

Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (9)

L. Streefland, E. de Moor en A. Treffers

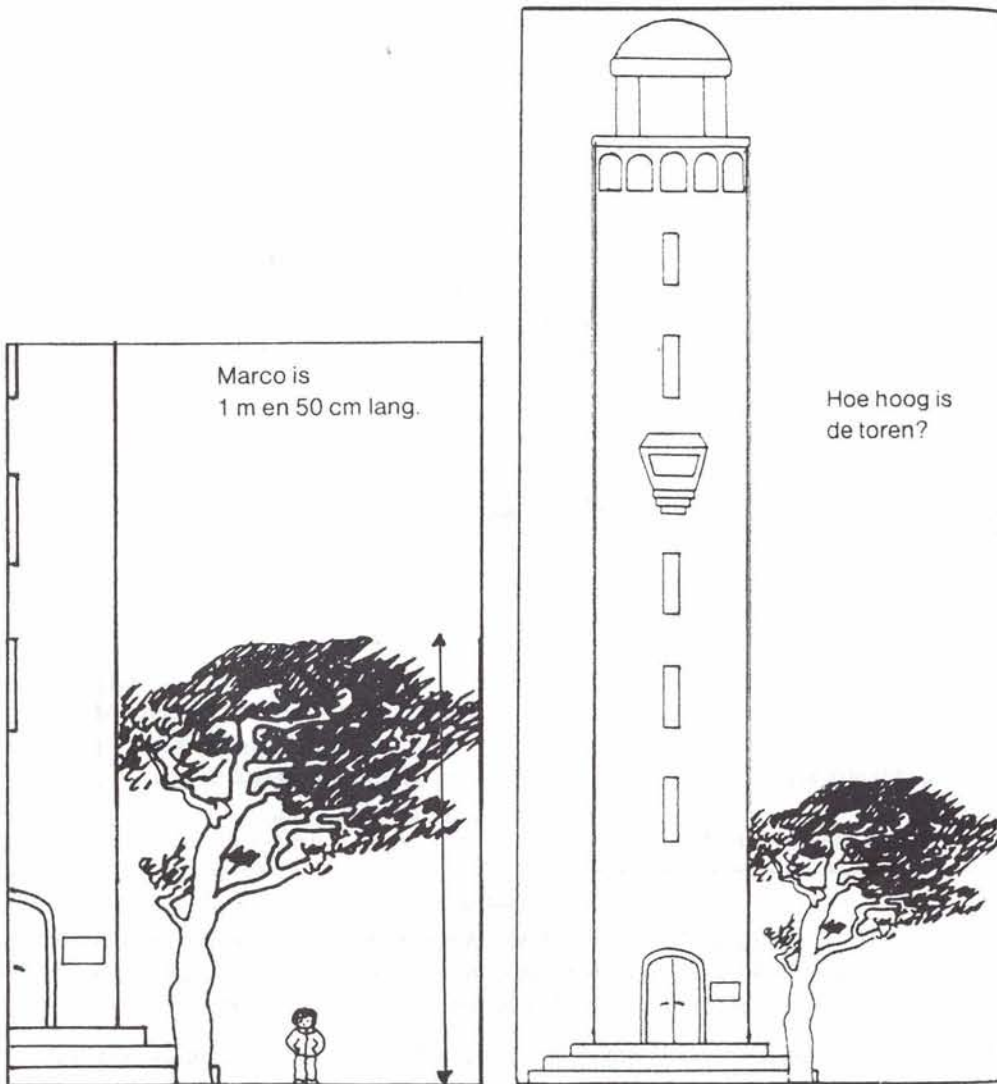
Verhoudingen (2b)

Als vervolg op de vorige aflevering (nummer acht) van deze serie, zullen wij in dit artikel de onderdelen 'verkleinen en vergroten' en 'schaal' afronden.

Eerst beschrijven we in grote lijnen de leerstoflijn voor de bovenbouw (groep zeven en acht). We doen dit zowel aan de hand van op zichzelf staande activiteiten als ook via een meer thematische aanpak. Tenslotte zetten we de belangrijkste principes nog eens op een rijtje. En wel in het licht van doelstelling 1a en 1b:

Leerlingen kunnen verhoudingsproblemen oplossen die optreden bij:

- vergroten en verkleinen, en
- afbeelden op schaal.



figuur 1: Hoe hoog is de toren?

Groep zeven en acht

Een fundamentele vaardigheid bij meetkundige lengteverhoudingen is het kunnen afpassen van een (bekende) maat op een (nog onbekende) andere maat. Afhankelijk van de situatie:

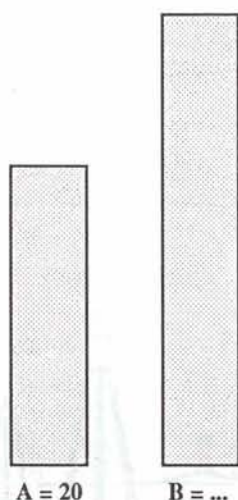
- schattend;
- met een papierstrookje;
- met een liniaal.

In de onderbouw en middenbouw is dit al aan de orde geweest. Maar ook in de bovenbouw is het raadzaam dit af en toe te oefenen. Dan komt opnieuw het belang van correct en consequent taalgebruik ter sprake. We bespreken dit nogmaals aan de hand van de opgave in figuur 1.¹

Op het kiekje met Marco blijkt dat Marco zes keer op de hoogte van de boom past (met een papierstrookje of een liniaal). De boom is *zes keer zo hoog* als Marco en Marco is *zes keer zo klein* als de boom of Marco's lengte is *één-zesde (deel)* van de boom.

Het is de vraag of de overigens correcte uitdrukking Marco is één-zesde keer zo groot als de boom niet verwarrend werkt.

De vraagstellingen voor het tweede kiekje wijzen zich nu vanzelf. Eventueel met uitbreiding naar de vergelijking van de toren en Marco. Oefeningen op het bord of op papier zijn aan te bevelen (fig.2).



figuur 2: Flats vergelijken

Flat A is 20 meter hoog. Hoe hoog is flat B. Hoeveel maal zo hoog?

We dienen ons bewust te zijn dat bij het gebruik van breuken de vraagstukjes al snel lastig kunnen zijn: 'B is $1\frac{1}{2}$ maal zo hoog als A' impliceert namelijk 'A is tweederde deel van B'.

We gaan meer en meer de nadruk leggen op het numerieke aspect. Afbeeldingen van de realiteit verbergen meestal een natuurlijke schaallijn, zoals we in het voorbeeld van Marco en de toren zagen. Een vergelijkbare activiteit vinden we in figuur 3.²

Alle lengten zijn te berekenen door te vergelijken met de lengte van het meisje, die na overleg in de klas op 1,50 meter wordt gesteld.

Immers je weet uit ervaring dat al die boeien even groot zijn. Het perspectief doet namelijk de verkleiningen ontstaan. Het is de regel: 'Wat verder weg is, lijkt kleiner.'

Dit is een activiteit om in groepjes te laten oplossen en zorgvuldig na te bespreken. Immers er komt zoveel meer aan de orde dan alleen de verhoudingen. We noemen:

- vergroten en verkleinen;
- maatkennis (lengte meisje);

- meten (al of niet met liniaal);
- metriek;
- begrip van perspectief;
- indirect meten (de boot in de verte).

Zeilboten op de Waddenzee. De voorste boot vaart juist langs boei EK 30.

1. Hoe hoog zou zo'n boei wel zijn?
2. En hoe hoog zou de zeilboot zijn?
3. In de verte, precies bij de achterste boei, zie je nog een zeilboot. Zou die zeilboot even hoog zijn als de voorste boot? Hoe zie je dat?
4. Even later vaart de voorste boot langs boei EK 31. Hoeveel centimeter hoog zou je de boot dan op de tekening moeten maken?
5. En hoeveel centimeter hoog zou je de boot naast boei EK32 moeten tekenen?



figuur 3: De zeemeeuw

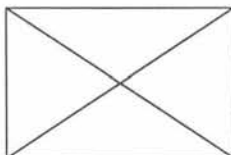
De vragen over de hoogte van de zeemeeuw op het plaatje als deze EK 31 en EK 32 passeert kunnen aanleiding geven tot verschillende strategieën.

De zeemeeuw is $1\frac{1}{2}$ maal zo groot als EK 30.

EK 31 is op de tekening 4 cm. Dus de zeemeeuw komt op $1\frac{1}{2} \times 4 = 6$ cm. Of EK 31 is twee maal zo klein als EK 30. Dus zal de zeemeeuw op dat punt ook twee maal zo klein moeten zijn. Hetgeen de hoogte oplevert van 6 cm.

