

Symmetrie

Michel Roelens - Anne Schattelman

Inhoud

1. Inleiding
2. Transformaties, isometrieën en symmetrische figuren
 - a. Enkele vlakke transformaties
 - b. Samenstellen
 - c. Isometrieën
 - d. Symmetrische figuren
3. Rozetpatronen
 - a. Inleiding
 - b. Symmetriegroep van een rozetpatroon
 - c. Zelf rozetpatronen ontdekken en maken
4. Strookpatronen
 - a. Inleiding
 - b. Soorten symmetrie in friezen
 - c. Soorten strookpatronen
 - d. Waarom zijn er maar zeven?
 - e. Fries-oefeningen
 - f. Creatief omgaan met friezen
 - g. Friezen zoeken rondom ons
5. Behangpatronen
 - a. Zelf een betegeling à la Escher maken
 - b. Symmetriegroepen van behangpatronen

1. Inleiding

Symmetrie en groep

Symmetrie is een belangrijk begrip, niet alleen in de meetkunde maar ook bij de studie van vergelijkingen en in veel andere domeinen van de wiskunde. Ook in de (deeltjes)fysica, de kristallografie, de chemie ... is symmetrie een sleutelbegrip. En uiteraard ook in de kunst: of het nu gaat over het nastreven of het bewust doorbreken van symmetrie, kunstenaars zijn met symmetrie bezig.

Symmetrie gaat over invarianten, over wat behouden blijft als iets verandert. Je spiegelt of draait een figuur en je ziet geen verschil ... Om symmetrie van figuren te bestuderen, is kennis over meetkundige

transformaties nodig. Er zijn verschillende soorten symmetrische figuren omdat er verschillende soorten transformaties zijn die figuren invariant kunnen laten: draaiingen, verschuivingen, spiegelingen ...

Alle transformaties die een zelfde figuur invariant laten, horen samen. Ze vormen een groep. Als je ze inverteert of met elkaar samenstelt, blijf je altijd in die groep. Ook het begrip groep is één van de sleutelbegrippen van de wiskunde en de natuurkunde. De ‘natuurlijke’ manier om over dit begrip aan leerlingen iets te zeggen, is via symmetrie. In deze loep willen we de leerlingen het begrip symmetriegroep laten ontdekken. We blijven hierbij binnen de context van de vlakke meetkunde; we veralgemenen niet tot het abstracte groepsbegrip.

In de leerstof van het secundair onderwijs

Meetkundige transformaties en symmetrie staan op de eindtermen en leerplannen van de eerste graad, maar nadien gebeurt er vrij weinig mee. In de eindtermen van de tweede en de derde graad komen ze niet meer voor. In de leerplannen van de tweede graad worden vlakvullingen met transformaties vermeld, als één van de mogelijkheden om de band tussen wiskunde en kunst te illustreren. Homothetiëën komen eventjes aan bod bij de behandeling van gelijkvormige figuren. Het gemeenschapsonderwijs vermeldt transformaties bij het bewijzen van eigenschappen van figuren. In alle leerplannen worden transformaties en symmetrie her en der toegepast op grafieken (bv. even en oneven functies). Voor de rest kom je transformaties en symmetrie alleen tegen bij de uitbreidingsleerstof en de suggesties voor de vrije ruimte. Veel is het niet, voor zo’n belangrijk onderwerp. Daar willen we met deze loep iets aan doen ...

De hele loep kan in de derde graad aan bod komen, als één coherent pakket in de vrije ruimte. De volledige opbouw van transformaties, via symmetrie en symmetriegroepen tot en met de – prachtige – redenering die leidt tot de classificatie van de groepen van de rozetten en de friezen, schreven we met leerlingen van de derde graad in het achterhoofd. Sommige activiteiten en meetkundige vaststellingen zijn op zichzelf ook mooi en interessant, zonder de volledige verklaringen. Op die manier zijn bepaalde activiteiten uit deze loep ook zinvol in de eerste graad (zoals bv. de opdrachten met de transparanten in paragraaf 3), of in de tweede graad. Maar ook de passages die enkel in de derde graad haalbaar zijn, bieden voor leerkrachten van de eerste graad interessante achtergrondinformatie en plaatsen de leerstof over transformaties, die ze in de eerste graad geven, in een ruimer perspectief. Zij kunnen er ook inspiratie uit putten voor leerlingen die meer uitdaging nodig hebben.

De opbouw van deze ‘onder de loep’

De kern van het artikel bestaat uit de behandeling van *rozetten* in paragraaf 3 en van *friezen* (of strookpatronen) in paragraaf 4. De leerlingen ontdekken de symmetriegroepen van deze figuren en stellen er Cayleytafels van op. Met deze symmetriegroepen kunnen ze dan bepalen welke groepen van rozetten en friezen mogelijk zijn. Als lezer kun je eventueel bij een eerste lectuur over de verklaringen heen springen. Maar we hopen natuurlijk dat je – eventueel bij een tweede lectuur – de hele redenering volgt; de inspanning wordt beloond want het is een mooi stuk wiskunde!

Paragraaf 2 is bedoeld als voorbereiding op de paragrafen 3 en 4. We hebben de ervaring dat de meeste leerlingen van de derde graad niet meer thuis zijn in de taal van de transformaties en hun samenstelling. We geven er een herhaling over zodat de violen gestemd zijn voor de paragrafen 3 en 4. We maken bovendien van de gelegenheid gebruik om nadruk te leggen op de finesses van de wiskundetaal; we proberen er meer een ‘tweede kennismaking’ op een hoger niveau van te maken dan een loutere herhaling. Bij de transformaties beperken we ons wel tot wat nodig is voor de studie van symmetriegroepen. Andere aspecten van transformaties, die ook belangrijk zijn, bespreken we hier niet. Zo is het volgens ons essentieel om naast isometrieën en gelijkvormigheden ook transformaties

aan bod te brengen die de vorm *niet* behouden (die de figuren echt *transformeren*). Daarvoor verwijzen we naar onze eerdere loop ‘Meetkundige transformaties’ in UW 14/3.

Paragraaf 5 over behangpatronen is een logisch vervolg op de paragrafen 3 en 4. We beperken ons tot het aanhalen van ‘het vervolg van het verhaal’ zonder op de details in te gaan. De classificatie van de 17 groepen van behangpatronen wordt alleen vermeld en niet aangetoond.

2. Transformaties, isometrieën en symmetrische figuren

a. Enkele vlakke transformaties

In de eerste graad werden verschuivingen, draaiingen en spiegelingen aangebracht. De leerlingen van de tweede of derde graad zouden schuif-, draai- en spiegelbeelden moeten kunnen tekenen, maar toch is het nuttig om de wiskundige taal van de transformaties te herhalen. Hierbij hoeven we niet te doen alsof de leerlingen er nog niets over weten, maar kunnen we van de gelegenheid gebruik maken om te focussen op de wiskundige finesses en op het verschil tussen meetkundige transformaties en het verschuiven, draaien en spiegelen buiten de wiskunde.

We laten dit hier exemplarisch zien voor de verschuiving.

Verschuiven is niet zomaar verschuiven

Je legt een dier dat in karton is uitgeknipt, op de bank van een leerling en je geeft hem de opdracht het te verschuiven. Opdat deze opdracht eenduidig zou zijn, moet je zeggen over welke afstand hij moet verschuiven, in welke richting en in welke zin (bv. “verschuif deze zalm over drie centimeter evenwijdig met de rechterrand van je tafelblad, naar het bord”). Deze drievoudige informatie die een verschuiving vastlegt, wordt een *vector* genoemd.

In het dagelijks leven wordt het woord richting meestal gebruikt voor de wiskundige begrippen ‘richting’ en ‘zin’ samen: “in de richting van het bord” (dagelijkse taal) staat voor “in de richting loodrecht op het bord en bovendien in de zin naar het bord toe” (wiskundige taal). (Vraag nooit aan een wiskundige in welke richting je moet lopen om naar het station te gaan ...)

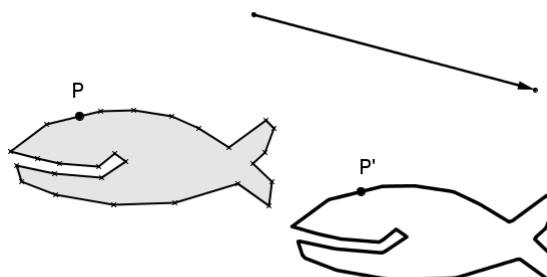
Je kunt de verschuiving ook vastleggen door het beeld van één punt te geven (bv. “verschuif zo dat het neusje van de zalm in dit punt terecht komt”). Een vector ligt vast als je het begin- en het eindpunt van een georiënteerd lijnstuk kent.

Dan projecteer je een GeoGebrafiguur van (ongeveer) hetzelfde dier, getekend als ‘veelhoek’. Je tekent op het scherm de vector waarover je wilt verschuiven en je verschuift de figuur met de knop ‘verschuiving’. Vraag aan de leerlingen welke verschillen ze opmerken met het verschuiven van de kartonnen figuur. Naast een aantal minder essentiële verschillen, komen hopelijk twee essentiële verschillen uit de bus.

1. Bij het toepassen van een verschuiving in GeoGebra blijft de originele figuur op zijn plaats en verschijnt er een ‘kloon’, het schuifbeeld. Bij het verschuiven van de kartonnen figuur is het dezelfde figuur die naar een andere plaats gaat.
2. Het schuifbeeld in GeoGebra verschijnt ogenblikkelijk; in tegenstelling tot de kartonnen figuur legt de figuur geen ‘weg’ af tussen de oorspronkelijke positie en de eindpositie.

De transformaties in meetkunde zijn zoals in GeoGebra, niet zoals het verschuiven van een reëel voorwerp!

Vervolgens laat je aan de leerlingen zien dat het schuifbeeld van het dier bestaat uit de schuifbeelden van de punten van het dier. Je tekent een punt P op de rand van het dier (maar niet in een hoekpunt). Gebruik hiervoor de knop ‘punt op object’. Je tekent het schuifbeeld P' van P en met de knop ‘meetkundige plaats’ teken je de verzameling (meetkundige plaats) van de punten P' waarvoor P op (de rand van) het dier ligt.



Een verschuiving is een *transformatie* van het vlak. Dit betekent dat elk punt van het vlak juist één beeld heeft. Om dan het beeld van een figuur te bepalen, volstaat het alle beelden van de punten van die figuur samen te nemen. Merk op dat niet alleen de punten van de figuur een beeld hebben, maar alle punten van het vlak. Ook dit is een verschil met het verschuiven van een voorwerp in het dagelijks leven: daar verschuif je enkel het voorwerp en niet het vlak errond.

Hieruit moeten de leerlingen het volgende onthouden.

- Een transformatie van het vlak geeft aan elk punt van het vlak een beeld. Het beeld van een figuur is de verzameling van de beelden van de punten van die figuur. Om een transformatie ‘vast te leggen’, is informatie nodig. Voor een verschuiving bestaat de nodige informatie uit een vector. Het schuifbeeld van punt P is gedefinieerd als het punt P' zo dat de vector $\overrightarrow{PP'}$ gelijk is aan die vaste gegeven vector.
- Transformaties in wiskunde zijn anders dan hun tegenhangers in het dagelijks leven. De oorspronkelijke figuur blijft waar ze was; het beeld is een nieuwe figuur. Er wordt geen ‘baan’ afgelegd. Ook punten buiten de beschouwde figuur hebben een beeld. De transformatie ‘werkt’ op het hele vlak en de figuur dient eigenlijk om te ‘zien’ wat de transformatie doet. Je kunt het vergelijken met een magnetisch veld: je visualiseert het door ijzervijlsel te strooien en te kijken wat hiermee gebeurt, maar het magnetisch veld was al aanwezig voor je het ijzervijlsel strooide ...

