

Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (8)

L. Streefland, E. de Moor en A. Treffers

Verhoudingen (2a)

Zoals in de vorige aflevering (nummer 7) van deze serie aangekondigd, zal ook dit artikel over 'verkleinen en vergroten' en 'schaal' gaan.¹ Wij hebben aangekondigd een leerstofopbouw, voorzien van concrete activiteiten, te schetsen. Tevens willen we de daarbij behorende onderwijsprincipes formuleren. Om deze beloften te kunnen inlossen hebben wij echter twee afleveringen nodig. Vandaar dat na verhoudingen (2a) in de volgende aflevering van dit tijdschrift deel 2b zal volgen.

In dit deel bespreken we eerst enkele uitkomsten van de Periodieke Peiling van het Onderwijs Niveau (PPON).² Hiermee geven we een indruk van het prestatieniveau in Nederland op bedoelde onderdelen. Tevens bieden deze resultaten aanwijzingen voor mogelijke verbeteringen van het onderwijs.

Daarna beschrijven we in grote lijnen de leerstoflijn voor de onderbouw (groepen één, twee en drie) en de middenbouw (groepen vier, vijf en zes). Dit geschiedt aan de hand van voorbeelden.

Voor de onderbouw aan de hand van op zichzelf staande activiteiten. Voor de middenbouw zowel door middel van op zichzelf staan problemen als ook via activiteiten ingebed in een thema of project. Met dit project, dat bekend staat als 'De groeten van de reus', wordt deel 2a afgesloten.

In de volgende aflevering zal de leerstoflijn worden doorgetrokken voor de groepen zeven en acht. Tevens komen dan de didactische en onderwijskundige principes, behorende bij deze onderdelen, aan bod.

PPON en andere onderzoeksgegevens

Basisscholen kennen niet alle hetzelfde belang toe aan verhoudingen. Het PPON-onderzoek wijst uit dat over dit onderwerp verschillend wordt gedacht. Er is met name nogal wat verschil tussen de scholen over de 'formele benadering' van verhoudingen en qua 'tijdsinvestering'. Deze verschillen worden voor een deel bepaald door de gebruikte methoden. Gemiddeld wordt in de hoogste drie leerjaren vier procent van de onderwijstijd voor rekenen-wiskunde aan verhoudingen besteed. Dit gemiddelde versluiert echter de onderlinge verschillen. Er zijn scholen die wel driemaal de gemiddelde tijd in verhoudingen steken. Maar er zijn ook scholen, die niets aan dit onderwerp doen(!). Als men het belang en de rijkdom van verhoudingen bekijkt, kan men zich afvragen hoe dit mogelijk is.

In de loop van deze eeuw is dit onderwerp sterk verschaald.³ In de traditionele methoden komt dit duidelijk tot uitdrukking. Daarin is één van de oorzaken van de onderwaardering van dit onderwerp gelegen. In het PPON-onderzoek komen twee schalen (onderdelen) voor verhoudingen voor:

- basiskennis en begrip van verhoudingen (schaal 19);
- toepassingen bij het onderwerp verhoudingen (schaal 20).

In het overzicht van Bokhove en Janssen worden de prestaties met 'goed', 'matig' en 'onvoldoende' aangeduid. Thans zijn ook de gemiddelde goed-scores (*p*-waarden) bekend. Deze zullen we hier hanteren omdat die voor ons doel handzamer lijken. We citeren uit bedoeld artikel, maar dus met de aangepaste (goed-)scores, afgerond op vijfvoudens⁴:

Een vergroting maken van een eenvoudige figuur levert geen problemen op voor de meeste leerlingen eind groep acht zoals blijkt uit de volgende opgave:

*



gemiddelde goedscore: 90 %

Maak de vergroting hieronder af.



Verhoudingen hoeven niet moeilijk te zijn zoals blijkt uit de volgende opgave, die op basis van een eenvoudige verhoudingsredenering zonder berekening kan worden opgelost.

gemiddelde goedscore: 90 %



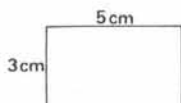
Robin en Bjorn lopen elkaar tegemoet.
Robin loopt met een snelheid van 6 km
per uur en Bjorn met een snelheid van 5
km per uur.
In welk stuk zullen ze elkaar tegen
komen?

Stuk _____

De auteurs vervolgen dan met:⁵

Het berekenen van de onbekende in een verhoudingsopgave is niet al te moeilijk wanneer de getallen erg doorzichtig zijn.

gemiddelde goedscore: 65 %



Diane tekent net zo'n rechthoek maar
dan 25 cm lang.
Hoe breed moet ze die rechthoek
tekenen?

_____ cm

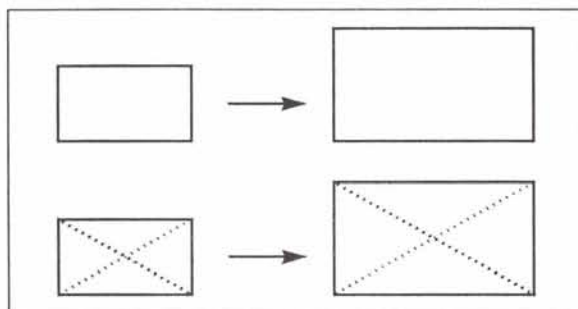
'Niet al te moeilijk...', zo luidt de kwalificatie van het laatste vraagstuk. Maar toch verschilt de goedscore (65%) aanmerkelijk van de beide andere. De verklaring hiervoor kan gelegen zijn in het feit dat de beide eerste sommen kwalitatief van aard zijn en dat de bedoeling volkomen duidelijk is. (Bij de eerste opgave was wellicht kans op het volle pond geweest als de tekeningen op ruitjespapier waren afgebeeld.)

De derde opgave: 'Diana tekent *net zo'n* rechthoek...' zou onduidelijk kunnen zijn vanwege de uitdrukking 'net zo'n'. De nogal teleurstellende score op dit ogenschijnlijk eenvoudige sommetje verplicht ons naar verdere mogelijke oorzaken te zoeken.

Het is bekend dat kinderen veelal alle rechthoeken (niet-vierkanten) als 'dezelfde' beschouwen. Rechthoeken lijken te kaal om de *interne vormstructuur* te overzien. Het behoud van die structuur is namelijk bepalend voor het 'net-zo'-zijn (gelijkvormigheid). Men denke voor het gemak maar weer aan een tekening op de overheadprojector en zijn afbeeldingen op het scherm.

Nu had men in de PPON-opgave deze structuur kunnen meegeven door de diagonalen (als extra informatie) mee te tekenen (fig.1). Zouden de figuren in het laatste geval *enveloppen* genoemd zijn, dan zou wellicht nog meer betekenis aan het begrip 'net zo' gegeven zijn. Ook

had de vraag gesteld kunnen worden: 'Van een foto van vijf bij drie centimeter wordt een vergroting gemaakt zodat de lengte van de foto 25 centimeter wordt. Wat wordt de breedte?'



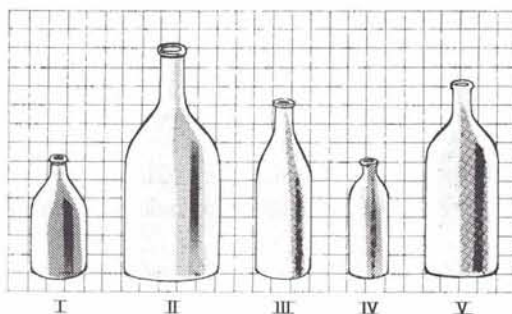
figuur 1: Rechthoek vergroten

Het is dus de vraag of 'net zo' in dit geval voor de ondervraagde leerlingen wel duidelijk was. Wie de taal van de verhoudingen niet kent zal al moeite hebben met dergelijke opgaven, ook al proberen we ons zo natuurlijk mogelijk uit te drukken. Aan het opbouwen van een aantal taalbegrippen, die met verhoudingen van doen hebben, dient derhalve in het onderwijs aandacht besteed te worden.

Een volgend voorbeeld uit het stuk van Bokhove en Janssen:

Verhoudingsgewijs vergelijken blijkt moeilijk te zijn. Leerlingen laten zich snel verleiden tot het vergelijken van de absolute verschillen.⁷ Helemaal moeilijk wordt het wanneer procenten in het spel zijn.