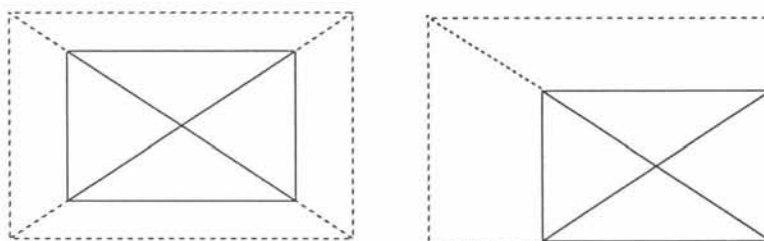
Of het verschil op de tekening tussen de zeemeeuw en EK 30 is 4 cm. Dit verschil wordt gehalveerd bij EK 31 dus 2 cm. Maar hoe je de redenering ook uitvoert, het achterliggende principe is steeds dat van de verhoudingsgetrouwe afbeelding.³

Om het aspect van de gelijkvormige figuren verder vast te zetten noemen we de volgende activiteit (fig.4).



figuur 4: Teken enveloppen met dezelfde vorm

Dit kan op verschillende manieren, waarvan we er enkele zien in figuur 5.



figuur 5: Vergrote enveloppen

Ook kan het door meten en rekenen met verhoudingen. Hierbij is de verhoudingstabel een uitstekend hulpmiddel: Je hebt een envelop met afmetingen van 3 en 6 cm. Maak enveloppen van dezelfde vorm van 9 bij ..., 24 bij ..., etc.

Een fotohandel biedt de volgende vergrotingen aan:

Vergroting	Prijs
20 bij 30 cm	fl. 2,95
30 bij 45 cm	fl. 8,95
40 bij 60 cm	fl. 19,95
50 bij 70 cm	fl. 27,50

figuur 6: Vergrotingen met prijzen

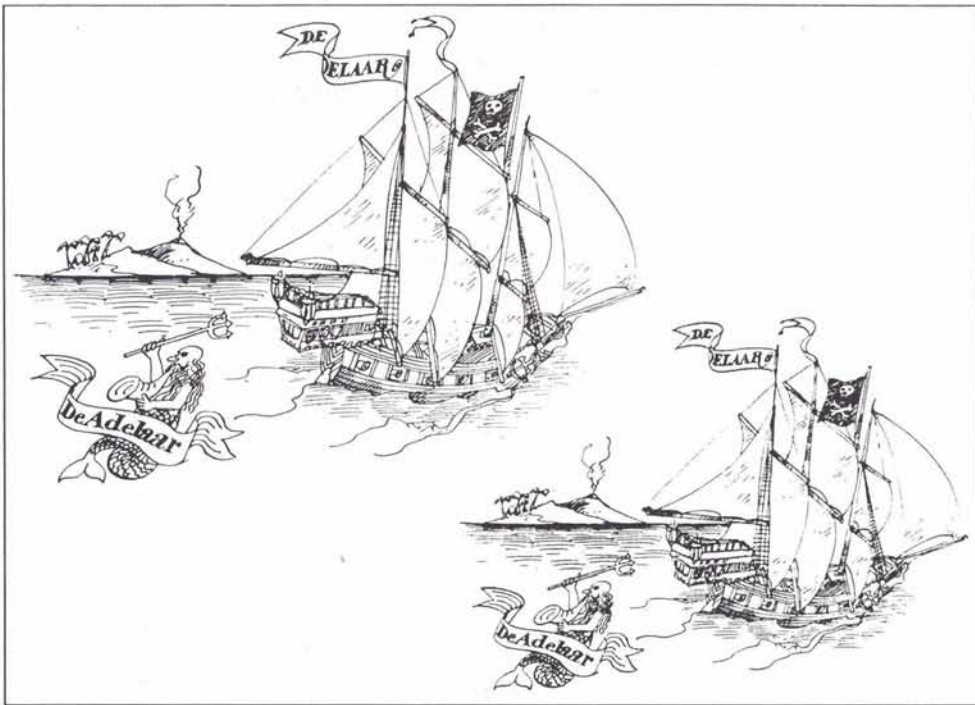
Vragen:

- Een normale foto is 10 bij 15 centimeter en kost een gulden.
Hoeveel maal is deze telkens vergroot?
- En de prijs, hoeveel maal is die telkens vergroot, hetzelfde of verschillend?

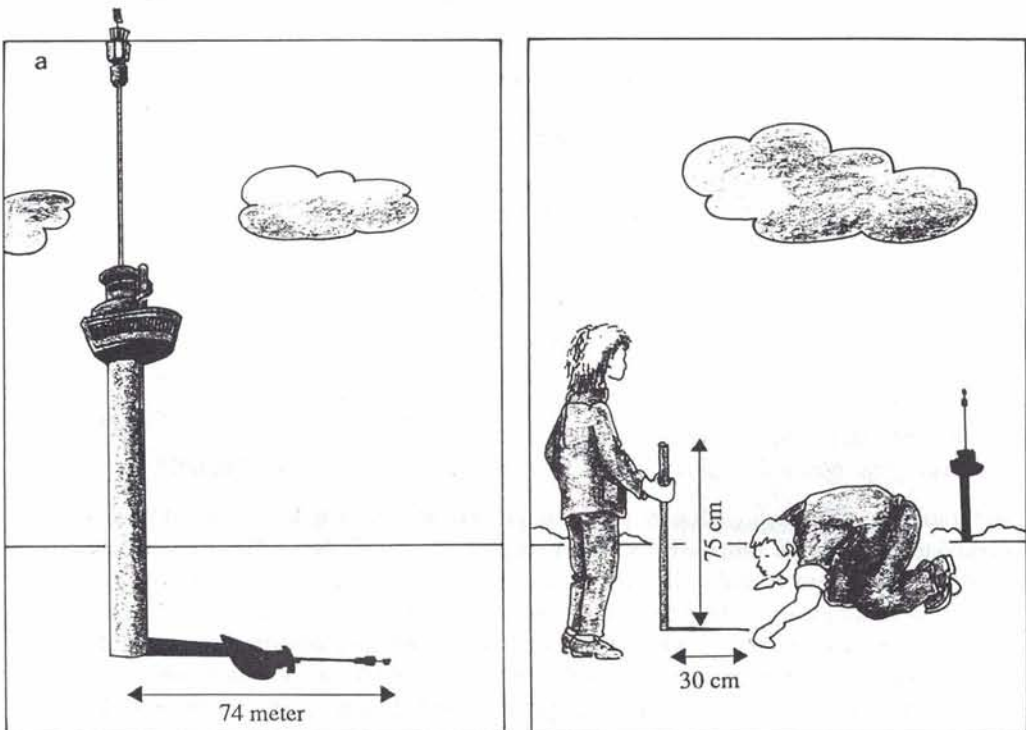
Het fotokopieerapparaat biedt uitdagende mogelijkheden om deze kwesties van vergroten en verkleinen op tamelijk simpele en praktisch toepasbare wijze in het onderwijs te brengen. We volstaan met een voorbeeld in figuur 7, maar we zullen er bij 'procenten' op terug komen.

De foto is verkleind op tachtig procent van het 'origineel'. Controleer dit door respectievelijke lengten en breedten na te meten. Op hoeveel moet je het fotokopieerapparaat zetten om de verkleining weer ongedaan te maken? 100 is verkleind tot 80. Om nu van 80 naar 100 te komen moet er 20 ($= \frac{1}{4} \times 80$) bij oftewel 25 procent. Andere activiteiten op dit onderdeel zijn die van wat we het stok-schaduw-model noemen.

De zon werpt een bundel evenwijdige lichtstralen op de aarde. Dit wekt op natuurlijke wijze de constante verhouding tussen beeld en schaduw op. We volstaan met een voorbeeld (fig.8).⁴ Zie ook het thema Madurodam.



figuur 7: Vergroten en verkleinen met het kopieerapparaat



figuur 8: Hoe hoog is de Euromast?

We komen terug op het begrip schaal.⁵ Voorwaarden voor een goed schaalbegrip zijn het vergroten en het verkleinen, zoals hiervoor aan de orde is geweest, alsmede het kunnen hanteren van de correcte taaluitdrukkingen.

Zoals we eerder en ook bij de beschrijving voor de groepen vier, vijf en zes al hebben laten zien is er geen handzamer methode om de werkelijke afmetingen van een bepaald object te kunnen vaststellen dan een voorwerp, waarvan de afmetingen bekend zijn, méé af te beelden.



figuur 9: Stalin de maat genomen

Het opzoeken van dergelijke afbeeldingen (foto's in kranten en tijdschriften) is een motive-rende opdracht voor de kinderen. De meetopdrachten liggen dan vanzelf voor de hand (fig.9). Maar we gaan nu een stapje verder naar de formalisering en we benoemen getalsmatig de mee afgebeelde lengtemaat. Vooral bij landkaarten en plattegronden is dit heel handig. Laat de kinderen ook zelf eens een afbeelding maken van een eenvoudig voorwerp. Dat kan eventueel met een vooraf opgegeven vergrotings- of verkleiningsfactor. Maar het kan ook heel open: Maak een plattegrond van je kamer, jullie straat of iets dergelijks.

Ook het omkeren van dergelijke opgaven is nuttig. Maak een werkblad met enkele (zie fig.10) afbeeldingen van herkenbare voorwerpen. Geef de echte lucifer, het kwartje en het lucifersdoosje erbij.



figuur 10: Hoeveel maal vergroot, verkleind?

