie plaatsen verder.

Vader: En zou dat steeds zo doorgaan?

Basje: Ja, behalve na de 9 want dan kom je drie plaatsen verder weer bij de 0.

Vader: Nou dat klopt toch, we zouden het alleen over de eindcijfers hebben; na 9 komt 10 en 10 is nu 0.
Zou je ook linksom kunnen gaan?

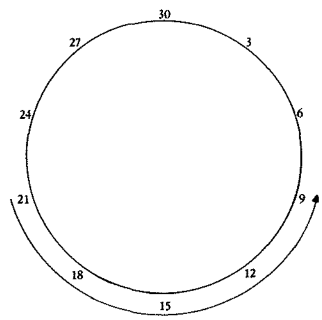
Basje: Dat weet ik niet, dat zou ik moeten proberen.

Vader: Hoeveel getallen staan er bij de cirkel?

Basje: Tien natuurlijk; o wacht even, we moesten steeds drie rechtsom; dat is hetzelfde als steeds zeven verder, linksom.

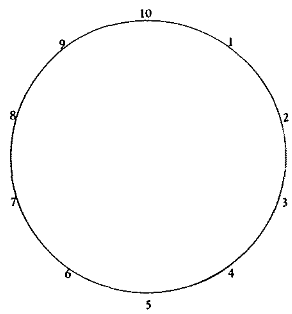
Vader: Juist, en nu gaan we hetzelfde met de tafel van 3 doen.

Basje tekent de tafel van 3.



Basje: Ik zie het al. Je moet steeds linksom drie plaatsen verder om bij het volgende getal te komen.
Ik zie een mooie regel:
Bij de tafel van 3 drie plaatsen linksom.
Bij de tafel van 7 zeven plaatsen linksom.
Nu wil ik ook weten of je 1 plaats verder linksom moet bij de tafel van 1.

Basje tekent de tafel van 1.



Basje: Hé, hier moet ik wel steeds 1 plaats verder, maar rechtsom.

Vader: En bij welke tafel moet je nu waarschijnlijk steeds 1 plaats verder linksom?

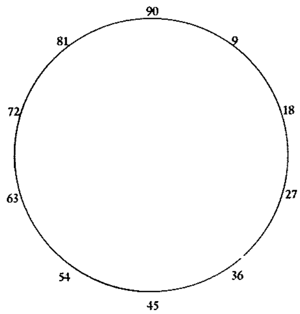
Basje zwijgt.

Vader: Bij de tafel van 3 moest je drie plaatsen linksom.
Bij de tafel van 7 moest je drie plaatsen rechtsom.

Basje: O, wacht even; 3 + 7 = 10!
Bij de tafel van 1 één plaats rechtsom dus bij de tafel van 9 één plaats linksom;
want 1 + 9 = 10.

Vader: Nou, dat 'dus' is wel wat voorbarig. Maar probeer 't eens!

Basje tekent de tafel van 9.



Basje: Ja hoor, 't klopt. Ik moet steeds één plaats verder linksom. Ik kan ook steeds één plaats verder rechtsom als ik op de cijfers van de tientallen let.

Vader: Ja, dat kan bij de tafel van 9 ook, maar we hebben afgesproken dat we voorlopig alleen maar kijken naar de eindcijfers. We hebben nu de tafels van 1, 3, 7 en 9 gehad: die hebben iets bijzonders met de eindcijfers. Weet je wat?

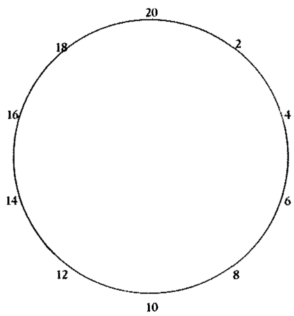
Basje: Ik zie 't niet.

Vader: Denk maar eens aan de tafel van 5.

Basje: Ja, ik zie 't! Bij de tafel van 5 komt steeds een 0 of 5 als eindcijfer; bij de tafels van 1, 3, 7 en 9 komen alle cijfers één keer voor.

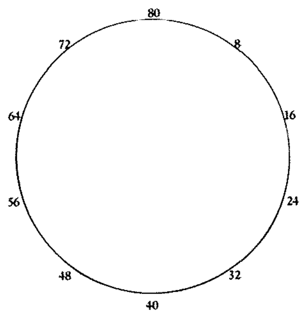
Vader: Dan proberen we 't nu nog eens met de tafel van 2.

Basje maakt de volgende tekening:



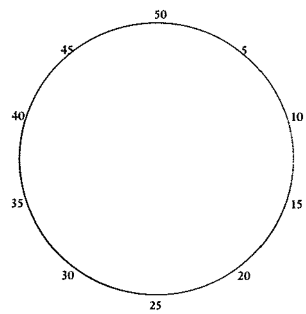
Basje: Alle getallen zijn nu natuurlijk even; de eindcijfers 1, 3, 5 en 7 komen niet meer voor. Nu moet je steeds één plaats naar rechts om bij het volgende cijfer te komen. Zou je nu bij de tafel van 8 weer één plaats naar links moeten?

Vader: Probeer 't maar eens.



Basje: Ja dat klopt!

Vader: En dan nemen we nu nog even de tafel van 5.



Vader: Je hebt nu de twee eindcijfers 0 en 5. Je ziet, je moet steeds één plaats naar rechts om bij het volgende cijfer te komen. Denk er aan op 0 volgt 5 en op 5 volgt 10 maar dat is weer 0.
Bij welke tafel moet je nu steeds één plaats linksom om dezelfde eindcijfers te krijgen?

Basje: 5 + 5 = 10! De tafel van 5 en dat is zo! Je kunt in plaats van 1 plaats rechtsom ook steeds 1 plaats linksom verder.

Vader: Mooi zo: nu moet je zelf nog maar eens de tafels van 4 en 6 onderzoeken.

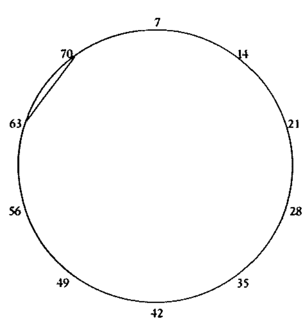
Basje: Ik vind de tafel van 7 toch veel leuker dan die van 5.

Vader: Straks zei je heel wat anders.

Basje: Is er nog meer te zien?

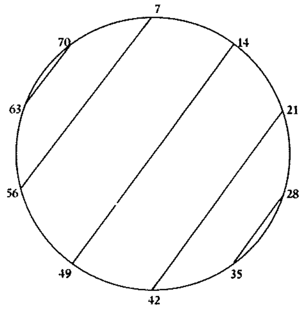
Vader: Ja, heel veel maar eigenlijk zou je dat zelf moeten ontdekken. Teken de tafel van 7 nog eens.

Basje maakt de tekening en vader trekt een lijn van 63 naar 70.



Vader: Nu moet jij van het ene getal naar een ander getal een lijn trekken en alle lijnen moeten evenwijdig lopen met de lijn die ik getrokken heb.

Basje maakt de figuur af en krijgt:



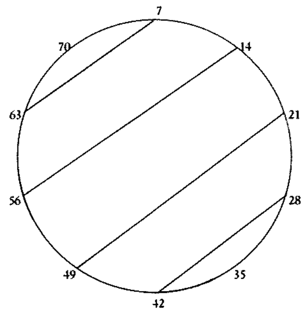
Basje: Ja, als je de cijfers optelt krijg je 3 of 13!

Vader: Ja, maar we zouden alleen de eindcijfers nemen, ook in het antwoord!

Basje: Nu, dan krijg je altijd 3.

Vader: Mooi zo, en teken nu nog eens de tafel van 7 en teken andere evenwijdige lijnen.

Basje tekent het volgende:



Basje: Nu is het steeds samen 10.

Vader: Mag je dat zeggen; we hebben toch een afspraak?

Basje: O ja, nu is het steeds samen 0.

Vader: Juist, jammer dat twee getallen niet mee doen.
Heb je wel eens van een raaklijn gehoord?

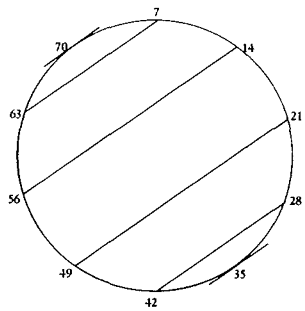
Basje: Jawel dat is een lijn die buiten de cirkel loopt en hem in één punt even aanraakt.

Vader: Precies, maar nu spreken we af dat het raakpunt telt voor twee punten.

Basje: Ik vind het een vreemde afspraak want het is maar één punt.

Vader: Ja maar de andere lijnen hebben ook twee punten op de cirkel en bij elk punt staat een getal.

Die twee getallen hebben we opgeteld. Nu gaan we het raakpunt dubbel tellen. Wat moeten we dan doen met het getal, dat erbij staat?

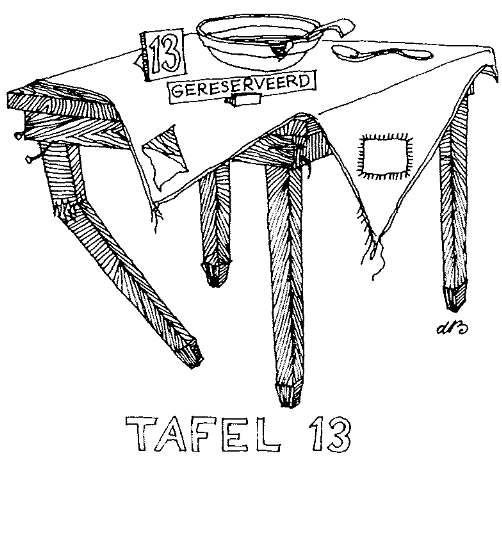


Basje: O natuurlijk, dan moet je dat getal bij zichzelf optellen, dus verdubbelen, en dan klopt het!
Bij 70 krijgen we 0 + 0 = 0 en
bij 35 wordt het 5 + 5 = 0.
Die 0 hadden we bij de andere lijnen ook.

Vader: Je ziet dat door die vreemde afspraak alle getallen zich aan de regel houden.

Basje: En kan ik dat ook met andere tafels doen?

Vader: Je kunt bij deze tafel van 7 nog veel meer lijnen trekken en dat kan ook bij de andere tafels.
Maar ik denk dat we nu eerst eens aan de etenstafel moeten denken.
We zullen kijken wat we daarvan kunnen opsteken.



INHOUD

variabel blok

3 WEGEN, AKSENTUEREN, BREUKEN

MEDEWERKERS AAN DIT BLOK

Jan van de Brink, Johan van Bruggen, Koos van Deursen, Fred Goffree, Hans ter Heege, Rob de Jong, Ed de Moor, Jan Nieland, Leen Streefland, Harry Stroomberg, Adri Treffers

3.1 INLEIDING EN LEESWIJZER

In aflevering 2/3 is in het vooruitzicht gesteld dat het VARIABEL BLOK van dit nummer gewijd zou worden aan het onderwerp 'OPERATIES MET GETALLEN'. De vraag is toen gesteld:

Welke onderdelen uit het hoofdstuk 'operaties met getallen' kunnen naar uw mening uit het huidige rekenprogramma geschrapt worden?

Tot op heden hebben we uitsluitend reakties uit de werkgroep Den Bosch (Hans du Maine) ontvangen. Het geringe aantal reakties is volledig te begrijpen. De vraag is veel moeilijker te beantwoorden dan op het eerste gezicht lijkt. De redaktie heeft dit – al werkende aan dit Blok – steeds weer ervaren.

Bij het zoeken naar een procedure om te komen tot een bevredigend antwoord, doemden allerlei vragen op:

- Moet bij 'schrappen' alleen aan **leerstof** gedacht worden?
- Gaat het bij 'overlading' om het aantal onderwerpen in het rekenprogramma of moeten we meer denken aan de hoeveelheid oefenstof? Geeft een andere 'benadering' niet een heleboel tijdwinst?
- Kun je in plaats van 'schrappen' niet beter 'aksenten' plaatsen?
  Anders gesteld, je vraagt niet naar wat er uit moet, maar: wat blijft in ieder geval? Enfin, reeksen vragen!

Ons voorlopig antwoord treft u zowel in het artikel 'Bruine bonen-integratie' (3.4) als in de bijdrage van Adri Treffers in het VAST BLOK aan.

Aangezien we de problematiek zeer fundamenteel achten, hebben we een tweetal auteurs van verwante instituten – waarmee het IOWO een samenwerkingsrelatie heeft – gevraagd om iets over de projekten waar zij aan werken te schrijven. Projekten die **evenmin** om de schrap-problematiek heen kunnen.

De opvattingen van Harry Stroomberg (3.2) en Koos van Deursen (3.3) wijken voor een goed deel af van die van Wiskobas. Voor een scherpe diskussie achten wij een brede en genuanceerde informering echter noodzakelijk.

Vervolgens hebben we tien (gerenommeerde) rekendidaktici[1]) uitgenodigd om met ons over wegen, schrappen en aksentueren na te denken.

Op een gegeven moment werd naar voren gebracht dat 'operaties met getallen' een zo omvangrijk onderwerp vormt, dat het niet goed mogelijk is om de totaliteit op een verantwoorde wijze aan te pakken. Uiteraard kon iedere didaktikus vanuit zijn deskundigheid wel een paar leuke lessen maken of een serie lessuggesties bedenken.

Dit soort bijdragen zouden – dachten we – toch te incidenteel zijn, te weinig samenhang vertonen om ze in het kader van de **'aksentuering'** te presenteren. Het veld der operaties is hiervoor te omvangrijk.

Allerlei wiskundige en onderwijskundige inzichten dienen verworven te zijn, alvorens over de inbedding, de integratie in het bekende programma zinvol te kunnen spreken. Eerst nadat deze inzichten – die wel impliciet aanwezig zijn – voldoende gescherpt zijn om ze te kunnen formuleren, kan een kader ontwikkeld worden, van waaruit opdrachten tot het schrijven van lessen verstrekt kunnen worden.

Alhoewel ditzelfde geldt voor een beperkter onderwerp, is het hier minder pregnant.

---

[1]) Jaap Boerema, Wil Bronnenberg, Jille Eilander, Otto van Engelen, Louis Gilissen, Ger Jansen, Huub Jansen, Jan Nieland, Dik Oort en Piet Scholten

We hebben toen afgesproken dat we ons in eerste instantie zouden beperken tot een leerstofgebied

- waaraan veel tijd en energie in de huidige programma's besteed wordt;
- dat mogelijkheden tot 'verlevendiging biedt;
- waar veel onderwijsgevenden en onderwijsontvangenden mee 'zitten'.

De keus viel – weinig verrassend – op de **breuken**.

Alhoewel de genoemde didaktici een verzameling lessen hebben samengesteld, die zeker de moeite van het publiceren waard zijn, hebben we toch besloten om in deze aflevering nog geen 'breukenlessen' op te nemen. Dezelfde overwegingen als boven speelden een rol. We vinden het onjuist om 'zo-maar' wat lessen op te nemen, zonder dat de lezer van te voren gekonfronteerd is met de uitgangspunten van waaruit gewerkt is. We willen immers een **gezamenlijk werkstuk** maken! Een gesprek over 'lessen' kan alleen zinvol gevoerd worden, indien de achtergronden bekend zijn. Met een 'welles - nietes' -diskussie schieten we geen van allen op.

In aflevering 5 komt het aksent meer op de onderwijspraktijk (lessuggesties, werkbladen voor de leerlingen e.d.) te liggen.

U treft nu een behandeling van het volgende aan:

3.5 Waarom breuken op de basisschool? Welke motiveringen zijn zoal te vinden in de handleidingen van rekenmetoden? Wat zegt de 'Proeve'?

3.6 Welk verleden hebben de breuken? Hoe komen we er aan? Zijn ze reeds lang geleden of eerst recent in onze onderwijskultuur terechtgekomen?

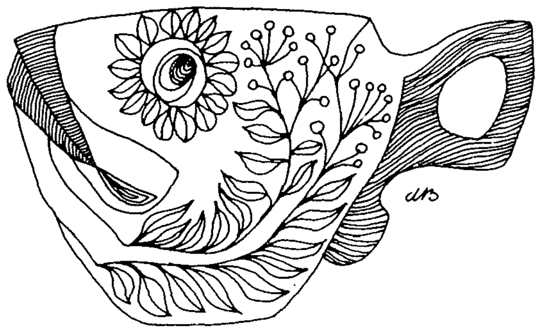
3.7 Hoe worden de breuken in een viertal buitenlandse metoden geïntroduceerd? Kunnen we met behulp van die modellen een adekwate beschrijving geven?

3.8 Het voorafgaande wordt nog eens netjes op een rijtje gezet. Tevens wordt een nieuwe werkwijze (breuken als machientjes) behandeld.

3.9 Een zeer belangrijke plaats neemt een voorstel-'leergang' in. Het voorstel is bedoeld als diskussiestuk en derhalve enigszins uitdagend geformuleerd.

3.10 Wat vindt u ervan?

Samenvattend:
De eerste drie artikelen (3.2, 3.3, 3.4) gaan over 'wegen, schrappen en aksentueren' gericht op het wiskunde-onderwijs in de basisschool. De bijdragen die erop volgen (3.5 t.e.m. 3.10) geven een verbizondering naar het onderwerp 'breuken'.



KOPVIS

3.2 DOELSTELLINGENONDERZOEK EN REKENONDERWIJS

HARRY STROOMBERG

1 Inleiding

Door het Research Instituut voor de Toegepaste Psychologie (RITP) wordt een projekt getiteld: 'Inventarisatie en ontwikkeling van doelstellingen voor modern wiskunde-onderwijs in de basisschool' uitgevoerd. Het projekt wordt gesubsidieerd door de Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs.

Teneinde greep op de doelstellingenmaterie te krijgen hebben we het onderzoek gesplitst in een *reken-* en een *wiskunde*gedeelte.

Wij gaan ervan uit dat rekenen als een onderdeel van de wiskunde beschouwd kan worden en rekenen en wiskunde geïntegreerd kunnen worden tot modern wiskunde-onderwijs. De splitsing in rekenen en wiskunde is door ons dan ook ingevoerd uit praktische, onderzoektechnische overwegingen.

Hieronder zullen wij u enige informatie geven omtrent resultaat van onderzoek naar doelstellingen van het huidige rekenonderwijs.

2 'Doelstellingen'

Wat zijn onderwijsdoelstellingen eigenlijk? Wij hebben doelstellingen geformuleerd als: *gewenst leerlinggedrag op grond van ontvangen onderwijs.*

Door deze omschrijving proberen we te voorkomen dat onderwijsdoelstellingen te vaag of te algemeen geformuleerd blijven.

Het zo konkreet mogelijk formuleren van onderwijsdoelstellingen is naar onze mening noodzakelijk om te komen tot verantwoord docentengedrag. Wanneer men namelijk zo nauwkeurig mogelijk weet wat men in het onderwijs beoogt, kan men het onderwijs-leerproces hierop afstemmen. Dit heeft als voordeel dat zowel docent als leerling weten waar ze aan toe zijn.

3 'Afhalen' en 'bijstoppen'

Bij vernieuwing van het onderwijs gaat het, nuchter beschouwd, tenminste om twee processen: *'afhalen'* van verouderde leerstof, methoden, doelstellingen e.d., en *'bijstoppen'* van nieuwe leerstof, introduktie van nieuwe leermiddelen, formuleren van nieuwe onderwijsdoelstellingen.

Volgens dit principe hebben wij ons beziggehouden met het huidige rekenonderwijs. Op grond van een inventarisatie in termen van doelstellingen van het huidige rekenonderwijs (Stroomberg, 1971) hebben wij ons bij elke doelstelling afgevraagd: moet elke leerling deze vaardigheid beheersen aan het eind van de leerplicht, met het oog op onze (veranderde) samenleving?

Met behulp van deze vraagstelling werd in werkgroepen van deskundigen (onderwijzers, wiskundeleraren, didaktici) elke doelstelling van bovengenoemde inventarisatie beoordeeld. Dit beoordelingsproces resulteerde in een diskussienota over doelstellingen van het rekenonderwijs (Stroomberg, 1971).

4 Het nivo van de doelstellingen

De doelstellingen zijn geformuleerd voor het nivo einde leerplicht voor alle leerlingen.[1])

Het nivo einde leerplicht is gekozen omdat wij ons t.a.v. het onderzoek willen beperken tot einddoelstellingen. Dit betekent niet dat bepaalde doelstellingen niet eerder dan aan het eind van de leerplicht bereikt zijn. Sommige van deze doelstellingen zullen in de basisschool bereikt worden. Wij nemen aan dat einddoelstellingen van de basisschool een deelverzameling vormen van einddoelstellingen op het nivo einde leerplicht.

Het voordeel van deze redenering is dat bij het verzamelen van opinies omtrent doelstellingen een duidelijk referentiekader geboden wordt, nl. *einde leerplicht.* 'Einde leerplicht' is het moment dat een leerling het schoolsysteem kan verlaten.

[1]) Voor alle leerlingen betekent in deze kontekst: voor 95% van de leerlingen. Leerlingen in het buitengewoon onderwijs moet men uitzonderen.

Wat moet hij dan in ieder geval gehad hebben? Waarmee moet hij bezig zijn geweest? Welke fundamentele vaardigheden moet hij beheersen?
Dit is naar onze mening een zo duidelijk mogelijke vraagstelling.

5 Diskussienota
In punt 3 werd reeds vermeld dat we een diskussienota over doelstellingen van het rekenonderwijs publiceerden. Deze nota is opgebouwd uit ca tien rubrieken en omvat de traditionele rekenstof. In elke rubriek zijn een aantal doelstellingen geformuleerd en waar dat mogelijk was, is een *meerkeuze-item* als voorbeeld van de doelstelling opgenomen. De funktie van het item is om de doelstelling te specificeren door het geven van een voorbeeld. Wanneer als doelstelling is vermeld: 'het produkt van twee natuurlijke getallen kunnen bepalen' dan weet de lezer nog te weinig. Hij kan zich bij voorbeeld afvragen: van welke orde van grootte zijn deze getallen? Als een item (of een voorbeeld) opgenomen is dan geeft dit een grens en een moeilijkheidsnivo aan. Het item heeft dan nog het voordeel dat op een objektieve wijze de prestatie van de leerling bepaald kan worden.

6 Beperkingen
De diskussienota omvat de traditionele rekenstof. Een beperking van de nota is o.m. dat alleen kognitieve doelstellingen van het rekenonderwijs zijn aangegeven.
Doelstellingen van sociale aard (b.v. kunnen samenwerken bij het oplossen van rekenkundige problemen) en van affektieve aard (het bezitten van bepaalde – gewenste – houdingen en gezindheden t.a.v. het rekenen) zijn niet opgenomen. Doelstellingen voor hoofdrekenen waren eveneens niet ekspliciet geformuleerd. Dit alles uit overwegingen van praktische aard. Bij een onderzoek is het van veel belang om de vraagstelling te beperken. Wordt de vraagstelling te kompleks dan loopt men de kans de greep op de materie te verliezen.

7 Respondenten
Ten einde te beproeven of de door ons gevolgde metode van doelstellingsformulering de toets van de kritiek kon doorstaan stuurden wij de diskussienota aan een groot aantal respondenten.
Tevens was het verzenden van deze nota (die voorzien was van een vrij uitgebreide enquête) bedoeld om op systematische wijze reakties op en verbeteringen van de geformuleerde doelstellingen te verzamelen. Welke personen kan men bij een opiniepeiling over doelstellingen van het rekenonderzoek als relevant beschouwen? Wij zijn ervan uitgegaan dat de kwaliteiten waar het om gaat de volgende zijn:
1 bekendheid met het rekenonderwijs en de in de schoolpraktijk gestelde doelen en eisen;
2 zicht op het belang van de betreffende vaardigheden voor de levenspraktijk en als basis voor verder leren;
3 in de praktijk verkregen inzichten in de 'haalbaarheid' – voor ca 95% van alle leerlingen – van de betreffende doelstelling.

Niet alle hieronder genoemde groepen bezitten deze kwalificaties in dezelfde mate, we menen echter dat voor elke groep goed te verdedigen is dat hun oordeel van belang is.
De diskussienota werd verstuurd aan de volgende groepen:

- docenten lager ekonomisch, administratief onderwijs,
  lager algemeen en voortgezet onderwijs,
  lager middenstands onderwijs;
- docenten lager huishoud- en nijverheidsonderwijs;
- docenten lager land- en tuinbouwonderwijs;
- docenten lager technisch onderwijs;
- docenten lager nautisch onderwijs;
- inspektie lager beroepsonderwijs;
- schooladviesdiensten;
- wiskobaskursisten;
- wiskobaswerkgroepbesturen;
- 'belangstellenden'.

De groep 'belangstellenden' bestaat uit personen van wie wij weten dat zij belangstelling hebben voor het onderzoek.
Van de ca 750 eksemplaren van de nota werden er in totaal 691 verstuurd. De overige eksemplaren waren nodig voor de interne verspreiding in ons instituut en voor informatie van de subsidiërende instantie, S.V.O. (30 exemplaren). Onderstaande tabel geeft een overzicht.

(zie volgende pagina)

Verstuurde eksemplaren van de diskussienota en ontvangen reakties per groep.

Groep	Verstuurd (aantal)	Ontvangen (abs.)	Ontvangen (%)
1	83	37	44.6
2	144	61	42.4
3	66	26	39.4
4	116	58	50
5	18	7	38.9
6	44	5	11.4
7	22	13	59.1
8	86	47	54.7
9	41	11	26.8
10	71	41	57.8
	691	306	

8 Reakties

De reakties die wij op de diskussienota mochten ontvangen waren overweldigend. Zeer veel respondenten hadden de moeite genomen de diskussienota uitvoerig te bestuderen. Voor wat betreft dit artikel moeten we echter volstaan met mede te delen dat de algemene reakties in een vijftal kategorieën waren onder te brengen (zie 8.1). De meer specifieke reakties (nl. voorstellen tot 'afhalen' van doelstellingen) worden weergegeven in 8.2.

8.1 Algemene reakties

De vijf kategorieën waarin we de meeste algemene reakties konden onderbrengen zijn:
1 opmerkingen betreffende de uitgangspunten van het doelstellingsonderzoek;
2 opmerkingen betreffende de omvang van de doelstellingenlijst en de haalbaarheid van de geformuleerde doelstellingen;
3 opmerkingen betreffende integratie van het reken- en wiskundeonderwijs;
4 opmerkingen betreffende inzicht en oplossingsmetoden;
5 opmerkingen betreffende de formulering van de doelstellingen.

We zullen bovenstaande punten kort bespreken.

Ad 1 Uitgangspunten

Deze opmerkingen hebben betrekking op het uitgangspunt van ons onderzoek (nl. het zgn. 'afhaal- en bijstopprincipe') en op de fundering, nl. op welke vooronderstellingen het formuleren van doelstellingen berust.

Laten we eerst nog iets zeggen over het 'afhalen' en 'bijstoppen'. Wanneer men een probleem ter hand neemt tracht men het te analyseren, m.a.w. men tracht een mogelijke aanpak te vinden. Aangezien er in de laatste jaren voortdurend sprake is van vernieuwen van het onderwijs d.m.v. het toevoegen van nieuwe vakken (denk b.v. aan het 'Voorontwerp van wet op het basisonderwijs' waarin men pleit voor het invoeren van Engels en Zwemmen als verplichte vakken), dachten wij dat het raadzaam zou zijn de vernieuwing ook van de andere kant te bekijken: nl. wat kan er van het huidige (reken)onderwijs gemist worden?

Wat onze uitgangspunten betreft menen wij dat het zeer waarschijnlijk is dat er de komende vijf à tien jaren door alle Nederlanders nog wel gerekend moet worden. Van een aantal vaardigheden[2]) op het gebied van het rekenen zullen we de leerlingen moeten laten begrijpen wat zij doen. Ons onderzoek is bedoeld om na te gaan welke vaardigheden elke leerling moet kunnen, m.a.w. welk leerlinggedrag voor alle leerlingen wenselijk is. Op grond van de gegevens die we d.m.v. ons onderzoek verzamelen zouden bij voorbeeld leerplankonstrukteurs aan het werk kunnen gaan.

Ad 2 Omvang en haalbaarheid

De tweede serie opmerkingen heeft betrekking op omvang en haalbaarheid. We willen opmerken dat men bij een inventarisatie zo goed mogelijk streeft naar volledigheid. Dit streven naar volledigheid kan de 'haalbaarheid' in de weg staan. Vandaar dat wij de vraag naar de wenselijkheid voor alle leerlingen stelden. Men moet een inventarisatie van doelstellingen echter geenszins als definitief beschouwen.

Het biedt aanknopingspunten voor verder onderzoek, bij voorbeeld ten aanzien van de haalbaarheid van de geponeerde doelstellingen.

Ad 3 Integratie

Deze opmerkingen zijn al enigszins in ad 1 aan de orde geweest. We kunnen er nog dit aan toevoegen: bij een onderzoek als het onder-

---

2) Onder vaardigheden verstaan we prestaties van kognitieve, sociale en affektieve aard. We beperken ons onderzoek tot kognitieve vaardigheden van het onderwijs (kennis, toepassing èn inzicht).

havige hebben we gestreefd naar een analyse; een zinvolle integratie met nieuwe ideeën zal uiteraard noodzakelijk zijn. In ons onderzoek krijgt de integratie tussen rekenen en wiskunde de volle aandacht.

Ad 4 Inzicht en oplossingsmetoden
De leerlingen zullen inzicht in het vak moeten verkrijgen en oplossingsmetoden moeten verwerven. Maar: dit aspekt blijkt een zeer weerbarstige materie. In de meeste boeken over wiskunde- en rekenonderwijs volstaat men met enkele opmerkingen. In een nieuwe versie van onze doelstellingenlijst zullen doelstellingen t.a.v. het 'oplossingsgedrag' van leerlingen worden opgenomen.

Ad 5 Formulering
Het formuleren van doelstellingen is een buitengewoon lastige zaak.
Datgene wat als gewenst leerlinggedrag wordt gesteld moet zo nauwkeurig mogelijk geformuleerd worden. Steeds blijkt dat men bepaalde doelen toch weer niet goed heeft geformuleerd. Het lijkt ons overigens een technisch (oplosbaar) probleem.

Het bovenstaande is niet meer dan een kort antwoord op de meer algemene opmerkingen. We willen er nog aan toevoegen dat al deze opmerkingen onze volle aandacht hebben en ons voortdurend met de neus op de feiten drukken.

8.2 Voorstellen tot 'afhalen'
Welke doelstellingen worden door de respondenten als overbodig beschouwd?
We geven hier een selektie weer, om u een indruk te geven. Hieronder vermelden we de afgewezen doelstellingen en daarnaast het aantal personen dat deze doelstelling afwijst.

DOELSTELLING	Aantal personen dat nevenstaande doelstelling afwijst
1) Een natuurlijk getal tot een macht kunnen verheffen	34
2) Het antwoord van een vermenigvuldiging van natuurlijke getallen kunnen kontroleren m.b.v. de negenproef	19
3) Twee getallen kunnen bepalen als hun som en verschil gegeven zijn	8
4) Het kunnen lezen en interpreteren van het Romeinse getallenschrift	8
5) Eenvoudige getallen (jaartallen) in het Romeinse getallenschrift kunnen lezen en noteren	8
6) Kombinaties van hoofdbewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen of machtsverheffen kunnen uitvoeren met inachtneming van een juiste volgorde al of niet in kombinatie met tekens (haakjes en akkoladen). (Opm: twee personen spreken zich nogmaals uit tegen machtsverheffen, drie personen spreken zich uit tegen het gebruik van haakjes en akkoladen).	5
7) Het antwoord van een vermenigvuldiging kunnen kontroleren door de faktoren van plaats te doen verwisselen.	5

9 Verder onderzoek

Met bovenstaande rapportage omtrent de diskussienota willen we volstaan. De publikatie van de diskussienota was bedoeld om op systematische wijze reakties te verzamelen omtrent de gevolgde procedure.[3])
Op grond van de wijzigingsvoorstellen die wij ontvingen werd de diskussienota nog eens kritisch bekeken in een werkgroep bestaande uit een rekendidaktikus, twee leraren van het voortgezet onderwijs, een onderwijzer en de projektleider.
Een derde versie van een doelstellingenlijst van het rekenonderwijs werd samengesteld. Bij vrijwel elke doelstelling werd een item in meerkeuze-vorm gekonstrueerd.
De doelstellingenlijst wordt weer voorgelegd aan groepen docenten van het voortgezet onderwijs, onderwijzers en ouders. De items worden voorgelegd aan leerlingen van 6e klassen van basisscholen en aan leerlingen van 3e klassen van scholen voor voortgezet onderwijs.