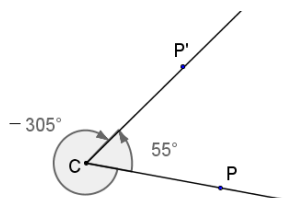
Idem voor draaiingen en spiegelingen

De verschuiving werd hier als voorbeeld genomen. We zouden hetzelfde kunnen doen voor draaiingen en spiegelingen. Met een ‘spiegeling’ bedoelen we een lijnspiegeling, m.a.w. een spiegeling ten opzichte van een rechte. Een puntspiegeling is dus geen spiegeling maar een draaiing. Bij de verschillen met de realiteit is het bij de spiegelingen wel een beetje anders gesteld als bij de verschuivingen en de draaiingen: ook bij een echte spiegel wordt er geen baan afgelegd en blijft de oorspronkelijke figuur bestaan (gelukkig!). Het verschil is hier vooral dat een wiskundige spiegel aan de twee kanten werkt: elk punt van het vlak heeft een beeld, niet enkel de punten aan één kant van de ‘spiegel’. Ook de punten van de spiegel zelf hebben een beeld (namelijk zichzelf).

In de tabel hieronder vatten we samen wat voor elk van deze elementaire soorten isometrieën (afstandsbehoudende transformaties) de vastleggende informatie is en hoe het beeld van een punt wordt gedefinieerd.

Naam transformatie	Nodige informatie	Naam beeld	Notatie en definitie (beeld van een willekeurig punt P)
Verschuiving (translatie)	Vector $\vec{v}$	Schuifbeeld	$t_{\vec{v}}(P) = P'$ zo dat $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$
Draaiing (rotatie)	Punt C (draaipunt of centrum) Georiënteerde hoek φ (draaihoek)	Draaibeeld	Voor $P \neq C$: $r_{C,\varphi}(P) = P'$ zo dat $\begin{cases} CP' = CP \\ \angle PCP' = \varphi \end{cases}$ $r_{C,\varphi}(C) = C$
Puntspiegeling	Punt C (centrum)	Puntspiegelbeeld	Voor $P \neq C$: $S_C(P) = P'$ zo dat $C = \text{midden } [PP']$ $S_C(C) = C$
Spiegeling	Rechte a (spiegelas)	Spiegelbeeld	Voor $P \notin a$: $s_a(P) = P'$ zo dat $a = \text{middelloodlijn } [PP']$ Voor $P \in a$: $s_a(P) = P$

Lees “ $t_{\vec{v}}(P) = P'$ zo dat $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$ ” als “het schuifbeeld van een punt P is het punt P' zo dat de vector $\overrightarrow{PP'}$ gelijk is aan $\vec{v}$ ”. Ook in het taalgebruik maken we een verschil tussen de transformaties (de verschuiving $t_{\vec{v}}$, de draaiing $r_{C,\varphi}$...) en het beeld van een punt (het schuifbeeld $t_{\vec{v}}(P)$ van P , het draaibeeld $r_{C,\varphi}(P)$ van P ...). Merk op dat de draaihoek van een draaiing niet uniek is. De draaiing rond C over $+55^\circ$ (55° in tegenwijzerzin) is dezelfde draaiing als de draaiing rond C over -305° (305° in wijzerzin), want het beeld van een willekeurig punt van het vlak onder beide draaiingen is hetzelfde. Zoals hierboven vermeld, gaat het bij een transformatie immers niet om de ‘baan’ die gevolgd is ...



Merk op dat een puntspiegeling hetzelfde is als een draaiing rond het centrum over 180° : $S_C = r_{C,180^\circ}$.

Om een duidelijk onderscheid te maken, gebruiken we hier een grote S voor puntspiegeling en een kleine s voor spiegeling (dit wordt niet overal gedaan). Het gevalsonderscheid bij drie van de vier definities komt bij de aanbreng maar in tweede instantie. Nadat een definitie is geformuleerd voor een willekeurig punt P , kun je vaststellen dat deze definitie niet werkt voor bepaalde speciale punten. Dan past men dit aan door het beeld van deze punten apart te definiëren.

De verschuiving over de nulvector $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$ beeldt elk punt (en dus elke figuur) op zichzelf af. Hetzelfde gebeurt bij een draaiing over 0° (of 360°). Deze transformatie die elk punt op zichzelf afbeeldt, wordt de *identieke* transformatie I genoemd. Dus: $t_{\vec{0}} = r_{C,0^\circ} = I$.

b. Samenstellen

Om symmetrie te bestuderen, is niet alleen kennis van enkele isometrieën nodig, maar ook van het samenstellen van deze transformaties. Het samenstellen van spiegelingen komt voor op het leerplan van het derde jaar in het katholiek onderwijs (uitbreidingsdoelstelling M10: “de samenstelling van twee verschuivingen, van twee draaiingen, van twee spiegelingen onderzoeken”). We beperken ons hier tot het onderzoeken van de samenstelling van twee spiegelingen, maar hou de leerlingen niet tegen om ook andere combinaties van transformaties samen te stellen (een verschuiving en een spiegeling enz.). Dit onderzoek situeert zich in de tweede graad (als uitbreiding) of in de derde graad (als je het volledige materiaal van deze loop aan bod laat komen als één hoofdstuk in de vrije ruimte).

We maken een onderscheid tussen onderzoeken *wat* de samengestelde van twee spiegelingen zou kunnen zijn, en bewijzen dat dit vermoeden correct is.

Vooraf zetten we even de puntjes op de *i* over terminologie en notaties. Als je twee transformaties s en t *samenstelt* (in die volgorde: eerst s toepassen en dan t), zoek je het beeld door t van het beeld door s . Dit geeft een nieuwe transformatie $t \circ s$ (lees: t na s), de *samengestelde* van s en t . Deze op het eerste gezicht vreemde volgorde in de notatie zorgt ervoor dat we de volgorde kunnen behouden als we het beeld van een punt door de samengestelde opschrijven:

$$(t \circ s)(P) = t(s(P)).$$

Het verschil tussen de woorden ‘samenstelling’ en ‘samengestelde’ kunnen we vergelijken met de optelling en de vermenigvuldiging bij getallen.

Bewerking	Resultaat
Optelling +	Som 3 + 4 (een getal)
Vermenigvuldiging ·	Product 7 · 2 (een getal)
Samenstelling ◦	Samengestelde $s_b \circ s_a$ (een transformatie)

Je kunt hier ook even herhalen wat de *inverse* t^{-1} is van een transformatie t : het is de transformatie die het beeld terugstuurt naar het origineel

$$t(P) = Q \Leftrightarrow t^{-1}(Q) = P.$$

Deze inverse transformatie is enkel een goed gedefinieerde transformatie wanneer elk punt Q van het vlak het t -beeld is van juist één punt P . Je kunt bv. niet de inverse nemen van de loodrechte projectie op een rechte, want verschillende punten hebben dezelfde projectie. Maar bij de draaiingen, spiegelingen, verschuivingen ... die we hier beschouwen, stelt zich geen probleem. De inverse van een draaiing is de draaiing rond hetzelfde punt over de tegengestelde hoek; de inverse van een spiegeling is diezelfde spiegeling; de inverse van een verschuiving is de verschuiving over de tegengestelde vector.

De inverse van een transformatie t is ook de transformatie die t ongedaan maakt: als je eerst t toepast en dan t^{-1} , dan is elk punt weer op zichzelf gestuurd. Anders gezegd: $t^{-1} \circ t = I$.

Voor de vragen 2 en 3 hieronder zitten de leerlingen aan een computer.

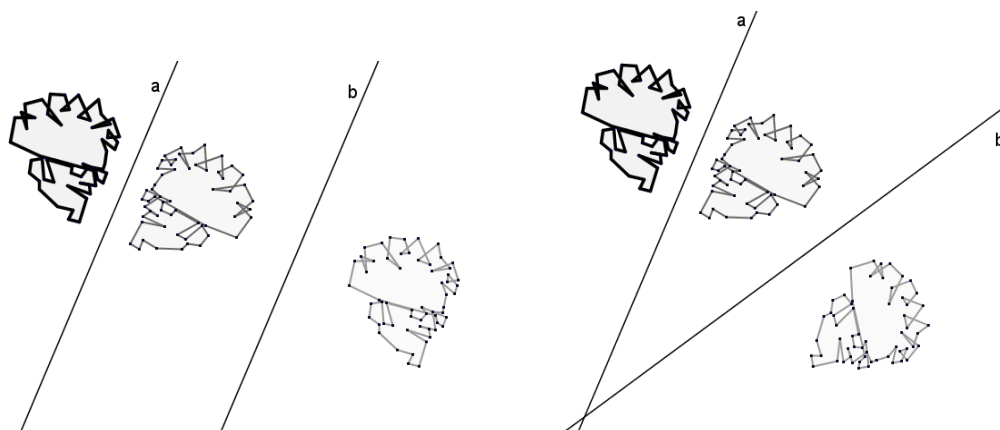
Samenstelling van twee spiegelingen onderzoeken

1. Je wilt in GeoGebra onderzoeken wat de samengestelde is van twee spiegelingen door twee keer na elkaar te spiegelen en te kijken wat er gebeurt. Doe je dit door het effect te bekijken op (a) één punt, (b) twee punten (of een lijnstuk), (c) een gelijkbenige driehoek, (d) een willekeurige driehoek of (e) het GeoGebra-portret van je leraar?

(Enkel (d) en (e) zijn goed. Om te kijken welke transformatie de samengestelde is, moet je kijken naar het origineel en het uiteindelijke beeld. In geval (a) heb je gewoon P en het beeld P'' na twee keer spiegelen. Maar P'' kan het beeld zijn van P door een verschuiving, door een puntspiegeling, door een spiegeling, door verschillende draaiingen of door nog een totaal andere soort transformatie. Hiermee weet je dus niet welke transformatie de samengestelde is. Ook in de gevallen (b) en (c) zijn er verschillende mogelijkheden, tenzij je bij de gelijkbenige driehoek bijhoudt welk punt op welk punt wordt afgebeeld. Het is best om een 'niet symmetrische' figuur te nemen (zie later), bv. een willekeurige driehoek of een portret van een leraar.)

2. Onderzoek nu wat je krijgt als je twee spiegelingen na elkaar toepast, m.a.w. wat de samengestelde is van twee spiegelingen. De assen kunnen evenwijdig zijn (zelfs samenvallend) of snijdend. Maak een gevalsonderscheid.

(De leerlingen ontdekken dat de samengestelde van twee spiegelingen met evenwijdige assen een verschuiving is. De samengestelde van twee spiegelingen met snijdende assen is een draaiing. Op de figuur hieronder maakten we telkens het beeld 'bleker' dan het origineel. In de nabespreking kun je doorvragen: welke verschuiving precies? (Loodrecht op de assen, over een vector die gelijk is aan twee keer de loodrechte vector van de eerste naar de tweede as.) Klopt dit ook in het speciale geval waarbij de assen samenvallen? (In dat geval wordt de figuur op zichzelf afgebeeld en is de samengestelde de identieke transformatie. Dit klopt: de identieke is inderdaad de verschuiving over de nulvector.) Welke draaiing precies? (Rond het snijpunt van beide assen, over een georiënteerde hoek die gelijk is aan twee keer de georiënteerde hoek van de eerste naar de tweede as.)



De leerlingen kunnen eventueel in GeoGebra controleren dat de juiste verschuiving of draaiing hetzelfde beeld geeft aan de figuur. Ze kunnen de positie en/of de vorm van de figuur wijzigen; ze kunnen de assen verplaatsen. De vaststelling blijft kloppen.

De leerlingen stellen vast:

- als $a \parallel b$, dan is $s_b \circ s_a = t_{\overrightarrow{AB}}$ met A, B de snijpunten van a , respectievelijk b met een loodlijn op a en b . Speciaal geval: als a en b samenvallen: $s_b \circ s_a = I$.
- als a en b snijdend zijn, dan is $s_b \circ s_a = r_{C, 2\beta}$ waarbij C het snijpunt is van a en b en β de (scherpe of stompe) georiënteerde hoek van a naar b . (Merk op: het maakt niet uit of je de scherpe of de stompe hoek neemt; je krijgt in elk geval één van de draaihoeken van dezelfde draaiing.)

Hoe sterk het vermoeden ook mag zijn na deze vaststelling in GeoGebra, een wiskundig bewijs is nog veel krachtiger en geldt voor *alle* mogelijke rechten a en b en voor *alle* punten van het vlak (en dus voor alle figuren die ermee gevormd kunnen worden). In de volgende werktekst wordt een bewijs opgesteld voor het geval van twee spiegelingen met evenwijdige assen. Voor het geval van de snijdende spiegellijnen kun je dezelfde twee vragen stellen.