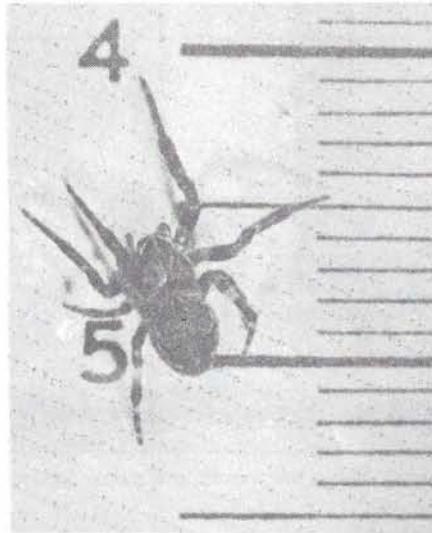
Het principe van de visuele schaal kan nog eens gedemonstreerd worden met behulp van de overheadprojector, waarbij aan het te projecteren voorwerp een doorzichtige plastic liniaal is toegevoegd. Zo ontstaat door de vergroting een nieuwe meetlat. Door de vergroting worden de absolute centimeters mee opgerekt, waardoor er een nieuwe meetlat ontstaat waarmee je ook weer in centimeters kunt meten. Je merkt als het ware niet dat alles zoveel maal zo groot is geworden. Een mooie opgave hiervoor is die van figuur 11.

In feite kun je niets zeggen over de afmetingen omdat niet gegeven is welke maten de liniaal aangeeft. Bij het gegeven dat het om een gewone huisspin gaat zullen de kinderen wel begrijpen dat het dus om centimeters gaat.

De leergang schaal zou hiermee rond kunnen zijn. Immers met een liniaal kan men elke lengte uit de mee afgebeelde schaallijn berekenen. Voor wie ook nog over wil gaan op de standaard-schrijfwijze maken we nog de volgende opmerkingen:

- Er zal nauwkeurig aandacht besteed moeten worden aan de volgende notaties en hun betekenissen:
 - 'tien maal zo klein' wordt als volgt genoteerd ' $1 : 10$ ' en uitgesproken als '1 op 10';
 - 'ware grootte' wordt genoteerd als ' $1 : 1$ ' en uitgesproken als '1 op 1';
 - 'tien maal zo groot' wordt genoteerd als ' $10 : 1$ ' en uitgesproken als '10 op 1';
- Het is onverstandig om de leergang schaal te starten met deze formele notatie. De uitkomsten van PPON wijzen uit dat een dergelijke aanpak niet beklijft.
- Het berekenen van lengtes uit (formele) schaalverhouding vereist vlotte kennis van het metriek stelsel.
- Tracht marcheren in het metriek stelsel te voorkomen. Pak ook dat met inzicht aan. Deze kaart is afgebeeld volgens $1 : 100.000$. Wat is de werkelijke lengte van een afstand van 5 cm?

- De kaart is 100.000 maal zo klein als de werkelijkheid.
- We moeten die 5 cm 100.000 maal zo groot maken.
- $5 \times 100.000 \text{ cm} = 500.000 \text{ cm}$.
- 100 cm in één meter, dus 5000 m.
- 1000 meter is een kilometer, dus 5 kilometer.



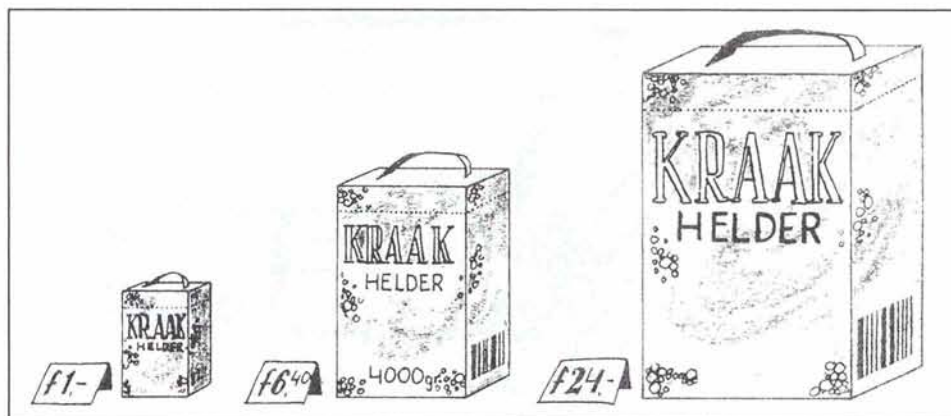
figuur 11: Hoe groot is deze spin?

Maar nogmaals, waarom deze weg met alle kansen op het maken van fouten en vergissingen als we ook bij de lengte van één echte centimeter op de kaart 1 km hadden kunnen schrijven. Schaallijn dus! (fig.12).



figuur 12: 1 : 100.000 of 1 cm ~ 1 km?

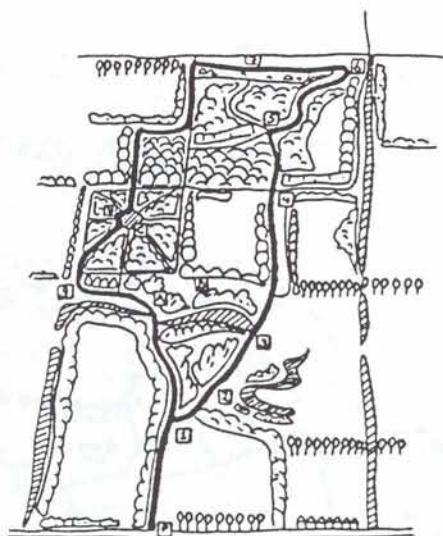
Vergrotings- en verkleiningsfactoren betreffen, zoals we in het voorafgaande zagen, alle de lengtematen, wat ook de gangbare manier is. Op oppervlakte en inhoud hebben vergrotingen en verkleiningen een andere dan een rechtevenredige uitwerking. Wordt een vierkant drie maal vergroot dan wordt de oppervlakte 9 ($=3^2$) maal zo groot. En bij een kubus wordt de inhoud 27 maal ($=3^3$) zo groot. Als voorbeeld daarvan geven we daarvan nog één vraagstuk (fig.13).⁶



figuur 13: Wat is het voordeligste pak zeepoeder?

Wandelen in 'Gooilust'

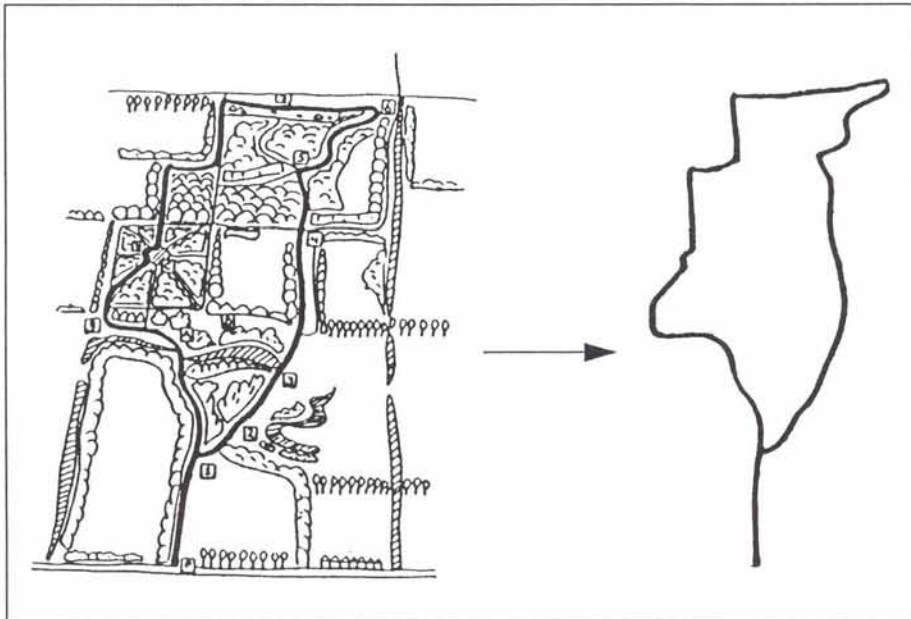
Dit thema staat model voor activiteiten die men op de omgeving van de eigen school kan betrekken.⁷ Er zijn nogal wat verbindingen mogelijk met meten en meetkunde. Deze zullen hooguit genoemd worden, alsook de mogelijkheid om bij sommige activiteiten de taal van de breuken toe te passen. Dáárom gaat het nu niet. Het is ons hier te doen om de volgende activiteiten.



figuur 14: Wandelroute 'Gooilust'

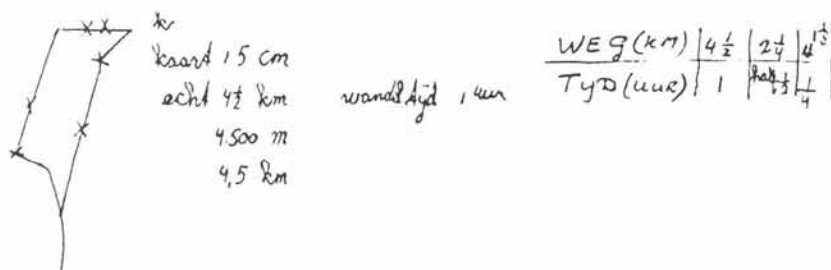
- uitgaan van een verkleinde weergave van de werkelijkheid (panoramische kaart); (fig.14);
- verkenning van de route aan de hand van schriftelijke informatie over bezienswaardigheden en foto's (Waar stond telkens de fotograaf?⁸);
- boven de kaart staat '4 $\frac{1}{2}$ kilometer/1 uur'. Het interpreteren van deze informatie: wat betekent dat?