3) Binnenkort verschijnt een interimrapport waarin de resultaten systematisch zijn weergegeven.

Op deze wijze verzamelen we de volgende gegevens:

- meningen van groepen relevante respondenten omtrent de geformuleerde doelstellingen en items;
- de haalbaarheid van de doelstellingen wordt door ons bekeken op grond van de leerlingenprestaties m.b.t. de items (zowel voor 12- als 15-jarigen).

Dit laatste is een belangrijke check op de operationalisatie van de doelstellingen.
De rapportage van het gehele projekt, waarin ook geprobeerd wordt om een greep te krijgen op de belangrijkste doelstellingen voor modern wiskunde-onderwijs, zal in de 2e helft van dit jaar plaatsvinden.

10 Voorlopige konklusies

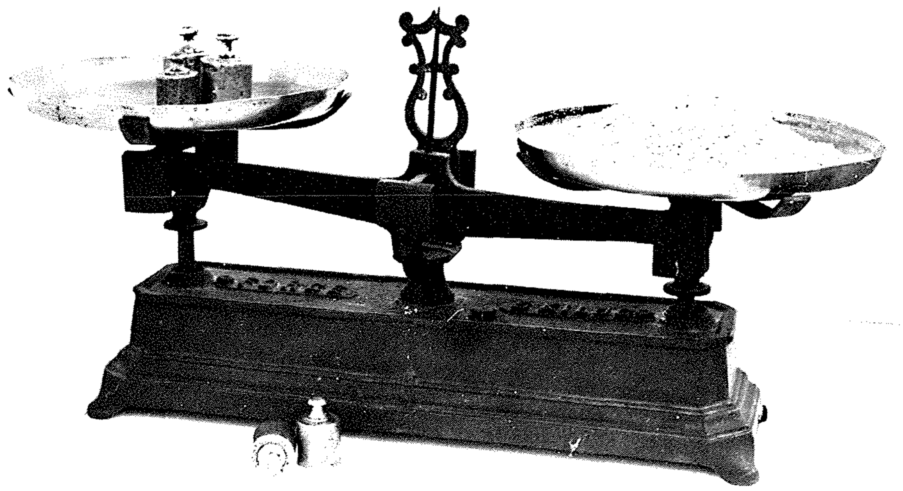
Uit de reakties die wij op de diskussienota ontvingen blijkt dat vele docenten willen komen tot een vereenvoudiging en verlevendiging van het huidige rekenonderwijs. Overbodige eksercities (o.a. met breuken) wil men schrappen. Nieuwe werkvormen (individueel werk, groepswerk, onderzoekjes) wil men invoeren.
Ook blijkt uit deze reakties dat het rekenen voor veel leerlingen nog een moeilijk vak is.
Een ander feit is dat vele docenten pleiten voor invoering van begrippen uit de nieuwe wiskunde. Deze reakties waren opmerkelijk omdat wij in de inleiding op de diskussienota uitdrukkelijk stelden dat de nota alleen betrekking heeft op het huidige rekenonderwijs, dit bleek eveneens uit de geformuleerde doelstellingen.

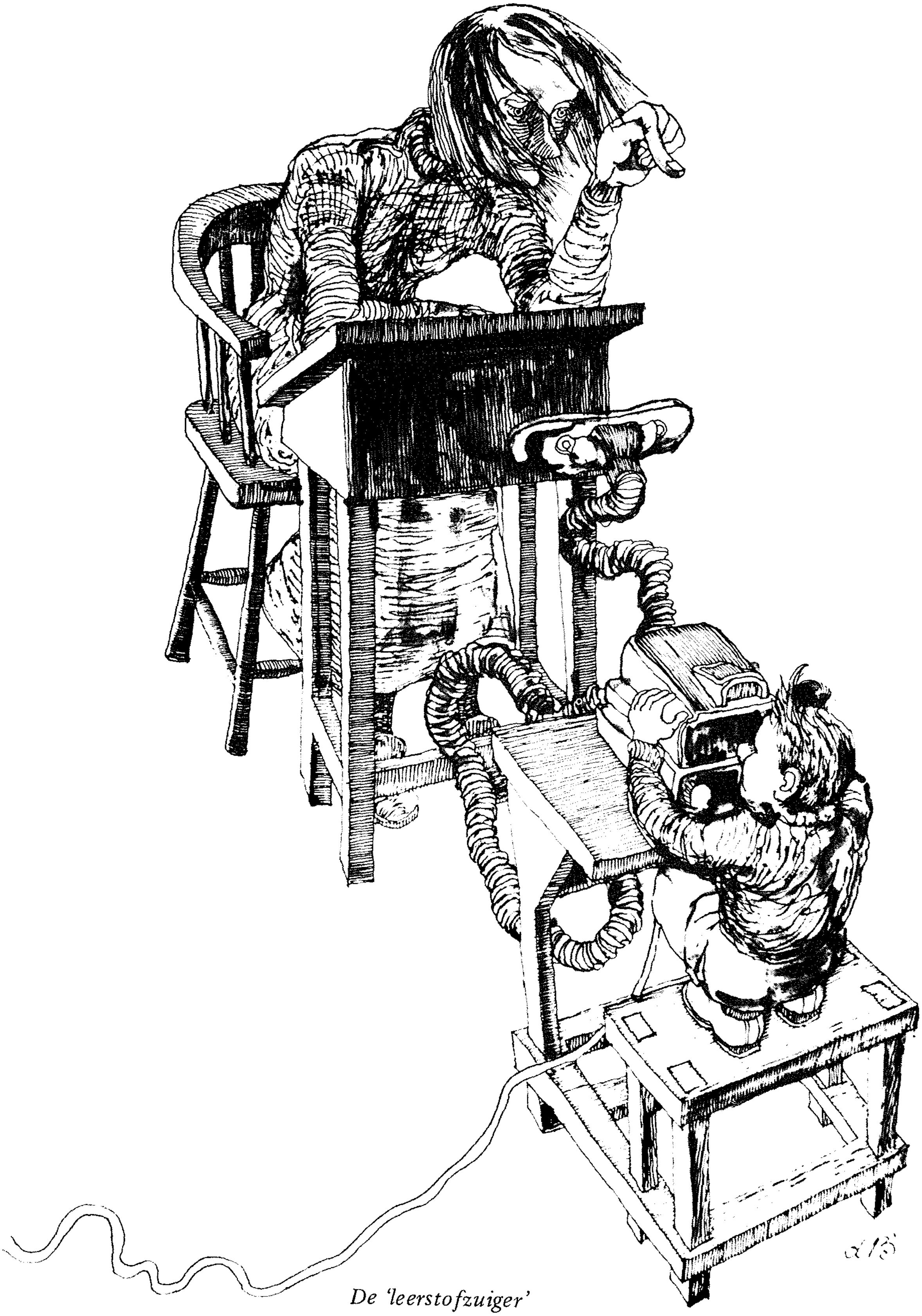
Kunnen wij nu op grond van de reakties op de diskussienota voorschrijven wat kinderen moeten kunnen?
Dit lijkt ons geenszins het geval. Op grond van de reakties en op grond van verder onderzoek kunnen we wel een bijdrage leveren aan de diskussie over onderwijsdoelstellingen. Weten wat men wil — zo konkreet mogelijk — is onmisbaar voor een rationeel onderwijsbeleid en voor iedere motivatie. In deze zin hopen we, door middel van ons onderzoek een bijdrage te leveren aan vernieuwing van het rekenonderwijs.

11 Literatuur:

Stroomberg, H.P.: De constructie van een doelstellingenlijst voor het rekenonderwijs in de basisschool, Amsterdam: Research Instituut voor de Toegepaste Psychologie, 1971.

Stroomberg, H.P.: Doelstellingen van het rekenonderwijs, Discussienota, Amsterdam: Research Instituut voor de Toegepaste Psychologie, 1971.





De 'leerstofzuiger'

3.3 REKENDOELSTELLINGEN EN SCHOOLTOETSEN

KOOS VAN DEURSEN

Inleiding
Sinds 1970 verzorgt het CITO een schooltoetsprogramma voor het eind van het basisonderwijs. De toetsuitslagen worden op minstens twee manieren gebruikt:
1 als evaluatie van het gegeven onderwijs,
2 als onderdeel van de toelatingsprocedure van het voortgezet onderwijs.
Het programma bestaat uit 300 opgaven, waarvan er 90 liggen op het gebied van het rekenen.
De rekenopgaven worden gemaakt door een kommissie die bestaat uit vier hoofden van scholen, een leerplandeskundige[1]) en een toetsdeskundige.
De kommissie is zich bewust dat de inhoud van de rekentoets van invloed is op het rekenonderwijs in de hogere leerjaren van het basisonderwijs. In 1971 deden bijna 60.000 leerlingen mee. Dat betekent dat een kleine 2000 scholen bij hun rekenonderwijs letten op de inhoud van de toets.
De kommissieleden proberen de beruchte 'toetsnaald-effekten' te vermijden en richten zich bij het maken van de opgaven op *algemeen aanvaarde rekendoelstellingen.* Zij willen opgaven (items) maken die gemiddeld door 80% van de leerlingen goed gemaakt worden: zij willen *minimumeisen* toetsen, geen maksimum.
Het grote probleem is nu echter dat we in Nederland geen lijst met algemeen aanvaarde rekendoelstellingen hebben en dat we niet weten wat de minimumeisen zijn.
Vraag voor dit artikel is nu hoe de kommissie aan haar rekendoelstellingen komt en of zij erin slaagt daarbij items te maken die de minimumeisen toetsen.

Wat is 'algemeen aanvaard'?
Zoals gezegd kan de kommissie niet beschikken over een officiële lijst van rekendoelstellingen. Maar dat betekent nog niet dat zij nu helemaal niets weet. Er zijn rekenmetoden en leerplannen, de meeste kommissieleden geven zelf les. Met deze kennis en ervaring als startbagage begint het werk van ordenen, afwegen: wat belangrijk en wat niet belangrijk is, kiezen, systematiseren en formuleren. Het uiteindelijk resultaat is een doelstellingenlijst in de vorm van een leerstofoverzicht, dat naar de mening van de kommissie 'algemeen aanvaard' zou zijn.
Een hele reeks beslissingen is intussen genomen.
Er is geschrapt, bijvoorbeeld:[2])
1 bij gewichten alleen kilogram en gram gebruiken
2 bij rente alleen reële problemen
3 de termen: tarra, bruto en netto
4 termen uit de sfeer van algemene kennis zoals B.T.W., omzetbelasting
5 centiare en are, wel hektare
6 rekenkundige en meetkundige reeksen.
Meer of minder belangrijke 'details' moesten geregeld worden, bijvoorbeeld:
1 Hoe toetsen we data, welke notering?
De kommissie besloot zich aan te sluiten bij het normeringsvoorschrift.
2 Kunnen we het woord 'arceren' gebruiken?
3 Welke volgorde van bewerkingen houden we aan?
Tenslotte moest de kommissie beslissen in welke mate de verschillende onderdelen van het leerstofgebied vertegenwoordigd zouden zijn in de toets. *(zie volgende pagina)*

In 1971 was de verdeling nog onevenwichtig: het aantal items dat gekonstrueerd was, bepaalde min of meer de mate van vertegenwoordiging. In 1972 heeft de kommissie de konstruktie in dit opzicht verbeterd. Tevoren is bepaald

1) Drs. G. Boomsma van het Kohnstamm Instituut te Amsterdam.
2) CITO-publikatie Nr. 10 'Verslag schooltoetsen basisonderwijs 1970', pag. 13.

Tabel 1 Verdeling van de rekenonderdelen over de toets

Rubrieken		1971	1972
getallen en hoofdbewerkingen			
1.1	natuurlijke getallen	5	8
1.2	breuken	10	6
1.3	decimalen	9	8
1.4	herleidingen	5	6
1.5	cijferen	8	6
1.6	rekenkundige woorden en tekens	3	5
strukturen en relaties			
2.1	hoofdrekenen	9	8
2.2	verhoudingen	4	6
2.3	schatten	6	6
2.4	procenten	6	7
2.5	schalen, tabellen en grafieken	6	8
metrieken			
3.1	maten en gewichten	7	5
3.2	muntstelsel	6	5
3.3	tijd	6	6
	Totaal	90 items	90 items

dat de rubrieken 1.1, 1.3, 2.1, 2.5 het belangrijkst waren en daarop is het aantal te maken items gebaseerd.

Reakties uit het onderwijs

Elk jaar publiceert de kommissie een verantwoording[3]) van haar beslissingen en vraagt zij aan het onderwijs om kritiek. In het algemeen gesproken aanvaardt het onderwijs de doelstellingen.

Uit een enquête in 1970 [4]) blijkt o.a. het volgende:

- 37 van de 68 inzenders missen géén belangrijke onderdelen;
- 77 van de 90 items worden door 70% van de inzenders gewenst en mogelijk geacht;
- uitbreiding gevraagd voor o.a.
  renteberekening 5x
  koopmansrekenen 4x
  mengsommen 1x
  talstelsels 1x.

De kommissie vond dat renteberekeningen, koopmansrekenen en zeker mengsommen in het schraplijstje hoorden. 'Talstelsels' achtte ze nog niet algemeen aanvaard.

Enkele resultaten van de enquête in 1971:

- 107 van de 164 inzenders missen geen belangrijke onderdelen.
- Ongeveer 80% van de inzenders vindt alle rekenitems gewenst en mogelijk.
- Er wordt meer aandacht gevraagd voor cijferen, breuken, metrieken door enkele mensen. Eén persoon wijst op het ontbreken van talstelsels. Vier mensen vragen opgaven voorbereidende wiskunde.

Buiten de enquête om, kwam veel kritiek op de normerende voorschriften bij 'datumnotering'. De kommissie besloot het probleem bij de toetsing te vermijden. De kommissie vond het niet nodig om op dit punt nu eens echt 'door te drammen'. Hetzelfde standpunt werd ingenomen bij de 'volgorde van bewerkingen'. Vooral over volgorde van vermenigvuldigen en delen bestaat verschil van mening.

Bij de samenstelling van een nieuwe toets houdt de kommissie rekening met de reakties op de voorgaande toets. Op deze wijze tracht zij te bereiken dat de toets minstens datgene toetst, wat ook in feite onderwezen wordt. Zij gaat hierbij dus eigenlijk uit van het principe 'geen tegenstemmers'. De moeilijkheid is nu dat nieuwe, misschien wel zeer wenselijke zaken, niet gemakkelijk een kans krijgen om in de toets te worden opgenomen. Zie bijvoorbeeld de eenzame stemmen die vragen om talstelsels, en de reaktie van de kommissie.

Daarom volgt de kommissie niet altijd het principe van 'geen stemmen tegen'.

Op het moment echter dat de kommissie bij haar beslissingen haar eigen mening laat prevaleren ontstaat spanning. Voorbeeld hiervan is de rubriek 'schatten'. De kommissie hecht veel waarde aan deze vaardigheid en neemt zes items op in haar toets (zie tabel 1). Bij de enquête 1971 blijkt deze rubriek ernstige kri-

---

3) CITO-publikatie nr. 7 Verantwoording inhoud 1971, dec. 1970.
CITO-publikatie nr. 13 Verantwoording inhoud 1972, dec. 1971.

4) CITO-memo nr. 5 Verslag van de enquête 'Inhoud schooltoets 1970'.
CITO-memo nr. 30 Enquête-verslag 'Inhoud schooltoets 1971'.

tiek te ondervinden in de vorm van 'niet belangrijk', 'niet onderwezen'.
Toch handhaaft de kommissie haar mening. Op dit punt wil zij wel 'doordrammen'.
Zij vindt de vaardigheid *'schatten'* zo belangrijk dat zij de kritiek voor lief neemt.
Het probleem 'wanneer mag de kommissie wel haar eigen mening laten prevaleren, wanneer niet' is niet objektief op te lossen. 'Het wordt overgelaten aan de prudentie van de leden', zegt men in zo'n geval.

Wat is minimumeis?
De schooltoetsen zouden uit items moeten bestaan die wat betreft moeilijkheidsnivo, aanvaardbaar zijn voor alle leerlingen van het lager onderwijs.
Om dit te bereiken kan men uitgaan van de mening van eksperts, hetgeen een gevaarlijke zaak is. Zulke meningen zijn namelijk opgebouwd uit minstens twee overwegingen:
a de verwachting van de moeilijkheidsgraad van een item
en
b de normerende instelling van 'dit zouden de leerlingen eigenlijk moeten kunnen of kennen'.
Na een oordeel van een ekspert weet men dus nog niet hoe moeilijk een item in feite zal zijn: het kan meevallen, maar ook tegenvallen. Meestal valt het tegen. Zie als voorbeeld (er zijn op dit gebied veel meer aanwijzingen) de moeilijkheidsgraad van de rekentoetsen.

Tabel 2 De moeilijkheid van de rekentoets 'Schooltoetsen basisonderwijs', uitgedrukt in percentages goede antwoorden.

1967	65
1968	63
1969	67
1970	61
1971	70

De rekentoetsen blijken moeilijker dan bedoeld. De itemschrijvers, die toch een grote ervaring hebben op dit gebied, overschatten de leerlingen.

Bij een onderzoekje bleek dat de gemiddelde moeilijkheidsgraad van een aantal rekenitems .59 was, d.w.z. 59% van de leerlingen maakten de items goed.
Bij een schatting vooraf dachten 4 eksperts dat de gemiddelde moeilijkheidsgraad zou zijn: resp. .66
.71
.62
.62.
Overschatting van de leerlingen!
Het is dan ook een gelukkige ontwikkeling dat de toetskonstrukteurs de schooltoetsitems sinds kort kunnen uitproberen in een proefafname.[5])
De konstrukteur krijgt hierbij enig zicht op wat zijn verwachtingen waard zijn in de praktijk.

Hier volgen enige voorbeelden:
* De kommissie meende een gemakkelijk item gemaakt te hebben.
  Welk van onderstaande getallen heeft 4 tientallen?
  A 0,4
  B 4,1
  C 14
  D 41
  Het goede antwoord D werd slechts gekozen door 57% van de leerlingen.
  Het alternatief A trok 34%. Het aantal leerlingen dat niet goed kan onderscheiden tussen 'tientallen' en 'tienden' bleek onverwacht groot.
* Het inzicht in de waarde van een breuk kan op verschillende nivo's worden gevraagd.
  Welke breuk heeft de hoogste waarde?

I		II		III	
A	$\frac{1}{3}$	A	$\frac{2}{3}$	A	$\frac{2}{3}$
B	$\frac{1}{5}$	B	$\frac{2}{5}$	B	$\frac{4}{5}$
C	$\frac{1}{7}$	C	$\frac{2}{7}$	C	$\frac{6}{9}$
D	$\frac{1}{9}$	D	$\frac{2}{9}$	D	$\frac{8}{9}$

5) Een proefafname is niet alleen nuttig voor het bepalen van de moeilijkheidsgraad (zie CITO-memo nr. 7 'Proeftoets 1970' en CITO-memo nr. 29 'Proefafname 1971').

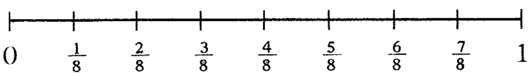
Welke breuk heeft de hoogste waarde?

De kommissie verwacht dat de vormen I, II en III opklimmend moeilijk zouden zijn.
Vraag was welke vorm nog aanvaardbaar zou blijken.
De percentages goede antwoorden waren als volgt:

I	96%
II	88%
III	58%

De kommissie besloot vorm II op te nemen in de toets.

* Eenzelfde soort vraag, op weer een andere manier tot item verwerkt, leverde slechts 48% goede antwoorden op.



Waar ligt de breuk $\frac{2}{3}$?

A tussen $\frac{2}{8}$ en $\frac{3}{8}$ 16%

B tussen $\frac{4}{8}$ en $\frac{5}{8}$ 15%

C tussen $\frac{5}{8}$ en $\frac{6}{8}$ 48%

D tussen $\frac{7}{8}$ en 1 18%

* Men kan zich echter ook wel eens vergissen naar de andere kant: het item is makkelijker dan men verwacht of anders gezegd de leerlingen weten (kunnen) meer dan men verwacht.
Een voorbeeld hiervan is het volgende item waarvan 7 van de 30 onderwijzers-beoordelaars zeiden dat het te moeilijk zou zijn.
Eén van de vier herleidingen is niet goed.[6])
Welke?

A 0,15 = $\frac{1}{15}$ 4%

B 0,33 = $\frac{1}{3}$ 3%

C 0,45 = $\frac{9}{10}$ 5%

D 0,75 = $\frac{3}{4}$ 88%

Weer een andere groep van beoordelaars (redaktie en ouders van 'Ouders van Nu'[7]) vond dit een 'flauwe streek' vanwege alternatief B.
De mening van beide groepen beoordelaars worden door de resultaten tegengesproken.

Moeilijkheidsgraad per onderdeel

Het lijkt me tenslotte nog interessant voor de lezers na te gaan hoe moeilijk de verschillende onderdelen van het rekenen gebleken zijn.
In 1971 was dit, geordend van moeilijk naar gemakkelijk, als volgt:

Tabel 3 moeilijkheid rekentoets 1971 per onderdeel (zie ook tabel 1)

schatten	rubriek 2.3	.56
hoofdrekenen	rubriek 2.1	.58
schalen/grafieken	rubriek 2.5	.60
procenten	rubriek 2.4	.62
decimalen	rubriek 1.3	.65
maten/gewichten	rubriek 3.1	.66
verhoudingen	rubriek 2.2	.70
herleidingen	rubriek 1.4	.75
breuken	rubriek 1.2	.78
rekenk. termen	rubriek 1.6	.79
cijferen	rubriek 1.5	.82
nat. getallen	rubriek 1.1	.89

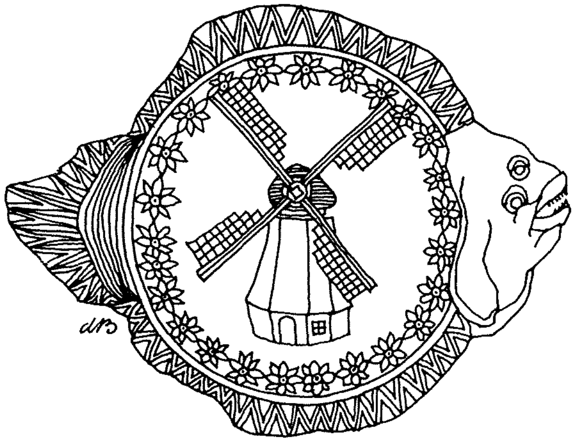
Het verschil tussen de twee uitersten is nogal groot. Toch kunnen we niet zonder meer konkluderen dat *'schatten'* een veel moeilijker vaardigheid zou zijn dan *'inzicht in natuurlijke getallen'*.
Immers de gemiddelde moeilijkheidsgraad van elk onderdeel in tabel 3 is opgebouwd uit de moeilijkheidsgraad van elk item dat bij dit onderdeel hoorde. Zoals we gezien hebben kan men een bepaald onderdeel operationaliseren in gemakkelijke en in moeilijke items. Als nu een onderdeel toevallig gerepresenteerd is in allemaal zeer moeilijke items dan is uiteraard de gemiddelde moeilijkheidsgraad voor dat onderdeel laag. Zouden er toevallig allemaal gemakkelijke items bij gemaakt zijn dan was de gemiddelde moeilijkheidsgraad hoog geweest. De plaats in de rangorde-lijst is dus niet zo zeker: konklusies vanuit de items naar het onderdeel moeten met de nodige voorzichtigheid gemaakt worden.
Vervolgens moeten we beseffen dat de moeilijkheid van een item geen absolute eigenschap is. Het is een relatief gegeven: het geeft het

6) Item nr. 10 hoofdrekenen II schooltoetsen basisonderwijs 1971.
7) 'Ouders van Nu' mei 1971 nr. 8.
Dr.G.A. Kohnstamm: De schooltoets kritisch bekeken door ouders.

verband aan tussen een bepaalde groep leerlingen en een item.
Als die leerlingen weinig onderwijs hebben genoten in de vaardigheid, die door het item wordt gevraagd, dan zal het item moeilijk blijken. Anderzijds: als de leerlingen veel onderwijs hebben gehad in die vaardigheid, dan wordt het item gemakkelijk.
Met het nodige voorbehoud zouden we uit tabel 3 iets kunnen konkluderen over de mate van aandacht die de verschillende onderdelen bij het rekenonderwijs ontvangen. Het is dan toch minstens opvallend dat de meer traditionele onderwerpen, zoals breuken en cijferen, gemakkelijk zijn en de nieuwere onderwerpen zoals schatten, schalen en grafieken moeilijk!

Uit het artikel blijkt hopelijk dat het werk van een toetskommissie een boeiende bezigheid kan zijn, met implikaties voor leerplanontwikkeling en vernieuwing. Het zou de kommissieleden dan ook spijten als zij hun werk alleen moesten verrichten. Belangstelling, hulp en kritiek van ieder, die geinteresseerd is in de ontwikkeling van het rekenonderwijs op de basisschool is zeer welkom.

N.B. – CITO-publikaties zijn voor ieder verkrijgbaar bij het CITO, postbus 1034, Arnhem.
– CITO-memo's zijn bedoeld voor de interne kommunikatie op het CITO, maar kunnen, op verzoek, ook verstrekt worden aan belangstellenden buiten het CITO.



SCHOTELVIS

3.4 BRUINE BONEN - INTEGRATIE

FRED GOFFREE

De bruine boon

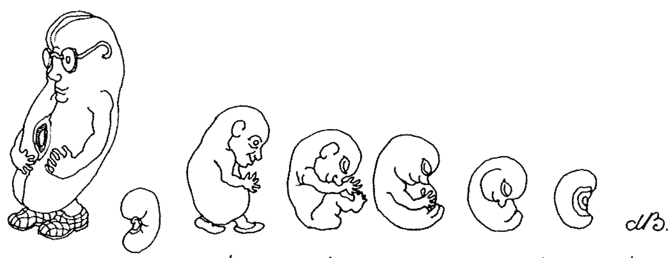
Je bent zojuist door de leraar wiskunde en didaktiek ingedeeld in een groep met drie medestudenten. Op tafel staan een aantal voorwerpen uit de natuurkunde-kast: twee maatglazen, een balans, een gewichtenblok en... een zak bruine bonen. De leraar vertelt je dat hij geïnteresseerd is in de inhoud van een bruine boon. En of je vervolgens – met die wetenschap gewapend – ook nog even wil nagaan hoeveel van die bruine bonen in dit klasselokaal opgeslagen zouden kunnen worden.

Hoewel de relevantie van de problematiek je op het moment vrijwel geheel ontgaat begin je na te denken. En je steekt je gedachten niet onder stoelen of banken. Zo langzamerhand hebben we dat wel geleerd in deze lessen.
Je zou een boon *bij toeval* uit de zak kunnen pakken. Dan doe je net of die boon alle andere vertegenwoordigt.
Nu de inhoud bepalen.
Hoe zat dat ook weer?
Inhoud is gelijk aan lengte x breedte x diepte.
Onzin, dat geldt slechts voor rechthoekige bakken.
Hebben we iets aan de balans?
Daarmee kun je toch alleen maar het gewicht uitrekenen?

Ja, we komen in de buurt. Je neemt een maatglas, doet daar water in, kijkt hoe hoog het staat en meet eveneens de mate van stijging als onze boon erin is gegooid.
We zijn blij met dit voorstel voor een oplossing. Als je de boon echter in het water gegooid hebt blijkt de stijging te klein om te meten. Wat nu? Je neemt natuurlijk een smallere maatcylinder. Nu kun je de stijging waarnemen. De inhoud van een bruine boon is bekend.

In het vervolg van het onderzoek rijzen toch echter weer twijfels. Wie zegt dat we een goede boon hebben getrokken? Je vermoedt dat de verschillen wel erg klein zullen zijn. Je weet echter ook dat je straks, als het hele lokaal erbij betrokken gaat worden, met enorme getallen gaat vermenigvuldigen. En vele kleintjes maken een grote.

Dus toch maar op zoek naar een betere *'gemiddelde'* boon. Je herinnert je iets van het gemiddelde: optellen en door het aantal delen. De taken worden verdeeld. Ieder neemt een handje bonen voor zijn rekening.
De uitkomsten blijken weinig te verschillen. Het feit dat één van ons zijn gemiddelde met 5 cijfers achter de komma wenst aan te geven verandert niets aan de zaak.



een gemiddelde bruine boon met vijf decimalen

Je vraagt je echter wel af of hij altijd zo nauwkeurig is. Je eigen gemiddelde bevatte maar 1 cijfer achter de komma; tenslotte nam je ook met voorbedachten rade steeds precies 10 bonen.

De kleine verschillen in de uitkomsten intrigeren je toch. We spreken af allemaal 10 keer 10 bonen te meten en het resultaat in een grafiekje weer te geven. Je denkt dat je dan de uitschieters onder de metingen wel kunt lokaliseren. Het gemiddelde van al onze waarnemingen mag wat ons betreft wel staan voor de inhoud van de *'enige en echte bruine boon'*....

De leerplanontwikkelaar

Bij het spreken over leerplans beperkt men zich veelal tot het aspekt van de leerstof. Een nieuw leerplan betekent dan dat nieuwe leerstof wordt opgenomen en, noodgedwongen, oude leerstof geschrapt. Dit leidt tot het denken in termen van 'wegschrappen en bijstoppen'.
Het kan echter, naar onze mening, ook anders.

De overwegingen rondom het probleem van de bruine boon weerspiegelen onze gedachten hierover enigszins. De vraag naar de wenselijkheid van het al dan niet geven van onderwijs in

het meten
het afronden
het gemiddelde bepalen
het rekenen met breuken
het rekenen met kommagetallen
het werken met apparatuur
het maken van grafiekjes
het lezen van grafieken
het werken met percentages
...

wordt hier op een bijzondere manier beantwoord.

De kinderen van het basisonderwijs worden in hun schooljaren en daarna gekonfronteerd met diverse problemen van wiskundige aard. De relevantie van de problematiek kan vanuit diverse standpunten bepaald worden:

- het praktische nut in het dagelijkse leven van nu,
- het praktische nut in de schoolvakken van nu;
- het praktische nut voor schoolvakken van een volgende school;
- het aansluiten bij de belangstelling van het kind hier ter plaatse op dit moment;
- de bijdrage voor het verkrijgen van een eigen aanpak van problemen;
- het vormen van een instelling t.o.v. de resultaten van een wiskundige aanpak;
- het naar waarde leren schatten van wiskundig georiënteerde apparatuur,...

De lijst is natuurlijk nog niet af. Toch kunnen we nu al zeggen dat het bepalen van alleen maar leerstof (oud en/of nieuw) een te magere aanpak van de leerplanproblematiek is.
Wat dan wel?

De integratiegedachte

Bekend met het geweldige reservoir van wiskundige (waaronder rekenkundige) leerstof, metoden en aktiviteiten kijken we naar de wereld van het kind en de volwassene.
Een veelheid van problemen doemt op, problemen die op verschillende nivo's om een oplossing vragen.
In dit veld van problematieken kiezen we de uitgangspunten voor ons wiskundeonderwijs, rekening houdend met de plaats, die deze kunnen innemen bij de a.s. leerlingen.
Rondom deze uitgangsproblemen trachten we het wiskundeonderwijs te organiseren.
Hierdoor krijgen reeds bekende leerstofgebieden een groter aksent, andere delen kunnen stilletjes in de schaduw komen te staan. Nieuwe aktiviteiten, metoden, begrippen, onderwerpen, gebieden worden te midden van het bekende geplaatst en van een zeker aksent voorzien. Langzamerhand groeit zodoende een nieuw beeld van het wiskundeonderwijs. Pas achteraf zou je kunnen zeggen – als je er dan nog zin in had – wat er geschrapt is en wat er bijgestopt is gedurende de jaren 1950-1980.


66-26-GJ
HD-37-85

3.5 VOOR ONS EEN VRAAG . . .

VOOR U EEN WEET?