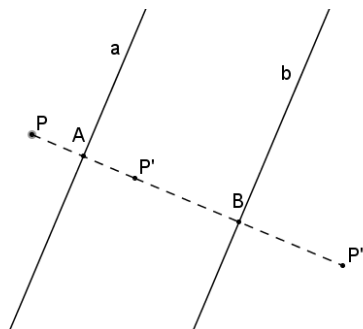
Samengestelde van twee spiegelingen met evenwijdige assen: bewijs!

- Wat moet je bewijzen? Wat zegt de definitie dat je hiertoe concreet moet bewijzen voor elk punt P van het vlak?

(We moeten bewijzen dat, als de assen a en b evenwijdig zijn, $s_b \circ s_a$ een verschuiving is. Volgens de definitie van verschuiving moeten we bewijzen dat de vector van een willekeurig punt P naar het beeld van P door $s_b \circ s_a$, gelijk is aan een vaste vector.)

- Maak een tekening en toon dit aan.

(Voor elk punt P hebben we, met de notaties van de figuur:



$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PP''} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{P'B} + \overrightarrow{BP''} \\
 &= \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{P'B} + \overrightarrow{P'B} \\
 &= 2(\overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{P'B}) \\
 &= 2\overrightarrow{AB}
 \end{aligned}$$

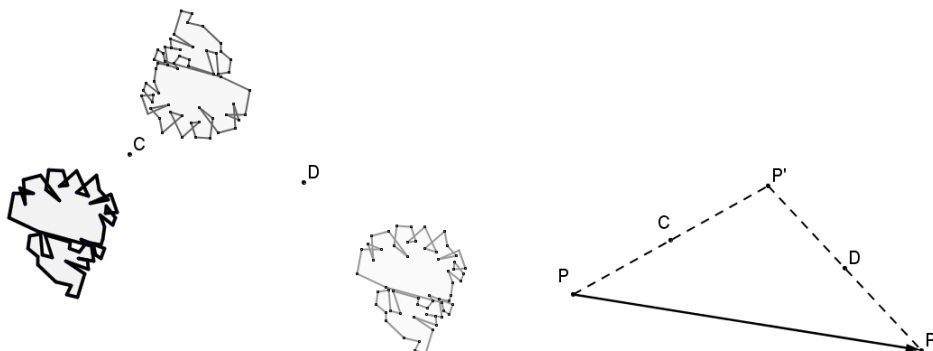
Omdat a en b evenwijdig zijn, is dit een vaste vector! Bemerkt de kracht van vectoren: de berekening geldt evengoed voor andere posities van het punt P (tussen a en b , erbuiten aan de b -kant...). Als je dezelfde berekening zou maken met afstanden in plaats van met vectoren, zou je verschillende gevallen moeten onderscheiden (sommige plustekens zouden mintekens worden); met vectoren heb je alle gevallen tegelijk!

Voor het geval van de snijdende spiegellassen blijft dezelfde berekening met vectoren kloppen, maar niet meer de conclusie: de vector $\overrightarrow{2AB}$ is dan geen vaste vector meer, maar hangt af van P . Om te bewijzen dat de samengestelde een draaiing is, moeten de leerlingen bewijzen dat het uiteindelijke beeld P'' van een willekeurig punt P even ver ligt van het centrum C (het snijpunt van de assen) als het punt P zelf en dat de georiënteerde hoek PCP'' gelijk is aan de vaste hoek 2β (zie vaststelling). Een mooi speciaal geval: als de twee spiegellassen loodrecht op elkaar staan, dan is de draaihoek $2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$. De samengestelde van twee spiegelingen met loodrechte assen is bijgevolg de puntspiegeling ten opzichte van het snijpunt.

Ook de samengestelde van twee puntspiegelingen is nuttig voor de studie van friezen in paragraaf 4.

De samengestelde van twee puntspiegelingen

- Onderzoek wat je krijgt als je twee puntspiegelingen samenstelt. Bewijs je ontdekking.
(Na de vorige opgave weten de leerlingen dat ze bij het 'onderzoeken' een voldoende willekeurige figuur moeten nemen. Ze ontdekken dat de samengestelde (vermoedelijk) een verschuiving is. Om dit te bewijzen (figuur rechts) moeten ze dus steunen op de definitie van een verschuiving: ze moeten bewijzen dat voor elk punt P van het vlak, de vector van P naar het beeld P'' van P door $S_D \circ S_C$ gelijk is aan een vaste vector.



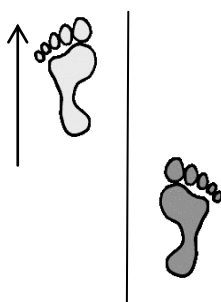
Welnu:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PP''} &= \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''} \\ &= 2\overrightarrow{CP'} + 2\overrightarrow{P'D} \\ &= 2(\overrightarrow{CP'} + \overrightarrow{P'D}) \\ &= 2\overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

En dat is een vaste vector. De samengestelde van twee puntspiegelingen is dus de verschuiving over 2 keer de vector van het eerste naar het tweede centrum.)

c. Isometrieën

Een isometrie is een transformatie van het vlak die de afstand behoudt. Verschuivingen, draaiingen en spiegelingen zijn allemaal voorbeelden van isometrieën. Verschuivingen en draaiingen zijn samengestelden van spiegelingen. Men kan aantonen dat er geen andere isometrieën bestaan dan samengestelden van spiegelingen. De samengestelde van een even aantal spiegelingen is altijd een verschuiving of een draaiing. De samengestelde van een oneven aantal spiegelingen is altijd een ‘schuifspiegeling’, dit is de samengestelde van een spiegeling en een verschuiving evenwijdig met de spiegelas. Hieronder is het bleke voetspoor het beeld van het donkere door de schuifspiegeling waarvan de as en de vector getekend zijn.



Een spiegeling bekijken we hierbij ook als een schuifspiegeling (de verschuiving gebeurt dan over de nulvector en we spreken af dat de nulvector evenwijdig is met elke rechte). Elke isometrie is dus ofwel een verschuiving of een draaiing, ofwel een schuifspiegeling (met als speciaal geval een spiegeling).

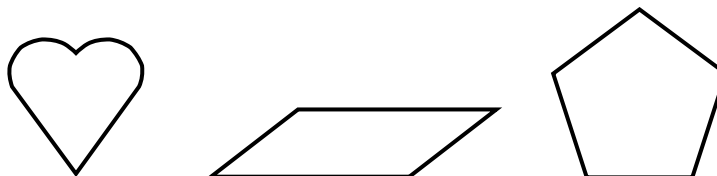
d. Symmetrische figuren

Symmetrie herkennen en benoemen

De leerlingen hebben in de eerste graad al gezien wat lijnsymmetrische, puntsymmetrische en draaisymmetrische figuren zijn, en wat het verband is met de spiegeling, de puntspiegeling en de draaiing. Een korte herhaling volstaat.

Symmetrische figuren

1. Leg telkens uit met een transformatie waarom de figuren hieronder symmetrisch zijn.

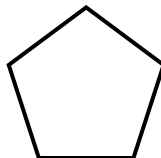


(De eerste figuur is lijnsymmetrisch want er is een spiegeling die de figuur op zichzelf afbeeldt. Deze figuur heeft, anders gezegd, een symmetrieas. De tweede is puntsymmetrisch want er is een puntspiegeling die de figuur op zichzelf afbeeldt. Dit parallellogram heeft dus een symmetriepunt. De derde is zowel lijnsymmetrisch (er zijn

spiegelingen die de figuur op zichzelf afbeelden) als draaisymmetrisch (er zijn draaiingen – en niet alleen over 0° – die de figuur op zichzelf afbeelden). Ze heeft dus zowel symmetrieassen als een draaisymmetriepunt en draaisymmetriehoeken.)

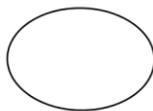
2. Zoek *alle* symmetrieassen, symmetriepunten, draaisymmetriepunten en symmetrievectoren van de volgende figuren.

- a. Een regelmatige vijfhoek.



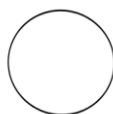
(Er zijn vijf symmetrieassen (telkens door een hoekpunt en het midden van de overstaande zijde). Er is één draaisymmetriepunt (het snijpunt van de symmetrieassen), dat echter geen symmetriepunt is.)

- b. Een ellips.



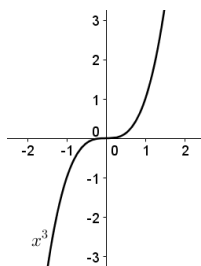
(Twee symmetrieassen en één symmetriepunt.)

- c. Een cirkel.



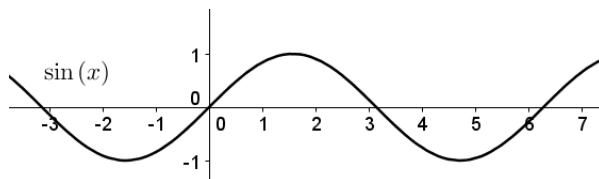
(Oneindig veel symmetrieassen (alle rechten door het middelpunt); één symmetriepunt (het middelpunt) dat ook draaisymmetriepunt is voor gelijk welke georiënteerde hoek.)

- d. De grafiek $y = x^3$.



(Eén symmetriepunt.)

- e. De sinusgrafiek.



(Symmetrieassen: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ waarbij $k \in \mathbb{Z}$. Symmetriepunten: $(k\pi, 0)$ waarbij $k \in \mathbb{Z}$.)

Symmetrievectoren $(2k\pi, 0)$ waarbij $k \in \mathbb{Z}$. Merk op, maar dit was niet gevraagd: er zijn ook schuifspiegelingen die de grafiek op zichzelf afbeelden, de verschuivingen met vectoren $((2k+1)\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, samengesteld met de spiegeling ten opzichte van de x -as.)

In een klassikale bespreking (bv. tussen vraag 1 en vraag 2 hierboven), is het goed om de definitie van symmetrie vast te zetten, om in te gaan op een aantal misconcepties en om te wijzen op het juiste taalgebruik.

Een figuur is symmetrisch (lijnsymmetrisch, puntsymmetrisch, draaisymmetrisch, schuifsymmetrisch, schuifspiegelsymmetrisch) als er een bepaalde soort isometrie is die de figuur op zichzelf afbeeldt (een spiegeling, een puntspiegeling, een (niet-identieke) draaiing, een (niet-identieke) verschuiving, een schuifspiegeling).

Er is een groot verschil tussen een transformatie (die op elke figuur kan worden toegepast) en symmetrie. Symmetrie is een eigenschap van bepaalde figuren, die door een (niet-identieke) transformatie op zichzelf wordt afgebeeld. ‘Op zichzelf afgebeeld’ betekent dat de figuur als geheel samenvalt met zijn beeld. Dit betekent niet dat elk punt van de figuur op zichzelf afgebeeld wordt (dit is te sterk), maar wel dat het beeld en het origineel dezelfde puntenverzameling vormen. ‘Op zichzelf afgebeeld’ betekent natuurlijk veel meer dan dat het beeld congruent is met het origineel (dit is te zwak), wat altijd het geval is wanneer de transformatie een isometrie is. In plaats van te zeggen dat de transformatie de figuur op zichzelf afbeeldt, zeggen we ook dat de transformatie de figuur *invariant* laat.

In het taalgebruik maken we een onderscheid tussen de symmetrie-eigenschap van de figuur, de transformatie die de figuur op zichzelf afbeeldt en de informatie die deze transformatie vastlegt. Deze informatie krijgt nu een nieuwe naam. De spiegelas van een spiegeling die de figuur op zichzelf afbeeldt, is bv. een symmetrieas van de figuur. Laten we ook dit in een tabel samenvatten.

Symmetrie-eigenschap	Transformatie die de figuur op zichzelf afbeeldt	Informatie die deze transformatie vastlegt
De figuur is schuifsymmetrisch.	Een (niet-identieke) verschuiving beeldt de figuur op zichzelf af.	De figuur heeft een symmetrievector.
De figuur is draaisymmetrisch.	Een (niet-identieke) draaiing beeldt de figuur op zichzelf af.	De figuur heeft een draaisymmetriepunt en een draaisymmetriehoek.
De figuur is puntsymmetrisch.	Een puntspiegeling beeldt de figuur op zichzelf af.	De figuur heeft een symmetriepunt.
De figuur is lijnsymmetrisch	Een spiegeling beeldt de figuur op zichzelf af.	De figuur heeft een symmetrieas.
De figuur is schuifspiegelsymmetrisch	Een schuifspiegeling beeldt de figuur op zichzelf af.	De figuur heeft een symmetrieas en een symmetrievector (evenwijdig met de as).