- het vergelijken van de route met de weg van school naar huis (langer, korter, andere verschillen);
- het verder verschrappen van de panoramische kaart. De wandelroute wordt 'eruit gelicht' (fig.15);



figuur 15: Wandelroute 'Gooilust'

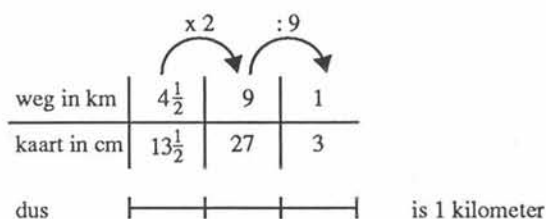
- het meten van de lengte van de 'uitgelichte route' (strategie?) en het verbinden van de werkelijke afstand met dit resultaat en omgekeerd(!), bijvoorbeeld:
' $4\frac{1}{2}$ kilometer is *verkleind* tot (of: 'wordt tot') $13\frac{1}{2}$ centimeter.'
Of omgekeerd:
' $13\frac{1}{2}$ centimeter moet *vergroot* worden tot $4\frac{1}{2}$ kilometer.'
enzovoort;
- het 'omzetten' van de route in een schaallijn door er met een kruisje gebeurtenissen op aan te geven, zoals:
'ze passeerden het eerste kilometerpaaltje na ...'
'toen ze (ongeveer) halverwege waren ...';
- de kruisjes op de route voorzien van passende afstand- en tijdinformatie;
- de route verder modelleren tot een tweeschalige route (eventueel tweeschalige getallenlijn) en daarbij een weg-tijd-tabel samenstellen (fig.16);



figuur 16

- aan de routekaart een visuele schaal toevoegen (fig.17);

- het oplossen van afstand-tijd-kwesties met voorgaande hulpmiddelen, bijvoorbeeld: halverwege de route werd er gepicknickt. Hoe ver had de familie Jansen toen al gelopen? Hoe lang zullen zij onderweg geweest zijn?



figuur 17

Opmerking

De op de kaart aangegeven wandeltijd is een *model*tijd die op een gemiddelde berust. Deze wordt bij de verkenning vooraf gerelativeerd en afhankelijk gesteld van zaken als oponthoud door bezienswaardigheden onderweg, of obstakels, zoals de wisselende kwaliteit van het wandelterrein (mul zand tegenover een verhard pad).

In de voorgestelde activiteiten gaat het vooral weer om de *constructie* van tweeschalige getallenlijn en verhoudingstabel. Vervolgens worden deze hulpmiddelen ingezet voor kleine kwesties in dezelfde context, dat wil zeggen overeenkomstig aan de vragen die de constructie uitlokten.

Onze school in Madurodam

Het experiment met de kartonnen kokers op verschillende afstanden van een plaat wees uit, dat bij grotere afstand meer wordt overzien, maar dat alles wel kleiner (en dus onscherper) geworden lijkt te zijn.⁹

Dit idee wordt opnieuw bewust gemaakt. De activiteiten staan in het teken van het maken van een model van de school, bestemd voor Madurodam.

Hiervoor is al heel wat voorwerk gedaan. De daarin opgedane ervaringen en voorkennis komen nu goed van pas, zoals:

- de afmetingen van één lokaal en van meerdere lokalen op rij;
- de lengte van een blauwe vinvis in de gang;
- de lengte van ieders weg van school naar huis;
- de hoogte van een deur;
- enzovoort.

Om enigszins vertrouwd te raken met de schaalaspecten van Madurodam, kan de bouw van de eigen school hiervoor ingeleid worden met de volgende verkenning.

Madurodam verkend

De centrale vraag luidt: Op welke schaal is Madurodam gebouwd?

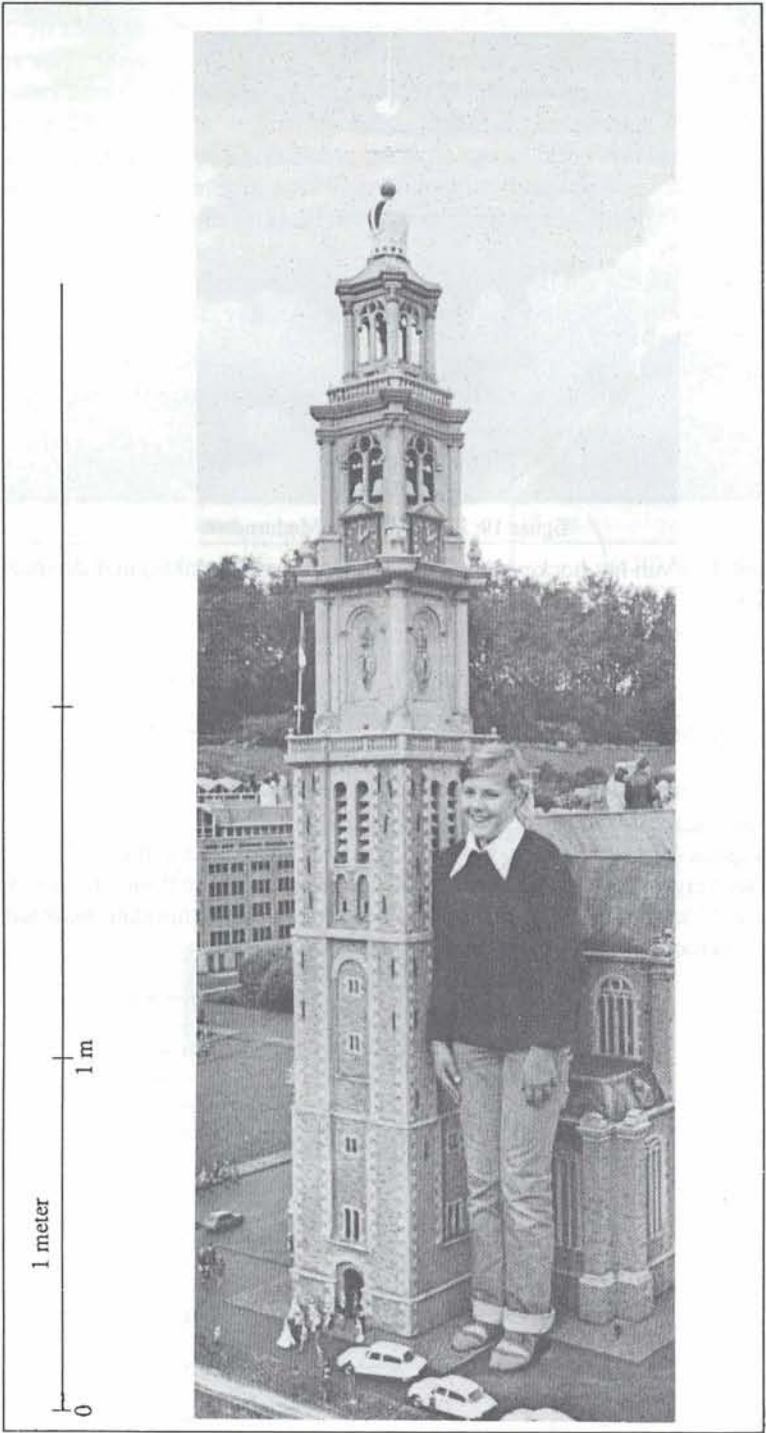
Het is mogelijk dat de kinderen dit op grond van een bezoek al weten. In dat geval kunnen de volgende activiteiten meer de functie hebben van nagaan of het klopt.

- de Westertoren (fig.18)¹⁰ in Madurodam met meisje en meetlat als referentiepunten;
- schatten van de hoogte;
- meten op het oog;
- bepalen van de werkelijke hoogte (bij benadering) door het verder invullen van de schaal-lijn.

Voor de bepaling van de hoogte van de echte Westertoren is kennis van de schaal waarop Madurodam gebouwd is, vereist.

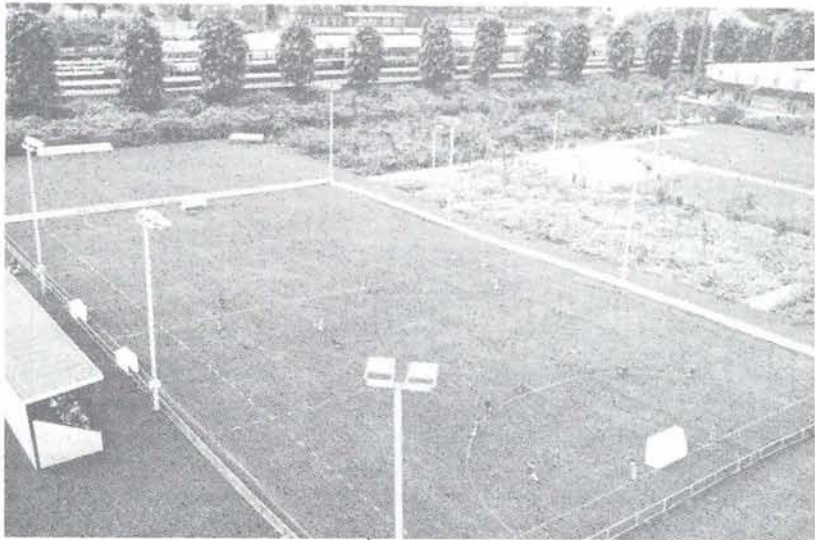
Dit schaalgetal of de verhouding tussen de (lineaire) afmetingen in Madurodam en de werke-

lijkheid - kan weer zelf bepaald worden door hetzij de werkelijke hoogte van de Westertoren te geven òf uit een ander, eenvoudiger gegeven af te leiden. We kiezen voor het laatste.



figuur 18: Westertoren

Madurodam kent ook sportparken, onder andere een hockeyveld (fig.19).