Een probleem bij veel van dit soort opgaven blijkt de taal te zijn. Het is niet verwonderlijk dat opgaven waarbij gevraagd wordt naar 'snelst', 'zoetst' en dergelijke minder moeilijk zijn dan opgaven waarbij de terminologie 'in verhouding tot' wordt gebezigd.



gemiddelde goedscore: 55 %

Welke fles is in verhouding tot zijn hoogte het breedst?

fles _____

Ook in dit vraagstuk is een specifieke taaluitdrukking ('in verhouding tot') vermoedelijk van beslissende invloed op de score geweest.⁸ Weer geldt dus dat als dergelijke uitdrukkingen niet in het onderwijs aan de orde geweest zijn, de leerlingen wel moeten vastlopen.

Van de toepassingen uit PPON beschouwen we twee opgaven met het commentaar van Bokhove en Janssen⁹:

De opgaven in deze schaal onderscheiden zich van de opgaven van de vorige schaal door een grotere variatie in contexten (onder andere schaal) en minder doorzichtige getallen. Deze toepassingsopgaven waren aan de moeilijke kant.

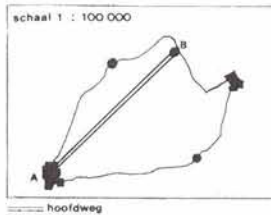
Schaalopgaven die betrekking hadden op eenvoudige voorwerpen en bouwwerken en waarbij gewerkt werd met centimeters lukten redelijk. De klassieke schaalberekeningen op kaarten bleken erg moeilijk. Bij het bepalen van de werkelijke afstand (gegeven de schaal en de afstand op een kaartje) lieten veel leerlingen verstek gaan.

gemiddelde goedscore: 70 %

schaal 1 : 8

Hoe lang is deze wandelstok in werkelijkheid?
Gebruik je liniaal.

_____ cm



gemiddelde goedscore: 40 %

Dit kaartje is getekend op een schaal van 1 : 100 000. Op de kaart is de afstand tussen A en B 3 cm.
Hoe groot is de werkelijke afstand?

_____ km

Het commentaar spreekt voor zich. Op het kunnen toepassen van de formele notatie bij het schaalbegrip ('1 : ...') wordt laag gescoord. Zeker in het geval van 1 : 100 000. Het grote verschil tussen de wandelstok-som en het kaart-vraagstuk zou onder meer toegeschreven kunnen worden aan een te geringe vaardigheid met het metriek stelsel.

Maar uit de wandelstok-som blijkt ook dat de notatie 1 : 8 (spreek uit 'één op acht') niet goed begrepen wordt als een verkleining van acht maal ('acht maal zo klein').

En zo belanden we weer bij een belangrijk taalbegrip bij verhoudingen. Belangrijk en moeilijk. Onderzoek in Engeland heeft uitgewezen dat kinderen in de bovenbouw-leeftijd bij verhoudingen uiteenlopende uitdrukkingen gebruiken om een vergroting c.q. verkleining te omschrijven.¹⁰ Dit gebeurde in interviews die aan het onderwijs over verhoudingen vooraf gingen, dus in zekere zin spontaan.

De gebezigde formuleringen kwamen neer op het gebruik van een schaaufactor. Dit wil zeggen dat aangegeven werd 'hoeveel keer' iets groter was. Hierbij werd duidelijk vermenigvuldigen gebruikt. Bijvoorbeeld:

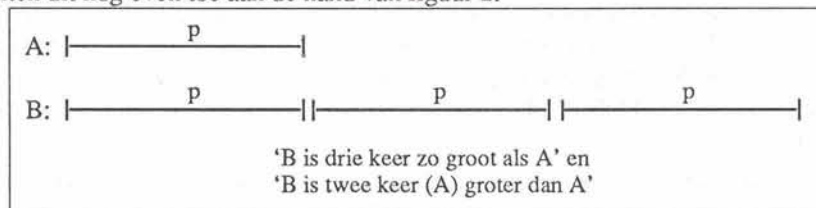
'drie keer groter/kleiner dan...'

'drie keer zo groot/klein als...'

Maar naast deze multiplicatieve (vermenigvuldigings-)aanpak stond ook de additieve (optelings-)opvatting:

'twee keer groter/kleiner dan...'

We lichten dit nog even toe aan de hand van figuur 2.



figuur 2

Dit zijn beide uitdrukkingen die de relatie tussen de lijnstukken A en B concreet weergeven. Ook aan dit voorbeeld zien we de noodzaak om een éénduidig taalbegrippenkader te scheppen.

Tot zover iets over de opbrengst van het onderwijs in verhoudingen, zoals geregistreerd door het PPON-onderzoek. Hieruit en uit andere experimenten kunnen we de volgende conclusies trekken.

In beginsel kunnen leerlingen van groep acht verhoudingen bij vergroten en afstand-tijd in kwalitatieve zin aan. Het onderwijs zal zich dus moeten richten op de ontwikkeling van passende taal, aansluitend bij die van de leerlingen, en van hulpmiddelen om met verhoudingen uit de voeten te kunnen. Ook dient aangesloten te worden bij de noties die de kinderen van verhoudingen hebben. Anders vergaat het de onderwezen aanpak net zo als in het Engelse onderzoek dat we eerder noemden:

'... only four of the 23 pupils interviewed exhibited the taught method in the final interview.'¹¹

Dat het schaalbegrip vanouds niet functioneert in het onderwijs is bekend. Een verklaring hiervoor lijkt de volgende te zijn.

Om tot een kaart te komen wordt (een deel van) de werkelijkheid zowel verkleind als verschaald weergegeven. In het algemeen wordt aan het proces van verkleinen en verschralen in het onderwijs weinig aandacht besteed. Vervolgens vindt een omkering plaats. Het verkleinde en verschaalde model van de werkelijkheid wordt uitgangspunt bij het redeneren en probleemoplossen. Van de leerlingen wordt nu verwacht dat zij deze standpuntverandering kunnen voltrekken. En bovendien dat zij de werkelijkheid kunnen reconstrueren op grond van één enkele *standaardverhouding* waartoe het verkleiningsproces verdicht is. Dat daarachter schuilgaat dat drie kilometer bijvoorbeeld verkleind is tot drie centimeter; vierhonderd meter tot vier millimeter, tien kilometer tot één decimeter, enzovoort, hebben de leerlingen meestal niet geleerd.

Hoe kunnen we dan het omgekeerde verwachten? Namelijk het redeneren vanuit 1 : 100 000, waarbij we nog maar even afzien van de nodige omzettingen in het metrieke stelsel. Helaas wordt vaak slechts de mechanistische regel '1 cm op de kaart betekent 100 000 cm in de werkelijkheid...' enzovoort onderwezen. En dat terwijl de meeste kaarten en plattegronden tegenwoordig voorzien zijn van een schaallijn (fig.3), wat in de praktijk de meest efficiënte manier is om afstanden aan te geven.



figuur 3: Toekomstig TGV-net

In het onderwijs zou derhalve langduriger aandacht aan 'vergroten en verkleinen' besteed dienen te worden. Ook zou het werken met 'schaallijnen' meer uitgebreid kunnen worden.

We vatten tot slot de conclusies uit de geciteerde onderzoeken samen:

- kinderen kunnen in beginsel verhoudingen bij vergroten en verkleinen goed aan, zolang deze kwalitatief van aard zijn;
- zodra er echter sprake is van het gebruik van formele taal of het geven van (te) complexe problemen met getallen, laten de leerlingen het afweten;
- het klassieke schaalbegrip functioneert slecht;
- het opleggen van taal, begrippen en werkwijzen in het onderwijs onder voorbijgaan aan spontane inzichten en noties van leerlingen is ineffectief.

Activiteiten voor groep één, twee en drie

Voor het programma van groep één, twee en drie wordt aangesloten bij de impliciete kennis ('noties') die kinderen van de begrippen 'gelijkvormigheid' en 'in verhouding' hebben. In vrijwel alle nieuwere reken-wiskundemethoden, ook in de zogenoemde kleuterprogramma's, wordt aandacht aan deze meetkundige aspecten geschonken. Daarbij is vooral het kwalitatieve vergelijken van figuren op genoemde aspecten van belang. Pas later, in de loop van groep drie, kan met het betrekken van eenvoudige getallen bij verhoudingen een begin worden gemaakt.

De speelwereld van de kleuters zit vol (verhoudingsgetrouwe) afbeeldingen van de werkelijkheid. We noemen:

- poppekinderen en kinderen;
- poppenhuis en huis;
- speelgoedauto en auto;
- speelgoedtrein en trein;
- speelgoedservies en servies;
- speelgoeddieren en dieren;
- speelgoedpakhuis en pakhuis.