ROB DE JONG

We zijn op zoek gegaan naar motiveringen van leerstofkeuze in het algemeen en van breuken in het bizonder. Waar kun je dan beter terecht – dachten we – dan in de handleidingen en toelichtingen van rekenmetoden? De auteurs hebben immers gekozen voor bepaalde leerstof en zij zullen de argumenten voor hun keuze ongetwijfeld in de handleiding formuleren.

Wel, wanneer u onderstaande lijst doorneemt zult u moeten toegeven dat de resultaten van ons zoeken vrij pover zijn.

* De auteurs van 'DE GRONDSLAG' (Haack en Lieffering) schrijven in hun voorwoord:

  'Verdere vereenvoudiging van de stof hebben wij nagestreefd van ingewikkelde vraagstukken en vormen.'

* In de algemene toelichting op de metode 'REKENEN' (Algera, Brinkkemper, Nijdam) staat:

  'Veel aandacht krijgen ook de breuken. Reeds in een vroeg stadium worden voorbereidende oefeningen gegeven.'

* In de 'Grondslagen en Overzicht' van 'IK REKEN' (Bosdijk) treffen we de volgende uitspraken aan:

  'De eisen die het dagelijks leven ten aanzien van rekenvaardigheid stelt, zijn uitermate bescheiden. Wat dat betreft, kan zonder bezwaar een zeer groot deel van de traditionele rekenstof worden geschrapt.'

  'Wat het dagelijks leven aan kennis van breuken vraagt is niet veel. In het A-werk komen dan ook slechts de eenvoudigste breuken voor, maar 'hersengymnastiek' is vermeden.'

  'We hebben ernaar gestreefd de stof te kiezen in overeenstemming met de geestelijke ontwikkeling van het kind. We hebben gepoogd slechts die stof aan te bieden, waarvan verwacht mag worden, dat het kind ze **begrijpend** verwerken kan, zodat van een komen tot inzicht sprake kan zijn?'

* In de 'Algemene Toelichting' op de 'NIVEAUCURSUS REKENEN' (Vossen) staat:

  'Wat de rekenstof betreft, is uitgegaan van de ons bekende en geëvalueerde inhoud van het traditionele rekenen'.

  Het leek de samenstellers niet juist om te wachten totdat het 'nieuwe rekenen' voldoende uitgekristalliseerd is. Er is **nu** een vraag naar 'struktureel nieuwe differentiatievormen'. Ze kiezen voor een nieuwe werkwijze aan de hand van de bekende stof om – zodra de tijd rijp is – de traditionele inhoud aan te passen.

* De schrijvers van de metode 'NIEUW REKENEN VOOR HET BASISONDERWIJS' (werkgroep o.l.v. Bruinsma) doen in de algemene inleiding een duidelijke uitspraak, nl.

  'We mogen nooit het doel van het rekenen op de basisschool uit het oog verliezen. Het is gericht op de praktijk van het nuchtere, zakelijke leven, waar efficiency een steeds voornamer rol gaat spelen.'

De auteurs van NIEUW REKENEN geven op pag. 28 en 29 een bloemlezing van uitspraken over 'wat rekenen is'.

'Goed rekenen betekent goed kunnen handelen in de zin van het verkeren onder de mensen. Echt rekenen is gericht op de levensmogelijkheden van het kind. Rekenen is een vak van directe praktische waarde. Het gaat om rekenstof die nodig is voor het volle leven. De rekenstof moet en kan ruimschoots dienstbaar worden gemaakt aan de ontwikkeling van het logisch denken. Rekenen is een 'denkvak'. Behalve dat rekenen het kind 'het meest abstracte begrip uit de wiskunde' leert hanteren, plaatst het de leerling ook voor tal van situaties, waarbij hij de relaties moet ontdekken, conclusies moet trekken, de bedoeling van anderen moet leren begrijpen en critisch bezien (denk bijvoorbeeld aan reclames, etiketten, enz.).'

Hoe komt het nu, dat je motiveringen voor de keuze van het onderwerp 'breuken' zo weinig tegenkomt? Omdat breuken al zo lang op het programma staan, dat ze bij de schoolinventaris zijn gaan behoren?
Is het één van die vanzelfsprekendheden geworden als bordkrijt, zomervakantie en schoolreisje?
Vanzelfsprekendheden, zonder welke geen onderwijs gegeven kan worden?
Waarom toch breuken op de basisschool?
Welke zijn de gronden geweest om indertijd 'breuken' in het programma op te nemen?

Het is goed om deze vragen te stellen. We hopen dat u met ons over deze vragen wilt denken. Gezamenlijk kunnen we dan tot antwoorden komen.

We zullen echter eerst proberen of we de vragen nog wat **preciezer** kunnen formuleren. Prof. Dr.F. van der Blij schrijft in het artikel 'Onderwijs en Wiskunde'[1]):

> 'Laten we proberen nog wat uit de ontwikkeling van de wetenschap over het onderwijs te zeggen, liefst met concrete voorbeelden. Als eerste voorbeeld zou ik willen opmerken dat de constructie van gewone breuken een vrij grote abstractie vraagt en dat tiendelige breuken eenvoudiger zijn. In de toepassingen van de wiskunde, juist in onze tijd van digitale computers, wordt het mijns inziens steeds duidelijker dat we de tiendelige breuken centraal bij het rekenonderwijs zouden moeten stellen. Ik zou zelfs in overweging willen geven de invoering van gewone breuken uit te stellen, bijvoorbeeld tot de brugklas. In plaats daarvan zou wel met negatieve getallen gewerkt kunnen worden in de basisschool. De delingen worden opgaven die met een zekere graad van nauwkeurigheid een 'decimaal' antwoord krijgen $3 : 7 = 0{,}4286$ en $2 : 9 = 0{,}2222$ zodat $3 : 7 + 2 : 9 = 0{,}6508$. We verliezen dan in eerste instantie de identiteit $3 : 7 + 2 : 9 = 41 : 63$, maar hebben identiteiten van dit type praktisch nut? De gewone breuken spelen nu nog een rol bij beursnotering $97\frac{5}{8}\%$, maar als U even nadenkt zult u met mij eens zijn dat dit een vreemde mengeling van gewone en decimale breuken is. We moeten niet vergeten dat het veelal van veel meer belang is te weten dat de wortels van de vierkantsvergelijking $x^2 - 5x + 1 = 0$ gelijk zijn aan 0,2087 en 4,7913 dan dat zij gelijk zijn aan $\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

We lichten uit dit citaat twee momenten:
- de overweging om gewone breuken eerst in de brugklas op het programma te plaatsen;
- de rol die gewone breuken spelen bij beursnoteringen.

Het tweede moment zou je kunnen opvatten als een argument van het soort:

> geef breuken (hetzij op de basisschool, hetzij in de brugklas) want je hebt ze *soms* nodig in 'het dagelijkse leven'.

Dit argument wordt nogal eens bij motiveringen van leerstofkeuze gebruikt. Leest u nog eens de uitspraken bij de metoden 'IK REKEN' (dagelijks leven) en 'NIEUW REKENEN VOOR DE BASISSCHOOL' (de praktijk van het nuchtere zakelijke leven).

WAT IS UW MENING HIEROVER? GEEFT HET DAGELIJKS LEVEN AANLEIDING TOT DE BEHANDELING VAN BREUKEN? ZO JA, TOT WELKE BREUKEN?

Bij het doorbladeren van een aantal dagbladen en tijdschriften, troffen we zo hier en daar 'breuken' aan. Ter illustratie zijn knipsels in het VARIABEL BLOK opgenomen.

De 'Proeve'[2]) geeft aan waar een leerling aan het einde van het basisonderwijs zou moeten zijn. Hij moet op zijn nivo in staat zijn
'tot het oplossen van eenvoudige zinvolle vraagstukken uit zijn ervaringswereld en uit het dagelijks leven van de volwassenen, voor zover deze laatste problemen voor hem voorstelbaar en dus begrijpelijk zijn'.

---

1) Uit: Onderwijs en Wetenschap, 1969.

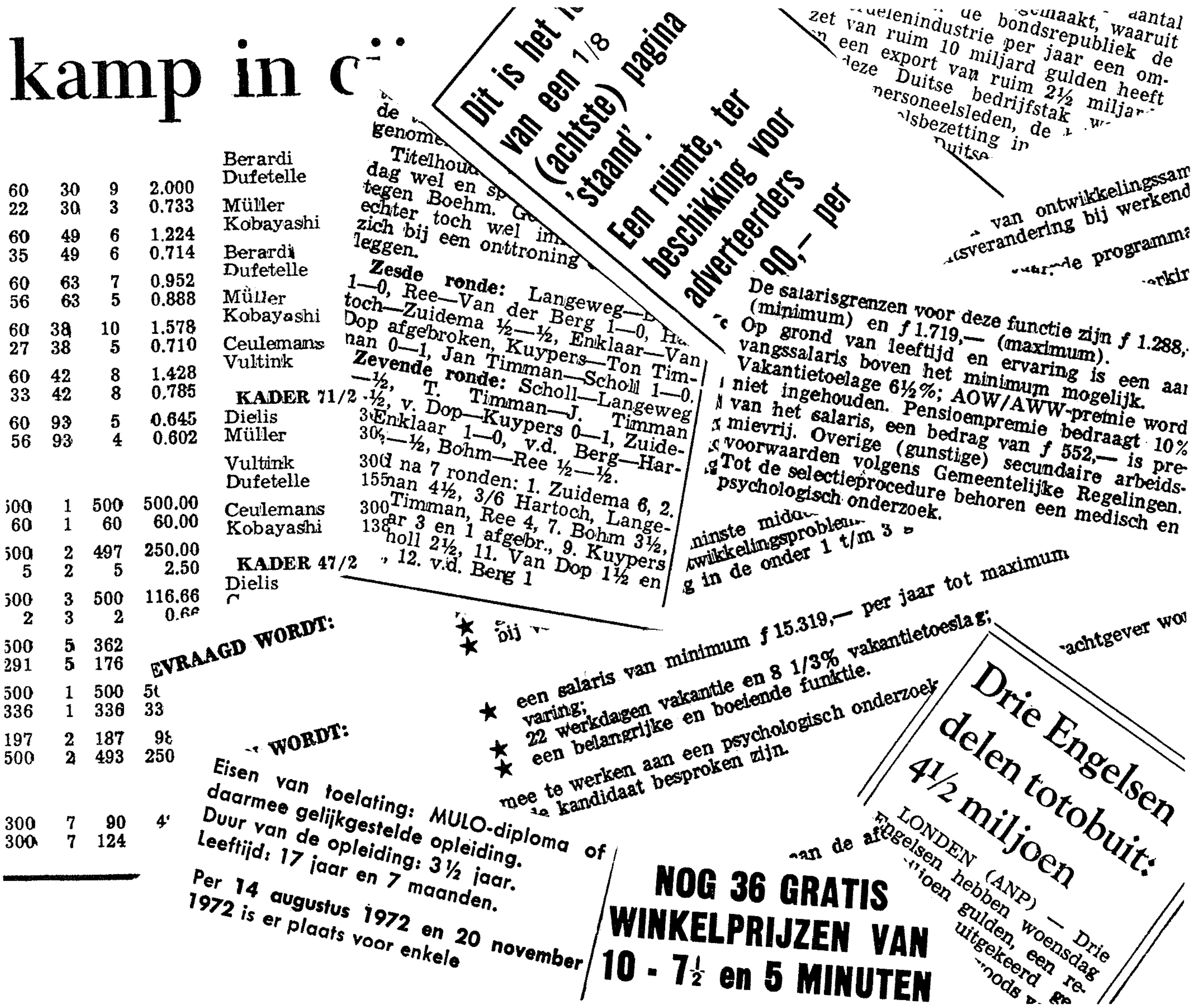
2) Proeve van een leerplan voor het basisonderwijs.

Over schrappen gesproken — en u weet uit de bijdrage over de 'bruine bonen' hoe wij over schrappen denken —:
alles wat niet behoort tot de ervaringswereld van het kind zou je — rekening houdend met de beperking '. . . . voor zover . . . .' — rustig weg kunnen laten.

VRAAG:	HOE MAKEN WE DIT KONKREET? WAT BEHOORT TOT DE ERVARINGSWERELD VAN HET KIND? WAT BEHOORT TOT HET DAGELIJKS LEVEN VAN DE VOLWASSENE?

In de 'Proeve' vinden we vervolgens:
de leerling moet voldoende voorbereid zijn *'op de reken- en wiskundevakken bij de verschillende vakken van het voortgezet onderwijs, voorzover het de toepassing van rekenkundige bewerkingen betreft, zoals: eenvoudige vraagstukken welke een beroep doen op het inzicht in de getalstruktuur en het getallensysteem, het leren van goede oplossingsmetoden, het verkrijgen van vaardigheid in het* **kiezen** *van efficiënte berekeningsmetoden'.*

Dat 'breuken' later bij de voortgezette wiskundige vorming nodig zijn, is voor iedere ingewijde in het voortgezette wiskunde-onderwijs duidelijk. We noemen slechts twee voorbeelden:



– vergelijkingen (3 X = 5)
– waarschijnlijkheid (kans op een bepaalde gebeurtenis, bv. het werpen van 6 met een dobbelsteen is: $\frac{1}{6}$).

> VRAAG: KUNNEN WE UIT DE VASTSTELLING DAT DE LEERLINGEN BIJ HET V.O. 'BREUKEN' NODIG HEBBEN, AFLEIDEN DAT ZE DIT DAN OP DE BASISSCHOOL MOETEN LEREN?

We ontlenen nog een uitspraak aan 'De Proeve':

'Bovendien behoort goed rekenonderwijs naast het aanbrengen van praktische kennis en het leren beheersen van de rekentechnieken (de materiële waarde) een sterke invloed uit te oefenen op de vorming van goede denkgewoonten en een juiste werkhouding (de formele waarde).'

In veel publikaties over rekenonderwijs komen dit soort ideeën voor.

> VRAAG: WAT DENKT U DAT UW LEERLINGEN VAN DE BREUKENLESSEN AAN EKSTRAATJES (FORMELE WAARDE) MEENEMEN?

Een laatste opmerking.

Iemand zei:
'Die grote sommen met een heleboel breuken erin, wat was dat toch fijn om daaraan te werken. Jullie moeten het plezier dat je eraan kunt beleven niet onderschatten.'

De invloed van de oude Egyptenaren (Rekenen met breuken als kunst op zichzelf) blijkt vitaler te zijn dan u en wij dachten.

3.6 HISTORISCHE ORIENTATIE

ED DE MOOR

De twee holbewoners, die tijdens hun jacht slechts één beer velden, ontdekten het begrip 'helft'. Hoe lang zou het nog duren tot het getal '$\frac{1}{2}$' ontdekt zou worden?

'halve' beer

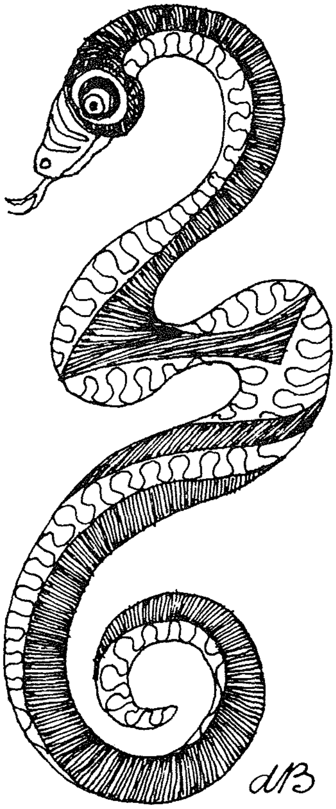
Het is goed, dat men zich van tijd tot tijd realiseert, dat het aanvaarden van een nieuw soort getal, als een breuk, een enorme stap in de uitbreiding van ons getallensysteem betekent en dat de notatie van een dergelijk 'getal' een betrekkelijke zaak is. Waarom voor 'een half' $\frac{1}{2}$ genoteerd en niet 1/2 of $\frac{2}{1}$ of (1,2) of ... ga maar door! ?
De Grieken, die geen aparte symbolen voor de cijfers hadden maar daarvoor de letters van het griekse alfabet gebruikten schreven $\frac{1}{2}$ als $\overset{\beta}{\alpha}$ waarbij β (bêta) de 2de letter en α (alpha) de 1ste letter van het griekse alfabet is. Vergist u zich ook nog wel eens met 'teller' en 'noemer'?

Wij zijn door onze opvoeding op de lagere school, zoals die vroegere heette, volledig gewend geraakt aan $\frac{123}{57}$, $\frac{43}{113}$ etc, zoals we gewend zijn geraakt aan de STER-reklame en aan het wonder van de benzinemotor.
Maar niemand realiseert zich, dat die ons zo vertrouwde schrijfwijze van 2 natuurlijke getallen boven elkaar met die (breuk) streep ertussen een lange historie achter zich heeft. Naast de 'breuken' die iedereen alle dagen gebruikt, zijn deze getallen een eigen leven gaan leiden, gebed in een streng wiskundig systeem, het systeem van de *Rationale getallen.* Wij bedoelen met die breuken, die wij alle dagen gebruiken de 'natuurlijke breuken', als een 'helft', een 'achtste' slagroom, een kast 'tweederde leg en eenderde hang', de 'driekwarts'-maat, 'procenten', etc.
Maar wie gebruikt nu in het dagelijks leven getallen als $\frac{123}{57}$ en $\frac{43}{113}$?
Niemand!
Wel gebruiken we dagelijks de decimale breuken als: lengte 1,2 meter; temperatuur 22,3°; dikte 2,7 mm; tijd 41,28 sec.; kosten 23,4 cent, enz. enz.
Een uitzondering moeten we misschien maken voor de hoogte van de rentevoet $6\frac{3}{4}\%$, $8\frac{1}{2}\%$ maar daar komen dan ook opnieuw en alleen $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{4}$ te voorschijn. Het is, dit bedenkend, interessant om eens na te gaan hoe breuken funktioneerden in die oude kulturen, die direkt of indirekt onze kultuur beïnvloed hebben.

De Egyptenaren kenden ook die paar natuurlijke breuken, die men dagelijks gebruikt en waarvoor men een apart woord en een apart symbool had, n.l. een 'half', 'tweederde', een 'kwart' en 'driekwart'.

Hoewel de wiskunde bij de Egyptenaren op een vrij onaanzienlijk nivo is gebleven, kenden zij vier hoofdbewerkingen en de deling leidde onvermijdelijk tot het gebruik van breuken.

Steeds herleidden zij daarbij alle breuken, behalve de hierboven genoemde $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$, tot zogenaamde *'stambreuken'*. Dit zijn breuken, waarvan de teller 1 is. Iedere breuk die een andere teller dan 1 had, werd gesplitst in een som van stambreuken,
b.v. $\frac{5}{24} = \frac{1}{12} + \frac{1}{8}$.
Zonder hier in te gaan op de wijze van rekenen met deze breuken, willen wij er op wijzen, dat zij in staat waren vrij ingewikkelde delingen uit te voeren, zelfs delingen van breuken door breuken, doch dat deze berekeningen in geen enkel verband stonden met problemen uit het dagelijks leven.



'symbool voor natuurlijke breuk'

Het rekenen met breuken was een kunst op zichzelf geworden.
Voor de berekeningen van alle dag bediende men zich van de 'natuurlijke' breuken en enkele eenvoudige stambreuken.

De Babyloniërs, bij wie de wiskunde op een veel hoger peil stond dan bij de Egyptenaren, kenden een 'positionele'*) schrijfwijze van getallen.

Weliswaar gebruikten zij niet het 'tientallige' talstelsel, zoals wij, maar het 'zestigtallige' of 'sexagesimale' talstelsel. Zij konden daarmee toch op vrijwel dezelfde wijze als wij dat doen hun 'kommagetallen' schrijven. Hun rekenwijze met breuken doet veel denken aan het werken van onze rekenmachines.
Een breuk werd 'vertaald' naar een kommagetal en daarna werd een vaste procedure (bijv. bij vermenigvuldigen van breuken) gevolgd. Een voorbeeld uit onze breukrekening zou kunnen zijn:
$1\frac{1}{4} \times 3 = 1{,}25 \times 3 = 3{,}75$.

We gaan op dit punt nu verder niet in op het zestigtalligstelsel en de schrijfwijze van de Babyloniërs (het spijkerschrift). Het is echter interessant om op te merken, dat, waar de Babyloniërs reeds belangrijke astronomen waren en daarvoor tamelijk ingewikkelde berekeningen met breuken moesten uitvoeren, zij voor een praktische rekenwijze met breuken kozen. Natuurlijk kwamen in het dagelijks leven ook de natuurlijke breuken voor.

Bij de Grieken zien wij voor het eerst de schrijfwijze van breuken met getallen boven elkaar, meestal teller en noemer verwisseld.
De Grieken kenden de ons zo bekende technieken als het vermenigvuldigen van breuken en het gelijknamig maken van breuken, *maar* zij gebruikten bij hun berekeningen de 'sexagesimale' schrijfwijze van de Babyloniërs.

Simon Stevin (1548-1620) is degene geweest, die zich beijverd heeft voor de invoering van de 'decimale' breuken. Het is opmerkelijk dat ook in onze kultuur de formalistische invoering van breuken en de formalistische rekenwijze met breuken, hetgeen wiskundig gezien zeker nuttig is, een kunst(je) is gebleven. Wie rekent nog even uit?

$$\frac{1\frac{7}{15} \times 4\frac{6}{11} + (3\frac{4}{5} \times 6\frac{2}{3} - 24\frac{5}{9})}{\frac{4}{7} \times 2\frac{2}{3} + 1\frac{2}{3}} =$$

---

*) We bedoelen hiermee, dat de plaats van de symbolen in een getal van essentieel belang is. Denk aan ons systeem;
263 betekent $2 \times 100 + 6 \times 10 + 3 \times 1$, en
$6{,}03$ betekent $6 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$.

Leest u het volgende verhaaltje uit 'DE GELUKKIGE KLAS' van Theo Thijssen ook nog eens door!

'Ik veegde de heuse tranen uit m'n ogen, en greep een pijpje krijt. En toen kwam weer het heerlijke wonder, dat je telkens en telkens in een klas beleeft; de gulzige aandacht voor 'n stukje zuivere geestelijkheid.

Het bord was nog klam. Ik schreef er een getal op. Een gewoon getal. Ik deed 'n stap op zij, wachtte zwijgend, tot de cijfers goed duidelijk wit werden. Er was niet één kind, dat minachtend keek, omdat het getal zo doodgewoon was. Ze voelden allemaal: d'r kómt wat.

Toen stapte ik weer op het bord af, en tekende een komma tussen de achterste twee cijfers. De klas zuchtte even; maar meteen schalde Wim Vaes z'n stem: —Tiendelige breuken! Heb ik al van m'n vrindje gehoord! En van alle kanten kwam een voorzichtig rumoer...

—Juist, zei ik plechtig, tiendelige breuken. Gaan we léren. Als jullie er tenminste zin in hebben.

Ze werden weer stil, want ze hàdden er zin in.

En ze hebben het van de week geleerd. Van morgen heb ik het in m'n register aangetekend: 'Tiend.br. Schrijfwijze. Opt. Aftr.' Maar wie, die deze dooie aantekening leest, kan begrijpen, wat het deze week voor ons geweest is?

Tot Leentje Roos toe is er een half hoofd groter door geworden. Ze is er heilig van òvertuigd: er bestaat in het hele leven maar één domheid: dat is, de komma's niet 'recht onder elkaar' te zetten. En aangezien Leentje Roos zich voor deze domheid sinds Donderdagochtend veilig weet, kan het leven voor haar geen zwarigheden meer brengen.

In deze roes-van-zekerheid zwelgt heel m'n klas, en mocht er bij deze en gene soms het vage besef zijn van een toekomst met tóch weer 'n moeilijkheid — dan verontrust ze dat niet: je 'léért' het doodeenvoudig even, en alles is weer in orde.

Zie, we hebben van de week nog wel wat anders gedaan. Maar de tiendelige breuken hebben alles overheerst, door het zo sterkend sukses; het bijna tastbare sukses; dat de kinderziel behoeft voor z'n groei. Zij hebben de kaart van Europa in de schaduw doen blijven, hoe overdonderend die in volle glorie Donderdag ook voor de klas kwam te hangen. Dat is meer lange-baanwerk, die kaart. Maar we krijgen hem óók onder de knie. Waarom zouden we die landen met de hoofdsteden niet net zo goed leren dromen als de provincies met de hoofdsteden, die we van óns landje op ons duimpje kennen?'

3.7 GEOGRAFISCHE ORIENTATIE

JAN VAN DE BRINK
LEEN STREEFLAND

INLEIDING

Hoewel men op grond van de bestaansduur van WISKOBAS-BULLETIN moeilijk al van traditie kan spreken, zullen we de 'traditie' van de eerste drie nummers voortzetten en dit keer een Oriëntatietocht wijden aan de *introduktie van breuken* in enkele buitenlandse leergangen.

Voordat we tot een overzicht van onze bevindingen bij deze oriëntatietocht overgaan eerst nog het volgende: Bij de introduktie van rationale getallen (breuken) kan men uitgaan van een drietal modellen, nl.

Het empirisch model
Motivatie voor de introduktie van gebroken getallen kan gevonden worden in situaties, welke zich in de belevings- en ervaringswereld (empirie) van het kind voordoen.
Bijv.: Moeder bestelt bij de bakker een 'half wit'.
De melkboer brengt 'een achtste' slagroom.
Drie kinderen verdelen een reep chocolade.
Bij de uitverkoop heeft de winkelier 'een derde van de prijs laten vallen'.

Het wiskundig model
Men kan ook vanuit de wiskunde zelf de behoefte aan 'een nieuw soort getallen' laten zien. De beschikbare getallenverzameling (in dit geval $\mathbb{N}$ = de verzameling der natuurlijke getallen) wordt uitgebreid. Men kreëert nieuwe getallen, waarmee de vanuit de wiskunde ontstane problemen kunnen worden opgelost.
Bijv.: Men konstateert op een bepaald moment dat 14 : 3 binnen de verzameling van de natuurlijke getallen geen oplossing heeft, of anders gezegd, dat de verzameling der natuurlijke getallen niet gesloten is t.a.v. de operatie delen. Uitbreiding van $\mathbb{N}$ met de (positieve) rationale getallen maakt, dat gesteld kan worden: $14 : 3 = 4\frac{2}{3}$.
Het skala van mogelijk op te lossen rekenkundige problemen is hiermee aanzienlijk uitgebreid.

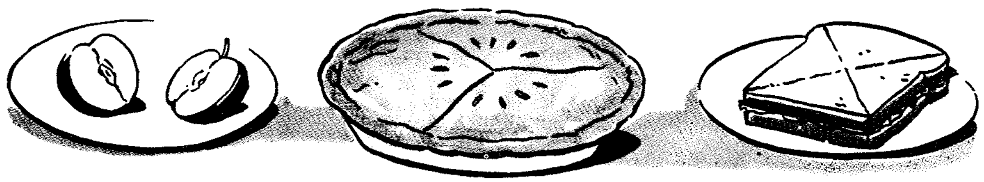
Het fysisch model
Een schematisering van het empirisch model geeft een z.g. fysisch model, dat veelal ten dienste staat van de huidige introduktie van breuken op de basisschool.

Een bekend voorbeeld hiervan is het 'pannekoek'-model, dat u allen ongetwijfeld kent. Alle 'gehelen' worden voorgesteld door 1 pannekoek (als 't moet een cirkelschijf van papier).
Deze drie modellen zullen als 'model' gebruikt worden bij de beschouwing van de *introduktie van breuken* in enige buitenlandse metoden, waartoe we nu overgaan.

I DISCOVERING MATHEMATICS
1.1 Introduktie
Voor in elke 'Teacher's Guide' is een globale opsomming gegeven van de totale stofinhoud voor iedere 'Grade'. Vergelijken we de programma's voor de 'Grades' 2 en 4 met elkaar, dan ligt het vermoeden voor de hand, dat in genoemde metode bij de introduktie van breuken van verschillende modellen gebruikt gemaakt wordt, nl.
Grade 2: Meaning developed for half, third, fourth and fifth of a whole (fysisch model).
Grade 4: Remainders in division expressed as fractions (wiskundig model).
We zullen onderzoeken of het zo voor de hand liggende vermoeden juist is.

1.2 Grade 2
Zoals afb. 1 laat zien (welke uit D.M.3 is overgenomen) wordt het fysisch model vrij sterk benadrukt; hierbij is overigens wel steeds van verschillende eenheden uitgegaan.

Merk op, dat bij de verschillende eenheden voor de leerlingen steeds van 'Model' gesproken wordt. Dit 'Model' is dan wel bedoeld in engere zin, nl. de pannekoek, de appel, de rechthoek. Dus: 'Model' van een eenheid.

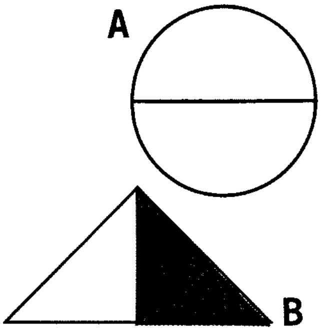


PURPOSE: To review the meaning of halves and fourths of an object; to give practice in identifying fractional parts of objects.

Parts of a whole

1. If you chose one part from each plate (No) of food, would it make any difference which you chose? Into how many equal parts is each whole divided? (2, 3, 4) Each part is called a **fractional part** of the whole.

A



B

2. Into how many equal parts is Model A divided? (2) Each of the two equal parts is called **one half** of the drawing. The numeral for "one half" is written like this: $\frac{1}{2}$. A numeral such as $\frac{1}{2}$ is called a **fraction.** (1/2)

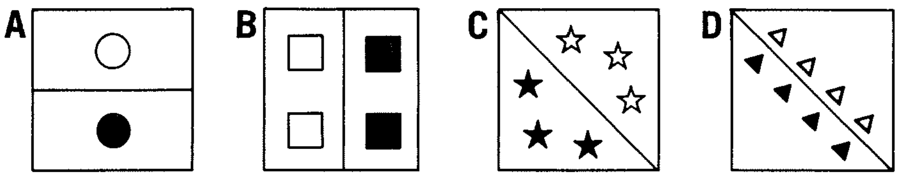
3. What fractional part of B is green? What fractional part is not green? (1/2) How many **halves** make a whole? (2)

afb. 1

PURPOSE: To extend the idea of fractional parts of sets; to relate the meaning of a unit fraction (½, ¼, etc.) to the number of members in a set.

PRE-PAGE: Place a set of four cutouts on the felt board. Separate the set into halves. Ask, "How many parts are in the set? How many members are in each part?" Using other cutouts, show the meaning of ⅓ and ¼ of a set.

Fractional parts of sets



1. Are these sets separated into equivalent subsets? In Model A how many equivalent subsets are there? (Yes) (2)

2. The fraction $\frac{1}{2}$ compares the red subset with the whole set. What fraction compares the red subset with the whole set in Models B, C, and D?

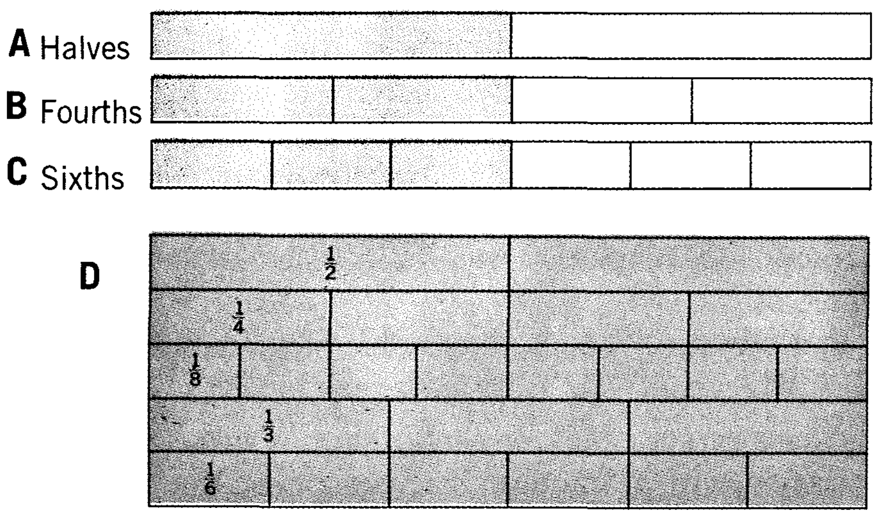
afb. 2

Voordat overgegaan wordt tot een nadere beschouwing van het onder 'Grade 4' beschouwde, eerst nog een tweetal opmerkingen:

* Bij *'Fractional parts of sets'* begeeft men zich op een terrein, dat enigszins diskutabel gesteld kan worden.
Immers:
'The fraction ½ compares the red subset with the whole set' (opg. 2 op afb. 2),
geeft aanleiding tot vragen, als:
'Wat is de rode deelverzameling? '
Deelverzamelingen hebben echter niet de eigenschap dat ze rood of van een andere kleur zijn.
'Wat is de hele verzameling? Zijn er ook halve verzamelingen of driekwart verzamelingen? '
We kunnen wel spreken van de helft van het aantal elementen van een verzameling, etc.
Het formuleren van dergelijke probleempjes in termen van verzamelingen kan trouwens vermeden worden. Wordt het gestelde probleem bijvoorbeeld naar aanleiding van een aantal knikkers geformuleerd, dan sluit het bovendien veel beter aan bij de belevingswereld van het kind.
Hier zie je knikkers. ○ ●
Hoeveel knikkers zijn het?
Hoeveel knikkers zijn wit?
Hoeveel knikkers zijn zwart?
Welk *gedeelte* is zwart?