Symmetriegroep van een figuur

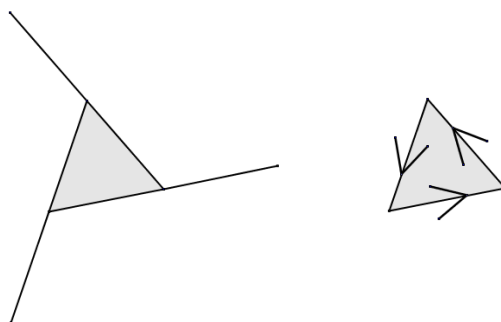
We geven nog een nieuwe betekenis aan het woord *symmetrie*: ‘een symmetrie van een figuur’ is een transformatie die deze figuur op zichzelf afbeeldt. Om een figuur schuifsymmetrisch of draaisymmetrisch te noemen, hebben we de identieke uitgesloten. Anders zou elke figuur schuif- en draaisymmetrisch zijn, waardoor het maar een saaie boel zou zijn. Maar hier, bij het begrip ‘een symmetrie van een figuur’, mag de identieke weer meedoen. De identieke is dus een symmetrie van elke mogelijke figuur, maar symmetrische figuren hebben meer dan die ene symmetrie.

We willen de leerlingen laten ontdekken dat de verzameling van alle symmetrieën van een figuur een *groep* vormt. Dit wil zeggen dat: (1) de samengestelde van twee symmetrieën uit die verzameling er steeds bij is; (2) de identieke er ook bij is en (3) de inverse van een symmetrie uit die verzameling er ook steeds bij is. We laten de leerlingen dit ontdekken aan de hand van opgaven waarbij ze zelf figuren moeten bedenken die bepaalde symmetrieën hebben. Op die manier ontdekken ze dat het onmogelijk is om een figuur te maken die bv. twee symmetrieën heeft maar niet de samengestelde van die twee.

Figuren maken met gegeven symmetrieën

1. Teken een figuur met als symmetrie een draaiing over $+120^\circ$ en zo weinig mogelijk andere symmetrieën. Welke symmetrieën heeft de figuur noodzakelijk ook? (Tip: het kan met enkel draaiingen als symmetrieën).

(Leerlingen die een regelmatige driehoek tekenen, hebben een te symmetrische figuur gemaakt. Ze moeten iets doen om de lijnsymmetrie te breken (zonder de draaisymmetrie te breken), bv. zoals op de twee figuren hieronder.



Automatisch is ook de draaiing over -120° een symmetrie. En natuurlijk is de identieke ook een symmetrie. Het groepje symmetrieën van de figuur heeft drie elementen: de identieke, de draaiing rond het middelpunt over 120° en de draaiing rond het middelpunt over -120° , die de inverse is van de eerste draaiing.)

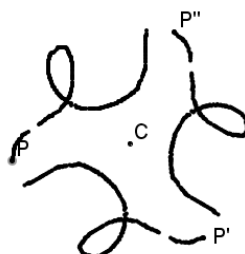
(Aan een computer) Wat je in vraag 1 op papier hebt gezocht, kan ook met GeoGebra, op de volgende manier.

2. Je tekent het draaisymmetriepunt C en een willekeurig punt P . Teken, met de knop voor draaiingen, het draaibeeld P' van P rond C over $+120^\circ$. Zorg ervoor dat zowel P als P' een spoor nalaten (rechtermuisknop). Teken iets willekeurig met P . Is de figuur die je verkrijgt (het geheel: de unie van de baan van P en die van P'), draaisymmetrisch over $+120^\circ$? Zo niet, pas aan.

(De leerlingen krijgen iets van de volgende aard.

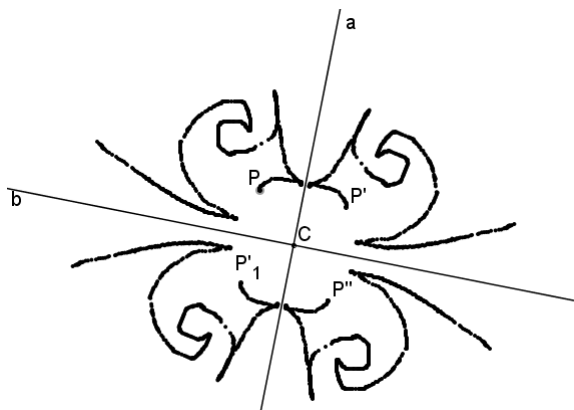


De figuur is niet draaisymmetrisch omdat het beeld van de baan van P' ontbreekt. Om met deze werkwijze een draaisymmetrische figuur te maken, moeten ze dus niet alleen het beeld van P maar ook het beeld P'' van het beeld van P tekenen en dit punt ook een spoor laten maken. In dit geval, omdat $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$, is de figuur hiermee wel draaisymmetrisch: het beeld van P'' is weer P .)



3. Probeer op dezelfde manier een figuur te maken met twee symmetrieassen en met een zo klein mogelijk groepje symmetrieën.

(Een figuur met twee symmetrieassen is automatisch ook draaisymmetrisch of schuifsymmetrisch. Immers, er zijn twee spiegelingen die de figuur op zichzelf afbeelden; als je die twee spiegelingen na elkaar toepast op de figuur, wordt de figuur uiteraard ook op zichzelf afgebeeld. De samengestelde van twee spiegelingen is ofwel een draaiing ofwel een verschuiving. Om zo weinig mogelijk symmetrieën te hebben, kunnen we best de twee symmetrieassen loodrecht op elkaar nemen. De symmetrieën zijn dan: de twee spiegelingen, de puntspiegeling ten opzichte van het snijpunt van deze assen en de identieke. In GeoGebra: de leerling tekent de twee assen, een punt P , de spiegelbeelden P' en P_1 ten opzichte van a en b en dan nog het spiegelbeeld P'' van P' ten opzichte van b , dat samenvalt met het spiegelbeeld van P_1 ten opzichte van a .)



In de vorige activiteit spraken we al op een informele manier over het ‘groepje’ van de symmetrieën van de figuur. Het verkleinwoord betekende niet dat de groep ‘klein’ is, maar hoorde bij het ‘informele’ taalgebruik. De samengestelden en de inverse transformaties van elementen van het groepje horen er ook altijd bij, net als de identieke transformatie. We definiëren nu iets algemener wat een groep van transformaties is. Het verkleinwoord laten we weg.

Een verzameling G van transformaties (van het vlak) wordt een *groep* genoemd als de volgende voorwaarden voldaan zijn:

- $\forall s, t \in G: t \circ s \in G$ (G is *gesloten* voor de samenstelling; of: de samenstelling is *inwendig* in G)
- $\forall s \in G: s^{-1} \in G$ (de *inverse* van elk element van G zit ook in G)
- $I \in G$ (de identieke zit in G)

De lezers die vertrouwd zijn met abstracte groepen, zullen opmerken dat er in de algemene definitie van een groep nog een vierde voorwaarde bij komt, de associativiteit van de bewerking. Inderdaad, een ‘willekeurige’ bewerking kan ook niet-associatief zijn (denk bv. aan het gemiddelde van twee getallen, bekeken als een bewerking). Maar: de samenstelling van transformaties, in het vlak of elders, is op een evidente manier altijd associatief. Ook de voorwaarden over het neutraal element en het bestaan van een inverse ‘zien’ er anders uit in de context van abstracte groepen: dat de identieke en de inversen ‘bestaan’ is in het algemeen niet evident. De enige voorwaarde die overblijft in de context van de transformaties is het ‘erbij zijn’.

Je zou hier kunnen aanvoeren dat de derde voorwaarde volgt uit de eerste twee. Dit klopt op voorwaarde dat de verzameling niet leeg is.

Belangrijk besluit: alle symmetrieën van een figuur vormen een groep, de *symmetriegroep* van deze figuur. Het zoeken naar alle elementen van de symmetriegroep is niet hetzelfde als het zoeken naar alle symmetrieassen, symmetriepunten en draaisymmetriepunten. Een zelfde draaisymmetriepunt kan immers draaipunt zijn van verschillende draaiingen uit de symmetriegroep.

Bv. een regelmatige vijfhoek heeft vijf symmetrieassen en één draaisymmetriepunt (zie hoger). Zijn symmetriegroep bevat echter tien isometrieën: vijf spiegelingen en vijf draaiingen rond het middelpunt: over 0° (de identieke), 72° , 144° , 216° (of -144°) en 288° (of -72°).



3. Rozetpatronen

a. Inleiding

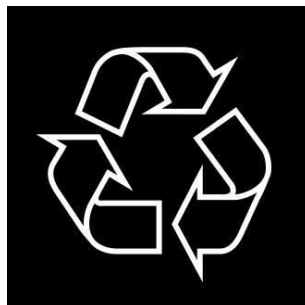
We blijken te houden van ‘ronde’ symmetrische vormen. Wie is er niet gefascineerd door ‘rozetpatronen’ in de natuur [3]: bloemen, sneeuwkrystallen, zeesterren, molecuulstructuren, kristallen? Ze zijn zo mooi dat ze ook in de kunst en in de architectuur terug te vinden zijn: glasramen in kerken, plafonds en wandversieringen in bijvoorbeeld Moorse paleizen, kanten onderleggers ...



Dergelijke patronen worden ook gebruikt in onze communicatie: het recyclagesymbool, het Isle of man-symbool (eerste figuur links), het Yin-yang-symbool, logo's van automerken en organisaties. We dagen de lezer uit om na het lezen van dit artikel op zoek te gaan naar rozetpatronen in het dagelijks leven.



We zien een regelmaat verschijnen in al deze vormen: met elk voorbeeld kan ogenschijnlijk een draaibeweging geassocieerd worden die het patroon op zichzelf stuurt. Hoe symmetrisch zijn het recyclagesymbool en de vijfvoudige ster? De symmetrie-eigenschappen zijn zeker verschillend. Maar het verschil zit hem niet alleen in de drievoudigheid en de vijfvoudigheid; er is meer aan de hand. Wie heeft zich ook laten vangen aan het recyclagesymbool? Is er een verschil met de volgende versie?

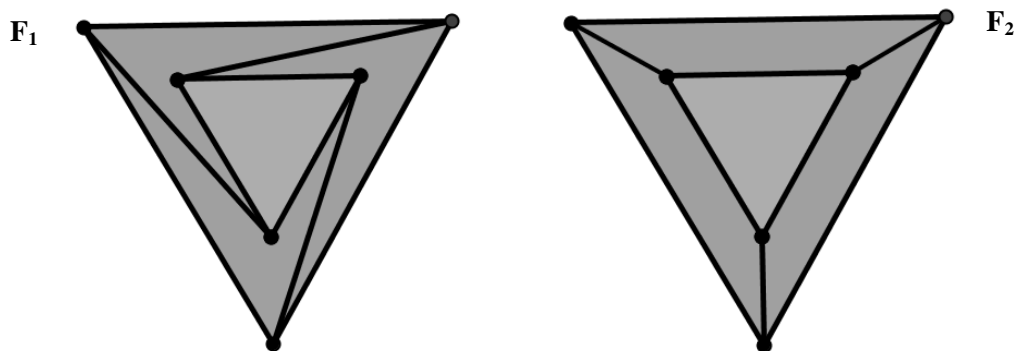


b. Symmetriegroep van een rozetpatroon

We onderzoeken de symmetriegroepen van twee op het eerste zicht gelijkaardige patronen. Zonder de nadruk te willen leggen op het begrip ‘groep’, ontdekken de leerlingen hier voor het eerst eindige structuren. De eigenschappen die ze gewoonlijk voor bewerkingen in getallenverzamelingen onderzocht hebben (inwendigheid, commutativiteit, het bestaan van een neutraal en een symmetrisch element), verschijnen nu ook in de meetkunde.