Ook onderling kunnen deze voorwerpen weer naar verhouding vergeleken worden. Een flinke brandweerauto hoeft niet te passen bij een speelgoedpakhuis. Wat overigens geen belemmering hoeft te zijn om er heerlijk mee te kunnen spelen. Maar een vraag als 'Hoe groot zou de brandweerauto eigenlijk moeten zijn?', kan aangeven of de kinderen al enig idee hebben van mogelijke vergelijkbare maten. 'Dit play-mobiel-poppetje past eigenlijk niet bij dit station. Hij zou niet door de deur kunnen.'

Dan kennen we vergrotingen in de reële wereld, vaak in de reclamesfeer:

- een enorme play-mobiel-pop voor een speelgoedwinkel;
- een tweemans hoge voetbal bij het DWS-pand in Amsterdam;
- een enorm groot bierglas in neonlicht;
- de reuzen-moorkop bij een banketbakker als reclamestunt.

Dan de realiteit, waarin we veel 'dezelfde' figuren zien, maar in verschillende maten:

- een klein pak waspoeder en een gezinspak;
- een gewone foto en z'n vergroting;
- het ruitjespapier en het ruitjesbord;
- de kleine blokkendoos en de grote uitvoering;
- de bordtekening en de tekening in het schrift;
- het prentenboek en de werkelijkheid.

Verder de realiteit en z'n afbeeldingen:

- tekeningen en foto's;
- tv- en filmscherm;
- overheadprojector.

Als alle afstanden tussen overeenkomstige punten van 'origineel' en 'beeld' netjes in verhou-

ding blijven, houden de figuren dezelfde vorm. Ze blijven 'net zo, maar dan in het klein of in het groot' om een mogelijke geschikte omschrijving voor de kinderen te noemen. Het uitbuiten van 'verstoringen' in de afbeeldingen, zoals bij een lachspiegel en schaduwen, is nuttig om het intuïtieve gelijkvormigheidsbegrip wat meer bewust te maken.

Madurodam is misschien wel het mooiste voorbeeld van verkleining voor de allerjongsten. Juist omdat de nagebouwde modellen zo perfect zijn en dan nog op zo'n mooie schaal (1 op 25) dat men de kinderen er als het ware mee kan foppen. Gevraagd wordt een zelfportret te tekenen op een vakantiefoto (van een Madurodam-huisje!)(fig.4). De deur van het huis op de gegeven foto is in feite beslissend voor de grootte van het zelfportret. En na de vraag, of je zo wel naar binnen kan volgt de ontknoping van deze activiteit (fig.5).

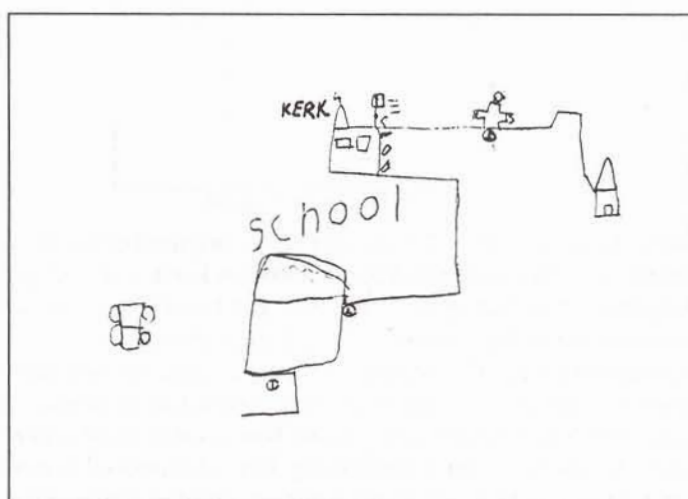


figuur 4: Zelfportret



figuur 5: Madurodam

Laat de kinderen ieder voor zich de weg tekenen van school naar huis en daarin voor hen belangrijke plekken markeren (fig.6).



figuur 6: De weg van school naar huis

Dit lijkt een uitermate lastige opdracht, maar juist het kwalitatieve werken met verhoudingen (bijvoorbeeld: is de kerk over of voor de helft van de weg?) is een eerste stap op weg naar het zelf construeren van dergelijke nuttige afbeeldingen van de werkelijkheid. Het kan voor de

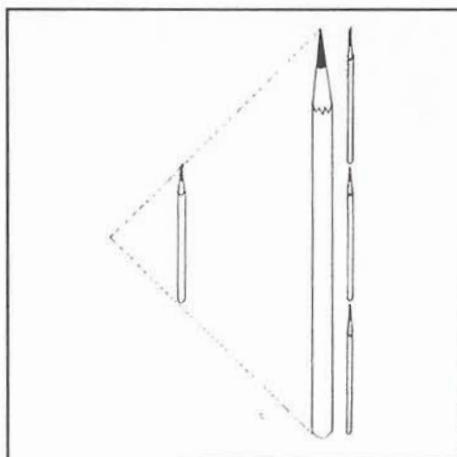
kinderen hun eerste eigen plattegrond of kaart zijn. Een vervolg op deze activiteit kan zijn dat we verschillende plattegronden (bijvoorbeeld van twee of meer vriendjes) met elkaar vergelijken of zelfs in elkaar vlechten tot een eerste plattegrond van de omgeving van de school. We noemen verder aan mogelijke activiteiten:

- een kijkdoos maken;
- tekeningen van die kijkdoos maken;
- met (gelijkvormige) blokkendozen bouwen;
- fantasietekeningen maken;
- puzzels leggen van eenzelfde tafereel, maar op verschillende schaal;
- kleine en grote fotokopieën vergelijken;
- overnemen van een tekening van het ene rooster op het andere.

Kortom, activiteiten te over voor de groepen één en twee, die dit kwalitatieve, half kwantitatieve verhoudingsgewijs vergelijken mogelijk maken.

We gaan op weg naar het meer kwantitatieve aspect. Daarvoor is de overheadprojector een zeer geschikt hulpmiddel. Er worden voorwerpen (paperclip, potlood, ...) op de overheadprojector gelegd. De kinderen kijken alleen naar het scherm. Wat is dit voor een ding? Hoe groot is het potlood in het echt? En hoe groot is de schaduw? Nu komt het erop aan een geschikte taal te ontwikkelen.

We gaan eerst in op de tweede vraag. We werken met twee even grote potloden. Aansluitend bij het bekende *groter dan* ligt het voor de kinderen voor de hand om over *twee (potloden) groter/meer* te spreken. Dit kan door middel van afpassen op het beeld (schaduw) vastgesteld worden (fig.7).



figuur 7: Drie maal zo groot

Bij dit taalgebruik sluiten we aan bij het verschil tussen origineel en beeld. We zeggen hoeveel het beeld meer is dan het origineel. Maar de kinderen kunnen ook zeggen dat het eigenlijke potlood (origineel) *drie keer* op het beeld past. Het beeld is dus *drie keer* of *drie maal zo groot*. En nu passen we in feite de vermenigvuldigingsoperatie toe.

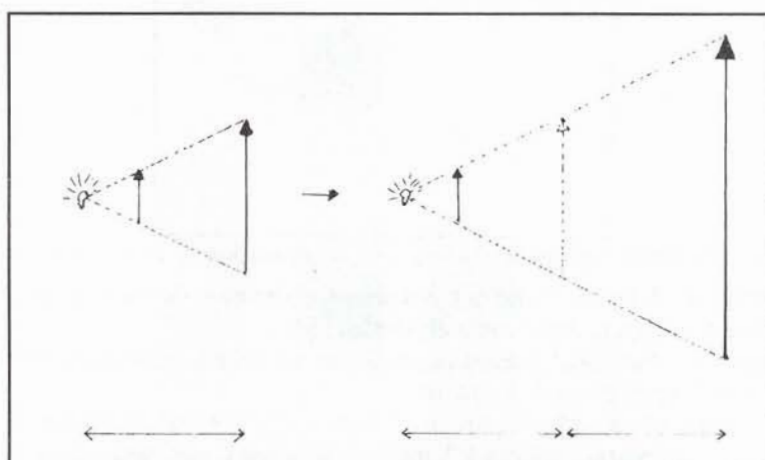
Het goed verwoorden van dergelijke situaties is een belangrijke voorwaarde tot een goed inzicht in *vergroten*, *verkleinen*, *in verhouding*, *naar verhouding* en *schaal*. Tegenover *twee groter/meer* staat *twee kleiner/minder* en net zo *drie keer/maal zo groot* versus *drie keer/maal zo klein*. En daarmee komen we op de eerste vraag. Het echte potlood is in vergelijking met z'n beeld *drie maal zo klein*. Het gaat hier dus niet om absolute maten, maar alleen om het vergelijken van maten ten opzichte van elkaar. En we richten ons in het voorbeeld uitsluitend op het lengte-aspect. Maar wellicht is het mogelijk om te laten ontdekken dat ook de breedte (dikte) van het potlood drie keer zo groot wordt.