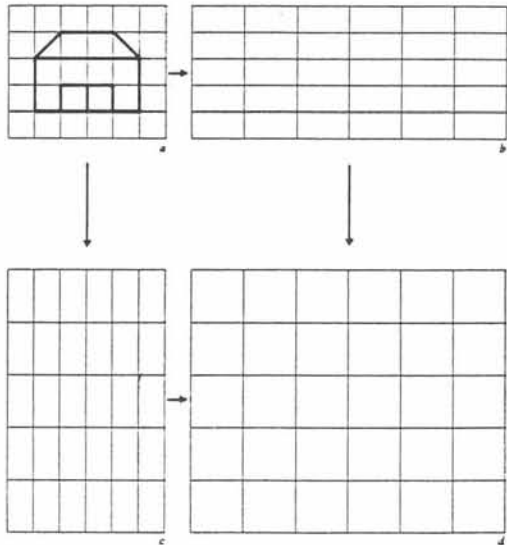


figuur 19: Hockeyveld in Madurodam

- het vergelijken van het hockeyveld (lengte, breedte, oppervlakte) met de speelplaats van de school;
- schatten, kwalitatief ordenen en preciezer bepalen:¹¹

hockeyveld echt	breedte 50 meter	lengte 100 meter	breedte doel ?
hockeyveld in Madurodam	2 meter	?	(ruim) 14 cm

- het vertalen van de diverse werkelijke maten van hockeyveld naar Madurodamse afmetingen en omgekeerd. Er blijkt: 100 meter, 50 meter, 25 meter, ... wordt verkleind tot achtereenvolgens 4 meter, 2 meter, 1 meter ... en omgekeerd: 1 centimeter, 10 centimeter, 14 centimeter vergroot tot 25 centimeter, 250 centimeter, 350 centimeter. Dus: *naar* Madurodam *toe* 25 keer zo klein of het $\frac{1}{25}$ deel nemen en *van* Madurodam *naar* werkelijkheid 25 keer zo groot.



figuur 20: Vervormen

Opmerkingen

1. De bemiddeling van de factor 25 tussen de werkelijkheid en Madurodamse afmetingen dient in passende taal te worden weergegeven:
 '25 keer zo klein' tegenover '25 keer zo groot';
 '25 tot 1 verkleinen' tegenover '1 tot 25 vergroten';
 'het $\frac{1}{25}$ deel nemen' tegenover '25 keer zo groot nemen';
 '— is 25 centimeter' tegenover 'tja, ...' (was het papier maar wat breder).
2. Wat bij de reuzenzool van Egbert¹² aan het licht kwam, blijkt ook hier, namelijk de verschillende afmetingen van een voorwerp ondergaan dezelfde verkleining/vergroting bij het afbeelden op schaal. Gebeurt dit niet dan ontstaat een lachspiegelbeeld, dus een vervorming (fig.20).
 Anders geformuleerd: de eis van gelijkvormig blijven bij het afbeelden op schaal moet worden gerespecteerd. Het verkleinen en vergroten moet in alle richtingen (dimensies) op dezelfde manier gebeuren.¹³

Overigens kan de vraag naar de werkelijke hoogte van de Westertoren nu beantwoord worden:

	meetlat	meisje	Westertoren
Foto	5 cm	8 cm	18 cm
Echt	100 cm		90 m
Madurodam			3 m 60

Er zijn allerlei mogelijkheden die tot het gewenste resultaat kunnen leiden, namelijk via:

- de foto, Westertoren volgens schaallijn 3 m 60, dus $25 \times 3 \text{ m } 60 = 90 \text{ m}$; of
- de tabel, Westertoren twee meetlatten en één meisje dus 3 m 60 etc.

Het is zaak de uitgangspunten 'foto', 'Madurodam' en 'werkelijkheid' bij het redeneren goed uit elkaar te houden.

Madurodam is zo groot als twee voetbalvelden naast elkaar (honderd meter lang en honderd meter breed). Nu is een startbaan op het echte Schiphol drieduizend meter of drie kilometer lang.



figuur 21: Schiphol in Madurodam

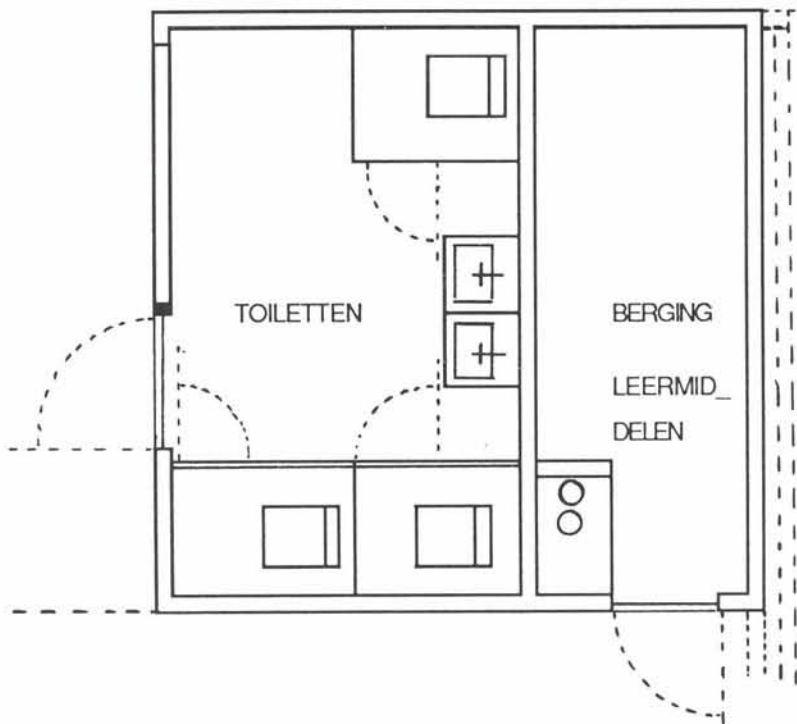
- vergelijken met de weg van school naar huis (langer, korter);
- de lengte van de Madurodamse startbaan bepalen (fig.21);
- de startbaan in Madurodam is negen meter lang. Commentaar?
- vergelijken met het voorgaande, en de gevolgen van de schaal voor Madurodam vaststellen;
- inspelen op kwesties als de afmetingen van Madurodam, wanneer dit *geen* miniatuurstad was, in voetbalvelden, meters en kilometers;
Zou ieders weg van school naar huis zó in Madurodam passen? Wat kan in dit verband met de te kiezen plek voor de modelschool nog gedaan worden?

Modelschool

De school gaat op schaal nagebouwd worden voor Madurodam.¹⁴ Dit behelst nogal wat activiteiten, zoals het maken van plattegronden en aanzichten.

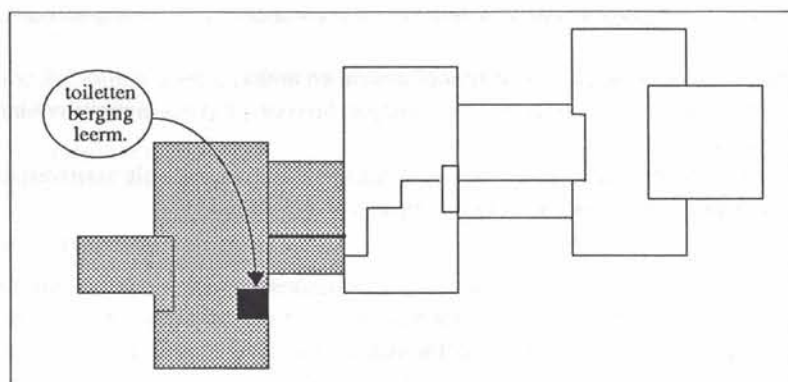
Daarbij is een aantal problemen te overwinnen:

- de schaal van Madurodam is niet zo geschikt (1 op 25); drie lokalen op rij, zeg 25 meter, vergt al 1 meter tekenruimte;
- de schaal die de echte architect meestal gebruikt, namelijk 1 op 50, is geschikter, dus moet alles op Madurodam-grootte nog eens twee keer zo klein gemaakt worden;
- het bepalen van de afmetingen van geschikte tekenvellen voor de plattegrond van de school (een architect gebruikt vellen van 90 cm bij 1 m 20 (fig.22);



figuur 22: Een stukje uit de tekening van een architect:
ruimte 4 m bij 4 m

- vanwege het overzicht maakt de architect er nog sterker verkleinde tekeningen bij (op welke schaal?) (fig.23).



figuur 23: Overzicht school. Schaal?