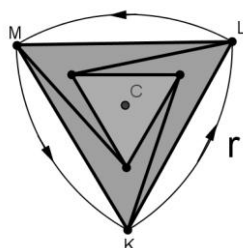
De twee soorten symmetriegroepen van rozetten zelf ontdekken

- De onderstaande patronen bevatten driehoekstructuren. Bepaal voor elk van de patronen alle isometrieën die hen op zichzelf afbeelden. Vanaf nu zeggen we dat de isometrieën de figuren invariant laten. Ga experimenteel te werk als volgt:
 - Kopieer elke figuur op een transparant en knip ze uit met een ruime marge.
 - Leg de kopie op het originele patroon zodat het volledig overdekt wordt. Leg het transparant nu op een andere manier op de figuur zodat deze terug volledig overdekt is. Probeer zo veel mogelijk verschillende manieren te vinden. Observeer ondertussen telkens heel goed welke beweging je gemaakt hebt met je transparant. Kan je die beweging koppelen aan een transformatie van het vlak?
 - Teken de nodige informatie van de transformatie die je figuur op zichzelf stuurt: de as bij een spiegeling, de hoek en het centrum bij een draaiing of het centrum bij een puntspiegeling ...



- Introduceer namen voor de punten en voor eventuele assen. Gebruik aangepaste notaties voor de gevonden transformaties. Maak mogelijke samengestelden en verifieer of je zo nieuwe transformaties krijgt die je nog niet ontdekt had bij je eerste observatie.

(Figuur 1: De figuur wordt invariant gelaten door een draaiing in tegenwijzerzin t.o.v. een centraal punt C over 120° (r), een draaiing in tegenwijzerzin t.o.v. C over 240° ($r \circ r = r^2$) en de identieke (I). Draaien we in wijzerzin over 120° dan komt deze draaiing precies overeen met die over 240° in tegenwijzerzin, die over 240° in wijzerzin met die over 120° in tegenwijzerzin. Draaien we driemaal over 120° om C ($r \circ r \circ r = r^3$), ofwel in wijzerzin ofwel in tegenwijzerzin, dan komen alle punten terug in hun oorspronkelijke positie ($r^3 = I$). Draaien we driemaal over 240° dan geldt hetzelfde.



Figuur 2: Net zoals in figuur 1 laten de draaiingen over 120° en 240° in tegenwijzerzin, t.o.v. een centraal punt de figuur invariant (ook in wijzerzin). Maar er is meer. De rechten door de hoekpunten, loodrecht op de overstaande zijden van de driehoeken zijn symmetrieassen. Dit wil zeggen dat drie spiegelingen de figuur eveneens invariant laten. Om dit te ontdekken moest het transparant opgetild en omgedraaid worden.)

3. Om alle samengestelden overzichtelijk voor te stellen, gebruiken we een Cayleytafel. In een rooster plaatsen we alle transformaties zowel in de eerste kolom als in de eerste rij zoals hieronder. De bewerking (hier samenstellen) wordt van links naar rechts uitgevoerd zoals in volgende tabel

$\circ (na)$	f	g
f	$f \circ f$	$f \circ g$
g	$g \circ f$ (g na f)	$g \circ g$

Maak een Cayleytafel voor de draaiingen die de verwrongen driehoek invariant laten:

$\circ (na)$			

(Ingevuld wordt dit:

$\circ (na)$	I	r	r^2
I	I	r	r^2
r	r	r^2	I
r^2	r^2	I	r

4. Is de bewerking inwendig? Is ze commutatief? Is er een neutraal element? Is een inverse van een symmetrie opnieuw een symmetrie?

(De bewerking is duidelijk inwendig want we verkrijgen geen nieuwe transformaties in de tabel; I speelt de rol van neutraal element, want samenstellen met I heeft geen effect; samenstellen van r^2 en r levert I op en de bewerking is commutatief (bijvoorbeeld $r \circ r^2 = r^2 \circ r$; de tabel is trouwens symmetrisch t.o.v. de eerste diagonaal).

De symmetriegroep wordt bijgevolg

$$\text{Sym}(F_1) = \{I, r, r^2\} \text{ met } r^3 = I \text{ .}$$

5. We noemen de hoekpunten van de randdriehoek van figuur 2 E , F en G en de symmetrieassen door de punten E , F en G respectievelijk e , f en g . Bepaal nu alle mogelijke samengestelden van de gevonden symmetrieën van figuur 2. Om dit snel te kunnen doen, kan je een gemakkelijke voorstelling hanteren:

r stuurt E op F , F op G en G op E ; noteer die koppels verticaal in een rooster.

$$r = \begin{pmatrix} E & F & G \\ F & G & E \end{pmatrix}$$

s_e stuurt E op E , F op G en G op F . Rangschik de koppels opnieuw verticaal:

$$s_e = \begin{pmatrix} E & F & G \\ E & G & F \end{pmatrix}$$

Om $r \circ s_e$ te bepalen, moeten we eerst s_e en nadien r uitvoeren:

$$r \circ s_e = \begin{pmatrix} E & F & G \\ F & E & G \end{pmatrix} = s_g.$$

Zo vul je de tabel verder aan: $r \circ s_e$ wordt in de rij geplaatst bepaald door r en in de kolom bepaald door s_e :

$\circ$ (na)	I	r	r^2	s_e	s_f	s_g
I						
r				$r \circ s_e = s_g$		
r^2						
s_e						
s_f						
s_g						

(Ingevuld wordt het:

$\circ$ (na)	I	r	r^2	s_e	s_f	s_g
I	I	r	r^2	s_e	s_f	s_g
r	r	r^2	I	$r \circ s_e = s_g$	s_e	s_f
r^2	r^2	I	r	s_f	s_g	s_e
s_e	s_e	s_f	s_g	I	r	r^2
s_f	s_f	s_g	s_e	r^2	I	r
s_g	s_g	s_e	s_f	r	r^2	I

6. Is de bewerking inwendig? Is ze commutatief? Is er een neutraal element? Zit de inverse van elk element in de groep?

(Er verschijnen geen nieuwe transformaties in het rooster. De bewerking 'samenstelling' is dus inwendig. Voor elke isometrie vinden we een inverse in de symmetriegroep: op elke rij staat er precies eenmaal I . De bewerking is duidelijk niet commutatief want de tabel is

niet symmetrisch t.o.v. de diagonaal. We merken op dat de symmetriegroep van de eerste figuur een gesloten deelstructuur is van de grotere symmetriegroep.

De symmetriegroep wordt

$$\text{Sym}(F_2) = \{I, r, r^2, s_e, s_f, s_g\} \text{ met } r^3 = I \text{ en } s_e^2 = s_f^2 = s_g^2 = I .)$$

In het eerste voorbeeld (de verwrongen driehoek) hebben we genoeg informatie aan de draaiing r . Als we weten dat r een symmetrie is, dan weten we automatisch ook dat r^2 en I symmetrieën zijn, met andere woorden: door r herhaaldelijk met zichzelf samen te stellen, verkrijgen we alle isometrieën van de symmetriegroep. We zeggen dat de groep voortgebracht is door één element r , of dat r een voortbrenger is van de groep. Aangezien de groep voortgebracht is door één element en drie elementen bevat, noemen we dit de cyclische groep van orde 3 of C_3 . We zouden ook r^2 kunnen kiezen als voortbrenger want $r^2 \circ r^2 = r^3 \circ r = r$ en dus bekomen we d.m.v. r^2 ook alle andere elementen van de groep.

In het tweede voorbeeld is r niet meer voldoende als voortbrenger. Wiskundigen zijn echter steeds op zoek naar wat minimaal moet gekend zijn om alles te kunnen reconstrueren. We gaan dus op zoek naar de voortbrengers van de tweede symmetriegroep.

Op zoek naar voortbrengers van de tweede symmetriegroep

Met voortbrengers van een (symmetrie)groep bedoelen we die elementen die we (minimaal) nodig hebben om de volledige groep op te bouwen nadat we alle samengestelden hebben gemaakt van die elementen met elkaar. In deze werktekst gaan we op zoek naar voortbrengers van $\text{Sym}(F_2)$.

1. Als we *alle* 6 elementen van de groep samennemen, hebben we natuurlijk een stel voortbrengers. Geef een verklaring waarom dat in dit geval zeker niet nodig is en het dus met minder kan.

(s_g kan men schrijven als een samengestelde van twee andere transformaties $s_g = r \circ s_e$.

Dus s_g kan 'gemaakt' worden door twee andere elementen.)

2. Zoek verschillende manieren om s_g te schrijven als een samengestelde van andere symmetrieën van F_2 .

($s_g = r \circ s_e = r^2 \circ s_f = s_e \circ r^2 = s_f \circ r = s_e \circ s_f \circ s_e = s_f \circ s_e \circ s_f$)

3. Kies in de vorige oefening één manier waarop je s_g kunt schrijven als een samengestelde van twee andere transformaties. Ga na of je alle andere elementen uit de symmetriegroep kunt schrijven als samengestelde van deze twee transformaties?

(

<i>Met r en s_e</i>	<i>Met r^2 en s_f</i>	<i>Met s_e en s_f</i>
$I = r^3$	$I = s_f \circ s_f$	$I = s_f \circ s_f$
$r^2 = r \circ r$	$r = r^2 \circ r^2$	$r = s_e \circ s_f$
$s_f = r^2 \circ s_e = s_e \circ r$	$s_g = r^2 \circ s_f$	$r^2 = s_f \circ s_e$
$s_g = r \circ s_e$	$s_e = r \circ s_f$	$s_g = s_f \circ s_e \circ s_f$

We stellen vast dat als we alle mogelijke samengestelden maken door gebruik te maken van r en s_e we ook alle symmetrieën verkrijgen van figuur 2. We krijgen zo de cyclische groep van orde 3, aangevuld met drie spiegelingen. We noemen deze nieuwe structuur de diëdergroep van orde 6, nl. D_6 . We hadden evengoed r^2 en s_f of s_g kunnen nemen als voortbrengers, of s_f en s_g . We noteren dit als volgt: $D_6 = \langle r, s_e \rangle = \langle r^2, s_f \rangle = \langle s_f, s_g \rangle$

Kijken we opnieuw naar de voorbeelden in het begin van de paragraaf: we kunnen dan al voorspellen dat de zeester, de kanten doekjes en het rozetraam symmetriegroepen zullen hebben die diëdergroepen zijn want we zien een draaisymmetrie en spiegelingen. De andere voorbeelden hebben cyclische symmetriegroepen behalve het eerste recyclagesymbool dat niet (!) symmetrisch is.

We zijn klaar om een definitie te formuleren van een rozetpatroon:

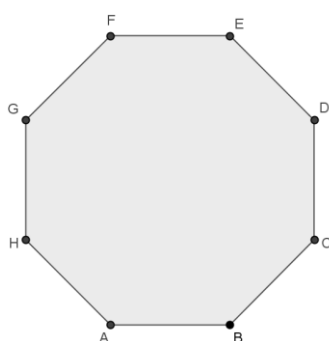
Een rozetpatroon is een vlakke figuur waarvan de symmetriegroep eindig is en, ofwel een cyclische groep is ofwel een diëdergroep is.

Een cirkel voldoet dus niet aan de definitie: elke draaiing om het middelpunt is een element van de symmetriegroep dus de groep is niet eindig.

Na observatie van de bovenstaande voorbeelden stellen we vast dat deze symmetriegroepen geen verschuivingen bevatten. Dit is precies wat rozetten van friezen onderscheidt (zie volgende paragraaf). We zouden rozetten eigenlijk kunnen definiëren als vlakke figuren die geen verschuivingen in hun symmetriegroep hebben. Vertrekkende van deze definitie zouden we natuurlijk tot dezelfde symmetriegroepen komen. De redeneringen die hierbij gebruikt worden zijn interessant en haalbaar in de klas, steunend op eigenschappen van transformaties van het vlak. Het zou ons in deze loop echter te ver leiden. [8]

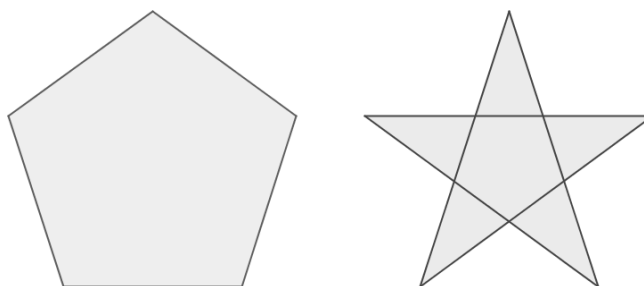
We oefenen om de symmetrieën te bepalen van enkele rozetpatronen.