Bijzonder instructief en aardig zijn de volgende spelletjes met de overheadprojector. Er wordt

een gulden op de overheadprojector gelegd, maar de kinderen mogen niet zien welke munt het is. 'Kunnen jullie zeggen welk geldstuk dit is?' Nu leggen we er een munt bij, bijvoorbeeld een stuiver, maar weer onthouden we de informatie dat het om een stuiver gaat. Dan laten we zien dat we er een kwartje bij leggen. Op dit spel zijn allerlei variaties te bedenken.

Bijzonder mooi, vanzelfsprekend en dus instructief wordt het vergroten en verkleinen geïllustreerd door de afstand van overheadprojector en scherm te variëren.

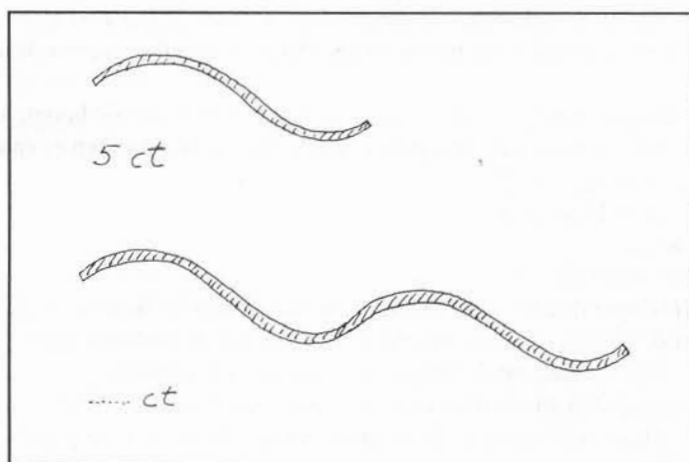
'Hoe kun je een groter beeld krijgen?', luidt de vraag. 'Hoeveel verder moet je het scherm naar achteren plaatsen om het beeld twee maal zo groot te maken?' Deze vragen en variaties hierop geven opnieuw aanleiding het taalgebruik aan te scherpen. Tevens legt de schematisering, als in figuur 8, de grondslag voor het (latere) meetkundige vergroten.



figuur 8: Twee keer zo ver, twee keer zo groot

Als de kinderen al wat vertrouwd zijn met het rekenen tot twintig (eind groep drie), kunnen eenvoudige verhoudingssommetjes aan de orde gesteld worden.

We hebben twee dropveters, een korte en een lange (fig.9).



figuur 9: Twee dropveters

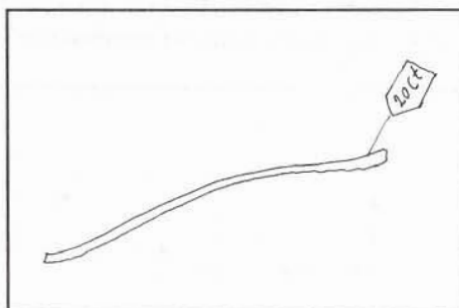
- Als de korte vijf cent kost, hoeveel kost dan de lange?
- Als de lange tien cent kost, hoeveel kost dan de korte?

Behalve de eerdergenoemde taalbegrippen komen nu ook aan de orde: het *dubbele* voor *twee maal* (zo duur) en *de helft* voor *twee maal* (zo goedkoop).

- De prijzen van twee dropveters zijn gegeven, teken ze.

- Een dropveter (vier cent) is gegeven, teken er een van twaalf cent.
- Een dropveter (acht cent) is gegeven, teken er een van twee cent.
- Een dropveter is gegeven, teken er een die drie maal zo lang is.
- Idem drie maal zo klein.
- Teken twee dropveters, waarvan de één vier maal zo duur is als de ander.

Vooruitlopend op mogelijke activiteiten voor de middenbouw (groep vier, vijf en zes) verwijzen we naar een opgave als in figuur 10.



figuur 10: Deze dropveter kost twintig cent. Teken een dropveter van vijftien cent.

Hierop zijn natuurlijk talloze variaties te verzinnen, door zowel de vorm, de getalgrootte als de verhouding te wijzigen. Andere mogelijkheden zijn:

- het schatten van het aantal gelezen pagina's van een boek van bijvoorbeeld honderd pagina's door de ligging van de bladwijzer;
- de lengte van een kaars schatten na een zekere brandtijd als de totale brandtijd gegeven is;
- het plaatsen van wegwijzers met kilometer-aanduiding tussen twee plaatsen, die in een rechte lijn liggen.

Activiteiten voor groep vier, vijf en zes

Voor het programma van groep vier, vijf en zes komt de nadruk allengs meer op het numerieke te liggen. De verdere ontwikkeling en consolidatie van geschikt en correct taalgebruik is belangrijk. In figuur 11 is het silhouet van een aantal wolkenkrabbers gegeven.¹²

De kinderen maken vergelijkingen tussen de hoogten met behulp van een zelfgemaakte meetstrook.

Als D als 'natuurlijke' maat gekozen wordt zijn de relaties tussen de hoogten het gemakkelijkst onder woorden te brengen. Er zijn er in totaal twaalf. We noemen er enkele:

- ' B is vier keer zo hoog als D ';
- ' D is vier keer zo klein als B '.

Maar ook zou kunnen:

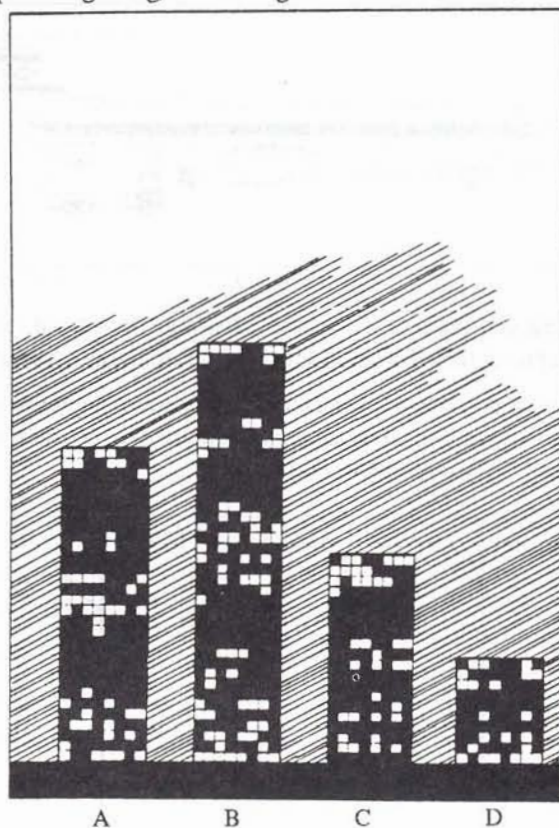
- ' B is drie (D) hoger dan D ';
- ' D is drie (D) lager dan B '.

In verband met de begrippen vergroten en verkleinen zou de multiplicatieve (vier keer) methode met een dergelijke activiteit bewust gemaakt kunnen worden.

Aan deze taalactiviteiten wordt uiteraard het meeste recht gedaan als ze in een mondelinge interactieve les uitgevoerd worden. In tekenactiviteiten kunnen ze op papier geoefend worden.

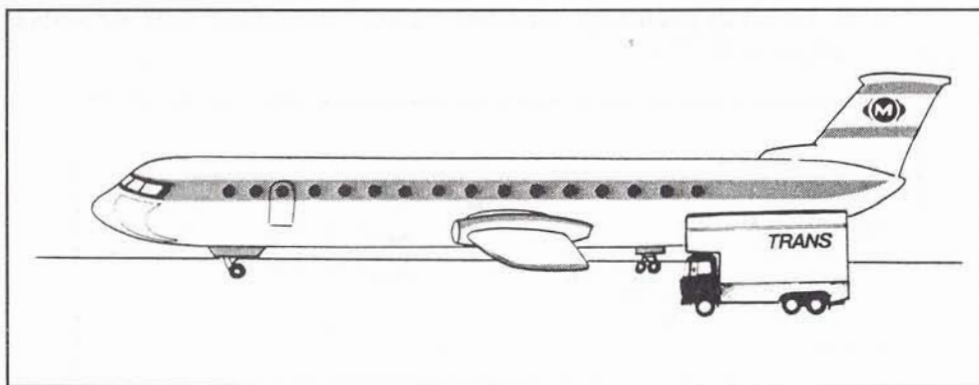
- Teken jezelf bij de afbeelding van een huis.
- Gegeven een kind. Teken er een boom bij. Hoe groot is die boom of teken een boom die drie keer zo groot is.
- Teken een paperclip of lucifer op 'ware grootte'. Teken daarnaast een drie maal zo grote lucifer, twee maal zo klein, etc.

en let hierbij ook op de vergroting/verkleining ten aanzien van de beide dimensies.