* Belangrijk bij de ontwikkeling van het begrip breuk is het begrip als equivalentieklasse.
Voor enige algebraïsche kanttekeningen bij dit begrip zij verwezen naar de paragraaf, die handelt over de metode S.M.P. (School Mathematics Project).
We zullen hierop aan de hand van konkrete voorbeelden uit Discovering Mathematics ingaan.
De breuk als equivalentie-klasse wordt geïntroduceerd met behulp van de volgende voorbeelden (afb. 3).

Comparing fractional parts



► Use the model above and complete each exercise.

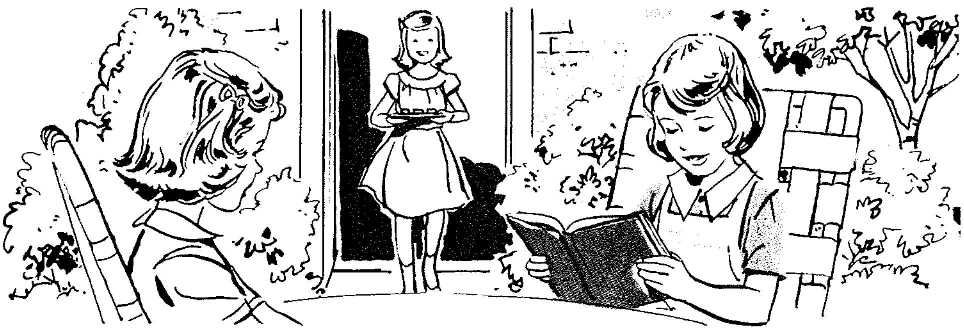
	a	*b*	*c*	*d*	*e*
7.	$\frac{1}{2}=\frac{\triangle}{4}$ (2)	$\frac{4}{8}=\frac{\triangle}{4}$ (2)	$\frac{3}{4}=\frac{\triangle}{8}$ (6)	$\frac{\triangle}{4}=\frac{2}{8}$ (1)	$\frac{\triangle}{8}=\frac{1}{2}$ (4)
8.	$\frac{\triangle}{6}=\frac{1}{2}$ (3)	$\frac{\triangle}{3}=\frac{4}{6}$ (2)	$\frac{\triangle}{2}=\frac{3}{3}$ (2)	$\frac{2}{6}=\frac{\triangle}{3}$ (1)	$\frac{3}{3}=\frac{\triangle}{6}$ (6)

afb. 3

Zoals uit de afbeelding blijkt, wordt met behulp van een fysisch model gelijkheid of gelijkwaardigheid van bv. $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{4}$ gevisualiseerd.

1.3 Grade 4

Het eerder uitgesproken 'voor de hand liggende' vermoeden, dat Discovering Mathematics ook het wiskundig model bij de introduktie van breuken zou gebruiken, blijkt onjuist.



PURPOSE: To introduce the concept of fractional remainders in division problems; to teach the rationale for expressing a remainder either as a whole number or as a fraction; to give practice in making a decision as to the correct form of the remainder.

Showing remainders as fractions

A

$$\begin{array}{r} 3\text{ R1} \\ 3\overline{)10} \\ 9 \\ \hline 1 \end{array}$$

B

$$\begin{array}{r} 3\frac{1}{3} \\ 3\overline{)10} \\ 9 \\ \hline 1 \end{array}$$

1. Stella's mother gave her ten freshly baked cookies. She asked Stella to share them equally with her two friends. Find how many cookies each girl will get by dividing 10 by 3. Example A shows that each girl will get 3 cookies, but there will be one cookie left.

2. Can one cookie be divided into 3 parts? (Yes) The exercise $1 \div 3$ can be written as the fraction $\frac{1}{3}$. Example B shows how to write a quotient and the remainder as a fraction. Do not write R beside the quotient.

afb. 4

Zoals afb. 4 laat zien, zijn het empirisch model (zie opgave 1) en de reeds verkregen kennis van breuken aanleiding om te laten zien, dat 'division', 'remainders as fractions' kan opleveren.

Tenslotte zij nog opgemerkt dat aan 'breuk en getallenrechte' enige aandacht besteed wordt.

Samenvattend kan voor de metode 'Discovering Mathematics' t.a.v. de introduktie van breuken gesteld worden, dat:

- het gebruik van een fysisch model bij de visualisering van breuken overheerst;
- de introduktie van breuken weinig verschillen vertoont met de wijze waarop dit in diverse traditionele nederlandse metoden geschiedt;
- de breuk als equivalentie-klasse gevisualiseerd wordt via datzelfde fysisch model;
- een breuk voortdurend beschouwd wordt als een relatie van een deel t.o.v. het geheel;
- aan 'breuk en getallenrechte' enige aandacht besteed is.

N.B. Na introduktie van breuken zou een nadere beschouwing van de introduktie van de operaties met breuken moeten volgen. In dit artikel zullen we hierop niet nader ingaan.

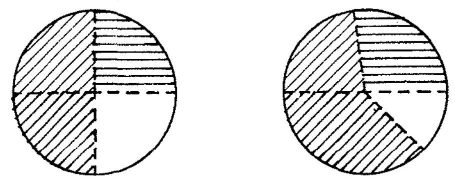
II THE SCHOOL MATHEMATICS PROJECT (S.M.P.)

De breuken worden in deze metode op grond van twee modellen geïntroduceerd: nl. een *fysisch* model ('de breuk als deel van het geheel') en een *algebraïsch* model ('de breuk als getallenpaar').

Fysisch model

De wijze waarop in het hoofdstuk 'A quick look at fractions' (Book A, p.91 e.f.) de kinderen van 11 à 12 jaar worden gekonfron-

teerd met breuken, zouden we *fysisch-schematisch* willen noemen.
Fysisch-schematisch omdat hier direkt sprake is van schema's die, zo men wil, alle pannekoeken, appels, taarten enz., enz. symboliseren.



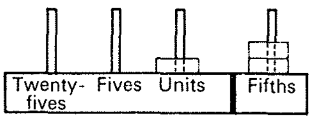
afb. 5

De auteurs beperken zich in hun aanbieding tot kontinue gehelen, bijvoorbeeld: kleur $\frac{1}{3}$ van de cirkel.
Diskontinue eenheden zoals bijv. in '$\frac{1}{3}$ van 6 appels' komen niet voor.

Overigens zijn de breuken reeds vóór deze inleiding ekspliciet aan de orde geweest.
In de metode komen namelijk breuken ter sprake bij de behandeling van het positiestelsel. Bij de behandeling van het vijftallig stelsel wordt de 'spijkerabacus' uitgebreid met een spijker voor 'vijfden'!

De aandacht die men in de buitenlandse metoden aan het positiestelsel besteedt, verklaart wellicht waarom tiendelige breuken intensiever worden behandeld dan gewone breuken. Hier een voorbeeld van het vijftallig stelsel (afb. 6):

We have called the right-hand spike the 'extra one'. What is a better name for it? Remember, five on this spike are needed to make a whole one.
Call this the 'one-fifth' spike; rings placed upon it each represent the fraction one-fifth.

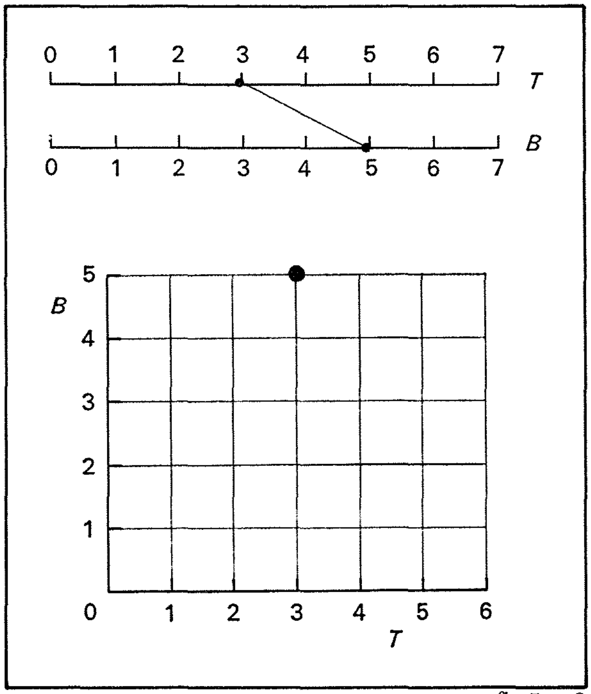


This situation represents one and two-fifths.

afb. 6

Algebraïsch model
Het algebraïsch model volgens welke de breuk beschouwd wordt als getallenpaar, zullen we grondiger bespreken.

In S.M.P. worden de breuken beschouwd als *puntenparen* (zie afb. 7 en 8).



afb. 7 en 8

Op deze twee manieren worden de punten die op twee getallenlijnen de natuurlijke getallen representeren met elkaar verbonden tot paren.

S.M.P. geeft dus duidelijk een voorbeeld van een algebraïsche aanpak van breuken. Er zijn echter toch enige verschillen op te merken tussen wat in de algebra aan teorie wordt ontwikkeld (quotiëntenlichamen) en hetgeen de auteurs aanbieden.
In de metode S.M.P. krijgen bij voorbeeld de *getallenparen* zèlf de naam 'breuk' terwijl deze term in de algebra voorbehouden is aan *klassen* van 'gelijke' getallenparen (waarbij van te voren het gelijk zijn van twee paren is gedefinieerd).*

$$\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{16}, \ldots\ldots\ldots\right\}$$

heet in S.M.P. een verzameling breuken die gelijkwaardig zijn, terwijl in de algebra deze hele klasse van gelijke getallenparen de titel 'breuk $\frac{2}{3}$' krijgt. Het analogon van het algebraïsche begrip breuk (klasse van gelijke getallenparen) in S.M.P. is het begrip *breukwaarde*.

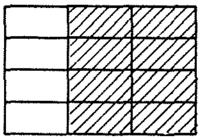
* Zie bijv. Dr. F. Loonstra – Inleiding tot de Algebra, blz. 134.

We kunnen immers gelijke getallenparen of gelijkwaardige breuken representeren met respektievelijk een klasse of een breukwaarde. Vergelijken we teorie en metode dan komen we tot het volgend overzicht:

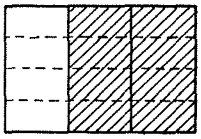
S.M.P.	Algebra
breuk	getallenpaar
breukwaarde	breuk

Bij de introduktie van de breukwaarde wordt *een fysisch model* gehanteerd. D.w.z. de breuk wordt als deel van een geheel beschouwd. Er wordt namelijk op de volgende wijze onderzoek verricht naar gelijkwaardige breuken (afb. 9).

For example



can also
be seen as

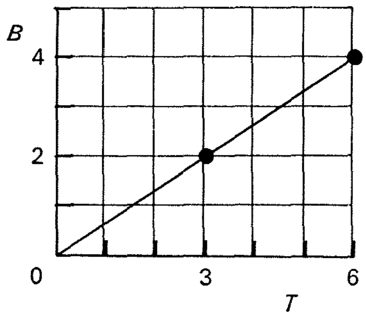


so $\frac{8}{12}$ and $\frac{2}{3}$ are equivalent fractions.

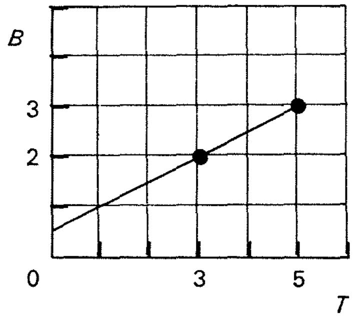
afb. 9

Direkt na deze inleiding van gelijkwaardige breuken wordt weer het algebraïsch model (d.w.z. de breuk als getallenpaar beschouwd) in het onderwijs betrokken. We noemen een drietal aspekten:

- er wordt naar grafische eigenschappen gezocht van gelijkwaardige breuken;
- de kinderen vergelijken de grafische voorstellingen van gelijkwaardige breuken met die van niet-gelijkwaardige breuken (afb. 10);
- er wordt gezocht naar een relatie tussen teller en noemer van gelijkwaardige breuken die een kriterium vormt voor de gelijkwaardigheid.
  (In de algebra definiéért men die relatie: $\frac{a}{c} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc$).



The line passes through 0,
so $\frac{3}{2}$ and $\frac{6}{4}$ are equivalent.



The line does not pass through 0,
so $\frac{3}{2}$ and $\frac{5}{3}$ are *not* equivalent.

afb. 10

Forming equivalent fractions

Graph the set of fractions

$$\{\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{6}, \tfrac{6}{9}, \tfrac{8}{12}, \tfrac{10}{15}\}.$$

Are the members of this equivalent to each other?
How is the set of numbers on the tops of the fractions made up? Can you do the same for the set of numbers on the bottoms of the fractions? Can you write down some more members of this set of equivalent fractions? Graph the new fractions to see if they are correct.
In fact the tops of the fractions are multiples of two and the bottoms are multiples of three, like this

$$\left\{\frac{1\times2}{1\times3}, \frac{2\times2}{2\times3}, \frac{3\times2}{3\times3}, \frac{4\times2}{4\times3}, \frac{5\times2}{5\times3}\right\}.$$

afb. 11

Samenvattend kunnen we de volgende opmerkingen maken over de introduktie van breuken in de metode S.M.P.:

- het fysisch model (de breuk als deel van een geheel) komt slechts in schematische aanbieding aan de orde;
- veel aandacht wordt besteed aan het algebraïsch model (de breuk als getallenpaar);
- het begrip breuk wordt veelzijdig aangeboden, d.w.z. als algebraïsch èn als fysisch model wordt het begrip met talloze grafische voorstellingen verduidelijkt;
- in de introduktie wordt de breuk *niet* als wortel van de vergelijking $a \times x = b$ ($a \neq 0$, $b \in \mathbb{Z}$) aangeboden;
- tenslotte wijzen we er nogmaals op, dat deze metode bestemd is voor kinderen van 11 à 12 jaar.

III MUNKALAPOK

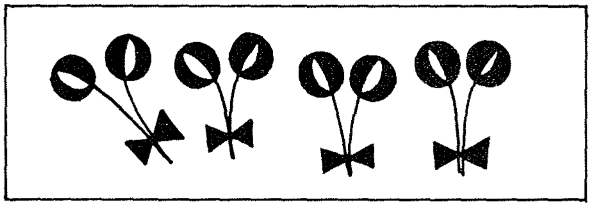
De Hongaarse metode 'Munkalapok', ontwikkeld in het Nationaal Instituut voor Opvoeding en Onderwijs te Boedapest, onder leiding van T. Varga, introduceert de breuken volgens een empirisch en een fysisch model.

Opvallend is dat in vele opgaven beide modellen tegelijk worden gepresenteerd, ofschoon er – globaal beschouwd – een tendens in de richting van het fysisch model is op te merken.

Het empirisch model manifesteert zich vooral in opgaven over 'verdelingen':

Voorbeeld I

'Van 8 bloemen maken wij 4 boeketjes.
Gelijk verdeeld.
Hoeveel bloemen zijn er in één boeket? '

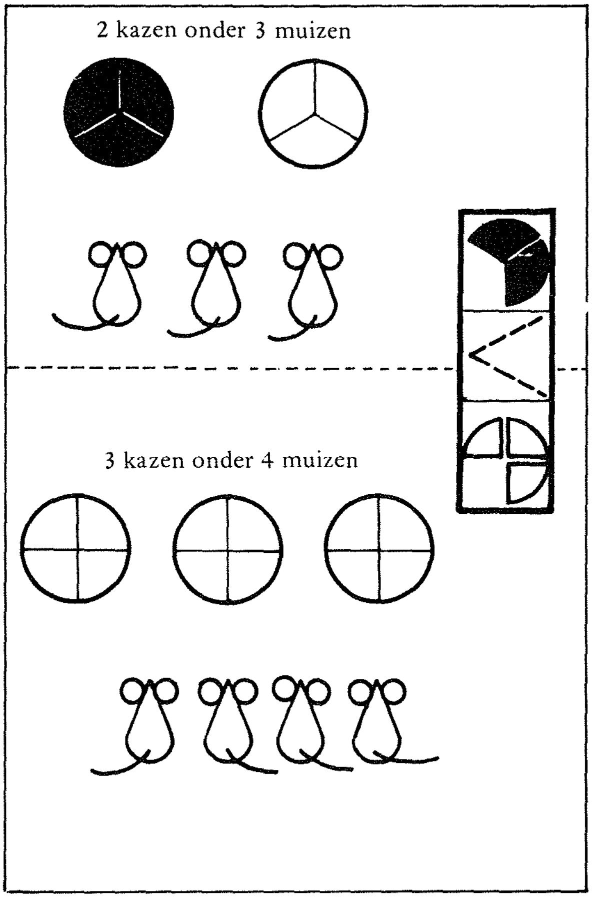


afb. 12

Enkele werbladen verder wordt de volgende opgave aangeboden:

Voorbeeld II

Wanneer krijgt een muis meer kaas? (afb. 13)



afb. 13

Vergelijken we beide voorbeelden I en II, dan zien we, dat in voorbeeld II een fysisch model (de breukencirkel) naast een empirisch model (het verdelen van de kazen) een grote rol gaat spelen.

We merken hierbij op dat het 'groter-dan' teken in de metode in drie betekenissen gebruikt wordt, namelijk als:

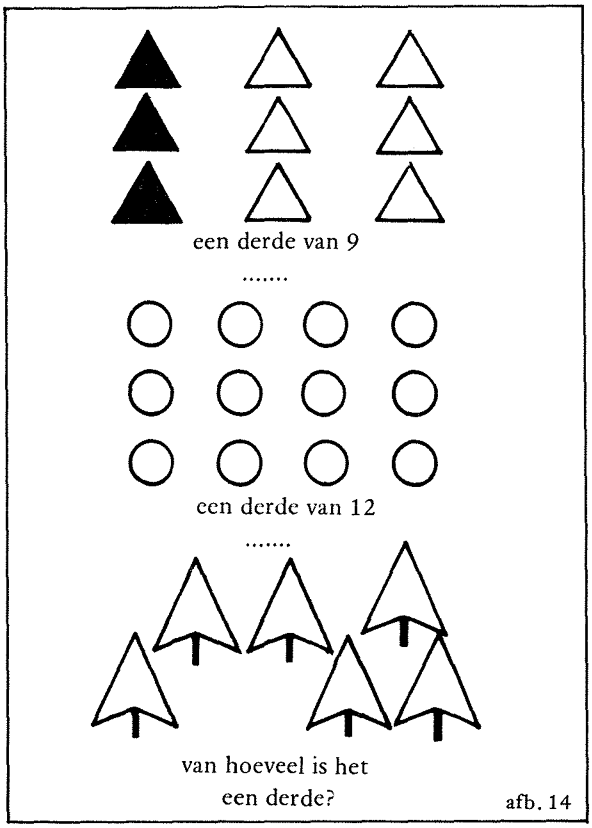
'kleiner dan' (bij de grootte van objekten);
'minder dan' (bij elementen van verzamelingen);
'kleiner dan' (bij het aantal elementen in verzamelingen).

De drie betekenissen worden door elkaar gebruikt.

Evenals in onze schoolboekjes wordt in vele opgaven de eenheid gegeven en wordt de kinderen gevraagd een gedeelte hiervan bijvoorbeeld te kleuren.

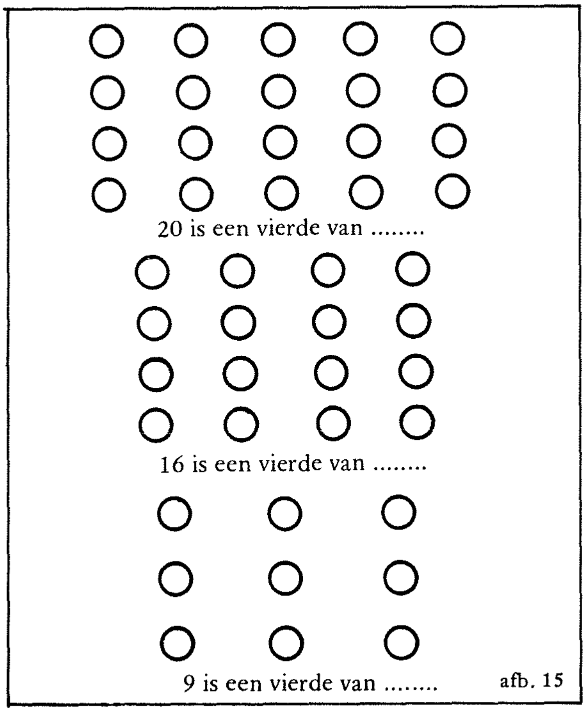
In Munkalapok komt echter veelvuldig het 'omgekeerde' voor: een gedeelte wordt gegeven en de eenheid wordt gevraagd.

Voorbeeld III
Kleur een derde!



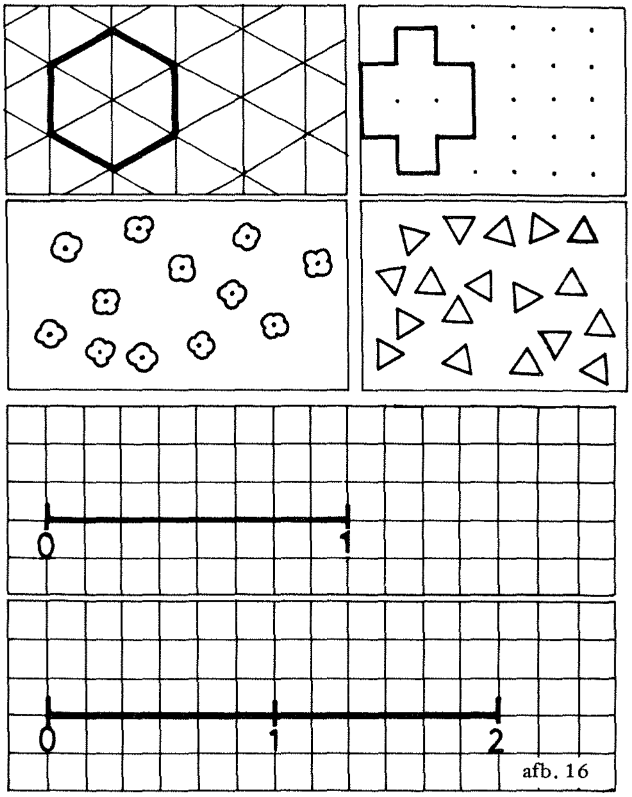
afb. 14

Voorbeeld IV
Kleur een vierde!



afb. 15

Na deze voorbeelden zal het duidelijk zijn dat in verschillende opgaven de eenheid niet voortdurend hetzelfde figuurtje is.
De variaties waarin de eenheid wordt aangeboden is zeer groot!
Om u een indruk te geven, nodigen wij u uit de volgende opgave goed te bekijken (afb. 16):
Kleur $\frac{5}{3}$!



afb. 16

In deze opgave worden verschillende schema's gehanteerd. Over het algemeen wordt deze metode gekenmerkt door een grote verscheidenheid in de aanbieding van breuken.
We noemen nog enkele verschillende schema's:
- Het werkblad is wel of niet ingedeeld door middel van lijnen of stippen.
- Kontinue en diskontinue eenheden worden aangeboden of aan de kinderen gevraagd.
- De kinderen moeten soms zelf de eenheden kiezen.
- Grote aandacht wordt besteed aan de plaats van de breuk op de getallenlijn.

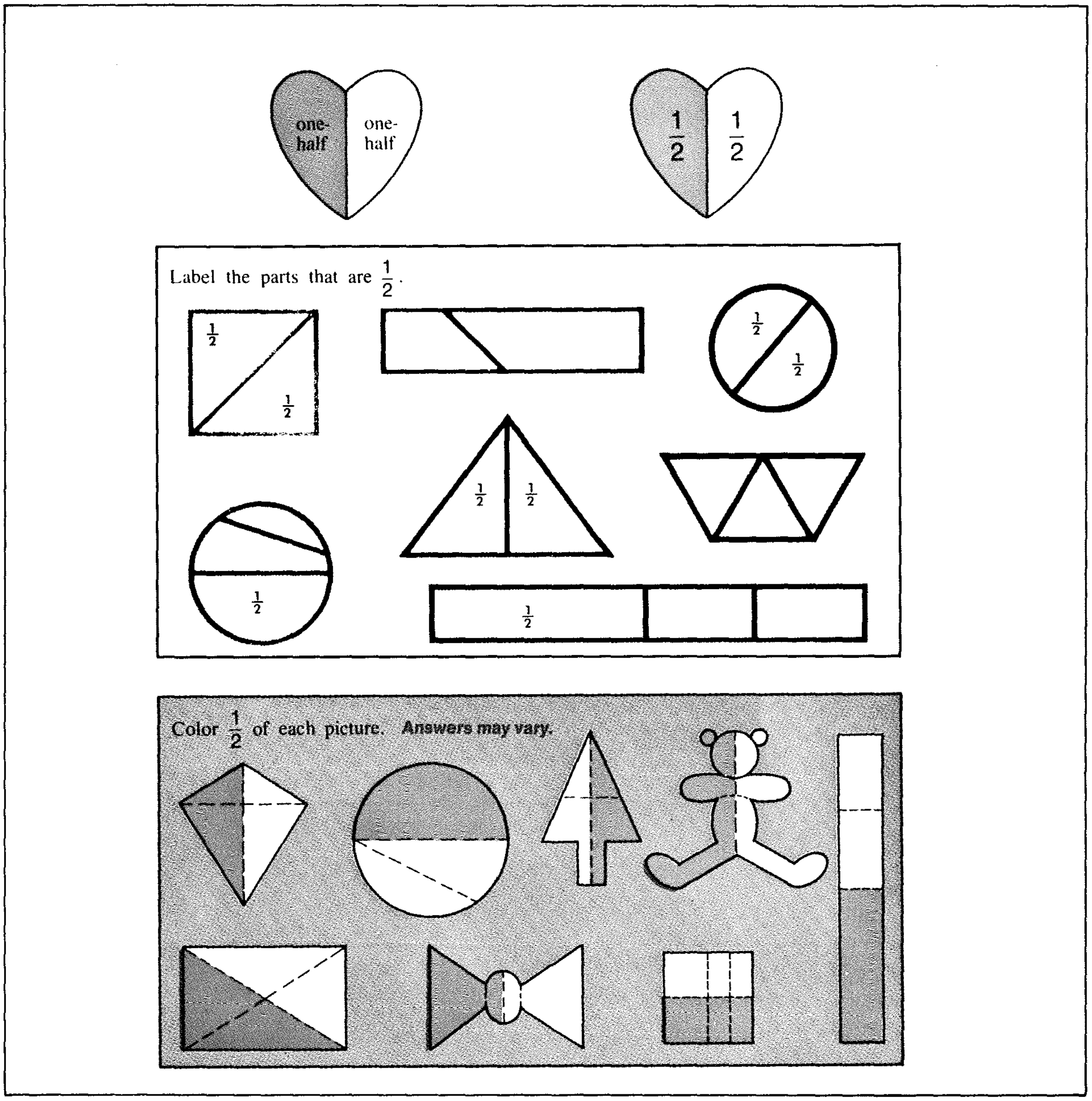
Samenvattend kunnen we over de introduktie van breuken in de metode Munkalapok het volgende opmerken:

- het empirisch model komt slechts in voorbereidende opgaven aan de orde, vaak gekombineerd met een fysisch model (een schema);
- zeer veel aandacht wordt besteed aan het werken in een fysisch model; met tal van schema's wordt het begrip breuk (als deel van een geheel) gedemonstreerd; deze schema's variëren in vele opzichten sterk;
- aan het algebraïsch model (de breuk als klasse van getallenparen) wordt in werkschrift 1 tot en met 3 geen aandacht besteed.

Tenslotte wijden we nog een paragraafje aan:

IV DEVELOPING MATHEMATICS

Al vrij vroeg in deze metode (begin tweede deel) vindt een eerste kennismaking met breuken plaats (afb. 17).



afb. 17

Ook hier weer het gebruikelijke fysische model, met zo nu en dan een eenheid, die uit de belevingswereld van het kind komt (zie in dit verband het beertje op de afbeelding).

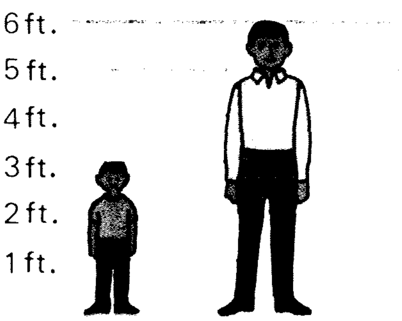
De keuze van een beer om daarmee het begrip 'half' te illustreren is op zichzelf weinig geslaagd, doch vindt zijn motivering in het feit dat één van de doelstellingen van deze paragraaf *'To review line symmetry'* is. In dit verband moet u ook de overige figuren op de afbeelding zien.
U zult dan tevens ontdekken, dat de helft van de rechthoek links onderaan wat inkonsekwent is aangegeven, omdat een diagonaal immers geen symmetrie-as van een rechthoek is.

Nog twee opmerkingen:

- De onderwijzeres wordt aangeraden de aandacht te vestigen op de betekenis van teller en noemer. Bij de breuk $\frac{1}{2}$ duidt de 2 aan, dat het betrokken voorwerp in twee gelijke delen is verdeeld. De 1 duidt aan, dat het om één van die delen gaat.
- Bovendien wordt de onderwijzeres aangeraden de leerlingen attent te maken op het feit, dat een breuk de relatie tussen deel en geheel aangeeft.

De introduktie van de breuk als equivalentieklasse vindt op de volgende wijze plaats (afb. 18).