Van 4 meter in de werkelijkheid naar 8 centimeter op de bestektekening (fig.22):

$$\begin{array}{c|c|c} 4 \text{ m} = 400 \text{ cm} & 100 \text{ cm} & 50 \text{ cm} \\ \hline ? \swarrow & 8 \text{ cm} & 2 \text{ cm} & 1 \text{ cm} \end{array}$$

('50 keer zo klein' of '50 wordt verkleind tot 1'), en: van 8 cm op de bestektekening naar 4 millimeter op de overzichtstekening (fig.23):

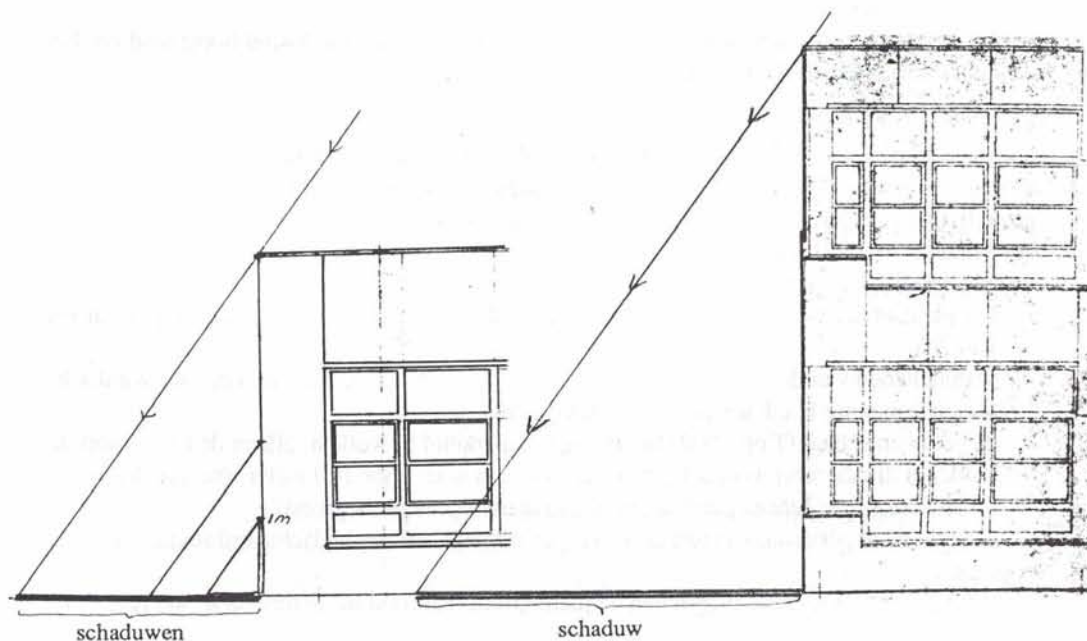
$$\begin{array}{c|c} 8 \text{ cm} = 80 \text{ mm} & 20 \text{ mm} \\ \hline ? \swarrow & 4 \text{ mm} & 1 \text{ mm} \end{array}$$

('20 keer zo klein' of '20 wordt verkleind tot 1').

Beide verkleiningen samengesteld geeft:

werkelijke school	4 meter	: 50	4000 mm
bestektekening	8 cm		: 1000
overzicht	4 mm	: 20	4 mm

dus '1000 keer zo klein' of '1000 wordt verkleind tot 1'.



figuur 24: 'Onbereikbare' hoogte gemeten

Met dergelijke vaststellingen is men er nog niet, want wat er nog meer zou moeten gebeuren is:

- de ‘onbereikbare’ hoogten van de school meten, en andere hoogten voor het tekenen van de aanzichten. Dit vraagt om een eigen strategie, bijvoorbeeld het meten en rederenen met (zonne-)schaduwen (fig.24).

Met steun van een verticaal geposteerde meetlat, of van andere verticale voorwerpen van bekende lengte, kan de onbereikbare schoolhoogte worden bepaald.

Opmerking

Uit de jaargroep kunnen eventueel enkele vaste waarnemers worden benoemd. Deze gaan dan het verloop van de schaduw na op zoek naar gunstige omstandigheden, bijvoorbeeld: om ongeveer ... uur is de schaduw van de meetlat óók 1 meter lang, dus ..., òf dubbel zo lang, dus ..., etc.

Na al het verrichte voorwerk volgt de bouw van de school op schaal. De ‘schaal van de architect’ (50 keer verkleinen) moet dus eerst worden omgezet in die voor Madurodam (‘alles ‘maar’ 25 keer verkleinen’). Het extra ‘nog 2 keer zo klein’ maken, wat de architect deed, moet nu weer ongedaan worden gemaakt. De afmetingen die de ‘jonge architecten’ op hun bestektekeningen toepasten worden dus twee maal zo groot genomen om in Madurodamse sferen te belanden.

Door zelf een model van de school te bouwen worden de leerlingen zich (nog eens) bewust: het verkleinen werkt in drie richtingen, de lengte wordt niet alleen 25 keer zo klein gemaakt, maar ook de breedte en de hoogte.

‘School in sluis’

In Madurodam ligt ook een sluis, de Prinses Beatrixsluis, nagemaakt naar de echte in Vreeswijk. (Hoe oud moet die sluis *minstens* al zijn?) In de buurt ervan is nog een plekje voor ‘onze’ school. Valt de school te vergelijken met deze sluis?

De Prinses Beatrixsluis is 225 meter lang, 18 meter breed en 10,85 meter hoog.

Nagegaan wordt:

- het aantal schoollokalen dat erin past;
- de afmetingen van de sluis in Madurodam;
- het aantal Madurodamse lokalen dat erin past;
- het aantal volle lokalen water in de sluis, wanneer dit anderhalf lokaal hoog staat (en het aantal zwembaden dat hiermee gevuld kan worden).

Van plattegrond naar ...

Voorgaande activiteiten kunnen een nasleep hebben in de sfeer van kaartbegrip en schaal. We gaan daarvoor nog eens even terug naar de plattegrond van de school met als schaal 1 (vergroten) tot 1000 (fig.23) (let ook op alternatieve uitdrukkingen als ‘het $\frac{1}{1000}$ deel van ...’, ‘duizend maal zo klein’ en dergelijke).

Enkele vervolgactiviteiten:

- het plaatsen van deze plattegrond in het midden van een groot vel papier (90 cm bij 1 m 20);
- het intekenen van de routes van school naar huis van enkele kinderen in de vier windrichtingen, rekening houdend met de schaal(lijnen);¹⁵
- de gekozen schaal (1 op 1000) blijkt nogal beperkend te werken; alleen de routes van de kinderen die dichtbij wonen kunnen erop (10 cm staat voor 100 meter, dus een halve kilometer vanaf de school geeft al een halve meter op de plattegrond).

In een gedacht experiment kan aan de verkregen plattegrond een bedachte uitbreiding worden gegeven:

- het bepalen van de afmetingen van de plattegrond (kaart) voor de hele wijk, het hele dorp of de hele stad;

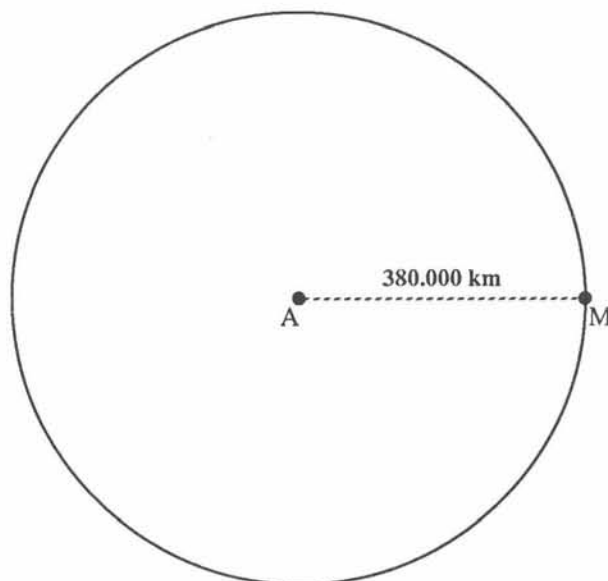
- het bepalen van de verkleiningsfactor om het voorgaande op het gegeven vel papier te kunnen realiseren;
- het bepalen van deze factor voor de streek, de provincie, het hele land of Europa met het oog op het voorgaande.

We sluiten het thema 'modelschool' af met de vaststelling dat het realiseren van de omgeving ervan in Madurodam teveel ruimte zou vergen.

Aarde- maan- zonmodel

We kiezen de sfeer van satellieten en besluiten dit themagedeelte met enkele suggesties voor het (in gedachten) bouwen van een model op schaal voor de aarde, de maan en de zon. Dit verkleinde model van de werkelijkheid is vooral bedoeld om de leerlingen greep te laten krijgen op enkele onvoorstelbare grote, 'kleine' afstanden in het ons omringende heelal.

Allereerst is er wat (voor-)informatie nodig. De afstand van de aarde tot de maan is 380.000 (380 duizend) kilometer en tot de zon 150.000.000 (150 miljoen) kilometer. Het 'greep' krijgen hierop kan in stappen worden aangepakt.¹⁶



figuur 25

- het naar verhouding weergeven van de afstand van de aarde tot de maan (fig.25) en hun afmetingen voorlopig nog maar even laten rusten.