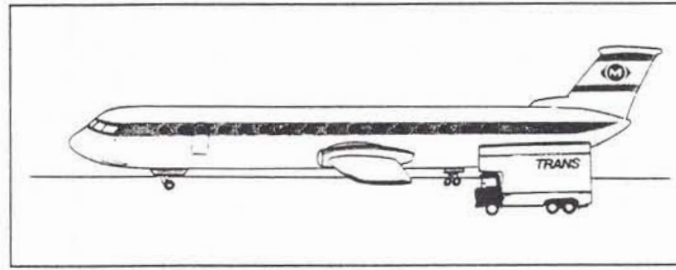
figuur 11: Hoge flats en wolkenkrabbers

- Teken een tuin (rechthoek) die twee maal zo groot is als een gegeven tuin. De methode van het afpassen van een bekende maat op een te meten object kan op allerlei wijzen geoefend worden. Als eenvoudige standaardmaten, zoals de meter, al bekend zijn kunnen vraagstukjes als die uit figuur 12 aan de orde gesteld worden.¹³



figuur 12: Hoe lang is het vliegtuig? De vrachtauto is tien meter lang.

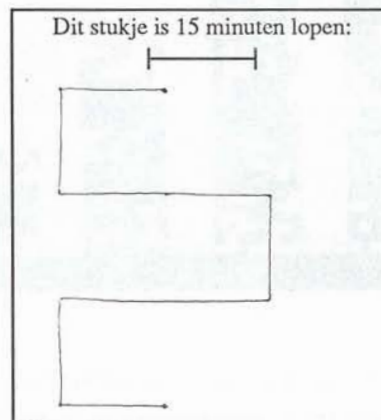
Het afbeelden van dezelfde figuur maar dan verkleind (fig. 13) geeft de kinderen gelegenheid de verschillende lengten te benoemen.



figuur 13: → ? ←

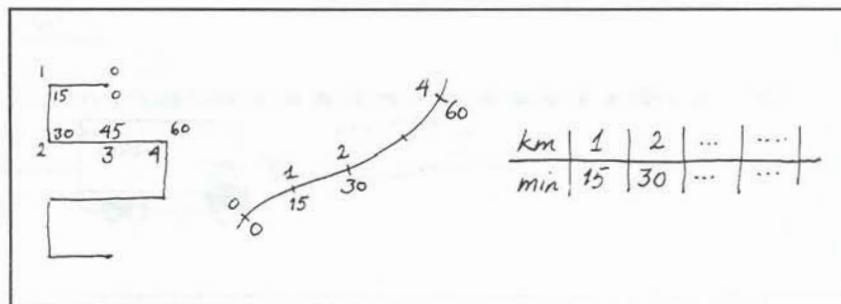
De vrachtauto was eerst een indirecte schaallijn, maar kan verschaald worden tot een lijnstukje dat tien meter representeert. En dat is de schaallijn, zoals die op kaarten wordt gebruikt.

De dropveter-sommen uit groep één, twee en drie geven als weggetjes-vraagstukken oefenactiviteiten in meten en verhoudingen. Maar nu meer numeriek: één stukje (vijftien minuten) → vijf stukjes (vijf maal vijftien minuten) (zie fig.14).



figuur 14: Hoe lang duurt deze weg?

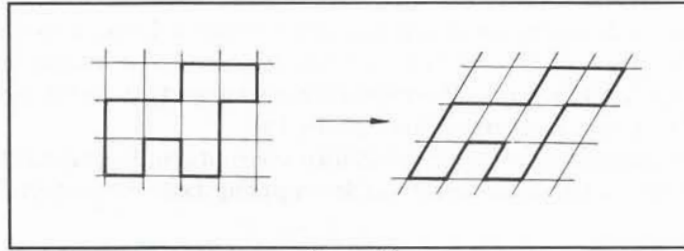
Introductie van de verhoudingstabel of dubbele getallenlijn gaat als het ware vanzelf, als we bij zo'n wandeling naar de afstand vragen: 'Hoeveel loop je ongeveer in één kwartier?' Laten we zeggen één (1) kilometer. De schematische weg, voorzien van afstanden en tijden, kan rechtgetrokken worden tot getallenlijn met dubbele schaal. Daaruit kan weer de verhoudingstabel voortkomen (fig.15).



figuur 15: 'Van weg naar tabel'

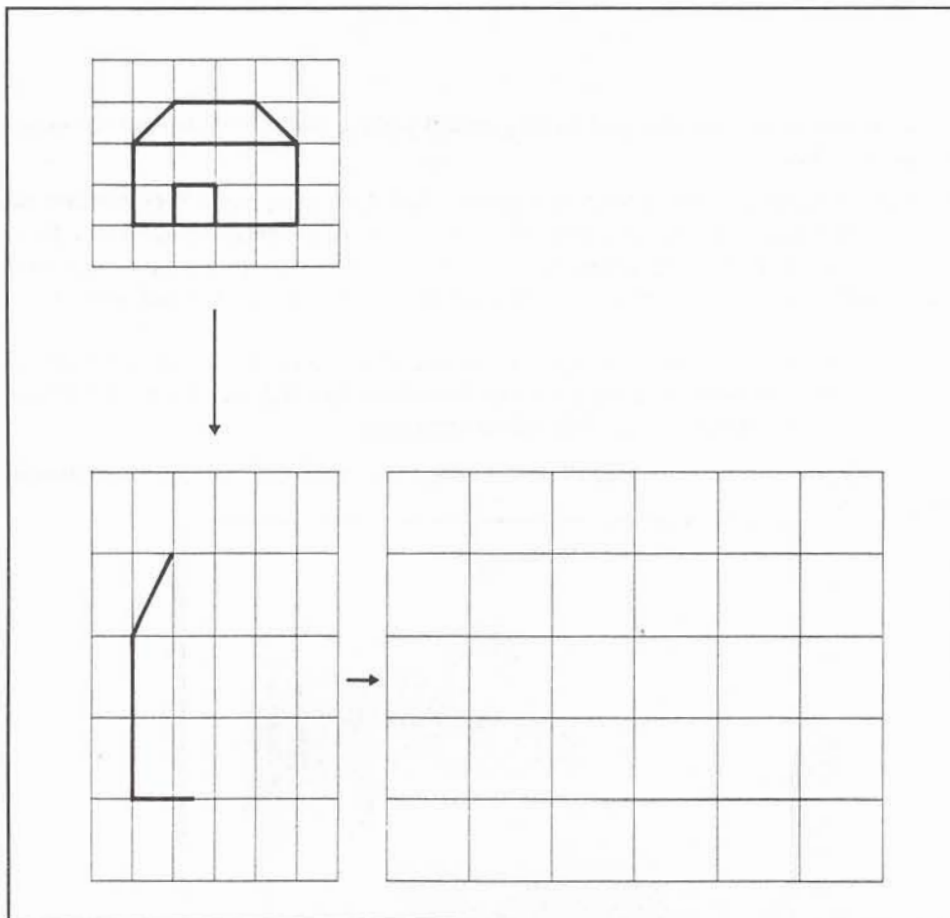
Roosterpapier is een uitstekend hulpmiddel om greep te krijgen op gelijkvormige vergrotingen of verkleiningen van vlakke figuren. Bij de onderbouw (groep één, twee en drie) zijn al activiteiten aangestipt. Allereerst verwijzen we nog eens naar de vervormingen (fig.16) die

door hun tegen voorbeeld-achtige karakter tot een beter begrip van gelijkvormigheid kunnen bijdragen.



figuur 16

Als een rooster alleen in verticale richting opgerekt wordt ontstaat ook een vervorming. Maar een dergelijke vervorming is weer 'goed' te maken door de figuur dezelfde oprekking in horizontale richting te laten ondergaan. We zien dit in het werkblad van figuur 17 voor de kinderen weergegeven.¹⁴



figuur 17: Oprekken in twee richtingen

Het rekken van de figuur heeft niet alleen consequenties voor de vorm maar ook voor de omtrek en de oppervlakte van de figuren. Bij oprekking in één richting met de factor 2 betekent dat de oppervlakte twee maal zo groot wordt. Over de omtrek kunnen we weinig zeggen! Een horizontale oprekking daarna met factor 2 veroorzaakt een oppervlaktevergroting met de factor 4 (2×2) en een vergroting van de omtrek met de factor 2. Dit maakt duidelijk dat gelijk-

vormige vergrotingen slechts lineair (rechtevenredig) werken op lengtes, maar kwadratisch op oppervlakte. Op het niveau van de leerlingen kunnen we dit als volgt uitwerken.