Ratio and Fractions



Linda's little brother is 3 feet tall. Their father is 6 feet tall. See the pictures at the side. Can you tell which is the picture of the father? How does the picture show that the father is 6 feet tall? How does it show that the little brother is 3 feet tall? **The 6 foot mark touches the father's head. The 3 foot mark touches the little brother's head.**

1. Linda says her father is twice as tall as her little brother. What does that mean? Is it true? **Her father's height is 2 times the height of her little brother; Yes.**

2. Her little brother says he is half as tall as his father. What does that mean? Is it true? **Her little brother would have to measure his height twice to have his father's height; Yes.**

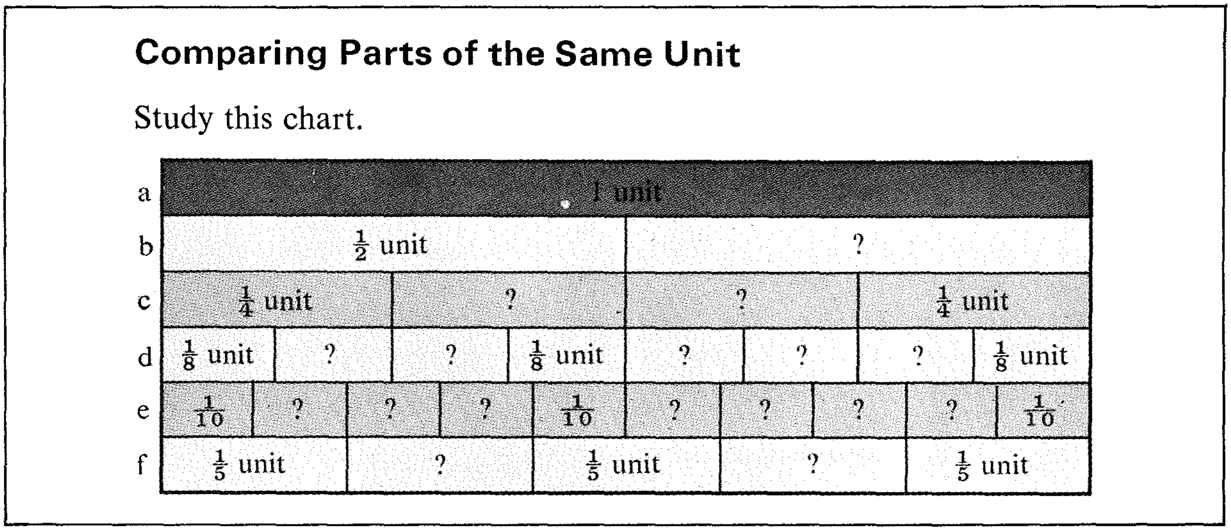
afb. 18

Uit de afbeelding blijkt, dat verhouding (ratio) en breuken sterk op elkaar zijn afgestemd. De notatie van een bepaalde verhouding in de vorm van een geordend getallenpaar, wordt in relatie gebracht met een breuk. In dit gedeelte vindt dus een introduktie van de breuk als equivalentie-klasse plaats, die gemotiveerd wordt vanuit de algebraïsche teorie, waar het rationale getal als getallenpaar gedefinieerd wordt. (Zie in dit verband weer de paragraaf over S.M.P.).
De opbouw van de breuk als equivalentieklasse vanuit het begrip 'ratio' wordt niet konsekwent doorgevoerd, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt (afb. 19 – *volgende pagina*).

De breuken als resten bij deling komen in deze metode ter sprake bij de bepaling van het rekenkundig gemiddelde van twee getallen.

Samenvattend kan gesteld worden dat

- introduktie van breuken in deze metode plaats vindt via het fysisch model;
- de behandeling van de breuk als equivalentie-klasse deels geïnspireerd is op puur algebraïsche teorieën en anderzijds ook via het fysisch model gevisualiseerd wordt;
- de introduktie van de breuk $\frac{1}{2}$ gelieerd is aan (lijn-) symmetrische figuren;
- in de inhoudsopgave (deel 3) nog wel de


Comparing Parts of the Same Unit

Study this chart.

a 1 unit
b $\frac{1}{2}$ unit ?
c $\frac{1}{4}$ unit ? ? $\frac{1}{4}$ unit
d $\frac{1}{8}$ unit ? ? $\frac{1}{8}$ unit ? ? ? $\frac{1}{8}$ unit
e $\frac{1}{10}$? ? ? $\frac{1}{10}$? ? ? ? $\frac{1}{10}$
f $\frac{1}{5}$ unit ? $\frac{1}{5}$ unit ? $\frac{1}{5}$ unit

afb. 19

term 'Fractional part of a set' te vinden is, doch in de leerlingentekst niet over 'sets' i.v.m. breuken gesproken wordt;
in deze metode op bescheiden wijze aandacht besteed wordt aan breuken op de getallenrechte.

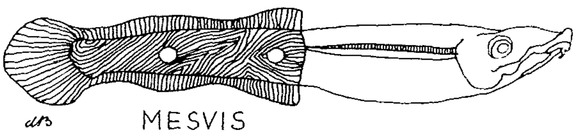
LITERATUUR

1 *Developing Mathematics,*
(The MacMillan School Mathematics Program).
Door: Jo McKeeby Phillips
Tina Thoburn
Walter J. Sanders
J. Franklin Fitzgerald
Uitg.: The MacMillan Company
Collier-MacMillan Limited, London.
– Basisschool

2 *Discovering Mathematics.*
Door: M. Vere DeVault
Roger Osborn
Hazel B. Forester
Uitg.: Charles E. Merrill Publishing Co., Ohio (U.S.A.).
– Basisschool

3 *The School Mathematics Project.*
Door verschillende auteurs geschreven.
Uitg.: Cambridge University Press (1969),
– Serie A t/m H: 11-14 jr.

4 *Munkalapok,*
Door: T. Varga, Budapest (1968).
– Basisschool


MESVIS

3.8 ALLES NOG EENS NETJES OP EEN RIJTJE

ADRI TREFFERS

1 INLEIDING

Het woord breuk duidt in eerste instantie op een deel van een – fysisch – geheel. Het is dan mogelijk om bewerkingen met breuken uit te voeren, die gerelateerd zijn aan die delen van de fysische eenheid. We zeggen dan, dat we werken met breuken op het konkrete nivo.
Er zijn in de loop van de geschiedenis vele pogingen gedaan om de verschillende bewerkingen met breuken konkreet te laten ervaren. Het pannekoek-model speelde een belangrijke rol bij het aanduiden van de breuken als 'delen van...'. Voor de bewerkingen werden vele – soms zeer ingewikkelde – modellen gekonstrueerd.

Tegenover deze konkrete benadering van het onderwijs in breuken, staat een totaal àndere benaderingswijze, die veel meer overeenstemt met een opvatting van breuken als – rationale – getallen met bepaalde welomschreven eigenschappen.
Het onderwijs, dat op dit breukbegrip stoelde, was formalistischer: er werd gemanipuleerd met tekens volgens bepaalde voorschriften, zonder dat men buiten het systeem aan die tekens een bepaalde betekenis hoefte toe te kennen.
Tussen deze twee uitersten lopen de lijnen van de onderwijshistorie over breuken en dit patroon willen we nu schetsen.

De term breuk gebruiken we dan op de verschillende wijzen, waarop het door de geschiedenis heen gebruikt is, nl.:

* als symbool (teller, streep, noemer)
* als aanduiding van een deel-geheel betrekking
* als rationaal getal
* als 'gewone' breuk ($\frac{2}{3}$) en als decimale breuk (0,3)
* als quotiënt van twee gehele getallen
* en ... op een nieuwe wijze

Genoemde aspekten komen in de volgende uitdrukkingen nog eens naar voren:

- $\frac{2}{3}$ is een symbool
- $\frac{2}{3}$ betekent 2 gedeeld door 3 (2:3)
- $\frac{2}{3}$ betekent het derde deel van 2 ($\frac{1}{3}$ x 2)
- $\frac{2}{3}$ betekent twee derden (2 x $\frac{1}{3}$)
- $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$
- $\frac{1}{4} = 0{,}25$
- $\frac{2}{3}$ is een rationaal getal
- bereken $\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$
- $\frac{2}{3} = \{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \ldots\}$

Laten we, dit gekonstateerd hebbend, het woord breuk nu in al z'n natuurlijkheid (en diffuusheid) gebruiken.

2 HOOFDLIJNEN

Bekijken we de plaats, die breuken in het onderwijs ingenomen hebben in de loop van de geschiedenis, dan valt het volgende op:

▶ Er is een voortdurende strijd geweest om de *voorrang in het onderwijs* tussen decimale en gewone breuken.

En niet alleen om de voorrang, maar ook om het *alleenrecht*. Ter illustratie enkele stemmen uit het begin van de vorige eeuw (!):

- 'Inderdaad, naar mijn bescheiden mening zijn gewone breuken onbelangrijk. . .'
- 'Het voordeel van breuken is zo groot, dat ik durf te bevestigen, dat iemand die er goed mee bekend is, in vele gevallen vier of vijf keer zo snel rekent.'
- 'Het is evident, dat het optellen van decimale breuken direkt kan geschieden na het optellen van gehele getallen. Gewone breuken zijn moeilijker en minder waardevol.'

Op dit moment worden gewone breuken in het algemeen eerder behandeld dan decimale breuken. Het is echter evenzeer waar, dat er vooral vanaf 1950 vele stemmen klinken, die pleiten voor een vroegere behandeling van decimale breuken.

▶ Hoewel er vanaf het begin van deze eeuw zowel van de zijde van de onderwijsresearch als van het voortgezet en hoger onderwijs incidenteel aangedrongen is op een verschuiving van het opereren met gewone breuken naar de hoogste klas van de basisschool c.q. eerste klas van het voortgezet onderwijs, bleven de breuken op de basisschool gehandhaafd. Er zijn echter wel degelijk belangrijke wijzigingen.

- Ingewikkelde breuken zijn langzamerhand uitgeroeid. Het motief van de formele vorming – oefening van de koncentratie, sterking van de wil – en het argument van de rekenvaardigheid zijn steeds meer hun kracht gaan verliezen.
- Er is een verschuiving te konstateren van de introduktie van bewerkingen met breuken naar de hogere klassen (van klas 3 naar klas 5).
- Het delen van breuken wordt nog juist tot de basisschoolstof gerekend; de metode van 'vermenigvuldigen met het omgekeerde' is favoriet boven de metode van 'het gelijknamig maken', die vroeger opgeld deed.
- Er is een duidelijke tendens om het werken met breuken minder formalistisch en meer inzichtelijk te maken: het gebruik van konkreet materiaal is toegenomen. In moderne wiskunde-programma's wordt dit gebruik nog uitgebreid met het spijkerbord, het stadsplan, machientjes, schalen en materiaal voor kansrekening.

In het volgende gedeelte gaan we deze hoofdlijnen wat nader uitwerken.

3 BREUKEN IN HET BEDRIJFSLEVEN

Guy Wilson onderzocht de mate waarin de verschillende stambreuken voorkomen in het bedrijfsleven (hotelwezen, bankwezen, e.d.). Stellen we het totaal van het aantal voorkomende stambreuken op 100% dan ziet de lijst er als volgt uit:

$\frac{1}{2}$	komt voor	31%	$\frac{1}{12}$	komt voor	1%
$\frac{1}{3}$	komt voor	1%	$\frac{1}{16}$	komt voor	1%
$\frac{1}{4}$	komt voor	36%	$\frac{1}{32}$	komt voor	9%
$\frac{1}{8}$	komt voor	20%			

Wilson, die het onderzoek in 1950 uitvoerde in Boston, trok uit deze cijfers de konklusie, dat er op de school nog teveel tijd verprutst werd met *ongebruikelijke breuken.*
Zeker is, dat dergelijke onderzoeken bijgedragen hebben tot een besnoeiing van het rekenen met breuken op de basisschool. Maar zoals gezegd, speelde naast de overweging van het praktisch nut ook het verdwijnen van het argument van de vormende waarde een belangrijke rol bij de korting.

4 BREUKEN OP SCHOOL

4.0 Twee belangrijke richtingen

Met de besnoeiing van de breuken ging een verschuiving van de introduktie der breuken gepaard van de middenklassen naar de hoogste klassen van de basisschool. Tevens was er een toenemende tendens om de bewerkingen met breuken minder formalistisch te behandelen: de *algoritmische behandeling* ging plaats maken voor een meer konkreet inzichtelijke behandeling. Het pannekoekmodel, de chocoladereep, de getallenrechte, de papierstrook en het roosterpapier zijn de meest bekende hulpmiddelen.
De resultaten van het breukenonderwijs bleven echter zorgwekkend en de pleiters voor decimale breuken bleven hun stem verheffen.
Op dit moment zijn er twee belangrijke richtingen in het onderwijs:

De *decimale richting*, die bewerkingen met gewone breuken van de basisschool wil verdringen naar het algebra-onderwijs bij het v.o. Zoals we reeds gekonstateerd hebben is deze beweging reeds enkele honderden jaren aan de gang.
Met de invoering van moderne wiskunde op de basisschool, die een kontinue vertikale planning realiseert, lijkt de aanhang steeds meer gewicht te krijgen. De bewerkingen met decimale breuken worden door deze groep wèl voor de basisschool aanbevolen als zijnde een natuurlijke voortzetting van operaties met gehele getallen.
De argumenten pro-decimale breuken zijn:

- Het positiesysteem wordt door de decimale breuken opnieuw aan de orde gesteld en natuurlijk uitgebreid.
- De schrijfwijze sluit aan bij het alledaagse gebruik.

- Er zijn geen nieuwe regels voor de bewerkingen met decimale breuken in vergelijking met operaties met natuurlijke of gehele getallen. Slechts bij het vermenigvuldigen en delen van decimale breuken is een kleine aanvulling noodzakelijk, terwijl bij gewone breuken de schrijfwijze en de bewerkingsregels grote moeilijkheden opleveren door hun afwijkend karakter met de voorafgaande leerstof.

De *vertikale richting*, die het voornamelijk gaat om een vertikale planning van de breuken (decimaal en gewoon) en daarbij een intuitieve en konkrete basis wil leggen voor de algoritmen. Men propageert inzichtelijkheid op verschillende nivo's. De *traditionele* groep zag de vertikale opbouw vooral in de richting van konkreet naar abstrakt, van pannekoek naar algoritme. Men had daarbij grote aandacht voor de verschillende nivo's van taal en teken. De voorbereidende konkrete periode duurde relatief kort: minimaal enkele dagen, maksimaal enkele maanden.
De *moderne* groep van de vertikale richting heeft daarentegen een lange voorbereidende periode van enkele jaren en heeft tevens een nieuw breukbegrip geïntroduceerd, nl. *de breuk als operator.*

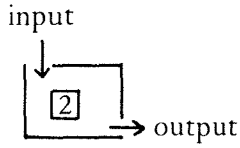
De opbouw ziet er als volgt uit:

- In klas 3 werken met machientjes (de breuk als operator) voor vergroten en verkleinen. In feite betekent dit het werken met breuken in verbinding met gehele getallen met een aangepast symboolgebruik.
- In klas 3 en 4: samenstellen van machientjes. Dit betekent het vermenigvuldigen en vereenvoudigen van breuken.
- In klas 4 en 5: samenstellen van machientjes, i.c. vermenigvuldigen en delen van breuken.
- In klas 5 en 6: invoering van de gewone symbolen. Overgang naar optellen en aftrekken van breuken. Gebruikmaken van de bekende modellen: pannekoek, chocoladereep, getallenrechte, papierstrips e.d.[1])
- Vanaf klas 6: formalisering van de bewerkingen: optellen en aftrekking d.m.v. gelijknamig maken; delen d.m.v. gelijknamig maken (en later met de metode van 'vermenigvuldigen met het omgekeerde').
- Bij het maken van vraagstukken worden de symbolen $> < \neq$ gehanteerd; er wordt gebruik gemaakt van frames en tevens worden zinvolle toepassingen gegeven in verband met oppervlakteberekening en kansrekening.[2])

Uit het voorgaande is 't duidelijk, dat de decimale en de (moderne) vertikale richting elkaar niet hoeven uit te sluiten. Integratie van beide stromingen leidt tot een onderwijs, dat naast de voorafgaande aspekten tevens de nadruk legt op eèn gelijktijdige behandeling van decimale en gewone breuken. Wellicht zal deze werkwijze in de toekomst het meeste toegepast gaan worden in het onderwijs.
In de volgende paragrafen zullen we enkele van de genoemde aspekten wat nader toelichten.

4.1 Breuken als machientjes*)

In het heroriënteringsblok 'In Orde' hebben we reeds gewerkt met machientjes; we volstaan daarom met enkele opmerkingen.
Lijnstukjes worden in machientjes gestopt:

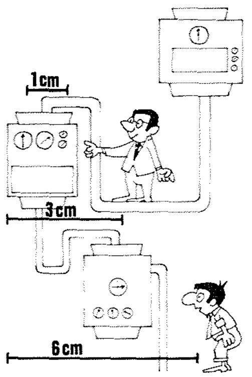


De 2- machine vergroot 2x de ingeworpen lijnstukken.
De $\overline{2}$ machine verkleint 2x de ingeworpen lijnstukken.
De machine bewerkt de ingeworpen lijnstukken. We kunnen ook zeggen de breuk(machine) bewerkt de gehele getallen. Er worden in de eerste fase verschillende oefeningen gegeven.

input	machine	output
4	..	2
2	3	..
..	2	4

In de tweede fase worden verschillende machientjes geschakeld en vervangen door andere (hoewel niet direkt in onderstaande symbo-

*) In aflevering 5 van het Bulletin zullen we uitgebreider op deze benaderingswijze ingaan.



lische vorm!) De nadruk komt op de machientjes te liggen: de breuken worden nu op zich beschouwd.

$3.2 = 6$
$5.\overline{2} = \overline{2}.5$ (wordt later $\frac{5}{2}$)
$\overline{4}.\overline{5} = \overline{20}$ (wordt later $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$
$3.\overline{4}.5.\overline{6} = 3.5.\overline{4.6} = 15.\overline{24}$ ($\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{24}$)

Eveneens worden in deze fase de samengestelde machientjes in verbinding gebracht met de gehele getallen.
In een volgende fase krijgt $\frac{3}{4}$ de volgende betekenis:

het bestaat uit een 'vergroot-gedeelte' 3 en een 'verklein-gedeelte' $\overline{4}$ en deze treden dan vervangend op voor de termen teller en noemer

$2.\overline{2} = 1 = \overline{1}$
$2.\overline{3}.5.\overline{5} = 2.\overline{3}$ ($\frac{2}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{2}{3}$)
$2.\overline{3}.4.\overline{2} = 4.\overline{3}$ ($\frac{2}{3} \times \frac{4}{2} = \frac{4}{3}$)
$2.\overline{3} = 2.\overline{5}.5.\overline{3} = 10.\overline{15}$ ($\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$)
$8.\overline{4} = 2.4.\overline{4} = 2$ ($\frac{8}{4} = 2$)

De oefeningen, die hier in symbolische vorm neergeschreven staan, nemen een langdurige periode in beslag op de basisschool en worden daar veel konkreter behandeld. De werkzaamheden zijn bedoeld als voorbereiding op de behandeling van gewone breuken.[3])
Merk nogmaals op, dat breuken iets bewerken. Bij deze introduktie gaat men dus niet uit van een soort pannekoekmodel en evenmin van een algoritme (rekenregel).

4.2 't Delen van breuken

Er zijn drie metoden voor het delen van breuken:
4.2.1 delen door 't gelijknamig maken van de breuken

$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} : \frac{2}{4} = (\frac{3:2}{4:4} = \frac{3:2}{1} =) \frac{3}{2}$;

4.2.2 delen als 'vermenigvuldigen met het omgekeerde'

$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ (zonder 'schrappen')

$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = {}_{2}\frac{3}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{2}^{1}}{1} = \frac{3}{2}$ (met 'schrappen');

4.2.3 delen met behulp van een gekompliceerde breuk

$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{4} \times \frac{2}{1}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{1}} = \dfrac{\frac{6}{4}}{1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ (of met 'schrappen').

Wil men inzichtelijk werken, dan is 4.2.1 te preferen; bij een meer mechanische behandeling heeft men voorkeur voor 4.2.2.
Uit onderzoek blijkt, dat metode 4.2.2 superieur is als men louter naar het resultaat kijkt; tevens blijkt, dat het vermenigvuldigen van breuken dan betere prestaties oplevert.
Ook blijkt uit tal van onderzoeken, dat slechts een klein gedeelte van de basisschoolleerlingen metode 4.2.1 kan verklaren. Deze kleine groep vergeet echter minder snel de algoritme. Metode 4.2.2 heeft verreweg de meeste toepassing gevonden in de traditionele schoolboekjes. Op dit mpment komen de werkwijzen 4.2.1 en 4.2.3 weer wat meer in de belangstelling.[4])

5 SAMENVATTING

5.1 De vulling van het breukbegrip heeft de volgende aksenten gekregen:
1880-1920: Breuk als 'n rationaal getal, met bepaalde welomschreven eigenschappen. Rekenen met breuken geschiedt formalistisch.
1920-1965: Aanvankelijk wordt 'n breuk opgevat als een deel-geheel betrekking en de verschillende bewerkingen zijn dan gerelateerd aan een fysische eenheid. Op basis van inzicht in deze konkrete handelingen gaat men op weg naar een zeer formele benadering.
Vanaf 1965: De breuk wordt ook wel geïntroduceerd als 'n operator, d.w.z. een samengesteld machientje — bestaande uit een vergroot-gedeelte (bv. 2) en een verklein-gedeelte (bv.$\overline{3}$) — bewerkt gehele getallen.
$2.\overline{3}$ wordt dan later geïnterpreteerd als $\frac{2}{3}$.
Aanvankelijk wordt gewerkt met machientjes, in verbinding met gehele getallen en vervolgens worden de machientjes

op zichzelf bekeken en 'geschakeld', 'vereenvoudigd' e.d.
Vertikaal gepland gaat men vervolgens terug naar de vorige werkwijzen; breuk als een deel-geheel aanduiding en breuk als een rationaal getal. In de kansrekening krijgt het werken met breuken een nieuw toepassingsgebied. Deze nieuwe aanzet tot behandeling van breuken heeft nog geen grote ingang gevonden. Naast de twee traditionele uitersten is er nog een groep, die uitstel wenst tot het voortgezet onderwijs. Deze tijdschriftbijdrage dient mede, om de diskussie voort te zetten en tot een standpuntbepaling te komen.

5.2 In de genoemde perioden wordt de leerstof allengs besnoeid en de introduktie uitgesteld, hoewel er thans ook pleiters zijn voor vervroeging.

5.3 De strijd tussen de decimale en gewone breuken om voorrang en alleenrecht in het onderwijs duurt nog voort en is onbeslist.

5.4 In het bedrijfsleven wordt vrijwel uitsluitend gebruik gemaakt van de volgende stambreuken:

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{32}, \tfrac{1}{12}$$ 5)

Noten

1) Zie voor enkele lessen:
- *The Arithmetic Teacher 4 (250) d.w.z. jaargang 4 blz. 250,*
- *The Arithmetic Teacher 7 (370),*
- *The Arithmetic Teacher 15 (221, 224, 241 en 271).*

2) Zie voor frames:
H.O.O. blok 6 'Open beweringen'.
Zie voor kansrekening en breuken:
- *Activités Recherches Pedagoques 3 (22)*
- *Euclides 47 (250)*

3) Zie bv.:
- *The Arithmetic Teacher 13 (647)*
- *The Arithmetic Teacher 15 (228)*

4) Zie voor research over breuken:
- *Glennon en Gallahan:*
  Elementary School Mathematics
  A guide to current Research (Washington 1968).
- *Suydam: Eric Reports. Project no. 8-0586.*

5) Een afsluitende literatuurlijst:
- *Proeve van een leerplan voor het basisonderwijs B-Rekenen. (Nutsseminarium, Groningen 1968[2]).*
- *Van Gelder: Grondslagen van de rekendidaktiek (Groningen, 1964[3]).*
- *Woestenenk: Rekendidaktiek (Zwolle, 1965).*

In de benadering van Woestenenk komt het idee van de breuk als operator weliswaar niet ekspliciet naar voren, maar toch gaat zijn benaderingswijze reeds enigszins in die richting: Wij citeren:

'De breuken hebben voorlopig alleen betekenis in de verbinding met gehele getallen' (pag. 41).

In machine-taal zouden wij zeggen: het gaat aanvankelijk alleen om de getallen, die door de machientjes gaan.

In het algemeen kunnen we echter zeggen, dat de benadering van de breuk als operator – nog – geen invloed gehad heeft op de schoolboeken in Nederland.

- *A.T.*)4 (250); 7 (370); 15 (221 en 224). – Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van breuken, getallenrechte, strips, spijkerbord.*
- *A.T. 15 (271) – Ordenen van breuken op het stadsplan(rooster).*
- *A.T. 3 ((201); 7(184); 9 (118); 13 (644) – Decimale en gewone breuken.*
- *A.T. 7 (28 en 133); 9 (10 en 122) – Delen van breuken.*
- *A.T. 3 (222); 8 (234) – Vertikale planning.*
- *A.T. 7 (389); 8 (234), 15 (218 en 228) – Breuken in het algemeen.*

*) A.T. staat voor 'The Arithmetic Teacher'.

3.9 FRONTALE AANVAL

EEN LEERGANG VOOR BREUKEN *

JAN NIELAND

1 INLEIDING

In dit artikel stel ik een nieuwe leergang voor in het gebied van de breuken. De huidige leergang doet het m.i. niet best en maakt belangrijke fouten. De fouten liggen gedeeltelijk in het vlak van de rekenteorie, waarop alle traditionele metodes steunen, maar ook dacht ik in de gebruikelijke aanpak.

Dit is een frontale aanval en het zal de kritische lezer wel op scherp zetten. Dat lijkt me niet alleen maar gezond: ten behoeve van de kinderen is het zelfs gewenst, dat uit kritiek en tegenkritiek het beste tevoorschijn komt, wat wij hen kunnen aanbieden.

In dit artikel komen eerst de gesignaleerde fouten van de traditionele leergang aan de orde, dan het voorstel voor een nieuwe leergang en tenslotte een verantwoording voor de gekozen leergang: zowel didaktisch als wiskundig.

* * *

2 FOUTEN IN DE TRADITIONELE LEERGANGEN

De oude rekenteorie geeft van bv. $\frac{1}{2}$ de volgende definitie: 'onder $\frac{1}{2}$ verstaan we het getal, dat met 2 vermenigvuldigd, 1 oplevert'. De huidige metodiek haakt daarop in door bv. te beginnen met een gehalveerde pannekoek; beide helften $\frac{1}{2}$ te noemen en te zeggen: zie je wel, een halve en nog een halve is een hele; $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (wat uiteindelijk neerkomt op tweemaal $\frac{1}{2}$ is 1 of $2 \times \frac{1}{2} = 1$).

De definitie is m.i. echter fout. De bedoeling van deze definitie is immers om iemand, die niet weet wat $\frac{1}{2}$ is, nu eens precies te vertellen, wat dat begrip $\frac{1}{2}$ inhoudt.

En jij antwoordt: het is een getal; vermenigvuldig het met 2 en er komt 1 uit.

Hij weer: maar hoe kan ik het nu met 2 vermenigvuldigen als ik niet weet wat het is? ; je zegt wel dat het een getal is, maar dat is voor mij niet genoeg om te kunnen vermenigvuldigen; om van jou te kunnen achterhalen wat $\frac{1}{2}$ is, moet ik eigenlijk al *weten* wat $\frac{1}{2}$ is. Deze kritiek lijkt me terecht gegeven. De definitie gaat dus mank aan een vicieuze cirkel (in het definieren).

De oude metodiek-didaktiek kan dus evenmin korrekt zijn want ze steunt op deze definitie. Hier wordt dacht ik trouwens weer een nieuwe fout gemaakt. Men probeert aanschouwelijk te zijn en zoekt dus in de didaktische keuken naar een smakelijk aanschouwelijk recept. Een cirkel doet zich aan ons voor als een in psychologisch opzicht innerlijke eenheid, die verdeeld kan worden. De keuken doet de rest en presenteert pannekoeken op het bord.

De ellende is nu dat je grote spekpannekoeken hebt, maar ook luchtig gebakken kleinere – en om dat kleine gaat het hier – flensjes. Dat groot en klein bederft nu de hele maaltijd, want een halve grote is groter dan een halve kleine.

Nu is daar wel iets aan te doen. Het voorstel om eenheidspannekoeken te bakken lijkt aantrekkelijk, maar doet het niet: dan heb je ook eenheidsbreukenstokken, eenheidsdropveters, eenheidsrechthoeken, enz. nodig. Nee, wat het beter doet is het volgende:

zodra er een pannekoek of dropveter op het bord verschijnt, *noem* je dat ding 1. De helft wordt nu $\frac{1}{2}$.

Op zich genomen lijkt me dat goed. Alleen is dat geen oplossing voor onze situatie. We willen de kinderen immers duidelijk maken wat $\frac{1}{2}$ is, grijpen naar pannekoeken, nemen

* Het laatste gedeelte van dit artikel vraagt enige wiskundige voorkennis van de lezer. Het is ter onderscheiding in een kleiner korps en kursief gezet.

aan dat ze 1 zijn en komen dan tot $\frac{1}{2}$. Voor kinderen is $\frac{1}{2}$ in deze uitleg de helft van een aangenomen eenheid, zodat ze nog steeds niet in aanraking komen met de breuk $\frac{1}{2}$.

Anders gezegd: om uit te kunnen leggen wat een breuk is, neemt de traditionele metodiek-didaktiek haar toevlucht tot de toegepaste breukrekening, tot een *breukenmodel.* Mag dat dan niet?
Nee, niet in een situatie waarin we het begrip aan moeten brengen.

De huidige leergang doet het m.i. niet best. Dat zit hem niet in de onderwijzers en onderwijzeressen. Ze werken er verwoed op, juist omdat het onderwerp zo moeilijk is.
Een aantal jaren geleden hebben wij aan onze kweekschool een steekproef afgenomen over het gebruik van de omkeerregel bij mensen van allerlei slag: een dokter, een politiekommissaris, een loketbeambte, een fietsenmaker, een ingenieur, een Onze-Lieve-Heersbeestje (zo noemden we een zwerver), enz. Alleen de ingenieur kwam er uit door de getallen eerst decimaal te maken en een rekenliniaal te pakken. Sommigen wisten nog iets van omkeren, anderen bekenden eerlijk dat ze alles kwijt waren. Geen van hen had een idee van de grootte van het antwoord, uitgezonderd de ingenieur.

Een groot percentage toelatingskandidaten voor de P.A. werkt in de volgende stijl (let ook op het stille venijn in deze sommen):

$\frac{56}{7} : 8 = \frac{56}{7} : \frac{8}{1} = \frac{56}{7} \times \frac{1}{8} = \frac{7}{7} \times \frac{1}{1} = \frac{7 \times 1}{7 \times 1} = 1$

i.p.v. $8 : 8 = 1$

$\frac{3}{6} + \frac{2}{8} = \frac{12}{24} + \frac{6}{24} = \frac{18}{24} = \frac{9}{12}$ (stop) i.p.v.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ enz.

$2\frac{2}{8} - 1\frac{1}{4} = \frac{18}{8} - \frac{5}{4} = \frac{18}{8} - \frac{10}{8} = \frac{8}{8} = 1$

i.p.v. $1\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1$

$12\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4} = \frac{25}{2} : \frac{5}{4} = \frac{25}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{5}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{10}{1} = 10.$

Hoe ze een som als $(4\frac{6}{7} + 4\frac{6}{7}) : (4\frac{6}{7} + 4\frac{6}{7} + 4\frac{6}{7})$ nu maken, zal wel duidelijk zijn.

Nogmaals dit is geen verwijt aan het onderwijzend personeel van de basisschool.
Men heeft op school van de nood een deugd gemaakt en traint de kinderen om een gemengd getal onmiddellijk om te zetten in een 'teller-noemer-getal', want dan zijn ze op alle bewerkingen voorbereid: bij optellen en aftrekken moet je alleen nog gelijknamig maken, bij het vermenigvuldigen neem je teller maal teller en noemer maal noemer (een analoge regel van optellen en aftrekken kun je alleen maar verbieden), bij het delen keer je om (en verbied je om het eerste getal of om beide getallen om te keren).
Er wordt weinig of niet op inzicht aangestuurd en dat kan ook niet, dacht ik, want er is geen gezonde fundering. Een kind dat van $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ maakt: $\frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, voelt wel dat het fout is, maar ziet niet het waarom.
Een student, die voor de klas van $\frac{4}{15} : \frac{2}{3}$ maakte $\frac{4:2}{15:3} = \frac{2}{5}$ werd door zijn begeleider wat laatdunkend op de vingers getikt, totdat de man plotseling zijn mond hield.