1. Bepaal alle isometrieën die de regelmatige achthoek invariant laten.



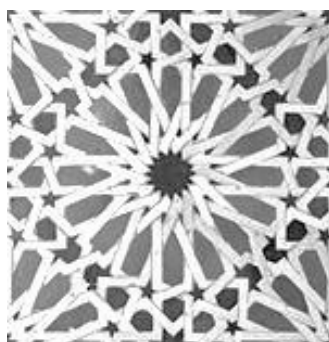
(De figuur heeft acht symmetrieassen, vier assen door overstaande hoekpunten en vier middelloodlijnen van zijden. De draaiing om het middelpunt van de omschreven cirkel over een hoek van 45° brengt de deelgroep van acht draaiingen voor. De symmetriegroep van de regelmatige achthoek is de diëdergroep van orde 16, D_{16} .)

2. Vergelijk de symmetriegroep van de regelmatige vijfhoek met die van het pentagram. Teken de symmetrieassen indien er zijn.



(Beide figuren hebben vijf symmetrieassen en vijf draaiingen. De symmetriegroepen zijn dezelfde en hebben de structuur van D_{10} .)

3. Hoe kun je het pentagram zodanig aanpassen dat je een andere symmetriegroep verkrijgt?
(Markeren we de verbindingslijnen van de hoekpunten bijvoorbeeld met een pijltje dat de doorloopzin aangeeft, dan verliezen we de symmetrieassen. De symmetriegroep wordt dan de cyclische groep van orde 5, C_5 .)
4. Onderzoek de symmetriegroep van de onderstaande rozet uit het Alcazarpaleis in Sevilla. Beschouw enkel de rozet die centraal in de tegel geplaatst is.



(Aangezien bepaalde verbindingslijnen boven andere zijn gelegd, is hier geen sprake van symmetrieassen. De symmetriegroep wordt de cyclische groep van orde 16, C_{16} .)

5. Zelfde vraag voor onderstaande sneeuwvlok.



(De sneeuwvlok is een product van de natuur en is door zijn imperfectie eigenlijk niet symmetrisch. Benaderen we ze door een perfect wiskundig model, dan merken we zes symmetrieassen op en zes draaiingen, voortgebracht door een draaiing om het symmetriemiddelpunt over 60° . De symmetriegroep is bijgevolg de diëdergroep van orde 12, D_{12} .)

We vatten kort onze bevindingen over rozetten samen:

- Er zijn twee soorten rozetten: ofwel zijn ze enkel draaisymmetrisch, ofwel zowel draaisymmetrisch als lijnsymmetrisch;
- Indien een rozet enkel draaisymmetrisch is, is de symmetriegroep voortgebracht door één element en is de groep dus een cyclische groep;
- Indien een rozet ook lijnsymmetrisch is, is de symmetriegroep een diëdergroep. Ze is dan voortgebracht door twee elementen: ofwel een draaiing en een spiegeling, ofwel twee spiegelingen;
- De symmetriegroepen van rozetten zijn eindige groepen met een willekeurig aantal elementen.

c. Zelf rozetpatronen ontdekken en maken

Met spiegels

Wie was als kind niet in de wolken bij het krijgen van een caleidoscoop? De kleurtjes en glinsterende patronen die ontstonden bij het draaien van de mysterieuze buis in het zonlicht, betoverden ons. Nu zijn we in staat om te begrijpen wat er echt gebeurde. Beter nog, we kunnen er zelf één maken. Google er maar op los om talrijke instructiesites te vinden voor de bouw van een caleidoscoop, van een eenvoudige tot een professionele versie! [14] We kunnen die zeker gebruiken in de klas.

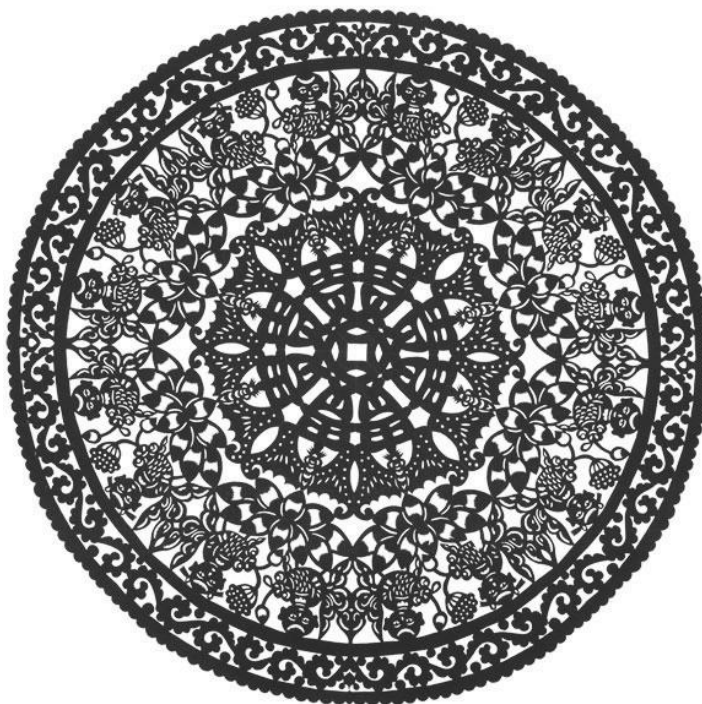
Een caleidoscoop wordt gemaakt door in een cilindervormige buis twee of meer spiegels aan te brengen, onder een bepaalde hoek. Aan het ene uiteinde van de buis wordt het materiaal aangebracht dat zal gespiegeld worden (bijvoorbeeld gekleurde parels); aan het andere uiteinde wordt een kijkgat gemaakt. Door de buis te draaien en in het licht te kijken, ziet men verschillende patronen ontstaan. Wie snel resultaat wil hebben in de klas, kan het ook op een meer statische wijze realiseren door twee spiegels met tape aan elkaar te bevestigen en ze onder een bepaalde hoek verticaal op een lessenaar te plaatsen. Elk basispatroon geplaatst binnen de hoek van de spiegels leidt na spiegeling tot een rozet. De effecten spelen zich dus af in het vlak van de lessenaar; we observeren door van bovenaan te kijken. De positie van de spiegels bepaalt de symmetrieassen van de figuur.

Volgende elementen en vragen kunnen tot boeiende klasgesprekken leiden:

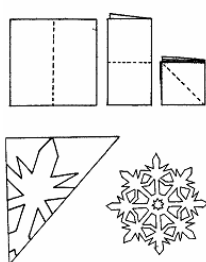
- Eerst en vooral moeten de leerlingen begrijpen dat we met een caleidoscoop enkel rozetten kunnen creëren met symmetrieassen.
- Twee spiegels zullen volstaan aangezien de symmetriegroep ook voortgebracht wordt door twee spiegelingen.
- De orthogonale projecties van de spiegels op het grondvlak geven twee halve symmetrieassen. Die blijken te volstaan om de rozet te realiseren.
- Welk basismotief volstaat om de ganse rozet voort te brengen die men vooraf ontworpen had? Zijn er verschillende basismotieven mogelijk om eenzelfde rozet te maken?
- Waarom zijn de symmetriegroepen van de zo gerealiseerde rozetten steeds een diëdergroep?
- Welke hoek moeten de spiegels vormen?
- Hoe maken we regelmatige veelhoeken? Stervormige figuren? ...

Met plooien en knippen

In China maakt men ongelooflijke kunstwerken aan de hand van vouw- en knipwerk met papier. Hieronder een voorbeeldje; het lijkt wel op een kantwerkje, maar dan in papier.



Wie heeft als kind ook nog sneeuwvlokken geknipt om de ramen met kerstmis te versieren? Onbewust maakten we daarbij gebruik van de symmetrie van de sneeuwvlok die we wilden maken. Een sneeuwvlok wordt gemaakt door een blad te vouwen volgens een eigen ontwerp. Vervolgens wordt een figuur geknipt uit het opgeplooid papier. Afhankelijk van het plooien en knippen ontstaan andere symmetrische patronen.



We kunnen er in de klas ook een uitdaging van maken door leerlingen eerst hun ontwerp te laten maken en daarna te bepalen hoe er geplooid en geknipt moet worden. Ook hier moeten we vertrekken vanuit de symmetrische eigenschappen en eerst de plooiën bepalen (dus de symmetrieassen van de spiegelingen die de groep voortbrengen). Daarna moeten we nadenken over het minimale motief dat moet uitgeknipt worden. Zolang het viervoudige of achtevoudige symmetrie betreft, lijkt alles redelijk onder controle. Kunnen we ook rozetten maken met zesvoudige of twaalfvoudige symmetrie? Hoe beginnen we eraan?

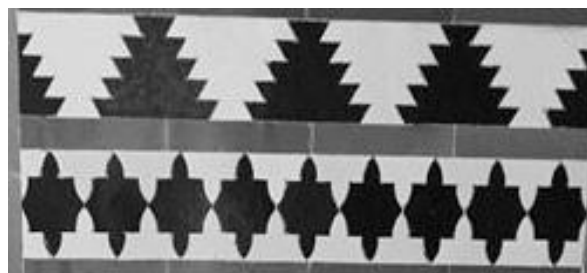
4. Strookpatronen

a. Inleiding

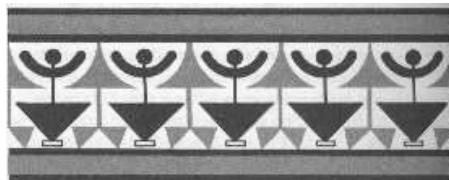
Strookpatronen, ook friezen genaamd, maken deel uit van onze dagelijkse omgeving en cultuur [2][3][8][10]. In alle culturen, van alle tijden, hebben mensen veel creativiteit aan de dag gelegd in het ontwerpen van motieven die zich herhalen, zoals in strookpatronen: kaders van kunstwerken, boorden van vloerbetegelingen, boorden van gordijnen of handdoeken, decoraties van keramiek, ijzeren omheiningen, behangpapierstroken ... Veelal gebruikt(e) men meetkundige figuren. Zie hieronder een patroon uit de Moorse kunst in het Alhambra in Granada.



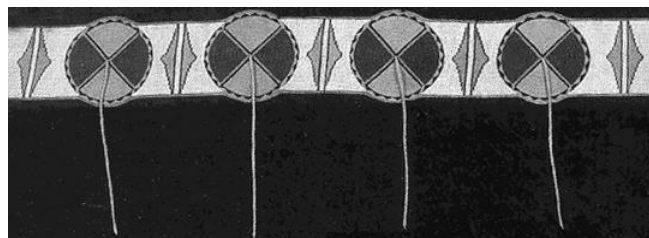
Hieronder een Moors friespatroon uit het Alcazar paleis in Sevilla:



Het onderstaande patroon is bijvoorbeeld teruggevonden op aarden kruiken bij de Inca's [11]:



Het patroon hieronder is teruggevonden op een deken, gemaakt door Lakato-indianen uit Noord-Amerika [10]:



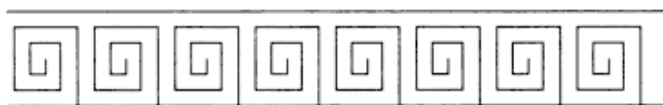
Tegenwoordig vindt men in decoratiewinkels behangstroken (muurtattoos) en sjablonen om een muur te sieren met een gevefd fries.



Een studie van deze patronen geeft veel perspectieven op alle onderwijsniveaus: van creatieve opdrachten tot een meetkundige studie van de symmetrie-eigenschappen van een fries die tot een verrassende classificatie leidt. We zullen in wat volgt op verschillende niveaus werken.

Hieronder zijn drie strookpatronen afgebeeld. We gaan verderop duidelijker afspreken wat we met het begrip ‘strookpatroon of fries’ bedoelen. Voorlopig gaan we onderstellen dat deze patronen horizontaal oneindig worden verdergezet zowel naar links als naar rechts. De figuren in deze loep en de voorbeelden in de echte wereld zijn natuurlijk nooit oneindig lang en stellen dus telkens maar een onderdeel voor van een strookpatroon. We gaan verder wel redeneren alsof het oneindig lange patronen zijn.