De schilder komt om de deuren van de drie huizen te schilderen. Dit kost voor de deur in het eerste huis fl. 25,-. Wat zijn de schilderskosten van de deuren in het tweede respectievelijk derde huis? En het schilderen van de voorgevel (zonder deur) kost bij het grootste huis fl. 280,-. Hoeveel kost dit voor de andere huizen? (fig.18)

Een analoge problematiek treedt op bij ruimtelijke vergrotingen. Hierbij zal de inhoud kubisch toenemen, dus met de derde macht van de vergrotingsfactor vermenigvuldigd moeten worden.

In de onderbouw zijn de eerste activiteiten voor het maken van kaarten (plattegronden) beschreven. Kaarten zijn belangrijke hulpmiddelen om je te oriënteren ten aanzien van je omgeving, stad, land en wereld. Het zijn, zoals we eerder stelden, in feite gestileerde of sterk geschematiseerde luchtfoto's.

	huis1	huis2	huis3
deur	f 25,-		
gevel			f 280,-

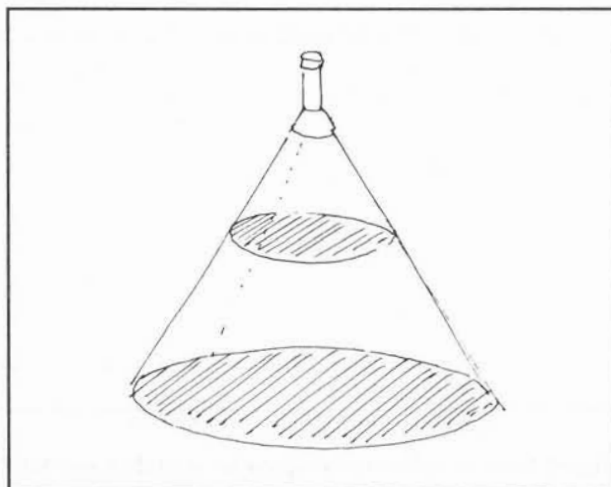
figuur 18: Schilderkosten

In de middenbouw zou dit principe bewust gemaakt kunnen worden met behulp van de volgende activiteiten:

Je bekijkt een voorwerp op het bord. Hoe groot is het? Hoe groot zie je het? Afmeten met gestrekte arm tussen duim en wijsvinger bijvoorbeeld, zoals tekenaars en schilders dit wel doen. Loop achteruit en doe de meting opnieuw. Er wordt bewust gemaakt dat een voorwerp kleiner wordt waargenomen dan het in werkelijkheid is. Iets wat iedereen, ook jonge kinderen, uit ervaring weet.

Geef de kinderen een kartonnen kokertje. En laat ze een bepaald gedeelte van een plaat spotten. Hoe kun je meer van deze plaat zien? Ook hier weet bijna iedereen dat je afstand moet nemen (achteruit moet lopen) om je blikveld te vergroten.

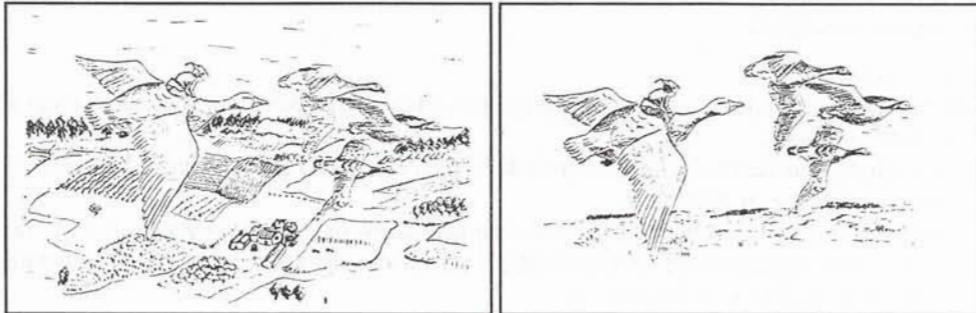
Met het zaklantaarn-experiment (fig.19) zou dit nog eens op een andere manier verduidelijkt kunnen worden.



figuur 19: Zaklantaarn op verschillende hoogten

Kwantitatieve wetten hoeven hier nog niet aan verbonden te worden. Alles gaat meer in de sfeer van hoe hoger je boven het land vliegt, des te meer je kunt overzien en des te kleiner alles wordt. Maar ook des te schematischer, kaartachtiger het beeld wordt (fig.20).¹⁵ Aan de

hand van een geschematiseerde tekening van het landschap, waarbij bijvoorbeeld een object van bepaalde lengte (huis, auto) te zien is, kan een grove schaallijn aangegeven worden.



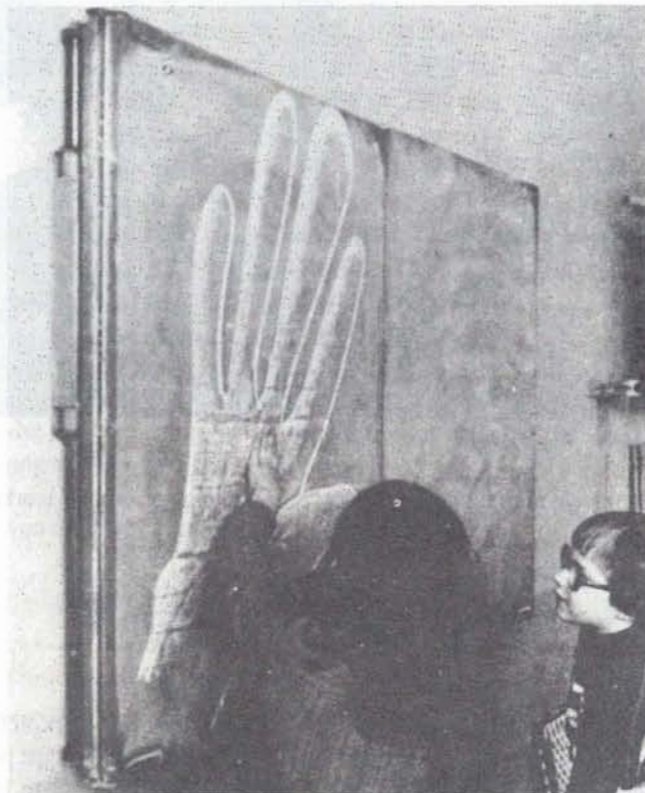
figuur 20: Niels Holgersson

Met de groeten van de reus¹⁶

Dit thema is bedoeld voor de middenbouw. Het gaat dus om verhoudingen bij vergroten. Ook de invloed daarvan op oppervlakte speelt er een rol in.

De kinderen leven zich in de wereld van reus Egbert (en zijn zoon) in, die wel vier keer zo groot is als een mens (zoals de bakker in het thema). Er kunnen in dit verband nogal wat verhoudingen *geconstrueerd* worden. Ze hebben betrekking op:

- het schatten en meten van lengte;
- het schatten en meten van oppervlakte;



figuur 21

- het onderzoeken van verbanden tussen weg en duur;
- het onderzoeken van grootte-relaties van lengten en oppervlakten;
- het nagaan van de omvang (= waarde) van oppervlakten gekoppeld aan een andere grootte (zoals kostprijs).

Voor het noteren en rekenen worden de (lege) getallenlijn met dubbele schaal en de verhoudingstabel ontwikkeld.

Egberts lengte

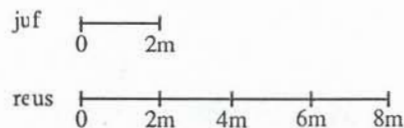
Een handafdruk van de reus op het bord (fig.21), verklaard met een klein verhaaltje, roept allerlei activiteiten op:

- het schatten en meten van de hand (met de hand van de leerkracht); de reus blijkt vier keer zo groot (= lang) te zijn;
- het nadenken over en ontwikkelen van een taal daarvoor: 'vier keer zo groot als', 'drie keer groter' (dit laatste additief bedoeld); het doen van een keuze hieromtrent en het maken van afspraken voor het vervolg;
- het schatten en meten van de lengte van de leerkracht en daarmee die van de reus (fig.22);



figuur 22

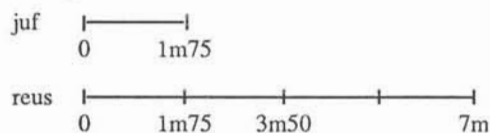
- het maken van schaallijnen met enkele geschatte lengten voor de leerkracht (bord).