De eerste oorzaak van dit alles ligt m.i. in de verouderde rekenteorie, waarop alle traditionele metodes nog gebouwd zijn. Als tweede oorzaak zou ik hier niet de veelgehoorde klacht willen noemen, dat het intellekt uit de basisschool weggezogen wordt, want ik zie het verband niet goed.
Wel is er nog steeds een kloof, lijkt me, tussen wetenschap en didaktiek, of liever tussen didaktiek en wetenschappelijke topmensen, want het gaat m.i. meer om het ekspliciteren van diep inzicht en rijke intuities dan om een verstrengeling van kennisgebieden.*)

* * *

3 EEN NIEUWE LEERGANG

Er is niet aan te ontkomen. Er moet ook nu weer steun gezocht worden in een teorie. Daarbij kan men een keuze doen, want er zijn meerdere min of meer bevredigende teorieën. En als je dan kunt kiezen, dan kies je natuurlijk de teorie waarvan je verwacht dat hij bij de kinderen aan zal slaan. De hier gekozen teorie gaat uit van de volgende twee punten:
1 We scheppen of maken of eisen breuken;

* Ik voel me op mijn eentje dan ook helemaal niet happy, maar ben toch ook niet bang om de brandklok te luiden en om straks zelfs klemgereden te worden door eksperts.

omdat we ze nodig hebben en omdat we aanvoelen dat ze er zijn.
2 Deze nieuwe breukgetallen luisteren naar dezelfde wetten of rekenregels als de natuurlijke getallen.*)

De leergang ziet er nu in grote lijnen als volgt uit:
In *klas 1 en 2* wordt ruime aandacht geschonken aan verdeelproblemen zonder en met rest. Vooral ook meetproblemen moeten grondig aan de orde gesteld worden. In klas 1 ligt de nadruk weliswaar op subjektieve eenheden (zoveel stappen breed, een spanwijdte lang, enz.), maar in de tweede klas komen meetoefeningen met van te voren niet uitgezochte meetprojekten, zodat antwoorden als 'ruim 4' of 'bijna 5' tevoorschijn komen.
Tenslotte is het belangrijk om de getallenrechte als voorstelling en als leermiddel te introduceren.
De bedoeling van dit alles is duidelijk: we laten de kinderen intuitief aanvoelen dat er getallen zijn 'tussen' de gewone getallen; als het even kan (in klas 2 en 3 vooral) laten we aanvoelen, dat 'ruim 4' en nog eens 'ruim 4' iets is in de buurt van 8 (tussen 8 en 10); dat tweemaal 'bijna 5' zoiets is als 'bijna 10' (maar niet zo 'bijna' als bij 5). Daarmee spelen we in op de twee teoretische punten, die ik hierboven noemde.

In *klas 3* kunnen de kinderen op een meer gezette manier kennis maken met de breuken en hun namen. In afwijking van de traditionele aanpak stel ik voor om hier de behandeling zoveel mogelijk te beperken tot het breukbegrip en dus niet te praten over bewerkingen. De kinderen moeten $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$ enz. eerst leren kennen als namen van dingen. Wanneer de bewerkingen te vroeg komen, moet er ook te vroeg gemanipuleerd worden met deze namen en als ze niet voldoende vastzitten in de kinderhoofdjes dan krijg je gemakkelijk allerlei vreemde fouten. Mogelijke oefeningen zijn:

* Konkreet: 4 kinderen verdelen 5 appels; elk krijgt er 1 en de overblijvende appel wordt opgedeeld; 1 plus nog 1 met zijn vieren; $1 + \frac{1}{4}$.
  Onmiddellijk daarop volgend komt het abstrakte: $5 : 4 = 1 + \frac{1}{4}$.
  En daarop volgt weer een uitbeelding op de getallenrechte: $1 + \frac{1}{4}$ ligt *ergens* tussen 1 en 2.
* Oefeningen waarin de plaats van de breuken op de getallenrechte zo *nauwkeurig* mogelijk aangegeven wordt.
* Uitlokken, dat $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{4}$ op dezelfde plaats komen tussen 1 en 2 (namen zijn van hetzelfde getal).
* Laten ontdekken, hoe je zó kunt zien dat $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ enz. namen zijn van hetzelfde getal.
* Gebruik van de decimale notatie en ontdekking dat $1 + \frac{1}{2}$ of $1\frac{1}{2}$ hetzelfde is als 1,5 (op de lat tussen 1 en 2 tot het vijfde streepje en een komma er tussen, anders krijg je 15).

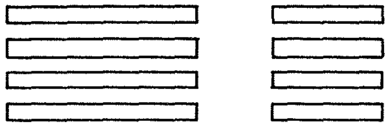
Er zijn hier veel meer van deze oefeningen met allerlei varianten; ik geef hier alleen een beeld en nog wel een onvolledig beeld van de gang van zaken. In de tweede en derde klas moet er ook nog iets anders gebeuren. De kinderen moeten op een praktische wijze de eigenschappen of wetten leren kennen voor de gewone getallen om ze straks (in klas 4) als gereedschap te gebruiken bij het uitvoeren van bewerkingen.**)

Ik noem hier de wet a : b = (p x a) : (p x b), die voor de kinderen als volgt behandeld kan worden:
64 : 32 =
32 : 16 =
16 : 8 =
8 : 4 =
Maak dit rijtje! Hoe komt het dat je iedere keer hetzelfde krijgt? Ze zullen in het begin andere antwoorden geven dan wij verwachten, zoals het jongetje dat mij eens slim aankeek en zei: 'Maar dat heeft u er om gedaan!'
Dat geeft niet, het is zelfs goed, want nu weten we waar we moeten starten als we hen sturen of begeleiden naar: je mag beide getallen door hetzelfde getal delen; je mag ze met hetzelfde getal vermenigvuldigen, want er komt toch steeds hetzelfde uit.
Er zijn allerlei varianten op deze kernoefening denkbaar waaronder de nu volgende uitdaging niet de minste is:
als je een voorbeeld vindt, waarbij het (de regel!) niet goed is, dan mag je meteen over naar de vierde klas.

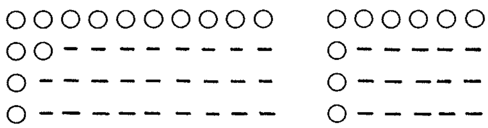
* Even voor de wiskundige georiënteerde lezer: 1 doelt op een eksistentiepostulaat en 2 op de opname van dat postulaat in het aksiomastelsel voor de natuurlijke of de hele getallen.

** Zie het tweede teoretische uitgangspunt.

Deze oefeningen kunnen gekonkretiseerd worden met leermiddelen (Cuisenaire, Colour Factor, M.A.B. enz.) en aan de hand van puntenvelden:
zo voor $4 \times (10 + 6) = (4 \times 10) + (4 \times 6)$:



of:



Men leest als volgt van links naar rechts: 10 en 6, 10 en 6, 10 en 6, 10 en 6, dus: $4 \times (10 + 6)$.
Van boven naar beneden gaat het als volgt: 10, 10, 10, 10 of 4×10 en 6, 6, 6, 6 of 4×6. Dus $4 \times (10 + 6)$ is evenveel als 4×10 en nog 4×6.

Langs deze wegen leren de kinderen de volgende (belangrijkste) wetten:
$a : b = (p \times a) : (p \times b)$
$c \times (a + b) = (c \times a) + (c \times b)$
$b \times a = (p \times b) \times (a : p)$
$(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$.
Zo wordt dus didaktisch voor de tweede maal de richting ingeslagen van het tweede teoretische uitgangspunt: voor breuken gelden dezelfde wetten als voor natuurlijke getallen.

Het voorbereidende werk voor het uitvoeren van bewerkingen is nu gedaan.
In *klas 4, 5 en 6* kan men uitgaan van de gedachte, dat het breukbegrip aanwezig is. Bovendien is het gereedschap verzameld (en ook al praktisch gebruikt in hoofdrekensommen of liever eigenschapssommen), en kan nu gehanteerd worden bij de nieuwe getallen en hun bewerkingen. Het levert nu geen bezwaren meer op om breukencirkels, enz. te gebruiken, mits men maar telkens duidelijk aangeeft, wat de aangenomen eenheid is (door bv. in cirkel of rechthoek een 1 te laten schrijven).
Ik noem tot slot nog enkele punten, waarop men m.i. anders kan handelen dan in de traditionele uitwerking:

- Het is zinvol om bij de bewerkingen met $\frac{1}{2}$ als centraal gegeven ook en meteen aftrekkingen, vermenigvuldigen en delingen met $\frac{1}{2}$ aan de orde te stellen.
Het lijkt me ook zinvol om bij de behandeling van $\frac{1}{4}$ koncentrisch te werk te gaan door de voorafgegane tematiek rond $\frac{1}{2}$ in de behandeling op te nemen.
- Vanaf klas 3 moet het de kinderen duidelijk zijn dat $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, enz. namen zijn voor hetzelfde getal. Men plukt daarvan de vruchten bij opgaven als $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, enz.
- De omkeerregel, die haast niemand doorziet, kan vervangen worden door een ingeoefende wet.
Zo is $\frac{1}{2} : 4 = (2 \times \frac{1}{2}) : (2 \times 4)$,
of $\frac{1}{2} : 4 = 1 : 8$.
Het kan ook zo: de kinderen weten dat $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, enz. namen zijn voor hetzelfde getal, zodat ze als volgt kunnen rekenen:
$\frac{1}{2} : 4 = \frac{4}{8} : 4 = \frac{1}{8}$.
Een ander voorbeeld is $1\frac{3}{5} : 4$ dat nu niet meer als volgt gaat:
$\frac{8}{5} : 4 = \frac{8}{5} : \frac{4}{1} = \frac{8}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{8 \times 1}{5 \times 4}$, enz.,
maar zo: $1{,}6 : 4$,
of zo: $(5 \times 1\frac{3}{5}) : 20$,
of zo: $\frac{8}{5} : 4 = \frac{2}{5}$
(er zijn nu dus verschillende benaderingswijzen).
Er is geen verschil tussen gewone en tiendelige breuken vanuit de teorie, omdat er alleen sprake is van een verschillende naamgeving. (Het gaat dus om dezelfde zaken!). In het praktische rekenen is er wel verschil, omdat de cijfermetoden voor de gewone getallen het gemakkelijkst uitgebreid kunnen worden naar het namengebied van de decimale getallen. In onze kultuur wordt er decimaal gerekend en dus moet daarop ook de nadruk vallen. Op deze manier kan trouwens een onderwerp als 'meten' in de hogere klassen beter tot zijn recht komen. Het werken met gewone breuken dient dan alleen nog een zuiver breukbegrip en een zeer matige toepassing in het huishoudelijk en maatschappelijk leven.
- Veel oefenvormen op dit terrein mogen gerust zo kreatief en 'eksperimenteel' zijn dat de strakke stapjesmetodiek van weleer — en laten we het maar bekennen: tot vandaag toe — doorbroken wordt. In deze leergang trekken wij, volwassenen, alleen de hoofdlijnen, bepalen alleen de hoofdpunten. De kinderen worden in de details meer begeleid en gestimuleerd dan gestuurd langs een rijke variatie van oefenvormen.

• De regel van Meneer van Dalen staat m.i. effektief hoofdrekenen, zo belangrijk voor deze leergang, in de weg en moet m.i. verdwijnen. Het is trouwens geen rekenregel maar een meta-regel, d.w.z. geen regel over de rekenobjekten, maar een regel betreffende de taal, waarin wij de teorie verwoorden.

Ik kan mij voorstellen, dat de reakties op deze leergang uiteen zullen lopen. Een voorstander zal onmiddellijk vragen: kom op met een metode, waarin deze leergang verwerkt is. Een ander wil eerst de mening van rekendidaktici horen. En dan zullen er ook tegenstanders zijn en mensen die geen raad weten, omdat het breukenonderwerp opengebroken wordt in een manier van denken waarin zij zich niet thuis voelen.

Ik weet op deze vragen en bezwaren niet zo gauw een antwoord te geven. Wel zie ik duidelijk dat alleen een schoolteam in zijn geheel een dergelijke leergang kan invoeren en dat er een samenspel moet zijn tussen suggesties van leerkrachten vanuit hun ervaringen en hulp van buiten (buiten de school!).

En wie niet gewend is aan deze denktrant zal zich moeten realiseren dat vooral onze rekenmetodes muurvast ingekapseld zijn in strakke leergangen en dat het proces van de vernieuwing niet op gang kan komen als men zich niet bezint op leergangen in hun totaliteit.
Om maar een voorbeeld te geven: pas als wij de metriek in zijn totaliteit onder de loep nemen, zien wij dat metriek teveel vercijferd is tot eindeloze metriekrijtjes; pas als we de behandeling van geld en geldverkeer in zijn totaliteit bekijken, zien we de overmatige invloed van het koopmansrekenen uit een voorbije kultuur en de enorme hoeveelheid kapitaalsommen die voorbijgaan aan de usanties in het huidige geldverkeer. Wanneer een uitgever morgenvroeg zou aankomen met een metode, die hierop gezonde antwoorden geeft, dan zie ik gebeuren dat deze metode pas in zijn graf zal zegevieren. Vernieuwing is nu eenmaal meer dan *'schrappen'* of *'invoegen'*; vraagt ook om uitspitten, planten, geduldig wachten; om innerlijke omschakeling en om het besef dat niet iedereen zo snel meekan; om aktie vanuit de school en om konkrete handreiking van buiten; om verlevendiging, die de kiemen van het nieuwe al in zich heeft.

* * *

4 TEORIE EN TEORIE

Het verzamelingsbegrip is een gruwelijk algemeen begrip. Toch gaat het de basisschool in. Daarbij gelden allerlei overwegingen waarvan ik er enkele noem:

- generaliseren is voor ons mensen één van de moeilijkste denkaktiviteiten (Dienes);
- het is vanuit didaktisch oogpunt de moeite waard om na te gaan in hoeverre daarin hulp geboden kan worden tijdens de opleiding en vorming, door de leerstof vanuit een meer algemeen standpunt op te schotelen;
- bij dit 'nagaan' moet men rekening houden met het doel van het basisonderwijs; dat zou in dit verband kunnen luiden: inspelen op datgene wat kinderen nu en later als volwassenen nodig hebben (en wel als doorsnee-volwassenen) in onze prognose;
- bij dat 'nagaan' moet men rekening houden met vragen als: kunnen de kinderen het aan?; hoe belangrijk is dat onderwerp in vergelijking met andere ook nodige zaken?; enz.
- een meer specifieke vraag is hier: komt de algemeenheid van het verzamelingsbegrip tot zijn recht d.w.z. is er sprake van uiteenlopende zinvolle verbizonderingen? *)

Wie een dergelijke serie vragen, die nog verfijnd en uitgebreid kan worden, bevredigend weet te beantwoorden voor het verzamelingsbegrip, gaat in elk geval niet over ijs van één nacht. Het is m.i. zinvol om deze en dergelijke vragen te stellen zonder ze nu als 'toelatingseisen' te bestempelen, want een intuitieve benadering blijft ook waardevol en is vooral van belang bij de differentiatieproblematiek.
In de boven gegeven leergang spelen ook van deze achtergrondoverwegingen een rol, maar het zijn weer andere: ik noem er een aantal:

- wat rekenteoretisch fout is, kan in didaktisch opzicht nooit goed zijn (naar ik meen een stelling van Prof. Freudenthal);

* Als dat niet zo is moet je het niet doen; daarom stellen we het lichaam van de komplekse getallen of de n-dimensionale ruimte niet in de eerste klas aan de orde.

- als je kunt kiezen uit verschillende wiskundige achtergrondteorieën, moet je bij voorkeur de teorie nemen die intuitief het beste aanslaat;
- als een leerstofeenheid er moeilijk ingaat, kun je wachten tot de 'gevoelige periode', maar je kunt ook eerder beginnen (breuken in klas 1) en alles klaarmaken voor de gezette behandeling, zodat de kinderen gevoelig gemaakt worden (dit staat dicht bij een wie-niet-zaait-oogst-onkruid-opvatting);
- wat je niet kunt uit-leggen, kun je vaak nog laten aanvoelen (intuitief breukbegrip in klas 1 tot 3);
- iets fundamenteel nieuws moet je alle tijd geven (breukbegrip en breukennamen in klas 3);
- uitleggen is iets, maar laten ontdekken is ook iets (allerlei eksperimenteeroefeningen);
- in de praktijk van het leerproces horen denken en handelen bij elkaar, zonder dat je daarom voor aanhanger van Piaget uitgemaakt hoeft te worden (denken met de handen door gebruik van leermiddelen);
- een koncentrische behandeling is wel oud maar nog niet fout (behandeling van $\frac{1}{4}$);
- voor een adekwaat didaktisch handelen is enig inzicht in de teorie niet te versmaden ('verschil' tussen gewone en tiendelige breuken vanuit teoretisch oogpunt);
- we vormen niet voor de school, maar voor het leven (matige toepassing van gewone breuken);
- het leerproces is zo'n oerwoud, dat je moet oppassen met er een star wegennet aan te leggen (inbouw van eksperimentele oefenvormen);
- wat inzichtelijk kan, moet je niet met een truc doen (omkeerregel);
- men moet geen eisen of procedures opnemen, die in psychologisch opzicht met elkaar in strijd zijn (laat óf meneer van Dalen op antwoord wachten óf begin niet aan het eigenschapsrekenen);
- elk leermiddel, hoe goed ook, is éénzijdig (afwisseling van Cuisenaire of Colour Factor met M.A.B. en met puntenvelden, enz).

Dit is dan een nog maar matige didaktische verantwoording van de voorgestelde leergang, voorafgegaan door een procedure over het verzamelingsbegrip, waarvan het tema straks op de achtergrond meeklinkt.

In de moderne wiskunde zijn er meerdere wegen om het breukbegrip te funderen. Ik heb hierboven gesteund op overwegingen uit het tweede gedeelte van Tarski's 'Inleiding tot de logica'.) In zijn opbouw van het breukbegrip wordt m.i. het best aangesloten bij onze intuitieve ervaring. De lezer kan dit zelf beoordelen door na te gaan of de leergang zich goed laat lezen. Vanuit didaktisch oogpunt lijkt deze teorie mij waardevoller, dan verschillende andere teorieën.*
Een andere veel voorkomende benadering van breuken gaat uit van een ring zonder nuldelers.
Om hier wat konkreter te kunnen zijn ga ik uit van de ring $\mathbb{Z}$ van de hele getallen. De produktverzameling '$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bestaat nu uit getallenparen, zoals:
(1,1), (1,2),....., (2,1), (2,2),... enz.,
waarbij ook negatieve getallen meedoen.
Er wordt een gelijkheidsdefinitie opgesteld:
'(a,b) = (c,d) dan en dan alleen als a x d = b x c'.
Als gevolg daarvan wordt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ opgedeeld in diskunkte klassen, zogenaamde equivalentieklassen.

In één zo'n kleine klasse zitten bv. (1,2), (2,4), (3,6) enz. In ons voorbeeld wordt nu de betreffende klasse ge-identificeerd met de breuk $\frac{1}{2}$. Deze teorie, ofschoon bewonderingswaardig in zijn algemene opzet, heeft voor toepassing op breuken ook zijn nadelen dacht ik.
In de opzet van Tarski is $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ automatisch een breuk. In deze benadering echter moet men m.i. volledigheidshalve aantonen dat een nieuw gevormd element als (1,2), (3,4) gelijk staat met een element uit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Bovendien ziet de equivalentieklasse die $\frac{1}{2}$ definieert, er als volgt uit: $\frac{1}{2} \overset{\text{def.}}{=} \{ (1,2), (2,4), (3,6), \ldots \}$ Omdat volgens definitie geldt (1,2) = (2,4) = (3,6) enz., mag ik ook schrijven: $\frac{1}{2} = \{ (1,2) \}$, want van is-gelijke elementen telt er maar één, of anders gezegd: $\{ a,a \} = \{ a \}$.
Maar de zin $\frac{1}{2} = \{ (1,2) \}$ laat zich intuitief niet gemakkelijk duiden. Er komt dan zoiets als 'een half is de verzameling, die uit het geordende paar (1,2) bestaat'. Iets analoogs krijgt men door twee rechten l en m te beschouwen als puntverzamelingen en dan hun snijpunt S op te vatten als $S = l \cap m$ d.w.z.: S is de verzameling die uit het ene snijpunt van l en m bestaat, of: S is de doorsnee van l en m. Maar dan zou S de verzameling zijn die als element S bevat, wat intuitief gesproken vreemd aandoet, ofschoon er teoretisch gesproken geen kontradiktie is of hoeft te zijn.

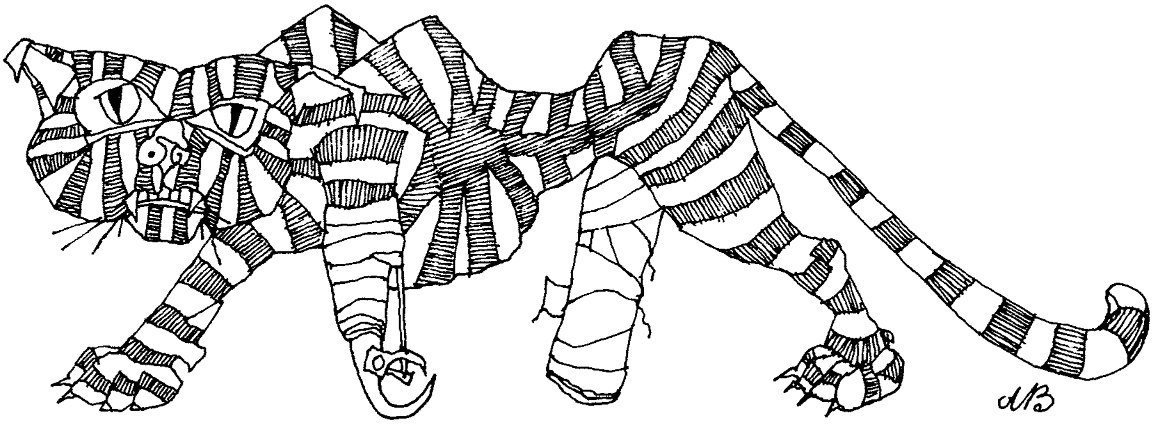
Ik kan me voorstellen, dat aan deze bezwaren tegemoet gekomen kan worden.
Ik kan me ook voorstellen, dat een verdediger van

* N.V. Noord-Hollandse Uitgevers Mij., 1953, A'dam.

deze opzet, allerlei bezwaren tegen Tarski's aanpak zou kunnen opsommen. Als dat zo is, dan zou de einduitslag van deze teoretische wedstrijd weleens 1-1 kunnen worden.
Maar zodra de wedstrijd op het veld van de didaktiek wordt gespeeld, is mijn prognose: TARSKI WINT!
En mijn motivering is, zoals gezegd: de opbouw van Tarski is didaktisch het gemakkelijkst uit te werken zoals men hierboven kan zien.
Het kompleks 'ring-quotiëntenlichaam' zegt vooral diegene iets, die aan de hand van deze begrippen verschillende uiteenliggende voorbeelden samengevat ziet onder één noemer. Dat gaat m.i. voor een kind te ver (hier klinkt het tema van de prelude even door).
Bovendien liggen 'veraanschouwelijkingen' en toepassingen zoals in de getallenrechte, bij breukencirkels enz. nu niet zo voor de hand.
Tenslotte komen in een quotiëntenlichaam orderelaties, en vereenvoudigingen van breuken, niet zonder meer onder de aandacht vanwege de algemeenheid van dat begrip. Men kan dat een voordeel vinden, maar het lijkt mij hier eerder een nadeel omdat het geordende breukenlichaam en de vereenvoudigingskwesties in onze breuken-kultuur wel degelijk een min of meer belangrijke rol spelen. Ik zie alleen brood voor het quotiëntenlichaam in het V.W.O. en met name daar, waar sprake is van een meer specifieke wiskunde-opleiding.

3.10 VROEGER OP BORNEO

'Vroeger op Borneo ben ik op tijgerjacht gegaan, met heel primitief jachtgerei. Toen ik op een zaterdag – ik herinner het me nog heel goed, omdat mijn kokkie nasi kuning had gemaakt. Dus toen ik op een zaterdagavond naar de 'soos' stapte, wist ik niet welke gevaren mij de komende nacht nog te wachten stonden. Ook al heb je veel jachtervaring, en dat had ik – al zeg ik het zelf – toch . . .'



Ieder die een oudoom over het voormalig nederlands-indië heeft horen vertellen, kent dit soort verhalen. Geweldige verhalen, maar onkontroleerbaar. Ieder jaar worden de avonturen spannender en ongeloofwaardiger. Tegenwerpingen van de toehoorders of wijzen op inkonsekwenties brengen oom niet in het nauw. Met het erbij halen van weer andere gegevens kunnen de moeilijkheden met een verbluffend gemak opgelost worden.

Wat heeft dit alles met het VARIABEL BLOK in aflevering 4 te maken? Indische verhalen kunnen we toch genoeg lezen bij Bep Vuyk en Somerset Maugham?

Wel... het is voor een verteller een buitengewoon ideale situatie wanneer niemand in staat is om het vertelde te toetsen.
Denk eens aan die oude wet uit de journalistiek:

> *Alles waarvan je gedurende de eerste drie weken de onwaarheid niet kunt aantonen, is waar.*

En zo konden de kolommen gevuld worden met gefingeerde rampen in moeilijk bereikbare gebieden.

Mogelijkheden aangeven om uitspraken te toetsen, is daarentegen een ijzeren regel in de wetenschap. Konklusies van eksperimenten moeten (in principe) door een herhaling van de eksperimenten gekontroleerd kunnen worden.

We zijn van mening dat al hetgeen in dit blok staat op z'n juistheid getoetst kán, en ook moét worden.
En dat toetsen kunt u, met of zonder CITO,

- *aan uw praktijkervaringen*
- *aan uw eerder verworven opvattingen over het onderwijs in breuken.*

En dat toetsen vragen we ook van u!
We hebben een vijftal belangrijke uitspraken uit de bijdragen gelicht en willen daarover gaarne uw meningen horen.

Het VARIABEL BLOK wil een uitnodiging zijn.
Niet tot een 'passief verteren'. Dat past niet bij 'wiskobassianen'!
Maar tot kiezend oriënteren!
Tot meedenken!
Tot meedoen!
Tot schrijven!

Wilt u in uw brief vermelden of u akkoord gaat met een eventuele publikatie ervan?

UITSPRAKEN

Uit het citaat van Prof. van der Blij (in 3.5):
'Ik zou zelfs in overweging willen geven de invoering van gewone breuken uit te stellen, bijvoorbeeld tot de brugklas'.

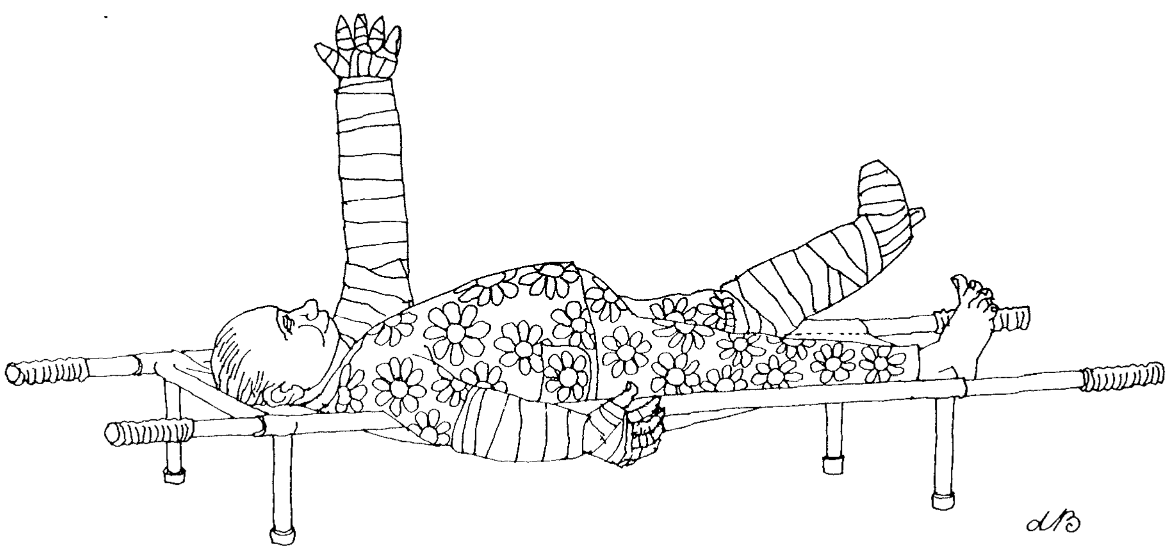
Uit de 'Historische Oriëntatie' (3.6):
'Het is opmerkelijk dat ook in onze kultuur de formalistische invoering van breuken en de formalistische rekenwijze met breuken, hetgeen wiskundig gezien zeker nuttig is, een kunst(je) is gebleven'.

Uit de 'Geografische Oriëntatie' (3.7):
'Belangrijk bij de ontwikkeling van het begrip breuk is het begrip breuk als equivalentie-klasse!'

Uit de 'Frontale aanval' (3.10):
'In klas 1 en 2 wordt ruime aandacht geschonken aan verdeelproblemen zonder en met rest. Vooral ook meetproblemen moeten grondig aan de orde gesteld worden. In klas 1 ligt de nadruk weliswaar op subjektieve eenheden (zoveel stappen breed, een spanwijdte lang, enz.), maar in de tweede klas komen meetoefeningen met van te voren niet uitgezochte meetobjekten, zodat antwoorden als 'ruim 4' of 'bijna 5' te voorschijn komen.

Uit de 'Frontale aanval' (3.10):
'In klas 3 moeten de kinderen op een meer gezette manier kennis maken met de breuken en hun namen. In afwijking van de traditionele aanpak stel ik voor om hier de behandeling zoveel mogelijk te beperken tot het breukbegrip en dus niet te praten over de bewerkingen. De kinderen moeten $\frac{1}{2}$ en $1\frac{1}{2}$ enz. eerst leren kennen als namen van dingen.'

Uit de 'Frontale aanval' (3.10):
'In klas 4, 5 en 6 kan men uitgaan van de gedachte, dat het breukbegrip aanwezig is. Bovendien is het gereedschap verzameld (en ook al praktisch gebruikt in hoofdrekensommen of liever: eigenschapssommen), en kan nu gehanteerd worden bij de nieuwe getallen en hun bewerkingen.'



lijder aan breukbegrip

INHOUD

MEDEWERKERS AAN DIT BLOK:
Deelnemers aan heroriënteringskursussen, leerlingen Mariaschool Oirschot, Henk Beeke, H. Bolt, Tineke Brinkman, Jean Crapts, Rob de Jong, Theo Hammers, Pieter Posma, J. Roggen, Kees Röthengatter, Leen Streefland, en... alle forumleden.

respons blok

3.1 INLEIDING

We horen nog wel eens zeggen: 'Jullie van Wiskobas hebben voortreffelijke uitgangspunten, maar...'
De kritiek die dan volgt richt zich nogal eens op één van die uitgangspunten, n.l. dat het te *ambitieus* is om in samenwerking met alle betrokkenen een leerplan te ontwikkelen.

*'De onderwijsgevenden zijn hier niet warm voor te krijgen.
Leerplanontwikkeling ligt te ver buiten hun gezichtskring.'*

De stapels materiaal (lessuggesties, lesverslagen, losse tips, korrekties, integratiepogingen, enz.) die de laatste weken op het instituut binnenkomen lijken deze uitspraken te logenstraffen. Het probleem voor de redaktie is niet zozeer om aan RESPONS te komen, alswel: hoe kiezen we uit de beschikbare RESPONS die voorbeelden die

- interessant zijn voor de onderwijsgevenden
- toepasbaar zijn in de schoolpraktijk
- impressief zijn m.b.t. de ontwikkelingsstrategie
- uitnodigen tot een verder gesprek.

Met deze 'zoekpunten' zijn we aan het lezen en bladeren getogen.

Het resultaat was toch nog een té omvangrijke hoeveelheid. We zijn verder gaan schiften. Allerlei overwegingen die in eerste instantie niet 'telden', zijn toen mee gaan spelen.

3.2 Het onderzoek van de heer H. Bolt nemen we op omdat het voor sommige lezers wellicht een stimulans kan betekenen om iets dergelijks ook in hun regio na te gaan.

Veel mensen in het basisonderwijs hebben een bepaald wantrouwen ten opzichte van het v.o. Zo zou het v.o. eisen stellen aan het basisschoolprogramma zonder kennis te nemen van de feitelijke situatie.

Alhoewel dit ongetwijfeld voor deze en gene school zal gelden, het Chr. Lyceum te Veenendaal stelt zich anders op.

3.3 en 3.4 Het materiaal dat na de eerste schifting overbleef, bevatte erg veel verslagen van en suggesties voor het tweede onderwerp uit de heroriënteringsserie (Grafische Verwerking). We menen dat maar weinig lezers zullen komen tot een zorgvuldige bestudering van een zevental bijdragen over hetzelfde blok – hoe goed deze verslagen verder ook zijn –.
We hebben er twee uitgekozen.
In 'Grafieken op de Klokkenberg' (3.3) vindt u lesverslagen van P.A.-studenten. Verslagen van aktiviteiten in de leerjaren 4, 5 en 6. Leerstofkeuze, ervaringen en evaluatie komen in hun verslagen duidelijk naar voren. Het zijn geen 'model'-lessen. Er staan echter wel een aantal nuttige tips in, alsmede momenten die aanleiding kunnen geven tot een verdere diskussie.