De maan (M) op een afstand van 38 millimeter van de aarde (A) lijkt een handige schaal: 10.000 km wordt tot 1 mm, dus omgekeerd 1 mm = 10.000 km;

- het bepalen van de plaats van de zon in dit model:

km	10.000	10.000.000	150.000.000
mm	1	1000 = 1 m	15 m

De gang in de school, zo die er is, zal erbij betrokken moeten worden om het model ook echt te kunnen maken. Dan zullen de afmetingen van de drie hemellichamen in dit model verwerkt moeten worden. De diameters van aarde, maan en zon zijn respectievelijk zo'n 12.000 km, 3.500 km en 1.400.000 km;

- het nagaan van verschillende mogelijkheden voor de aarde binnen het model: wanneer de aarde voorgesteld wordt door een tennisbal, een knikker, ..., dan is de maan een knikker, een fietskogeltje ... en dat zou de zon een ... zijn.

Echter, de eerder vastgestelde schaal, 1 mm staat voor 10.000 km, brengt aarde en maan terug tot niet meer dan speldekknoppen van respectievelijk:

km	10.000	12.000	en	km	10.000	1000	3.500
mm	1	1,2		mm	1	0,1	0,35

Voor de zon daarentegen geldt:

km	10.000	140.000	1.400.000
mm	1	14	140 = 14 cm

Die kan dus door een bal met een diameter van 14 centimeter worden voorgesteld.
Is de aarde vanaf de zon nog wel te zien? En de maan?

Men kan ook eerst uitgaan van de betrokken hemellichamen - vanwege de mate van concreetheid is dat misschien wel beter - en daarvoor voorwerpen naar verhouding in het model laten kiezen. De afstanden kunnen daaruit vervolgens op overeenkomstige schaal worden vastgesteld. Goddijn, op wiens werk deze suggesties gebaseerd zijn, benaderde deze kwestie op die manier.¹⁷ We nemen een klein stukje uit zijn docentenhandleiding over (fig.26).



Er wordt een zon getekend, na afpassen met een schaallijn waarop 25 cm met een half miljoen km overeenkomt.

Zo moet de aarde een punaise worden, de maan een graszaadje en die twee op zeventig meter van de zon vandaan. Dat doen we op de speelplaats. Niet iedereen is geïmponeerd door de peilloze diepten van het heelal, maar er zijn ook vragen naar ruimtevaart, maansverduistering en over de snelheid waarmee je op aarde terecht komt, als je van heel hoog, zo hoog mogelijk, valt. Het blijft allemaal heel moeilijk voorstelbaar, die grote afstanden, maar dat geldt toch voor iedereen!



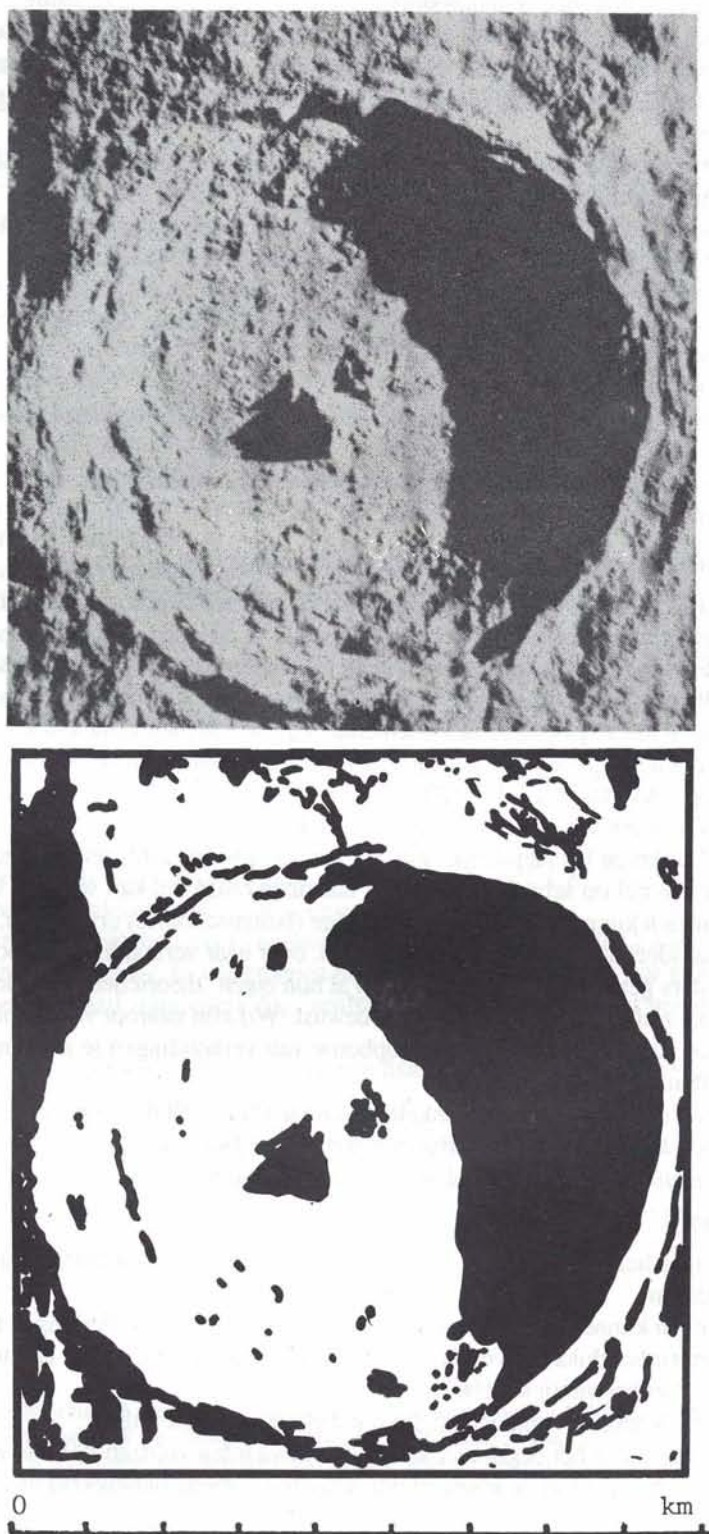
figuur 26: Uitgaan van een model voor de zon

Hoe het ook zij, door de keuze van een verstandige schaal kan het onvoorstelbaar grote heelal, althans een 'miezerig stukje' ervan, voorstelbaar worden gemaakt.

Om ook die onvoorstelbaarheid in ons begrijpen te betrekken, denken we de dichtst bijzijnde ster in het model. Deze staat 270.000 keer zo ver van de aarde weg als de zon. Dit brengt met zich mee:

- het bepalen van de modelafstand van deze ster: $270.000 \times 15 \text{ meter} = 4050.000 \text{ meter} = 4050 \text{ kilometer}$.

Op de leerweg naar bovengeschetst doel zijn allerlei activiteiten mogelijk. Enkele suggesties hiervoor, opnieuw geïnspireerd op Goddijs 'Klein en Groot', zijn:



figuur 27

- het tekenen van de maan (ziet 'ie er steeds hetzelfde uit?) en van de zon;
 - het nadenken over en onderling vergelijken van afstanden (aarde, Jumbo-jet, wolken, maan, weersatelliet, meest nabije ster);
 - het tekenen van schaallijnen bij foto's van maangedeelten en het vertalen van aardse afstanden naar het maanse (fig.27). Het is een foto van een stukje van de maan: een ringvormige bergketen. Het is de krater Tycho. De middellijn is 80 km. Zet getallen bij de schaallijn;
 - het tekenen van bekende aardse afstanden op dergelijke foto's, bijvoorbeeld de afstand Amsterdam-Utrecht in de krater Tycho;
 - het bepalen van de afmetingen van een maanfoto, wanneer gegeven is dat de foto van Tycho er een stukje van is en de middellijn van de maan 3.500 kilometer;
 - het analyseren van satellietfoto's van de aarde; de maan op dezelfde schaal toevoegen;
 - het tekenen van aarde en maan met bijbehorende baan om de aarde op schaal onder toepassing van geschikte schaallijnen;
 - idem met de zon;
 - het verwerken van de onderlinge afstanden van genoemde hemellichamen op schaal in het model (tentoonstellingsruimte?);
 - het denken van andere planeten in het model en de dichtst bijzijnde ster.
- Daarmee zijn we weer terug bij het begin.

Voorwaarden, didactische en onderwijskundige principes

De kijkwereld van kinderen - speelgoed en prentenboeken inbegrepen - is een rijke bron voor verhoudingen, onuitputtelijk en niet zo gemakkelijk te ordenen. Bij de voorbeelden die we gaven viel de keuze op *schaal als thema* om het onderling vergelijken, het verkleinen en vergroten, gelijkvormigheid e.d. aan te verhelderen, eerst puur kwalitatief (globaal schatten; er komt geen getal aan te pas) later in toenemende mate kwantitatief (metend). Toepassing van schaallijn (als standaardisering van de getallenlijn met dubbele schaal) als ondersteuning van het meten (op schaal) wordt benadrukt.