Opmerkingen

1. Om het schatten te ondersteunen staat de bordliniaal naast de leerkracht.
2. De schaallijnen kunnen eventueel naar verhouding worden aangepast per schatting. Dit is ook raadzaam. Nodig is het echter niet. Zien de kinderen dit laatste in (dus voor iedere

schatting dezelfde eenheid op de schaallijn) dan is de schaallijn een *model* geworden om onderlinge (lengte)verhoudingen weer te geven. Met een lengte van 1 meter 75 voor de leerkracht komt de reus op 7 meter.



Hij kan nog net languit in het lokaal. Deze vaststelling kan de vrucht zijn van weer een nieuwe meetactiviteit. Voor de 'vier-keer-zo-groot/klein'-samenhang kunnen ook verhoudingstabellen worden gemaakt (al doende opbouwen, samen met de groep):

Wanneer de juf:	1m50	1m75	2m	 lang is,
dan is de reus:	6m	7m	8m	 lang.

Reuzenzool

Hoe werkt vergroten op oppervlakte? De vraag naar de grootte van een schoenzool voor de reus, van zijn zakdoek of krant, moet deze kwestie bij de leerlingen bewust maken.

Mogelijke activiteiten zijn:

- het schatten van het aantal mensenzolen in een reuzenzool;
- het tekenen (construeren) van de reuzenzool op ware grootte (bord), met de zool van de leerkracht als maat (fig.23), of verkleind (op schaal op papier) (fig. 24);



figuur 23

- is voor de breedte niet met een factor 4 rekening gehouden, dan is er aanleiding tot kritische *beschouwing van het resultaat*.

Dit kan leiden tot:

- het corrigeren van de uitgevoerde constructie (fig.25);



figuur 24



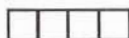
figuur 25

- het (eventueel) verwoorden in een regel:¹⁷

reuzenzool: $\left. \begin{array}{l} 4 \text{ zolen lang} \\ 4 \text{ zolen breed} \end{array} \right\} \text{ totaal } 4 \times 4 \text{ zolen (4 rijtjes van 4)}$

Het feit dat alles met de zolen niet zo precies past beschouwen we als een voordeel. Het gaat nu nog om het verscherpen van de notie dat vergroten - in dit geval - naar twee kanten werkt;

- zelfde activiteit voor een reuzenzakdoek: vier zakdoeken in de lengte dwingt als vanzelf de vier in de breedte af omdat een zakdoek nu eenmaal vierkant is;



- constructie van een reuzenkrant;
- het leggen van de reuzenkrant met mensenkranten (fig.26);
- het bepalen van de afmetingen van deze krant;
- het opnieuw uitdrukking geven aan de regel. Egberts krant: vier kranten lang (4 x 60 cm), vier kranten breed (4 x 40 cm) enzovoort;
- het bewust maken van de betekenis van 'vier keer zo groot' (lengte of oppervlakte?) en hiervoor afspraken maken.



figuur 26

De reconstructie van een reuzenkrant kan weer nieuwe activiteiten oproepen, zoals:

- het schatten en bepalen van de afstand tussen de handen van de reus bij het lezen van een

opengevouwen krant;

- het schatten en bepalen van de zitruimte voor een krantlezende reus, uitgedrukt in leslokalen.

Sporen

Wie op grote voet leeft laat dito (voet-)afdrukken achter. Na het uitzoeken van een kwestie over de volgorde waarin de voetsporen van de reus, zijn zoon en de bakker zijn gemaakt, richt de aandacht zich op het werkblad: Voetstappen in de sneeuw¹⁸ (fig.27).

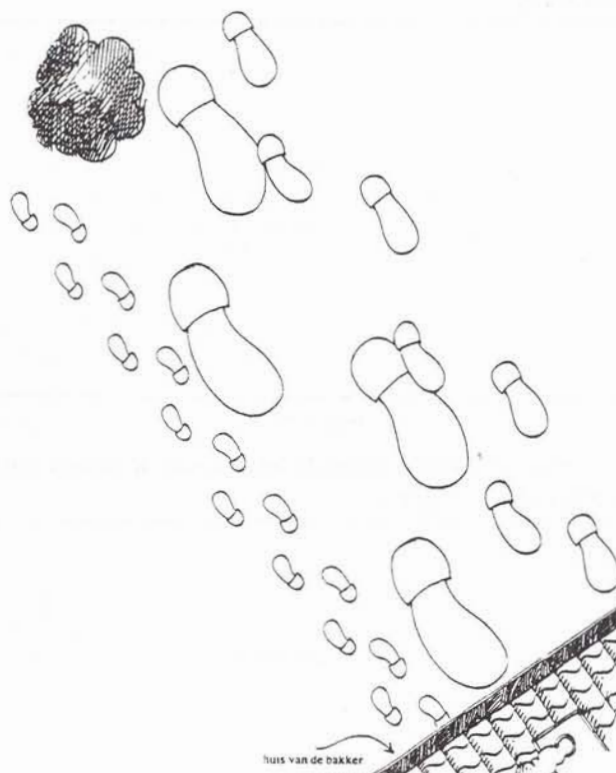
De volgende activiteiten kunnen plaatsvinden:

- het bepalen van de afstand van het huis van de bakker tot de boom; dit houdt onder andere in:
- het definiëren van de lengte van een voetstap: de afstand van hakindruk tot teenafdruk, van hak tot hak of van teen tot teen? (en vaststellen waarom de eerste definitie problemen geeft);
- het meten van de lengten van de voetstappen van de bakker, de reus en zijn zoon (bijvoorbeeld $2\frac{1}{2}$, 10 en 5 cm).

Opmerking: hier moeten beslissingen genomen worden; niet alle passen zijn even lang, de keuze valt dus op een mooie lengte, of op een gemiddelde;

VOETSTAPPEN IN DE SNEEUW

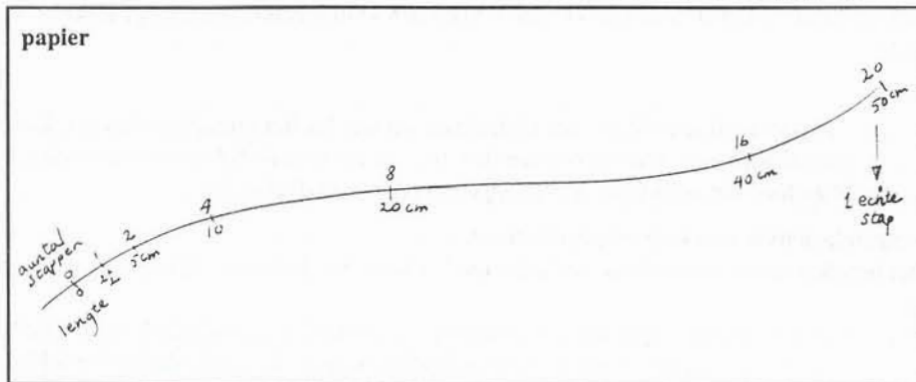
DE REUS 3



figuur 27

- het meten van de lengte van een werkelijke bakkerspas (zo'n 50 cm);
- het beslissen over de lengten van de stappen van de reus en zijn zoon;
- het bepalen van de relatie tussen de afmetingen op papier en de werkelijkheid, daarbij

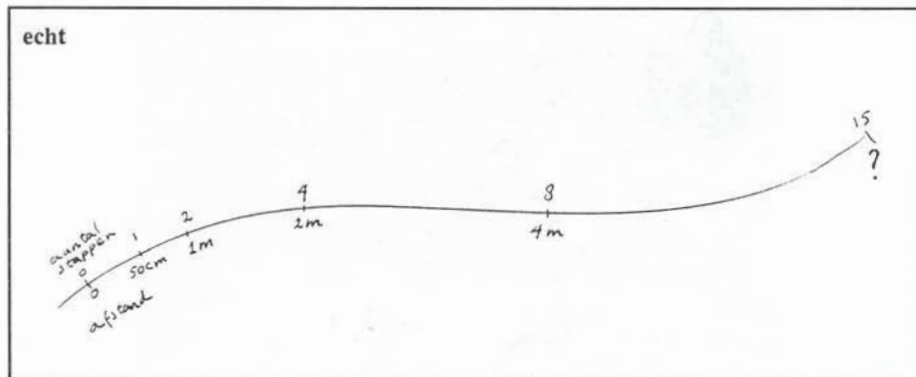
schaallijnen ontwikkelend: de stappen van de bakker, echt en op papier (fig.28).