'Grafieken in Paterswolde' (3.4) geeft een verslag van een les, gegeven door een leerkracht-kursist. Een verslag dat begint met drie belangrijke vragen.

3.5 Jean Crapts is een student van de P.A. in Sittard. In zijn verslag komt een probleem aan de orde, waar ongetwijfeld meer studenten mee gekonfronteerd worden.

3.6 De bijdrage van Tineke Brinkman illustreert – evenals 3.2 – hoe RESPONS een start voor verder onderzoek kan zijn.

3.7 In Bulletin no. 1 was een enquête opgenomen. We hebben toen toegezegd dat we erop zouden terugkomen.

3.8 Tenslotte: een fragment uit een brief van de heer J. Roggen. We weten dat het in het algemeen niet netjes is, om fragmenten uit een kontekst te lichten. We hebben het echter toch gedaan omdat we van plan zijn om in een volgend Bulletin het resterende deel uit zijn brief aan de orde te stellen. Het opgenomen fragment is aanleiding om een bepaald probleem uit de *introduktie van koördinaten* nog eens helder te stellen.

De tekeningen op pag. 350 en 351 van dit Respons blok zijn gemaakt door leerlingen van de Mariaschool te Oirschot.

3.2 EEN ONDERZOEK IN VEENENDAAL

De wiskundesektie van het *Christelijk Lyceum te Veenendaal* heeft in de maand januari 1972 een onderzoek ingesteld naar het reken- en wiskunde-onderwijs op de basisscholen. De bedoeling van dit onderzoek was tweeledig.
Allereerst om de reken- en wiskunde-docenten bij het voortgezet onderwijs te informeren en vervolgens om onderling kontakt tot stand te brengen.
Eén van de mogelijke gevolgen zou kunnen zijn: een uitwisseling van gedachten bij het bepalen van een strategie betreffende het *'Wiskundebeleid'*.

Aan dit onderzoek hebben 37 basisscholen deelgenomen uit Veenendaal, Rhenen, Achterberg, Elst, Hierden, Opheusden, Kesteren, Bennekom, Overberg, Ederveen, Renswoude, Scherpenzeel, Woudenberg, Barneveld, Garderen.

De heer H. Bolt, wiskundeleraar aan bovengenoemd lyceum, heeft de resultaten van het onderzoek op een voortreffelijke wijze bijeengezet.
Wij geven u eerst enige getallen uit het verslag.

Kolom A – Nummer van de school.

Kolom B – Gebruikte metode(n):
1 De Grondslag
2 Naar Zelfstandig Rekenen
3 Naar Aanleg en Tempo
4 Ik Reken
5 Nieuw Rekenen voor het Basisonderwijs
6 Rekenen
7 Reken maar
8 Uitkomst
9 Operatoir Rekenen
10 Wiskunde voor de Basisschool

Kolom C – De waardering voor de gebruikte metode:
0 = ontevreden
1 = matig tevreden
2 = tevreden
3 = zeer tevreden

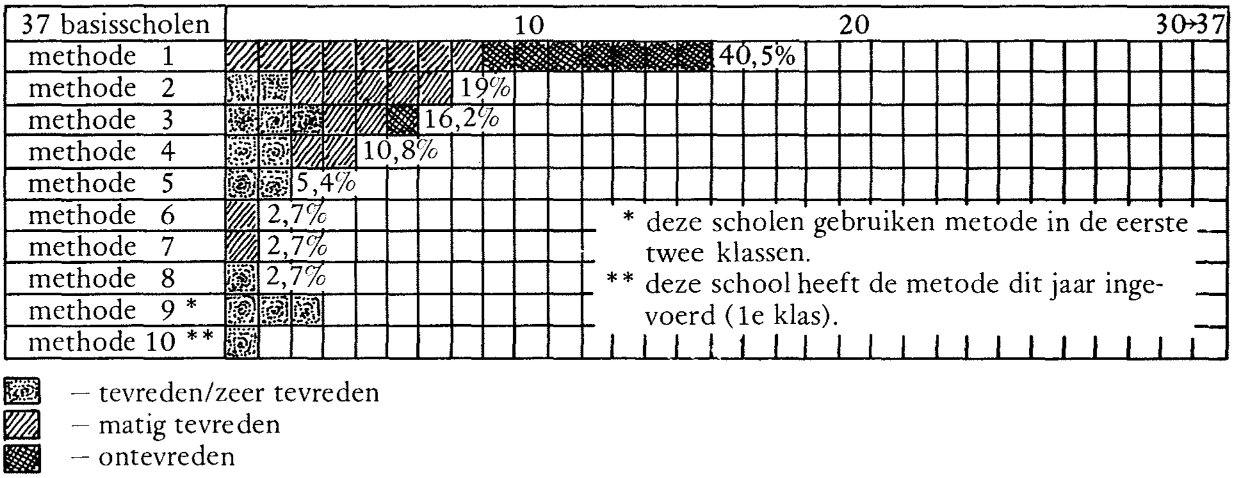
'Operatoir Rekenen' wordt door 3 scholen in de eerste twee klassen gebruikt, voorafgaand aan 'De Grondslag' (1x) en 'Naar Zelfstandig Rekenen' (2x). 'Wiskunde voor de basisschool' is dit jaar door één school ingevoerd, te beginnen in de eerste klas; in de andere leerjaren wordt 'De Grondslag' nog gebruikt.

Kolom D – Wordt er al iets aan wiskunde gedaan?
0 = nee
1 = ja (meestal 'verzamelingen').

Kolom E – Bereidheid om enkele lessen aan wiskunde te besteden?
0 = geen interesse
1 = interesse
2 = grote interesse
3 = reeds overgegaan op wiskunde.

A:	B:	C:	D:	E:
01	4	2	0	0
02	2	3	0	1
03	1	1	1	1
04	3	2	0	1
05	4	2	1	1
06	3	0	0	0
07	8	2	0	1
08	1	1	0	2
09	5	2	0	1
10	1	1	0	1
11	1	0	0	1
12	2	1	1	2
13	1	1	0	1
14	2	1	0	1
15	1	0	1	1
16	1	1	1	1
17	4	1	1	2
18	2	1	0	1
19	6	1	0	0
20	5	2	0	1
21	3	2	0	1
22	2	2	0	1
23	1	0	0	1
24	1	0	0	1
25	1	0	0	0
26	3	1	1	1
27	1	0	1	1
28	4	1	0	0
29	7	1	0	1
30	1	1	0	1
31	3	2	0	0
32	1	0	1	3
33	2	1	0	2
34	2	1	0	1
35	1	1	0	1
36	3	1	0	1
37	1	1	0	1

De gegevens uit de kolommen B en C 'grafisch verwerkt':



Ruim 75% van de scholen gebruikt naast de metode nog ander oefenmateriaal. Genoemd zijn:

Rekenblocs (Stenvert)
Cijferkunst
Fundamenteel Cijferen
Cijferen voor het B.O.
Rekenblocs (Malmberg)
Tel op en Trek af
Gauw en Goed
Schakelboeken
Rekentraining
LOCO
Rekenleesboek
Oefenboekjes
Uitgerekend
Redactievraagstukken
Dat is...
Snel hoofdrekenen
Hoofdrekenen

16% van de scholen vervaardigt zelf oefenmateriaal.

24% van de scholen behandelt (bijna uitsluitend in het zesde leerjaar) een wiskundig onderwerp (meestal 'verzamelingen').
Bijna 84% is bereid enkele wiskundelessen in te voegen, ook als de wet daartoe nog niet verplicht. Daarbij wordt in de meeste gevallen wel de beperking gemaakt: '... mits goed begeleid door WISKOBAS'.

Nog enkele reakties

– Wij zouden de wiskunde graag willen uitbreiden tot *alle* klassen van de school.
– Er zal meer informatie moeten komen; is het niet mogelijk om in het rayon Veenendaal een soort kursus hiervoor te beginnen?
– Ik werk in de zesde klas wat aan verzamelingen maar ben nog niet enthousiast.
– Inspektie en gemeente geven pas financiële medewerking voor de aanschaf van een nieuwe metode als de vorige tenminste 10 jaar is gebruikt.
– We staan voor vernieuwing graag open.
– We wachten nog op WISKOBAS! Graag regionale planning!
– We zoeken (in de wirwar), zolang de geleerden het nog steeds niet eens zijn...
– Over een aantal onderwerpen zou ik graag ideeën vernemen.
– De situatie is o.i. nog te onzeker om stappen te ondernemen ten aanzien van een andere metode of van de invoering van wiskunde. Uniformiteit is wel gewenst!

Kommentaar van de heer Bolt:
Uit het onderzoek moge dan een zeker enthousiasme blijken bij de onderwijzers, het is goed om dit 'voelen voor wiskunde' zo nuchter mogelijk te interpreteren. Gesprekken met de mensen van het basisonderwijs verraden, behalve de reeds gekonkludeerde belangstelling, ook veel tekenen van bezorgdheid. Het 'aan wiskunde willen doen' is in de meeste gevallen niet gemotiveerd door de herkenning van wiskundige waarden. Dat kan ook niet. Het is dan ook bizonder goed, dat WISKOBAS het principe aanhoudt dat heroriëntering

een onvoorwaardelijke eis is vóór het overgaan tot behandeling van wiskundige onderwerpen.

Wat ook uit het onderzoek blijkt is het vertrouwen in begeleiding en in samenwerking met het voortgezet onderwijs. De hoofden, die mijn advies vroegen omtrent de te volgen strategie, heb ik in de eerste plaats gewezen op de aktiviteiten van Wiskobas. Ik heb steeds gezegd: 'Blijf bij uw rekenmetode; die is in principe goed. Mocht u toch persé willen veranderen, neem dan kontakt op met Wiskobas!'

Wij zullen komen te leven in een aantal overgangsjaren waar we, óók in verband met de financiën, behendig doorheen moeten laveren. De scholen, die zich nu in een pas beginnende en dus eksperimenterende wiskundemetode storten, kunnen onmogelijk over twee of drie jaar de WISKOBAS-koers gaan varen. Het zou geruststellend zijn voor de schoolhoofden en hun besturen te weten, dat zij met hun niet te oude rekenmetode voorlopig goed zitten, dat zij adviezen kunnen krijgen omtrent de interpretatie van een aantal rekenonderdelen en dat zij goede begeleiding mogen verwachten bij de behandeling van een wiskunde-leergang *naast* het rekenonderwijs.

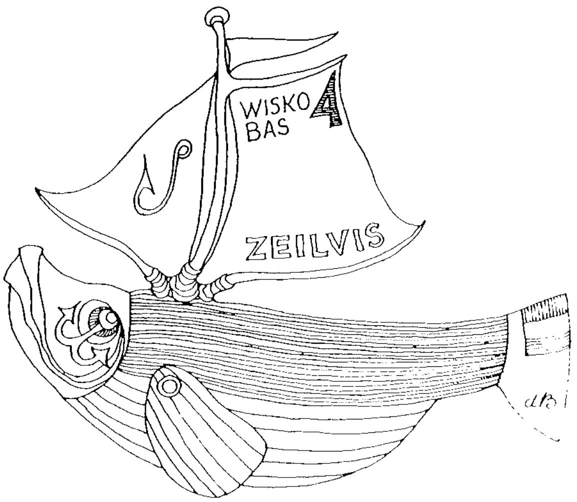
De scholen moeten snel geïnformeerd worden!

Het onderzoek was 'regionaal' en dat is belangrijk. Aan de ene kant mag geen *algemene* waarde gehecht worden aan de uitslagen. Aan de andere kant moet beseft worden, dat vrijwel alle basisscholen zich in konkurrentieposities bevinden. Men wil graag... vanwege de school die twee straten verder staat! Dit moet niet onderschat worden. De vertegenwoordigers zijn hiervan ook goed op de hoogte en weten deze toestanden bizonder goed uit te buiten!

H. Bolt.

Nog een paar korte opmerkingen bij dit kommentaar.

* *Het verslag van de heer Bolt is bizonder waardevol. We hopen dat we ook uit andere delen van het land dergelijke informatie zullen ontvangen. We kunnen dan een goed overzicht van de huidige situatie krijgen. Een overzicht dat we nodig hebben om met elkaar naar een meer gewenste situatie toe te werken.*
* *Met betrekking tot de interpretatie van een aantal 'rekenonderdelen' zijn elders in deze aflevering (VARIABEL BLOK) bijdragen opgenomen.*
* *Wiskobas streeft naar een integratie van verschillende aspekten boven de noemer 'Wiskunde-onderwijs'. Rekenen wordt dan evenals algebra, meetkunde en statistiek opgevat als onderdeel van de wiskunde. Wiskunde wordt door Wiskobas beschouwd als een benaderingswijze en niet zozeer als een stuk leerstof. Daarom kan er dus geen sprake zijn van wiskunde nádst rekenen.*
* *Voor regionale informatie kunt u zich het beste wenden tot de wiskobas-werkgroepen. Er zijn 16 regionale werkgroepen, bestaande uit docenten wiskunde en didaktiek van pedagogische akademies en uit medewerkers van schooladviescentra. De adressen van de kontaktpersonen der werkgroepen staan op de volgende pagina:*



1 GRONINGEN De Heer J. Eilander
Kievitweg 22
Paterswolde. 05907-1918

2 DRACHTEN De Heer B. Nicolaï
De Wissel 22
Beetsterzwaag. 05126-1847

3 EMMEN De Heer C. Nijdam
Leemkoelen 11
EMMEN. 05910-22561

4 ALMELO De Heer J.M. Dijkshoorn
Weidehuislaan 8
ALMELO. 05490-16085

5 ZWOLLE De Heer W. de Weger
Rhijnsburglaan 25
HEERDE. 05782-2597

6 ARNHEM De Heer D.J. Karman
Westeinde 7
ZEVENAAR. 08360-4173

7 AMERSFOORT De Heer R.H.M. Brouwer
Kwintlaan 9
LEUSDEN. 03490-19977

8 AMSTERDAM Drs. G.H. Blaauw
Joh. Buyeslaan 19
MONNICKENDAM.
02995-1232

9 UTRECHT Drs. I.J. Smit
Naxosdreef 93
UTRECHT. 030-614948

10 EINDHOVEN De Heer A. Valkenaars
Jac. Perkstraat 18
EINDHOVEN. 040-12264

11 DEN BOSCH De Heer J.F. Dumaine
Jasmijnstraat 23
DEN BOSCH. 04100-44649

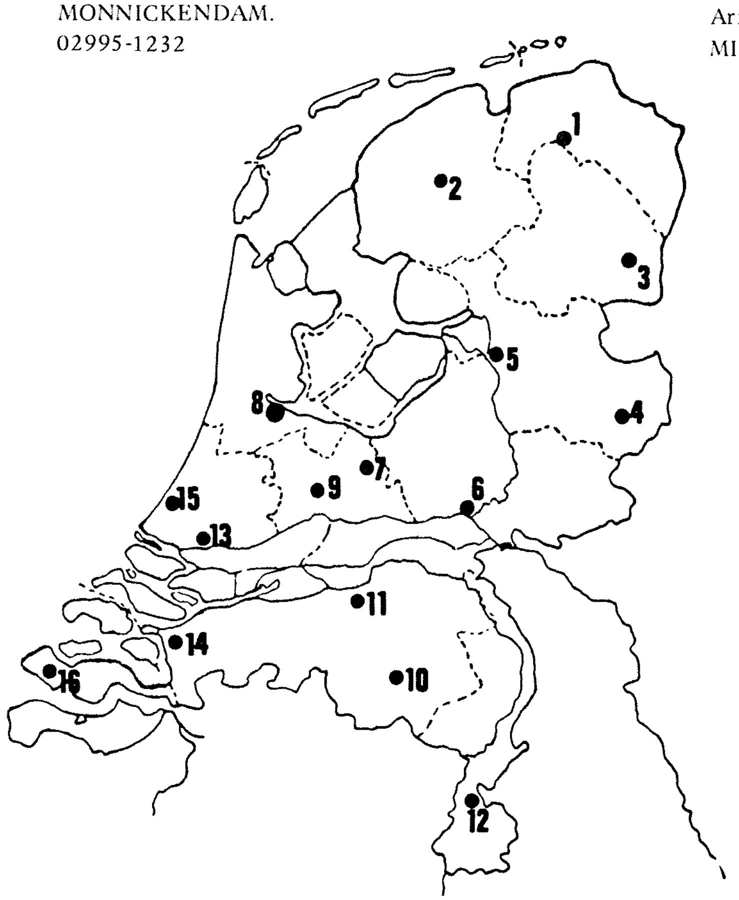
12 SITTARD De Heer W.F.M. Bronnenberg
Processieweg 18
GEULLE. 04461-1129

13 ROTTERDAM De Heer J. Groeneweg
Doezastraat 30b
ROTTERDAM - 3004. 010-288792

14 OUDENBOSCH De Heer G.W.J. v.d. Molengraaf
Markt 34
OUDENBOSCH. 01652-2751

15 DEN HAAG De Heer F.L. Klingeman
C. v. Zantenstraat 252
DEN HAAG. 070-684226

16 MIDDELBURG De Heer J.C. Boekkooi
Arnelaan 15
MIDDELBURG. 01180-5564



3.3 GRAFIEKEN 'OP DE KLOKKENBERG'

VERSLAG VAN TWEE
DOOR P.A.-STUDENTEN
GEGEVEN LESSEN
HENK BEEKE,
THEO LAMMERS,
PIETER POSMA,
KEES RÖTHENGATTER

I GRAFISCHE VERWERKING VAN EEN BIOLOGIELES IN KLAS VIER

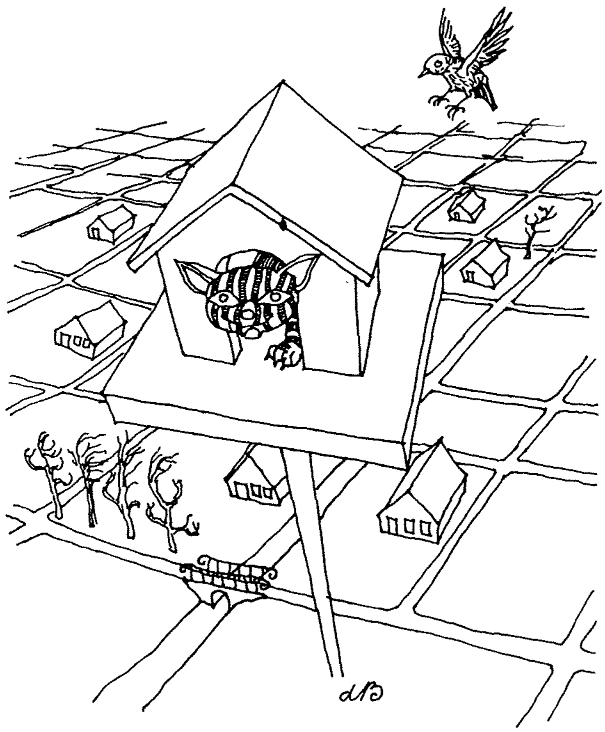
In voorgaande lessen zijn de diverse soorten van grafische verwerking aan de orde gekomen.
Als verwerking bij een serie lessen over de vogels in de winter, werden de vogels die de voederplank voor de klas bezochten, geobserveerd. Al gauw leek het ons interessant om te weten hoeveel keer een bepaalde vogelsoort de voederplank bezocht.
De kinderen kregen hiertoe per groep van vier de opdracht:

> 'Jullie krijgen een verrekijker en het vogelboekje. Ga gedurende een bepaalde tijd na welke vogels de voederplank bezoeken en schrijf op hoeveel keer ze komen. Turven! '

's-Middags werd deze groepen de opdracht verstrekt om de resultaten van hun observatie- en telwerk in een 'grafiek naar keuze' om te zetten.
De kinderen kozen de lijngrafiek. Elke vogel kreeg een andere kleur. Na enkele dagen kwam een groep er niet meer uit, de wirwar van lijnen en kleuren was niet meer terug te lezen. In een gesprek hierover kwamen we tot de konklusie dat we beter konden stoppen met deze grafische verwerking en te wachten tot alle groepen aan het werk waren geweest. Vervolgens zetten we alle tellingen in een schema op het bord. Elke groep koos daarna een vogelsoort en zette de bezoekfrekwentie ervan in een grafiek.

Naar aanleiding van de gegevens hebben we enkele interessante konklusies kunnen trekken:

- de koolmees kwam de eerste dag telkens even voorzichtig kijken en kwam pas de volgende dag in groten getale eten;
- de pimpelmees kwam alleen als er pinda's waren;
- de mussen kwamen zo vaak dat ze niet meer te tellen waren;
- enz.



'de pimpelmees kwam alleen als er pinda's waren . . . . . . '

II ERVARINGEN MET GRAFIEKEN IN DE HOOGSTE KLASSEN VAN DE LEERSCHOOL

Het gebruik van grafieken komt – hoewel sporadisch en niet aansluitend op de rest van de leerstof – voor in de rekenboekjes van de hoogste klassen.
Meestal gaat het dan om onderwerpen, die het kind slechts matig interesseren. Er wordt van hen slechts verwacht, dat ze zo'n grafiekje na een inleidend praatje van de onderwijzer kunnen teruglezen. Bij zo'n lesje over grafieken

staan dan ook nog de stereotype vragen als: Wat is de koudste, resp. warmste maand? etc.

Wij hebben getracht een en ander in een breder raam te plaatsen door de kinderen aktief te betrekken bij een groot aantal werkzaamheden:

- het invullen van een enquête, betrekking hebbende op de dagelijkse leefwereld van het kind;
- het maken van een turflijst;
- het verwerken van de gegevens daaruit tot een staafdiagram;
- het elkaar duidelijk maken van de diverse resultaten (het leren lezen van grafieken).

Voorafgaand aan al deze aktiviteiten vond een klassegesprek plaats waarin de volgende punten aan de orde kwamen:

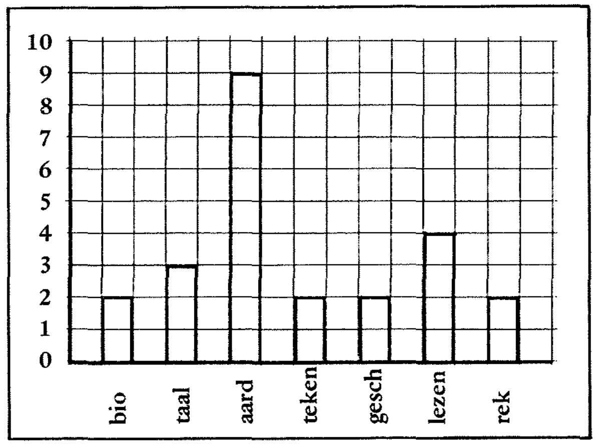
- wat is een grafiek?
- waarom wordt hij gebruikt?
- wanneer wordt hij gebruikt?

Het starten van de aktiviteit

Allereerst was het nodig dat de kinderen duidelijk gemaakt werd, hoe een grafiek opgebouwd is en hoe hij wordt samengesteld.
Met behulp van het bord werd in een leergesprek een van te voren aan de klas gestelde vraag omgewerkt tot een lijn- en staafdiagram.
Daarna kreeg elk kind een blaadje ruitjespapier van 1 bij 1 cm waarop eenzelfde soort probleem zelfstandig, stap voor stap, moest worden opgelost. De klas kreeg steeds gerichte opdrachten, daarna werd door de onderwijzer gekontroleerd, of elk kind de instruktie had begrepen en uitgevoerd. Zich voordoende problemen werden klassikaal behandeld.
Toen bleek dat de klas in staat was tot het maken van deze eenvoudige grafieken, konden we overgaan tot het eigenlijke doel: het zelfstandig in groepjes verwerken van verzamelde gegevens.
Dit verzamelen ging als volgt: de leerlingen vulden een door ons samengesteld enquêteformulier in waarop 16 vragen voorkwamen. Deze vragen handelden over onderwerpen als: hoe laat ga je naar bed? wat eet je het liefst? wat is je favoriete sport? etc.

Aan welk vak heb je de grootste hekel?

Bio.	Taal	Aard.	Teken.	Gesch.	Lezen	Rek.
//	///	~~////~~ ////	//	//	////	//



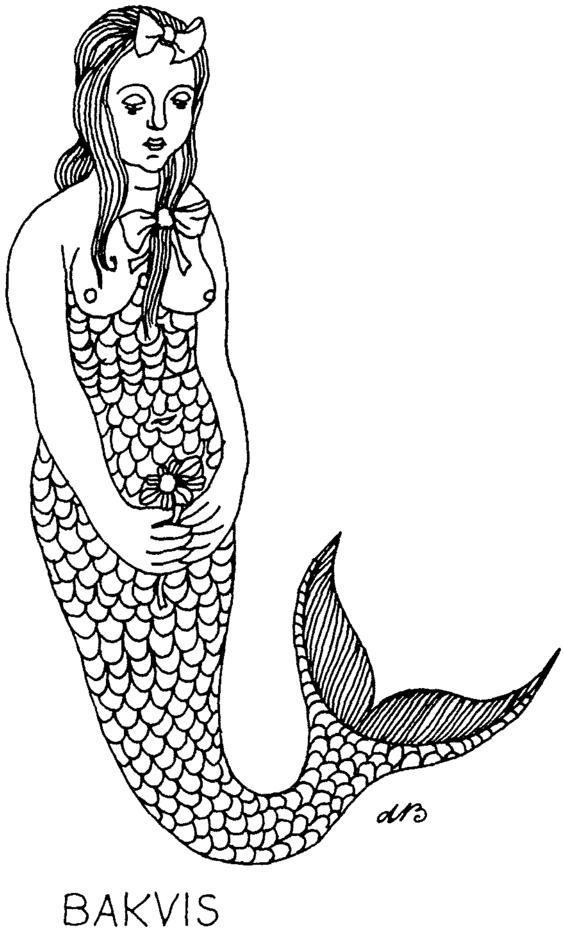
De formulieren waren geprekodeerd, d.w.z. bij elke vraag was één keuze mogelijk uit een aantal mogelijkheden.
Hierbij deed zich het probleem voor, dat sommige leerlingen niet voldoende hadden aan de door ons verstrekte antwoordmogelijkheden.
Nadat de enquête-formulieren waren ingenomen, werden zij in stroken geknipt en wel zodanig, dat op elke strook één vraag kwam te staan.
Alle stroken met dezelfde vraag werden verzameld en kwamen terecht bij een groepje leerlingen, die nu zelfstandig aan het werk gingen. Achtereenvolgens waren de aktiviteiten:

- het maken van een turflijst;
- het ontwerpen van een geschikte grafische verwerking;
- het vervaardigen van een grafiek (staafdiagram);
- het opplakken van de grafieken op verzamelvellen.

Evaluatie

- Zoals te verwachten viel, was het staafdiagram voor het kind de aantrekkelijkste vorm om mee te werken.
- Sommige vragen gaven problemen met betrekking tot de vaststelling van de te gebruiken schaal.
- Het verwoorden van hetgeen op de grafiek te lezen was gaf soms aanleiding tot een klassegesprek.
- Het is duidelijk geworden, dat grafieken een rol kunnen spelen bij het integreren van schoolvakken. Ze kunnen makkelijk toegepast worden bij projekten.

Slotkonklusie
Het werken met grafieken is in de hoogste klassen van de basisschool zeer goed mogelijk en levert weinig problemen op, mits aan de motivatie voldoende aandacht wordt besteed.



BAKVIS

3.4 GRAFIEKEN IN PATERSWOLDE

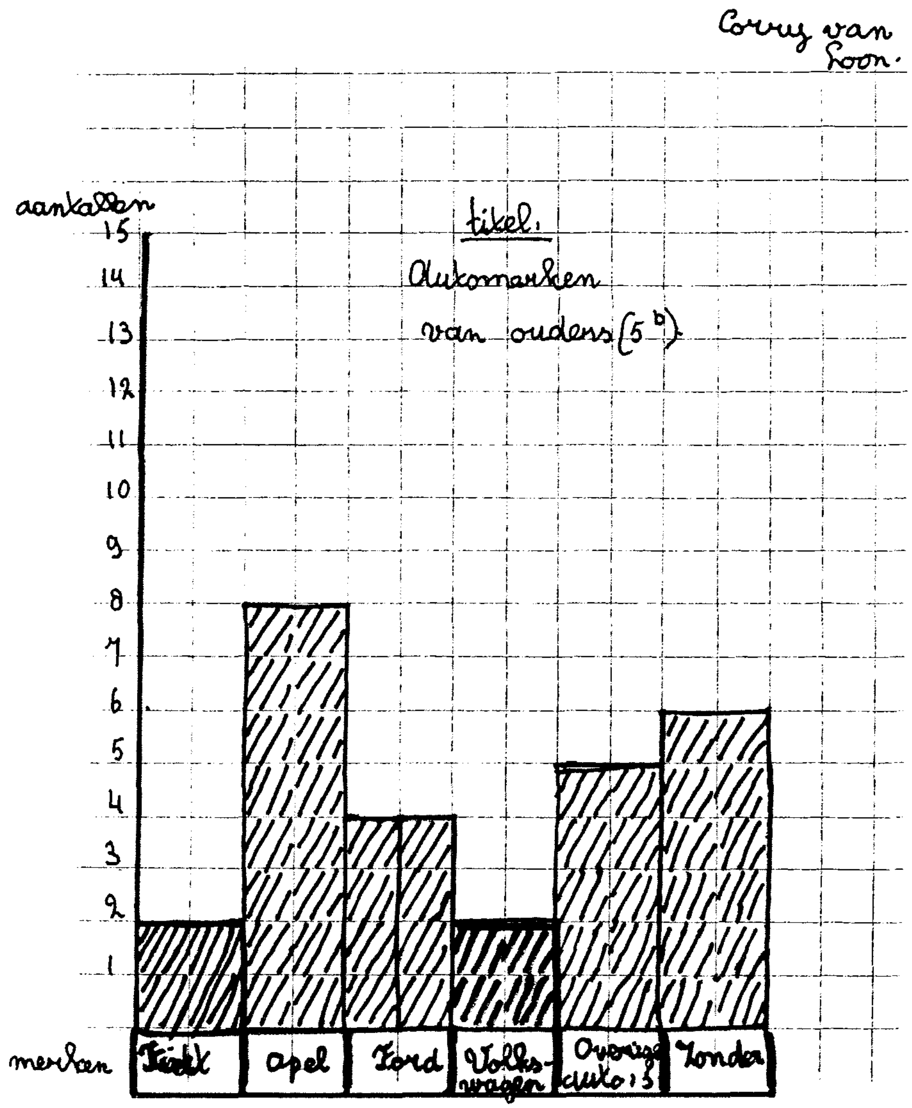
Van de kursus 'Eelde-Paterswolde' hebben we veel materiaal betreffende 'Grafische Verwerking' ontvangen. Uit het verslag van Jaap Smit – één der kursisten – lichten we een aantal fragmenten.

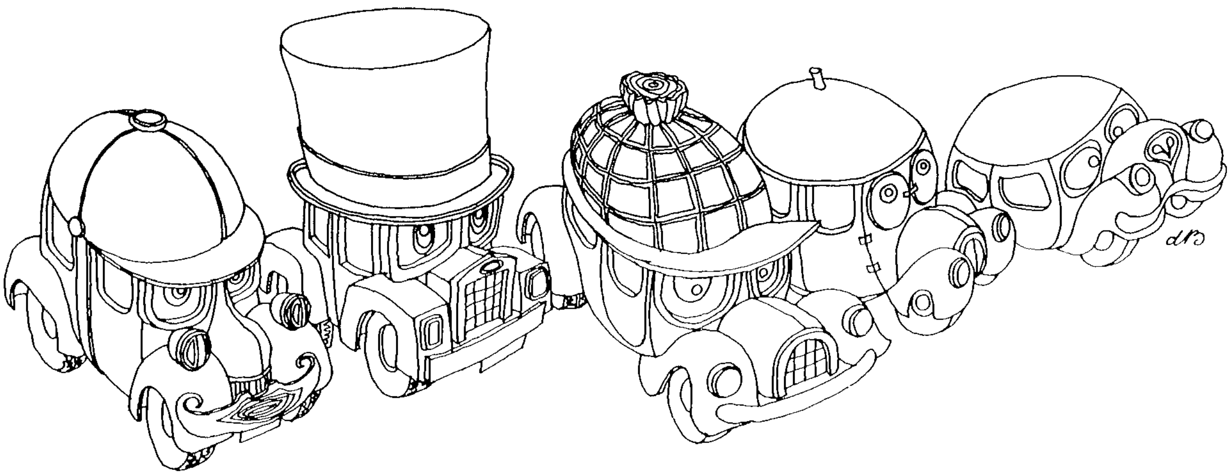
Als beginnend kursist van de Wiskobas-heroriënteringskursus staat me in het algemeen vaag voor ogen waar we heen
willen
moeten
kunnen met ons reken- (wiskunde-) onderwijs.