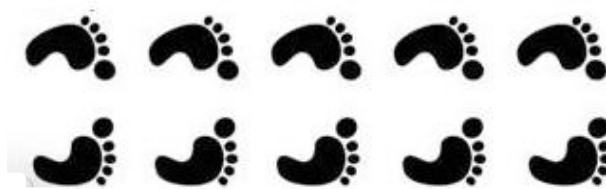
Voorbeeld 1:



Voorbeeld 2:



Voorbeeld 3:



Voorbeeld 4:



In elke strook is er een basispatroon dat zich herhaalt: het is een minimaal patroon in die zin dat door de kortst mogelijke verschuiving naar rechts of naar links oneindig vaak erop toe te passen telkens het hele fries kan gereconstrueerd worden.



Dit basispatroon is niet uniek. Voor het vlechtmotief is het duidelijk dat er oneindig veel keuzes mogelijk zijn. Maar ook in de derde strook kunnen we bijvoorbeeld een ander basismotief nemen (zie hieronder) ook al lijkt dit artificieel. In werkelijkheid zijn er steeds oneindig veel basispatronen.



Kenmerk van een strookpatroon

We onderstellen dat de strookpatronen in de voorbeelden hieronder oneindig worden voortgezet, zowel naar rechts als naar links door het basispatroon (L in het eerste voorbeeld) oneindig naar links of naar rechts te verschuiven. We kunnen het ook anders zien: als we de volledige (oneindig lange) strook naar links of naar rechts verschuiven over een bepaalde verschuiving, zien we geen verandering.

1. Onderzoek voor het L-patroon welke verschuivingen de figuur invariant laten.



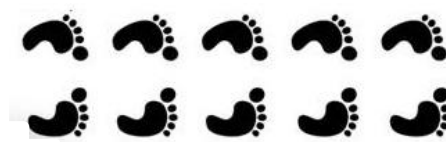
(Er is een horizontale verschuiving die een letter L naar zijn rechterbuur verschuift. We noemen deze verschuiving t . Ze laat de figuur in zijn totaliteit invariant. Alle samengestelden van t met zichzelf doen dat ook: $t^2 = t \circ t$, $t^3 = t \circ t \circ t$... De inverse van t , t^{-1} , de minimale verschuiving naar links, met dezelfde lengte, doet dat ook. Verschuivingen in een niet horizontale richting zijn niet mogelijk want dan ontsnapt men uit de strook.)

2. Zijn er andere transformaties die de figuur invariant laten? Bepaal de symmetriegroep van deze figuur. Is er een voortbrenger?

(Enkel verschuivingen laten de strook invariant. De symmetriegroep van deze strook is een oneindige groep van verschuivingen voortgebracht door de minimale verschuiving naar rechts:

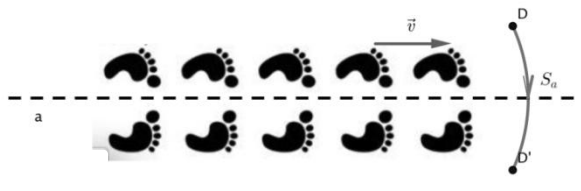
$$\text{Sym}(L) = \{t^m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \langle t \rangle$$

3. Onderzoek of de symmetriegroep van het voetjespatroon (oneindig naar links en naar rechts verdergezet) beperkt is tot horizontale verschuivingen.



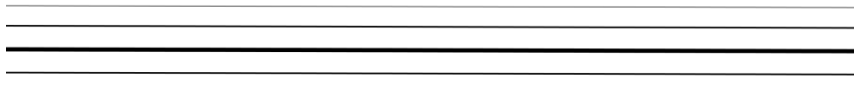
(Oneindig veel horizontale verschuivingen naar links en naar rechts bewaren de strook, zoals voor het L-patroon. De verschuivingen worden voortgebracht door een minimale verschuiving t (bepaald door een vector $\vec{v}$) die een voetje op zijn rechterbuur afbeeldt. Je kunt evengoed de minimale verschuiving naar links als voortbrenger nemen. De strook

blijft nu echter ook onveranderd door een spiegeling t.o.v. een horizontale centrale as (s_a). De bovenste rij voetjes komt dan mooi terecht op de onderste rij en vice versa. Verder is de samengestelde van deze spiegeling met de horizontale verschuiving t nu eveneens een symmetrie van het strookpatroon. Deze samengestelde is een schuifspiegeling. De symmetriegroep bevat nog andere schuifspiegelingen $t^n \circ s_a$. Alle samengestelden van een verschuiving met de spiegeling bewaren de fries.



In de voorbeelden die we beschouwden is er steeds een minimale (kortste) verschuiving (naar rechts) die de strook invariant laat. Alle samengestelden van deze verschuiving met zichzelf blijven de strook op zichzelf sturen. Ook de inverse van de verschuiving (dus naar links) doet hetzelfde. We zien vrijwel onmiddellijk in dat verschuivingen in de andere richtingen niet toegelaten zijn: dan zouden we immers vroeg of laat ontsnappen uit de strook. Samengevat: elk van deze stroken is dus invariant onder oneindig veel horizontale verschuivingen, voortgebracht door één minimale verschuiving (naar rechts of naar links, naar keuze). Dat zal het basiskenmerk worden van strookpatronen.

Volgend voorbeeld verschilt in die zin van de voorgaande.



Nu is elke horizontale verschuiving, hoe klein ook de lengte, een symmetrie van de figuur. Er is dus geen verschuiving met minimale lengte (van de schuifvector). Dit zullen we geen strookpatroon noemen.

We spreken de volgende definitie af:

Een strookpatroon of fries is een vlakke figuur waarvan de symmetriegroep verschuivingen in juist één richting bevat en waarbij de lengte van de verschuivingen een minimum heeft.

Strookpatronen zitten dus ‘gevangen’ tussen twee evenwijdige rechten. We zullen ze kenmerken door de friesrichting. We merken op dat een strookpatroon steeds een oneindige symmetriegroep heeft. Vanaf nu stellen we de verschuiving naar rechts met minimale lengte uit de symmetriegroep voor door t . De vector van deze verschuiving stellen we voor door $\vec{v}$ en de lengte door $d = \|\vec{v}\|$.

b. Soorten symmetrie in friezen

Op het eerste zicht zouden we kunnen denken dat stroken altijd eenzelfde structuur hebben, op de vorm van het basispatroon na. Niets is minder waar. Indien we op zoek gaan naar andere symmetrieën dan verschuivingen, dan ontdekken we duidelijke verschillen. We hebben dit al vastgesteld bij het voetjes-patroon dat een spiegeling en schuifspiegelingen in zijn symmetriegroep heeft, terwijl de symmetriegroep van het L-patroon enkel horizontale verschuivingen bevat. We kunnen dus besluiten

dat er zeker verschillende soorten strookpatronen (friezen) bestaan. We zullen verderop zien dat het aantal soorten toch nog beperkt is.

Om de symmetrieën van friezen te ontdekken, is het goed om het experimenteel aan te pakken, zoals we dat bij de rozetten deden. We gebruiken GeoGebra om te onderzoeken welke transformaties mogelijk zijn in de symmetriegroep van een fries.

Welke symmetrieën zijn mogelijk bij friezen?

We vertrekken in oefeningen 1 tot 3 met een van de volgende basispatronen en analyseren op welke manier we die kunnen aanvullen tot een strookpatroon. Download telkens het basispatroon van de website van Uitwisseling. Kopieer het basispatroon in GeoGebra (door het eerst als figuur op te slaan en daarna in te voegen via de knop ‘afbeelding invoegen’) en kies de friesrichting (eventueel kun je de twee parallelle rechten tekenen die het patroon zullen afbakenen). Gebruik telkens de faciliteiten van GeoGebra om de gevraagde transformaties toe te passen op het basispatroon. Herhaal de drie opdrachten met verschillende basispatronen. Probeer per basispatroon verschillende ontwerpen te realiseren.

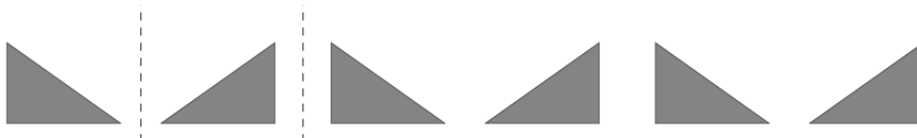


1. Vertrek van het basispatroon en ontwerp een strookpatroon door enkel gebruik te maken van spiegelingen. Je moet er natuurlijk voor zorgen dat het basispatroon door meermaals te spiegelen ook verschoven wordt. Welke assen mag/moet je gebruiken? Vergelijk de afstand tussen twee naburige symmetrieassen met de lengte d van de vector van de minimale verschuiving uit de symmetriegroep.

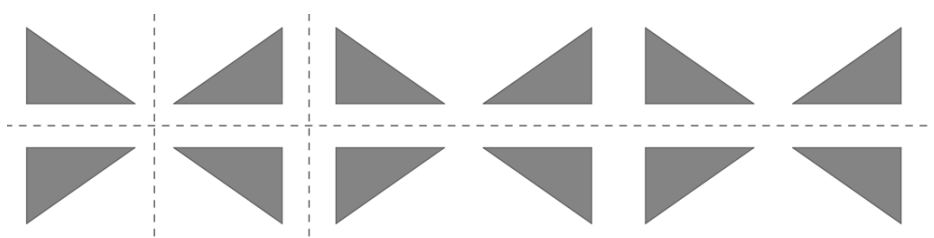
(Enkel de as evenwijdig met de friesrichting (in het midden van het strookpatroon) of assen orthogonaal op de friesrichting zijn toegelaten. Om een strookpatroon te krijgen, moet je zeker assen orthogonaal op de friesrichting nemen. Er zullen oneindig veel van die assen zijn, op regelmatige afstanden van elkaar. De samenstelling van spiegelingen om twee naburige assen geeft de minimale verschuiving van het strookpatroon. De

afstand tussen twee opeenvolgende verticale spiegellijnen is daarom $\frac{d}{2}$. Je kunt kiezen of

je deze spiegelingen (en verschuivingen) al dan niet combineert met een spiegeling om de rechte in de friesrichting in het midden van het strookpatroon. In dit geval krijg je ook puntspiegelingen in de symmetriegroep. We vinden op deze manier dus twee verschillende strookpatronen.

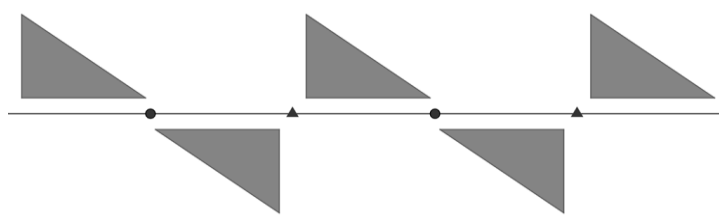


of



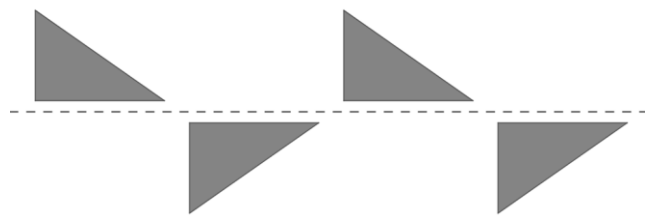
2. Zelfde vraag, maar gebruik nu enkel draaiingen. Vergelijk de afstand tussen twee opeenvolgende centra met d .

(Enkel draaiingen over 180° zijn mogelijk (dus puntspiegelingen). De centra liggen op de centrale horizontale as. De afstand tussen twee opeenvolgende spiegelcentra is $\frac{d}{2}$.)



3. Zelfde vraag, maar gebruik nu enkel schuifspiegelingen.

(De as is de centrale horizontale as; de verschuiving gebeurt evenwijdig met deze as. Het verschuivingsgedeelte van de schuifspiegeling gebeurt volgens een vector met lengte $\frac{d}{2}$.)



Andere ontwerpen zijn op de website te bekijken.