figuur 28

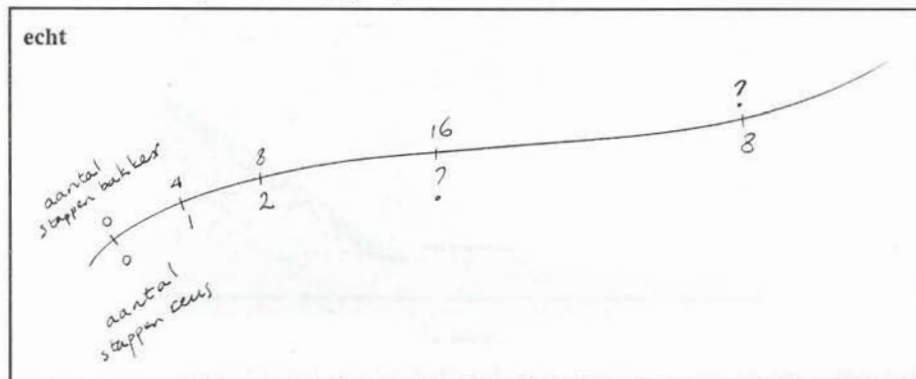
één echte bakkersstap is '20 papieren stappen',
 één echte stap is 20 keer zo groot als één papieren stap,
 één papieren stap is 20 keer zo klein als één echte stap.

- de bakker maakt zo'n 15 stappen van huis tot boom (fig.29);
- hierbij vooraf schattingen doen, anticiperen of de 15 (stappen) met een geheel aantal meters gehaald kan worden;
- idem voor reus en zoon;



figuur 29

- het onderzoeken van de verbanden tussen de lengten van de passen van de bakker en de reus enzovoort, bijvoorbeeld (fig.30):



figuur 30

Voor dergelijke verbanden kunnen ook weer verhoudingstabellen worden ontwikkeld (fig.31):

Wanneer de bakker:	0	4	8	...	...	stappen zet
doet de reus er:	0	1	2	...	...	

figuur 31

Het mag - in dit stadium - niet zo zijn dat dergelijke activiteiten doel in zichzelf worden, maar dat ze in dienst staan van het oplossen van bepaalde vraagstukken. Vandaar dat we begonnen met de kwestie van de afstand van het huis van de bakker tot de boom. Andere kwesties kunnen toegevoegd worden.

Opmerking: Een belangrijk bewustmakingsmoment is de hoeveelheid informatie die uit dit werkblad gehaald kan worden, mits de echte lengte van een stap van de bakker wordt toegevoegd (de lengte van een stap moet gaan behoren tot de schaal van gekende en doorleefde maten van de leerlingen).

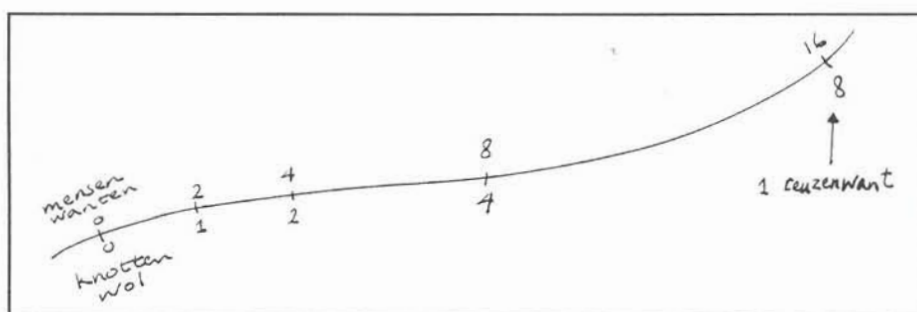
Er kunnen eventueel ook kwesties gesteld worden in verband met de snelheid van de drie. Wie in dit opzicht muizen met olifanten vergelijkt, weet dat de grootte van de stappen niet het enige is dat telt, maar ook het tempo waarmee ze gezet worden. Ook voor reuzen en bakkers zal dit gelden. Daar laten we het wat deze kwestie betreft bij. In ander verband komen we op samenhangen van afstand, tijd en snelheid terug.

Handschoenen voor de reus

Naar het voorbeeld van de reuzenzool vragen we naar de afmetingen van een handschoen voor de reus.

Als activiteiten noemen we:

- het bepalen van het aantal mensenhandschoenen in een reuzenhandschoen;
- het bepalen van de afmetingen van een reuzenhandschoen;
- het bepalen van de hoeveelheid wol voor een paar reuzenwanten met het gegeven: twee mensenwanten uit één knot wol;
- het toepassen van de dubbele schaallijn of de verhoudingstabellen om de gevraagde verbanden aan het licht te brengen (fig.32);
- het bepalen van de prijs van een paar reuzenwanten bij gegeven wolprijs.



figuur 32

Opmerking: er kan ook op de breedte van een reuzenwant worden ingegaan.

Besluit

Hier en daar zijn we een beetje verder gegaan dan vergroten en verkleinen. Er werden ook enkele activiteiten voorgesteld, waarin het vergroten (verkleinen) als het ware doorwerkt in andere zaken, zoals bij de knotten wol voor de reuzenwanten. De rijkdom en samenhang met

allerlei andere onderdelen uit het programma verhindert ons nu eenmaal om strikte scheidslijnen te trekken.

Voor wie de sfeer van het onderwijs achter de gegeven suggesties wil proeven, verwijzen we naar de genoemde publikaties.

Noten

1. Zie: Streefland, L., E. de Moor en A. Treffers: Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (7), Verhoudingen (1), *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 8(2), 1989, pag.50-59.
2. Wijnstra, J.M. (red.): *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool, PPON-reeks nr 1*, Cito, Arnhem 1988, pag.132-137.
3. Streefland, L.: Verhoudingen per traditie, *Willem Bartjens*, 1(3), 1982, pag.150-160.
Treffers, A. en L. Streefland: Productief Reken-Wiskunde Onderwijs, H.G.B. Broekman en J.M.J. Weterings, *Leerstofordening. Over de grenzen van een begrip*, SVO, 's-Gravenhage 1987, pag.141-167.
4. Bokhove, J. en J. Janssen: Periodiek peilingsonderzoek in het basisonderwijs (6), *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 8(2), 1989, pag.3-33.
5. o.c. pag.23.
6. o.c. pag.23 en 24.
7. Voor een overzicht van internationaal onderzoek verwijzen we naar:
Streefland, L.: Verhoudingen in onderzoek, *Panama Post* 4(2/3), 1986, pag.12-23 en pag.11 -21.
Voor onderzoek in eigen land verwijzen we naar:
Streefland, L.: *Realistisch breukenonderwijs*, OW & OC, Utrecht 1988.
Voor een mathematisch-didactische analyse van het verschijnsel verhoudingen zie:
Freudenthal, H.: *Didactische Fenomenologie van wiskundige structuren*, OW & OC, Utrecht 1984, hfdst.5.
8. Bokhove J. en J. Janssen, 1989, o.c. pag.24 en 25.
9. Bokhove J. en J. Janssen, 1989, o.c. pag.27.
10. Clarkson, R.: Ratio: Enlargement, D.C. Johnson (ed.), *Children's Mathematical Frameworks 8-13: A Study of Classroom Teaching*, NFER-Nelson, Windsor 1989, pag.191-218.
11. o.c. pag.216.
12. Gravemeijer, K. e.a.: *Rekenen & Wiskunde*, opdrachtenboek 2A, Baarn 1984.
13. Gravemeijer, K. e.a.: *Rekenen & Wiskunde*, allerleiboek 4B, Baarn 1984.
14. Heege, H. ter en E. de Moor: Oppervlakte (1), *Wiskobas Bulletin*, leerplandeel 7, IOWO, Utrecht 1977.
15. Streefland, L. en H. ter Heege: Niels Holgersson, *Willem Bartjens*, 8(2), 1989, pag.71-81.
16. Jong, R.A. de (ed.): Oppervlakte (2), *Wiskobas Bulletin*, leerplandeel 9, IOWO, Utrecht 1978, pag.23-43.
Streefland, L.: Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards a theory). Part I: Reflections on a Teaching Experiment, *Educational Studies in Mathematics* 15, 1984, pag.327-348.
17. Voor soortgelijke activiteiten, zie:
Heege, H. ter en L. Streefland: Op grote voet leven, *Willem Bartjens*, 9(1), 1989, pag.20-24.
18. Zie: Jong, R. de (ed.): Oppervlakte (1), werkblok, *Wiskobas Bulletin*, leerplandeel 7, IOWO, Utrecht 1977, alsmede noot 16.