Aan het formaliseren van de verhouding van werkelijkheid en (verkleind) model tot 'schaal 1 op zoveel' kwamen we nauwelijks toe. Daarentegen werd ruim aandacht geschonken aan de taal waarmee het op schaal afbeelden of namaken omgeven kan worden. Omdat vrijwel alle kinderen zich kunnen beroepen op de nodige (buitenschoolse) ervaringen, heeft ieder zo al zijn of haar ideeën over vergroten, verkleinen, over naar verhouding te groot, te klein, enzovoort. Anders gezegd: de kinderen hebben al hun eigen 'theorietjes' voor deze verhoudingen, al zijn ze zich hiervan misschien niet bewust. Wij zijn daarom van mening dat het belangrijk is dit als uitgangspunt voor de opbouw van verhoudingen te accepteren en hierop voort te borduren.

In verband hiermee formuleren we enkele voorwaarden alsook didactische en onderwijskundige principes. Dat daarbij dwarsverbanden met andere leerstofgebieden, met name meten en meetkunde, aan het licht komen, zal de lezer niet verbazen.

Voorwaarden

- de leerlingen hebben (intuïtieve) ervaringen opgedaan met gelijkvormigheid bij vergroten en verkleinen;
- de leerlingen kunnen de basisvaardigheden bij de vier hoofdbewerkingen toepassen;
- de leerlingen beschikken over enige vaardigheid in het meten en het daarmee verbonden omrekenen in het metriek stelsel;
- de leerlingen hebben enige vaardigheid in het rekenen met nullen.

Het is duidelijk dat in het begin niet aan alle voorwaarden voldaan hoeft te zijn en ook dat deze vaardigheden deels in de voorgestelde activiteiten mede ontwikkeld worden.

Didactische principes

Wij menen dat het belangrijk is een opbouw te volgen die is afgestemd op de kennis die kinderen van de realiteit hebben wat verhoudingen aangaat. Voor het bewust maken van deze kennis wordt (mede) een beroep op *conflictsituaties* gedaan. De kinderen worden geplaatst voor (ogenschijnlijk) tegenstrijdige verschijnselen, die om een nadere verklaring vragen (denk in dit verband bijvoorbeeld aan wat er aan de verhoudingen mis is met lachspiegelbeelden).

Een volgend belangrijk principe is het zelf maken van verhoudingen, het tekenen van eigen *constructies*. Er moet volop gelegenheid zijn verhoudingen meetkundig uit te drukken. Aanvankelijk ligt de nadruk daarbij sterk op het ruimtelijk oriënteren in concreto. Geleidelijk aan echter komt de nadruk te liggen op een meer verschaalde en gestileerde werkelijkheid. Aspecten van meer traditionele meetkunde worden er (dan) steeds duidelijker in herkenbaar.¹⁸ *Modelvorming* speelde een belangrijke rol binnen de hele opbouw. Bijvoorbeeld het maken van een model van (en voor) ons zonnestelsel (aarde, maan en zon met hun onderlinge grootte, afstanden en banen). De essentie waar het bij verhoudingen om gaat komt dan aan het licht, namelijk het vergelijken dan wel vergelijkbaar maken van situaties uit de werkelijkheid door er een verkleind (of vergroot) model van te maken om over bepaalde kwesties te kunnen beslissen.

In de aanloop tot de voorwaarden werden al enkele didactische principes genoemd met een toerustingskarakter, namelijk:

- aandacht voor een kwalitatieve benadering en schatten;
- het gebruik van modellen en schema's (twee-schalige getallenlijn, visuele schaal en verhoudingstabellen);
- het ontwikkelen van een persoonlijke schaal van gekende en doorleefde maten;
- accent op de ontwikkeling van een passende taal bij vergroten, verkleinen en schaal.

Onderwijskundige principes

Onderwijs dat bij het hiervoor genoemde past, kenmerkt zich door de volgende onderwijskundige principes:

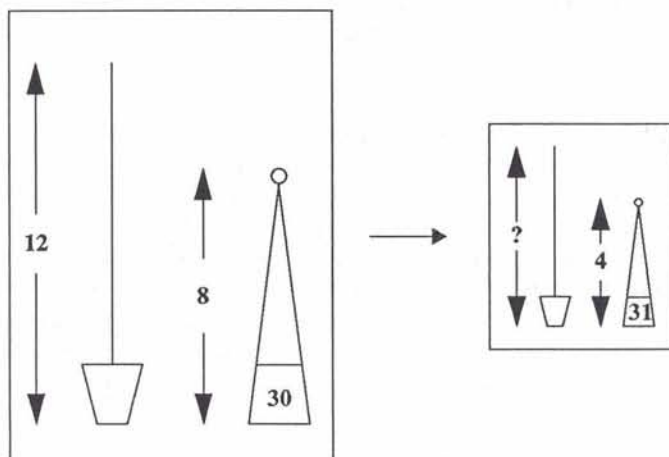
- er is een sterke verbinding met de algemene doelen die worden nagestreefd;¹⁹
- het gaat veelal om begripsvormende activiteiten, in groepjes te doen, in ieder geval in sterk *interactief* onderwijs (dus niet oefenen);
- het gaat om het enkele malen per jaar aan de orde stellen van bepaalde kwesties met steeds verdergaande verdieping. In alle groepen bijvoorbeeld twee keer per jaar grondig zo'n activiteit doen in plaats van iedere dag, zoals bij het hoofdrekenen het geval zou kunnen zijn;
- er ligt een sterke verbinding met het nuttigheidsaspect van het reken-wiskundeonderwijs (het lezen van kaarten en plattegronden).

Hiermee achten wij de doelstelling 1a en 1b²⁰ voldoende uitgewerkt. Naar verhouding kreeg dit deel van de betrokken doelstelling ruim aandacht als belangwekkende bron voor dit gebied. Terecht menen wij. Verwaarlozing ervan in het verleden maakte het terugbrengen tot meer aanvaardbare proporties noodzakelijk.

Noten

1. Deze opgave is ontleend aan *Rekenen & Wiskunde*, opdrachtenboek 5A. Wij hebben de opgave iets gewijzigd. Voornamelijk om de meetuitkomsten met de liniaal mooier te laten uitkomen.
2. Uit: *Rekenen & Wiskunde*, Allerlei Boek 5A, pag.69. We hebben met opzet de lengte van het meisje weggelaten.
De handleiding van 'Rekenen & Wiskunde' geeft over deze activiteit geen enkele informatie.

3. Schematisch kun je dit als volgt weergeven (fig.28). Het is echter de vraag of zo'n vershraling niet blokkerend zou kunnen zijn voor de begripsvorming van gelijkvormige afbeeldingen. Immers, uit de tekening kun je de reële situatie op het punt EK31 indenken, terwijl dit bij het schema verdwenen is. In het schema is het als het ware een formeel meetkundesommetje geworden.



figuur 28

4. Uit de NOT-serie *Pluspunt*, werkboekje 5.
5. Zie ook: Moor, E. de: *Schaal, Willem Bartjens*, 3(2), pag.73-81.
6. Uit de NOT-serie *Pluspunt*, werkboekje 5.
7. Zie: Streefland, L.: *Realistisch breukenonderwijs*, Utrecht 1988, hoofdstuk 4.
Het materiaal voor dit theemaatje is geïnspireerd op:
Dijkhuizen, S.: *Op stap in eigen land*, Ede 1983.
8. Zie: Gravemeijer, K., E. de Moor en A. Treffers: *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool*. Deel IV: Meten en meetkunde, verschijnt in 1994.
Gravemeijer, K.: *Realistic Geometry Instruction*, (K. Gravemeijer, M. van den Heuvel en L. Streefland), *Contexts Free Productions Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education*, OW & OC, Utrecht 1990, pag.79-91.
9. Streefland, L., E. de Moor en A. Treffers: *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool* (8). Verhoudingen (2a), *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 8(3), 1990, pag.43-64.
10. Scholten, P.: *Open kaart*, NOT, Den Haag 1978.
11. De Larousse geeft voor een hockeyveld 55 bij 91 meter.
12. Zie noot 9.
13. Streefland, L., E. de Moor en A. Treffers: *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool* (7). Verhoudingen (1), *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 8(2), 1989, pag.50-59.
14. Het werk kan onder de leerlingen, in hun rol van architecten, verdeeld worden (groepjes). Deze activiteit is vakoverstijgend en zal (vermoedelijk) meer handenarbeidlessen vergen dan reken-wiskundelessen.
15. Zie noot 9.
16. We beschouwen het overigens wel als een noodzakelijke voorwaarde dat de leerlingen over de nodige inzichten beschikken in elementaire kennis van (de bewegingen in) ons zonnestelsel. Met elementaire kennis bedoelen we dan kennis die verder reikt dan 'de zon komt in het oosten op en gaat in het westen onder' en 'de aarde draait'.
17. Goddijn, A.: *Klein en Groot*, docentenhandleiding en leerlingenboek, IOWO, Utrecht 1980.
Docentenboek o.c. pag.23.
18. Zie mettertijd de 'Proeve ...', deel IV.
19. Zie: Treffers, A., E. de Moor en E. Feijs: *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool*. Deel I. Overzicht einddoelen, Tilburg 1989, pag.32-40.
20. Zie: Streefland, L., E. de Moor en A. Treffers: *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool* (8). Verhoudingen (1), *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 8(2), 1989, pag.50-58.