Door een onderwerp met je eigen klas uit te proberen, kun je trachten voor een deelgebied van de stof een antwoord te geven op de drie voornoemde punten. We proberen in een 3/4-kombinatieklas de leerlingen te laten werken met grafieken. Op verzoek van de kursusdocenten volgt hier een beschrijving van de gevolgde weg; waarbij we proberen op de vragen 'willen – moeten – kunnen' een antwoord te geven.

Wat willen we? We willen laten werken met grafieken, aangepast aan de klassesituatie (klas 3/4). We willen grafieken *als zinvol medium laten ervaren*, waarbij zinvol moet worden gerekend. We willen de zelfontdekkende leervorm hanteren, overtuigd van het nut hiervan.
Moeten we? Moeten we zo nodig deze 'kleine' kinderen al laten werken met grafieken? Kan het later niet veel vlugger? We menen dat de motieven om reeds vroeg de leerlingen te laten kennismaken met grafieken dezelfde zijn als de algemeen aanvaarde(?) motieven die hebben geleid tot de ontwikkeling van speelleermateriaal. En... we beginnen met aardrijkskunde toch ook niet direkt met het leren benoemen van rode stippen en blauwe kronkels op een stuk bedrukt papier?
Onze konklusie is: We moeten 'spelenderwijs' beginnen met grafieken, gespreid over de hele basisschool.
Kunnen we? Tot zover komen we er denkend wel. Maar hoe is de praktijk? Uit het verslag, blijkt dat er inderdaad wel iets kan.
Om u een indruk te geven beschrijven we heel beknopt het laatste gedeelte van de les. Het gaat nu om een verwerking van de opdracht: 'Maak een grafiek van de auto's bij de leerlingen thuis'. We kozen: *'Welke auto zou ik kopen?'* in plaats van: 'Welke auto heeft pa of ma? ' De laatste vraag vonden we een beetje anti-sociaal, daar er bij enkele leerlingen thuis geen auto's zijn.

We geven de leerlingen roosterpapier. We stellen de vraag: Welke auto zou je kopen? Hoe kunnen we dit in een grafiek zetten?	De leerlingen noemen hun keuze (inventarisatie op het bord). Er wordt in klassegesprek een vorm gekozen.	25 van de 26 leerlingen hadden een juiste grafische uitbeelding



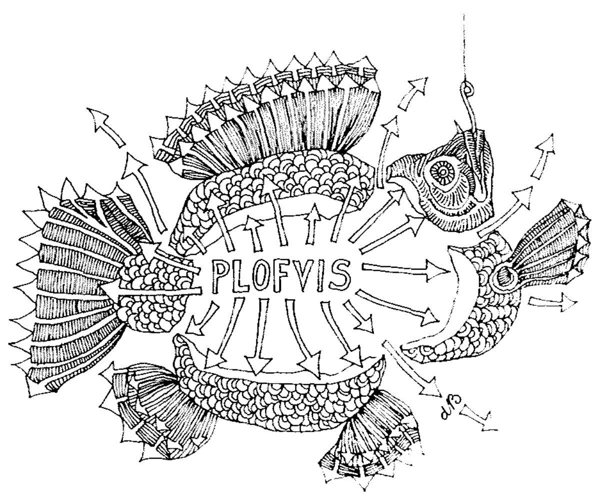


Welke auto zou ik kopen?

3.5 EEN PROBLEEM

JEAN CRAPTS

Als student van de P.A. te Sittard heb ik in de zesde klas van een basisschool aldaar een serie lessen gegeven over koördinaten. Hierbij heb ik gebruik gemaakt van de werkbladen uit Wiskobas-Bulletin No.1. Het peil van de werkbladen heb ik in overleg met de rekendidaktikus, de heer W. Bronnenberg, enigszins verzwaard door er enkele opdrachten aan toe te voegen.
Groepswerk werd toegepast, de leerlingen werkten leuk met deze voor hen totaal nieuwe stof. De stof werd goed begrepen. Tegelijkertijd gaf ik ook een lessencyklus aardrijkskunde over plaatsbepaling op de aardbol. Deze cyklus liep vrijwel geheel parallel met de cyklus over koördinaten, althans wat de opbouw betreft.
Beide werden voortdurend met elkaar in verband gebracht.
Mijn konklusie hieruit was dat de stap die de leerlingen moesten maken naar de abstrakte onderverdeling van de aardbol tamelijk vlot verliep, dankzij de koördinaten (de zwakkere leerlingen natuurlijk uitgezonderd). De lessen werden goed beoordeeld door de onderwijzer, doch na de laatste les kwamen er enkele bezwaren van de zijde van de onderwijzer. Naar zijn mening hoefde er aan het principe van koördinaten geen hele lessencyklus besteed te worden, dit kon eveneens in een tijdsbestek van 20 minuten. Verder vond hij dat er op de huidige basisschool geen leerstof voor handen was waarbij ingewikkelde en uitgebreide berekeningen met koördinaten nodig waren. Z.i. waren er slechts enkele leerlingen die werkelijk iets aan dit soort stof hadden, n.l. zij die naar het voortgezet onderwijs gingen.
Uit zijn hele betoog bleek tenslotte (met alle respekt voor ervaring en kunnen van deze goede leerkracht) dat koördinaten geen praktisch nut hebben.
Ik zou hier enkele dingen op willen antwoorden. Het gaat bij deze koördinaten *niet* om het *principe*, maar om het *systeem*! Het ermee bezig zijn, het ermee spelen en doen, dat is het belangrijkste. Voor het principe heb je inderdaad niet meer dan 20 minuten nodig, maar dat is niet van primair belang. Door het ermee bezig zijn kweekt men bij de leerling een bepaalde attitude aan, een gewoonte van systematisch en gekoncentreerd werken. Dat men hiervan voor een hele verder studie profijt zal hebben, is naar mijn mening overduidelijk.
Veel onderwijzers zien gewoon geen mogelijkheid om de nieuwe rekenstof in te passen in hun metode. Is dit een afdoende reden om deze stof dan ook niet te geven? Een eventuele aanpassing aan de metode kan dan toch altijd gebeuren met behulp van de kreativiteit van de onderwijzer.
Dat koördinaten wel degelijk nut kunnen hebben is wel bewezen bij de plaatsbepaling op de aardbol.



3.6 ALTERNATIEVE WERKBLADEN

RESPONS UIT BENNEKOM

Mevr. Brinkman is voor ons geen onbekende. Met een positief-kritische belangstelling volgt zij het werk van Wiskobas.
Na afronding van haar studie in de wiskunde (doktoraal in 1960) heeft zij o.m. in Pakistan gewoond.
Momenteel begeleidt zij een school in Bennekom.

Zij schrijft over de eerste aflevering van het Bulletin:

Zeer geachte Redaktie,

Allereerst – zij het wat laat – mijn gelukwensen met het verschijnen van het eerste nummer!
Moge het 'Wiskobas Bulletin' een bloeiend bestaan tegemoet gaan, met vooral *heel veel Respons*!

De globale indeling in 3 blokken spreekt me erg aan.
Het Vast-Blok heb ik met veel plezier en belangstelling gelezen. Hoe het Respons-Blok zal funktioneren is nu natuurlijk nog niet te beoordelen, maar het zou verheugend zijn als de bijdragen aan nummer 1 representatief zullen blijken voor het gehalte en de inhoud.
Met het Variabel-Blok was ik na eerste bladeren wat minder gelukkig. Bij nader bekijken bleek dat ik vooral meer strukturering verlang dan er geboden werd. Dit zou via een inhoudsindeling (naar soort van onderwerpen) verwezenlijkt kunnen worden. Het zou ook kunnen door middel van een heel korte inleiding op het gehele blok, waarin de delen met hun (mogelijke) funktie voor de lezer genoemd worden.
Bijvoorbeeld, op dezelfde pagina als de Inhoud:

> *'Wegwijzer voor dit blok'.*
> 1.1 t/m 1.4 vormen inhoudelijk een eenheid; 1.5 t/m 1.8 zouden met vrucht gelezen kunnen worden door diegenen die praktijktoepassing overwegen; 1.10 en 1.11 zijn een introduktie voor die lezers die zich nader in het onderwerp willen verdiepen; 1.12 is een onderwerp apart.

Een duidelijk strukturering maakt het voor de 'bladerende' lezer (zoals ik) gemakkelijker om te kiezen wàt hij lezen wil.

Nog een paar losse opmerkingen:

Kan de binnenmarge wat groter genomen worden, zodat het Bulletin indien gewenst uiteengehaald en per onderwerp in naslagbanden gestopt zou kunnen worden?
'Over het gebruik van werkbladen' (p.61) is hopelijk een eerste aanzet tot uitvoeriger bespreking van deze werkvorm?

Staan er ook andere werkvormen op het besprekingsprogramma?

Kunnen bij boekbesprekingen, die animeren tot het zelf aanschaffen van een boek (zoals 1.11) de huidige prijzen (in de gewone boekhandel) worden vermeld? Men kan dan uit bespreking en prijs beoordelen of men tot aanschaf wil (en kan) overgaan.

Het periodiek verschijnen van een blok (werkbladen voor de lezer, wiskundige achtergronden, werkbladen voor de leerlingen) lijkt me een bijdrage aan de heroriëntering. Een onderdeel zou misschien toegevoegd kunnen worden: 'aanwijzingen voor klassegebruik'. Het lijkt me belangrijk dat de onderdelen nauwkeurig op elkaar afgestemd zijn. Het gebruik van de werkbladen voor de leerlingen kan dan als het ware direkt voortvloeien uit de bestudering van de werkbladen voor de lezer.

Bijgaand: 'Respons, werkbladen voor de leerlingen' (zie onder).

De respons is, evenals deze brief, een reaktie op nummer 1 van het Wiskobas-Bulletin. Ik ben me ervan bewust dat de variatie op de werkbladen die ik geef niet geheel aansluit bij de werkbladen voor de lezer – evenmin als de Werkbladen voor de leerlingen uit genoemde nummer 1. Dat kon ook niet, omdat de werkbladen voor de lezer twee (verwante) onderwerpen bespraken en de leerlingenbladen slechts één.

Met vriendelijke groeten, hoogachtend,

Tineke Brinkman.

RESPONS: WERKBLADEN VOOR LEERLINGEN.

In één van de KO-boeken van de H.O.O. (Stadsplan) wordt gezegd: (deze aanpak) '...dient om (ons) iets van de ontdekkende werkwijze te laten ervaren'.
Weinigen zullen echter plezier beleven aan het ontdekken-om-te-ontdekken, zonder dat er verdere gebruiksmogelijkheden van 'het ontdekte' lijken te zijn.
Voegen we erbij: '...helpt (ons) de werkelijkheid via ordening beter te begrijpen en te gebruiken', dan hebben we in die twee uitspraken samen voldoende motivatie voor het ontwerpen en/of gebruiken van werkbladen voor leerlingen.
Daarom de volgende variatie op de negen werkbladen (voor de leerlingen) uit het Wiskobas-Bulletin nummer 1 (pag. 39-47).

De veranderingen in de werkbladen 1 t/m 5 hebben voornamelijk tot doel het ontdekkend karakter van het werk te vergroten.

Voorstel voor veranderingen in de werkbladen 1 t/m 5:

Werkblad 1
De tekening handhaven, maar de tekst vervangen door blanko ruimte (of: liniering met minimaal 8 regels).
De opdracht wijzigen in:
Probeer met elkaar een goede plaatsaanduiding van de ramen in het flatgebouw te geven.

Werkblad 2
De afspraak bovenaan wijzigen in:
'AFSPRAAK – Een goede plaatsaanduiding kan zijn: (zoveelste van links, zoveelste van onder).
Laten we in het vervolg van dit werkblad de plaatsen zo aanduiden. Let op het gebruik van de rangtelwoorden'.
De tekening blijft.
De vragen blijven; de notatie aanpassen, dus steeds zoveel*ste van* links, zoveel*ste van* onder.

Werkblad 3
Bij de tekst van de 'Afspraak' in de eerste zin: 'links' en 'onder' in 'zoveelste van links' resp. 'zoveelste van onder' veranderen. In plaats van de zin 'Weet je de vorige afspraak nog? ' lezen: 'Dat gaan we nu gebruiken'. Overigens geen wijzigingen in dit werkblad.

Werkblad 4
De tekeningen handhaven maar uitbreiden met een rondje in (3,5) een hartje in (4,4), een vraagteken in (5,9), een ster in (4,7). In plaats van 'Zo'n tekening heet een rooster' lezen: 'Zo'n tekening noemt men wel een rooster'. De opdrachten als volgt wijzigen:
Wat is de naam van het roosterhokje met het kruis erin?
Antwoord: (................)
Vul ook in:
De naam van het roosterhokje met het rondje is (..,...)
De naam van het roosterhokje met het hartje is (..,...)
Het hokje met het vraagteken heet (..,...)
En het hokje met de ster noemen we (..,...)
Zijn er in het rooster van dit werkblad hokjes met namen van twee gelijke cijfers?
Ben je zulke hokjes tegengekomen? ......
Zo ja, schrijf de namen van die hokjes hieronder:

....

Werkblad 5
Tekening: Het 10 x 10 rooster leeg laten (de kruisjes vervallen dus). De tekst wijzigen in:Probeer op het rooster alle hokjes te tekenen waarvan de namen twee gelijke cijfers hebben.
Wat merk je op over die verzameling hokjes?

....

Schrijf de namen in een kolom: ....
....
....
etc.
(tien plaatsen onder elkaar aangeven)

Liever dan de teoretische grapjes voor de

echte liefhebbers van getallen (zoals die in W6 t/m W9 waren gepresenteerd) zou ik met basisschool-leerlingen een wat meer op de 'praktijk van het leven' gerichte toepassing van roosterhokjes willen bestuderen:
de stadskaart of stratenkaart

Voorstel voor werkbladen 6 t/m 9, waarbij de oorspronkelijke geheel komen te vervallen:

Werkblad 6
Per groepje leerlingen heb je een in (geletterde en/of genummerde) blokken ingedeelde stratenkaart of stadskaart nodig.

Bekijk de kaart goed. De kaart is door rechte lijnen verdeeld in vakjes. Met welke namen (tekens) zijn de kolommen aangeduid?
Antwoord: . . . .
En met welke namen zijn de rijen aangeduid?
Antwoord: . . . .
Kijk nog eens goed naar de kaart. Herken je er al dingen op? Zoek nu de straat waaraan jullie school staat. Hoe heet het vak waarin de school staat?
Antwoord: . . . .
Zoek de straat waarin je woont.
Hoe is het vak aangeduid?
Antwoord: . . . .
In welk vak is het gemeentehuis?
Antwoord: . . . .
En het (hoofd)postkantoor?
Antwoord: . . . .

Werkblad 7
Op werkblad 3 (kijk het nog maar even na) heb je gezien dat een hokje in een rooster wordt aangeduid met twee nummers (cijfers).
Vul in: Op de stadskaart (stratenkaart) wordt een hokje aangeduid met . . . .
Hoe wordt een huis in een stad in Nederland meestal aangeduid?
Antwoord: . . . .
In een dorp is dat wel eens anders.
Wie kent een voorbeeld?
Vertel eens, of schrijf het hieronder op:
. . . .

Werkblad 8
Een adres van een huis bestaat uit . . . .
. . . . (. . .).
Als je 't niet meteen weet, schrijf dan eerst je eigen huisadres op (niet je naam erbij) en benoem dan de onderdelen.
Huisadres: . . . .

Als je naar een adres toe moet waar je nog nooit eerder bent geweest, vraag je (of zoek je op de kaart) natuurlijk eerst waar de straat is.
Als je in de straat bent (en je weet het huisnummer) kun je meestal wel vlug zien aan welke kant van de straat je moet zijn. Schrijf eens op waar je dan allemaal op let:
. . . .
. . . .
. . . .
Vergelijk je antwoorden met die van de groepsgenootjes.

Werkblad 9
Tekening: Een leeg 10 x 10 hokjes-rooster, van koördinaten voorzien. Langs linker- en onderrand ruimte om aantekeningen te maken.
Hierop kunnen de leerlingen het spel 'zeeslag' (duikbotenspel) spelen. Of, zo u wilt, een wat vriendelijker versie voor bedeesde meisjes: 'Bloemetjes uit jouw tuin', waarbij i.p.v. oorlogsschepen verschillende bloemperken op het rooster gesitueerd kunnen worden.

De werkochtend kan besloten worden met het twee-aan-twee spelen van dit roosterspel: 'zeeslag', of 'bloemetjes...'.
Dit gaat in de toekomst wèl veel ruitjespapier kosten – als het aanslaat –.

Het zal de lezer duidelijk zijn dat de redaktie deze RESPONS waardevol vindt. Immers, dit soort bijdragen betekenen een bijsturing, een verfijning van het 'ruwe materiaal'. Noodzakelijk binnen onze opvattingen over leerplanontwikkeling. Het lijkt de moeite waard om de gekorrigeerde versie werkbladen naast de oorspronkelijke versie in parallel-situaties uit te proberen en de resultaten te vergelijken. Wellicht is het voor P.A.-studenten interessant om een en ander te beproeven.
Wilt u eventuele pogingen met een verslag van uw ervaringen inzenden aan:

Mevr. T. Brinkman-Geilman
Edeseweg 96[1]
BENNEKOM.

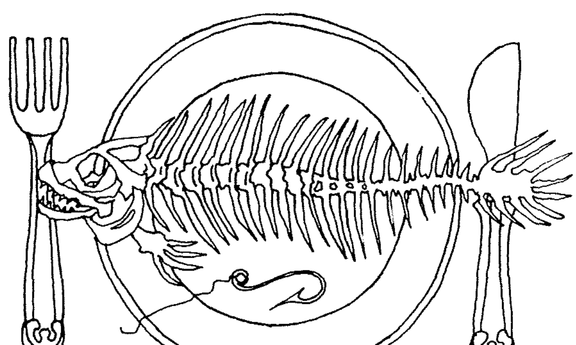
3.7 DE ENQUÊTE

De enquête in de eerste aflevering is door weinig lezers ingevuld en opgestuurd.
Het heeft derhalve nog weinig zin om een samenvatting van de resultaten weer te geven. Misschien kunnen we bij de samenstelling van het volgende nummer over meer gegevens beschikken.

Een paar opmerkingen van de respondenten:

- Met de werkbladen gewerkt in een klas van 38 leerlingen, waarvan 35 à 36 zelfstandig de eerste zeven bladzijden doorwerkten. Blad 8 en blad 9 werd door ca. 30 leerlingen begrepen.
  Behandeling in groepjes was juist en zeer aan te bevelen. Ter verwerking van elk onderwerp een serie werkbladen gevraagd, omdat dit erg prettig blijkt. (Nijmegen)
- Het vermenigvuldigen van de werkbladen voor de leerlingen is zonder een elektronische stencilvervaardiger een té tijdrovend en ook kostbaar werk.
  Idee: werkboekjes voor de leerlingen in boekvorm publiceren, tegelijkertijd met het verschijnen van de nieuwe blokken voor de heroriënteringskursus. (St. Annaland)

Beide opmerkingen tenderen in eenzelfde richting. Voor wat het Bulletin betreft: de produktie van afzonderlijke werkbladen (in een mapje aan de binnenzijde van de omslag) is technisch moeilijk te realiseren. Voor BAS-boek 5 (HET SPIJKERBORD) is een serie – los verkrijgbare – eksperimentele werkbladen samengesteld. Deze serie van 40 werkbladen is – zolang de voorraad strekt – verkrijgbaar bij mej. M. Holla. (IOWO-Tiberdreef 4, Utrecht) à *f* 1,50.



3.8 GETALLENRECHTE

UIT EEN BRIEF VAN DE HEER J. ROGGEN

'Waarom ik nu gesteld heb dat er een alternatief gekozen moest worden voor de getallenparen ligt hierin, dat ik in mijn derde klas vrij vlot de eerste beginselen van de koördinatenleer heb kunnen aanleren, maar de integratie daarvan in het 'normale' leerprogramma nog niet zo zie zitten. Een getallenlijn bleek me veel grotere diensten te kunnen bewijzen. Om zowel in positieve als in negatieve richting te kunnen tellen is aanvankelijk weinig ekstra uitleg nodig. Dat die getallenlijn uitgebreid kan worden met negatieve getallen kan worden duidelijk gemaakt naar analogie van de thermometerwerking of met het voorbeeld van een trap die naar de eerste verdieping loopt en aan de andere kant afdaalt naar de kelder. Verder optellen en aftrekken wordt dan visueel gemaakt met behulp van langs elkaar schuivende stroken papier (karton) waarop getallenlijnen zijn aangegeven.
In deel 4 vwo van de metode 'Moderne Wiskunde' (uitg. Wolters-Noordhoff, eindred. Krooshof) wordt van dit principe uitgegaan om de werking van de rekenliniaal duidelijk te maken.'

Deze aanpak komt tot uitdrukking in het '*Verslag van een Oriëntatietocht*' (Wiskobas-Bulletin, no. 1, pag. 62 en v.).
Wanneer de getallenrechte als visualiseringsmiddel in het 'gewone' rekenen funktioneert, is een uitbreiding naar koördinaten zeker zinvol. Het gevaar is dan echter dat de visualisering van getallen op de getallenrechte en van geordende getallenparen in het platte vlak, éénzijdig belicht wordt. De één – éénkorrespondentie wordt slechts naar één kant ekspliciet gemaakt. Immers: aan ieder punt van de getallenrechte wordt één – éénduidig een reëel getal ($r \in \mathbb{R}$) toegevoegd, terwijl omgekeerd ieder reëel getal door één en niet meer dan één punt van de getallenrechte gerepresenteerd wordt. Hetzelfde geldt voor punten in het platte vlak en geordende getallenparen.

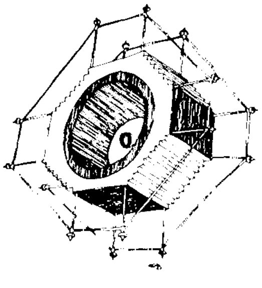
Introduktie van negatieve getallen is ook te motiveren vanuit de Stadsplanopbouw via 'routebeschrijvingen' en 'trekken' (zie in dit verband: Basboek 'Stadsplan').
Het is bovendien wat gevaarlijk te suggereren, dat de getallenrechte met negatieve getallen kan worden uitgebreid, als zou – indien dit wenselijk is – de betrokken rechte met een gewenst stuk verlengd kunnen worden.
De getallenrechte dient altijd in deze vorm gehanteerd te worden:

0 1 2 3 . . . .

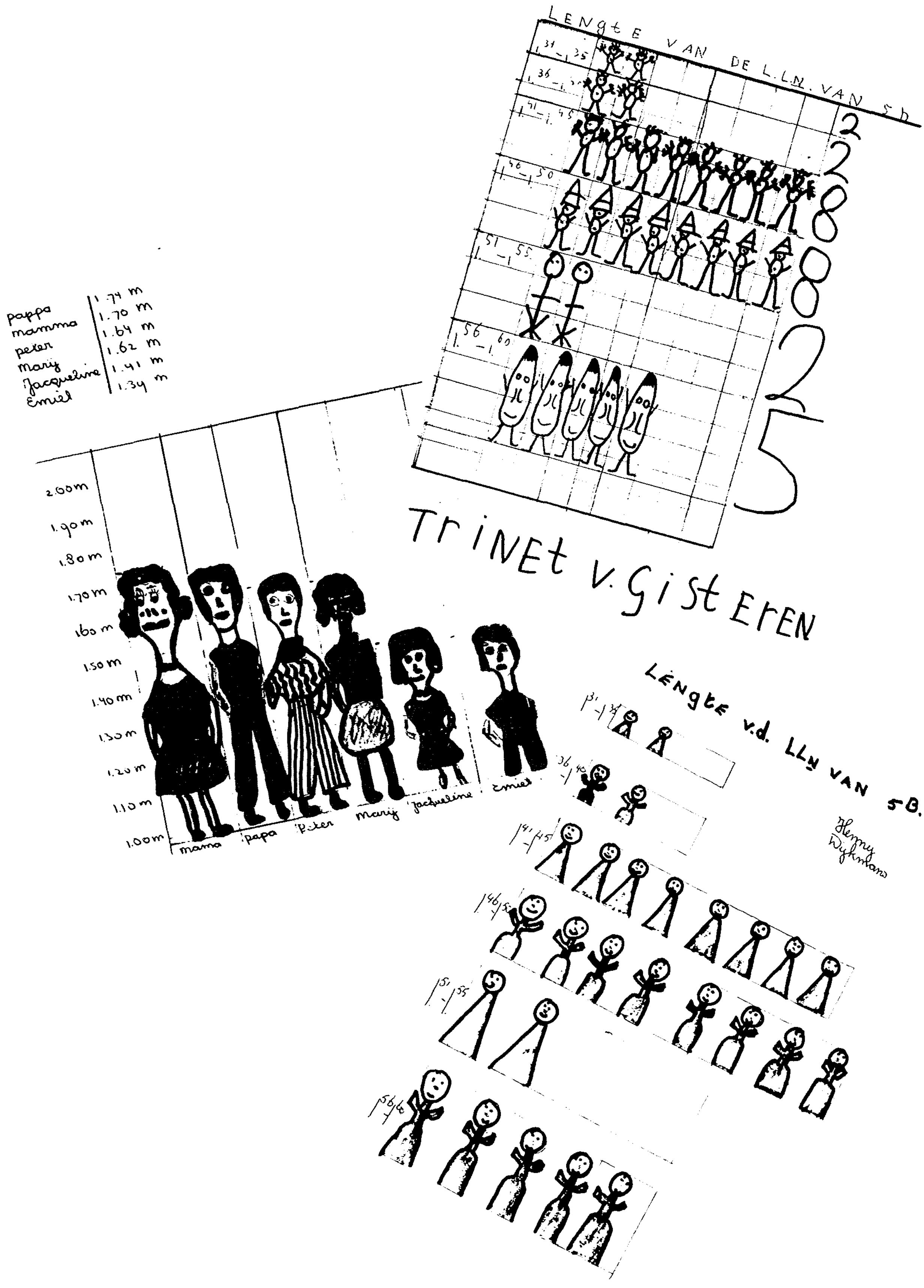
of

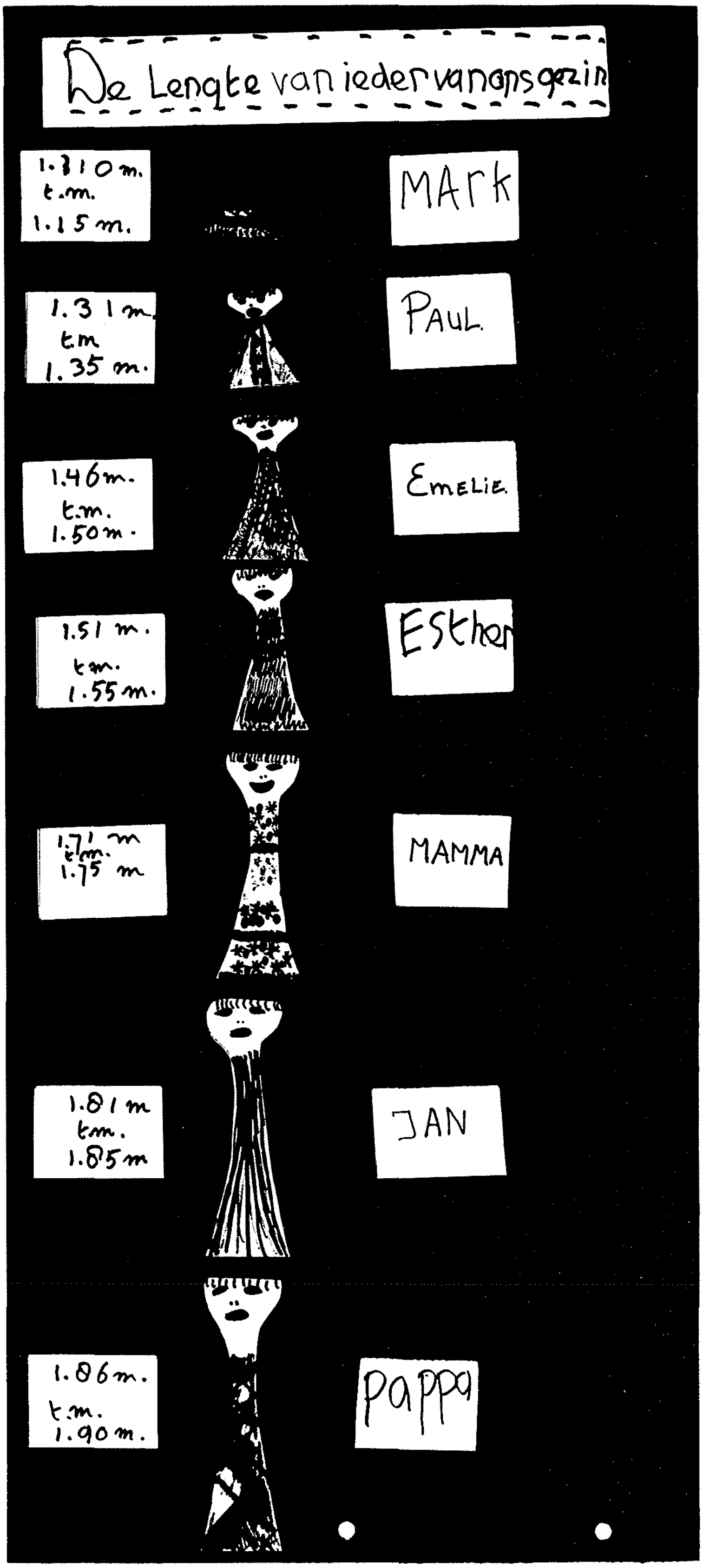
. . . . . . -2 -1 0 1 2 3 . . . . . .

waarbij de pijltjes aangeven dat slechts een deel van de rechte getekend is (meetkundig gezien is een rechte immers niet verlengbaar).
De opvatting, dat de getallenrechte met de négatieve getallen uitgebreid zou kunnen worden, komt voort uit het feit, dat in het wiskunde-onderwijs op basisschoolnivo vrijwel uitsluitend pósitieve getallen op de getallenrechte een rol spelen.
De gedachte kan daardoor post vatten, dat bij de introduktie van negatieve getallen een deel aan de getallenrechte dient te worden toegevoegd om visualisering mogelijk te maken.
In feite bleef de getallenrechte voor negatieve getallen ongebruikt, omdat negatieve getallen tot nu toe geen rol speelden in het onderwijs.



de trap naar boven, de trap naar beneden, visualiseren rondom het cijfer NUL.


LENgtE VAN DE L.L.N. VAN 5 B
2
2
8
8
2
5
Trinet v.Gisteren
LENgtE v.d. LLN VAN 5B.
pappa 1.74 m
mamma 1.70 m
peter 1.64 m
marij 1.62 m
Jacqueline 1.41 m
Emiel 1.34 m
2.00m
1.90m
1.80m
1.70m
160 m
1.50m
1.40m
1.30m
1.20m
1.10m
1.00m
mama
papa
Peter
marij
Jacqueline
emiel


De Lengte van ieder van ons gezin
1.310 m.
t.m.
1.15 m.
MArk
1.31 m.
t.m
1.35 m.
PAUL
1.46 m.
t.m.
1.50 m.
EmELIE
1.51 m.
t.m.
1.55 m.
Esther
1.71 m
t.m.
1.75 m
MAMMA
1.81 m
t.m.
1.85 m
JAN
1.86 m.
t.m.
1.90 m.
pappa

©1971 Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde
Onderwijs

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de houder van het copyright.

Omslag: Hans Gauw
Druk : Krips Repro N.V.