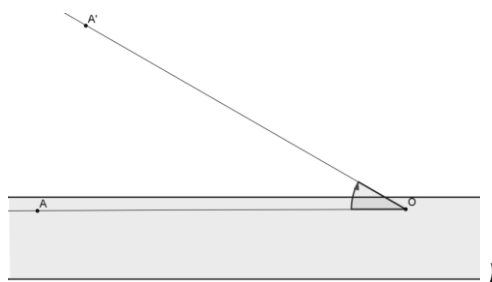
We hebben in de vorige paragraaf *experimenteel* nagegaan welke transformaties een strookpatroon invariant laten. De leerlingen zijn zeker in staat om die bevindingen nu ook te *verklaren* (zie [8]).

Verklaringen zoeken voor de mogelijke symmetrieën van friezen

In de vorige werktekst hebben we op een eerder experimentele manier gewerkt met *horizontale* strookpatronen en isometrieën die tot hun symmetriegroep behoren. Nu ligt de nadruk meer op het zoeken van een wiskundige verklaring voor wat we experimenteel vaststellen. Experimenteer bij elke opgave eerst en probeer op basis daarvan tot een hypothese te komen. Gebruik vervolgens de eigenschappen over de samenstelling van isometrieën om de hypothesen te bewijzen.

1. We beschouwen een strookpatroon en we onderstellen dat de symmetriegroep van dit fries een draaiing bevat. Bepaal de mogelijke hoeken van deze draaiingen en verklaar. Maak een tekening.

(Indien we binnen de strook een willekeurig punt als centrum zouden kiezen (we noemen het O) en dan een punt A binnen de strook beschouwen ver afgelegen van O , dan begrijpen we dat enkel een draaiing over een hoek van 180° mogelijk is, anders vliegen we met het beeld van A buiten de strook.)



2. Verklaar waarom de centra van de puntspiegelingen enkel op de centrale horizontale as kunnen liggen.

(Onderstel twee zulke symmetriemiddelpunten. De samenstelling van de twee overeenkomstige puntspiegelingen is een verschuiving evenwijdig met de rechte bepaald door de twee symmetriemiddelpunten. Aangezien het fries enkel verschuivingen toelaat in de friesrichting moeten de twee punten een rechte bepalen evenwijdig met de friesrichting.)

3. Hoever liggen twee opeenvolgende centra van elkaar?

(Aangezien de samengestelde van twee puntspiegelingen een verschuiving is over een lengte die het dubbele is van de afstand tussen de twee centra, liggen twee opeenvolgende centra op een afstand van elkaar gelijk aan $\frac{d}{2}$.)

4. We beschouwen nu een strookpatroon waarvan de symmetriegroep spiegelingen bevat. Bepaal de mogelijke richtingen voor de assen van deze spiegelingen en het aantal assen.

(Er is slechts één horizontale as mogelijk, anders zou de samengestelde van twee spiegelingen t.o.v. horizontale assen een verschuiving opleveren die verticaal is.)

De samengestelde van twee spiegelingen met evenwijdige assen die noch verticaal, noch horizontaal zijn, levert eveneens een verschuiving op verschillend van de friesrichting. Dit is onmogelijk. Eén schuine as is ook onmogelijk, gezien het fries oneindig doorloopt.

Verticale spiegellijnen kunnen wel. Aangezien de samengestelde van twee spiegelingen met evenwijdige assen een verschuiving is waarvan de lengte het dubbel is van de afstand tussen de twee assen, zijn twee verticale spiegellijnen steeds op een geheel veelvoud van $\frac{d}{2}$ verwijderd van elkaar.)

5. Verklaar waarom een schuifspiegeling in de symmetriegroep van een fries noodgedwongen evenwijdig met de friesrichting gebeurt?

(De samengestelde van twee schuifspiegelingen is een verschuiving evenwijdig met de as. De schuifspiegelingen moeten bijgevolg evenwijdig gebeuren met de centrale as. De lengte van de verschuiving is een geheel veelvoud van $\frac{d}{2}$.)

c. Soorten strookpatronen

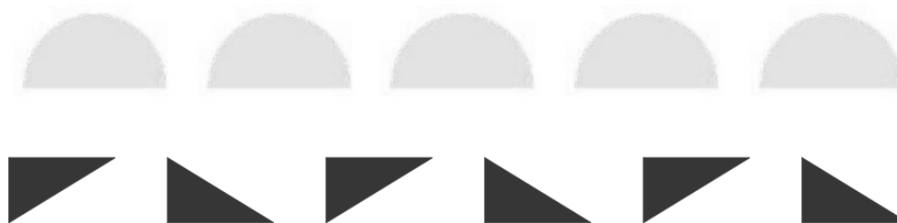
De voorbeelden en redeneringen geven aan dat naast de verschuivingen enkel de volgende transformaties deel kunnen uitmaken van symmetriegroepen van friezen: spiegelingen t.o.v. horizontale en verticale assen, puntspiegelingen t.o.v. centra gelegen op de centrale horizontale as, schuifspiegelingen t.o.v. de horizontale centrale as.

Nu zijn we klaar om te onderzoeken welke verschillende types van friezen er bestaan. We doen dit aanvankelijk weer experimenteel: de transformaties visualiseren we door met een transparant te bewegen [2]. Dit zou ook digitaal kunnen onderzocht worden door de figuren te kopiëren in GeoGebra en de transformaties binnen GeoGebra los te laten op de figuren. Voor demonstraties in de klas door de leerkracht is dit zeer geschikt. De transparanten hebben echter een voordeel als leerlingen in kleine groep werken.

Verschillende soorten friezen

Gebruik voor de volgende opdracht het werkblad met verschillende strookpatronen dat je kunt downloaden van de website. Kopieer elk patroon op een transparant en knip de strook uit de transparant uit. In de startpositie leg je de transparant op het papier op de strook zodat je geen dubbel beeld krijgt. Nu kan er met het transparant bewogen worden. We hebben geleerd dat we enkel puntspiegelingen, verschuivingen, spiegelingen en schuifspiegelingen in beschouwing moeten nemen. Voor de eerste twee transformaties (puntspiegelingen en verschuivingen) kun je je transparant verplaatsen op het origineel (we noemen deze isometrieën daarom ook verplaatsingen); voor de laatste twee zul je de transparant moeten optillen en omkeren (deze isometrieën heten daarom ook omkeringen). Beweeg de transparant zodanig dat je een positie vindt waarbij het origineel terug volledig overdekt is, zonder dubbel beeld. Ondertussen observeer je de beweging die je gemaakt hebt. Met welke transformatie van het vlak komt ze overeen? Je hebt op deze manier een symmetrie van het strookpatroon gevonden. Indien je een spiegeling hebt gehanteerd, teken dan op het strookpatroon de symmetrieas; bij een verschuiving, een vector; bij een puntspiegeling, het centrum; bij een schuifspiegeling een vector en een as.





Elk van de vorige voorbeelden van strookpatronen heeft een verschillende structuur van symmetriegroep. Samen met de twee types van strookdiagrammen uit het begin van de paragraaf (het L-patroon en het voetjespatroon) hebben we tot nu toe zeven verschillende types van strookpatronen ontdekt[1] We zetten ze even op een rijtje:

1. De L-vorm:



De symmetriegroep bevat:

- enkel horizontale verschuivingen.

De symmetriegroep is voortgebracht door t , de minimale verschuiving (naar rechts): alle samengestelden van t en zijn omgekeerde t^{-1} zitten in de symmetriegroep $\{\dots t^{-2}, t^{-1}, I, t, t^2 \dots\}$. We merken op dat de vector $\vec{v}$ die t kenmerkt overal kan geplaatst worden in de figuur. We zouden de symmetriegroep ook kunnen laten voortbrengen door de kortste verschuiving naar links. Het feit dat het basispatroon noch een horizontale, noch een verticale symmetrie en evenmin een symmetriemiddelpunt heeft, garandeert dat het strookpatroon enkel verschuivingen bevat in zijn symmetriegroep. We noteren de symmetriegroep van dit strookpatroon door

$$\text{Sym}(L) = \langle t \rangle.$$

2. De D-vorm:



De symmetriegroep bevat:

- horizontale verschuivingen,
- een spiegeling t.o.v. een horizontale as.

De symmetriegroep is voortgebracht door t , de minimale verschuiving (naar rechts) en de spiegeling s_c t.o.v. de horizontale centrale as: alle mogelijke samengestelden, waaronder schuifspiegelingen, bepalen de symmetriegroep. We noteren ze door

$$\text{Sym}(D) = \langle t, s_c \rangle$$

3. De V-vorm:



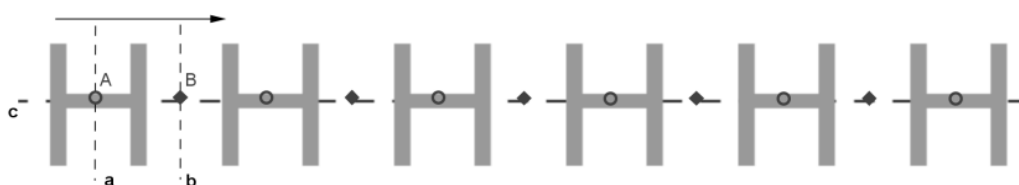
De symmetriegroep bevat:

- horizontale verschuivingen,
- twee soorten spiegelingen met verticale symmetrieassen: de symmetrieassen a_i van de letters 'V' en de symmetrieassen b_i van het patroon bepaald door twee opeenvolgende letters 'VV'. De afstand tussen twee opeenvolgende verticale assen is precies $\frac{d}{2}$. Er zijn dus oneindig veel spiegelingen in de symmetriegroep.

De eigenschappen uit de inleiding over samengestelden van spiegelingen met evenwijdige assen leren ons dat de samengestelde van twee spiegelingen van verschillend type met naburige assen precies de verschuiving t oplevert. Samengestelden van t met deze spiegelingen leveren op hun beurt nieuwe spiegelingen op. Hieruit volgt dat twee spiegelingen met naburige assen volstaan om de volledige symmetriegroep voort te brengen. Hoewel de verschuivingen de kenmerkende symmetrieën zijn voor de strookpatronen hoeft de minimale verschuiving niet noodzakelijk bij de voortbrengers opgenomen te worden!

$$\text{Sym}(V) = \langle s_a, s_b \rangle$$

4. De H-vorm:



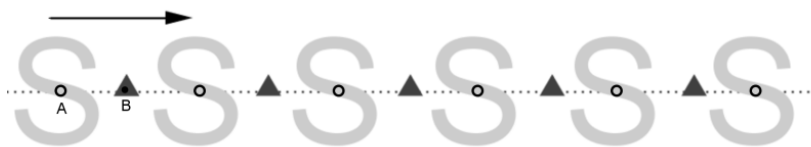
De symmetriegroep bevat:

- horizontale verschuivingen,
- twee soorten spiegelingen met verticale symmetrieassen zoals bij de V-vorm: de symmetrieassen van de letters 'H', a_i , en de symmetrieassen van de patronen bepaald door twee opeenvolgende letters 'HH', b_i , waarbij de afstand tussen twee opeenvolgende verticale assen precies $\frac{d}{2}$ is,
- de spiegeling t.o.v. de horizontale centrale as,
- puntspiegelingen t.o.v. de symmetriemiddelpunten van de letter H, en t.o.v. de symmetriemiddelpunten van de combinaties HH.

In paragraaf 2 leerden we dat de samengestelde van twee spiegelingen t.o.v. orthogonale assen, puntspiegelingen zijn, dat de samengestelde van twee spiegelingen met verticale assen een verschuiving is en dat de samengestelde van twee puntspiegelingen een verschuiving is. Hoewel de symmetriegroep oneindig veel spiegelingen en puntspiegelingen bevat, is ze net zoals bij het V-patroon voortgebracht door een eindig aantal spiegelingen met verticale as en de spiegeling s_c t.o.v. de horizontale as c :

$$\text{Sym}(H) = \langle s_a, s_b, s_c \rangle$$

5. De S-vorm:



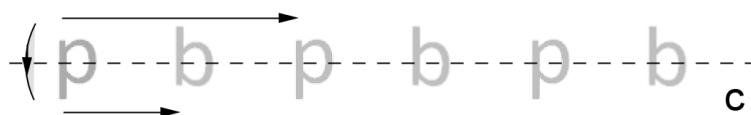
De symmetriegroep bevat:

- horizontale verschuivingen,
- twee soorten puntspiegelingen: met symmetriemiddelpunten (A_i) van de letters 'S' en met symmetriemiddelpunten (B_i) van de patronen bepaald door twee opeenvolgende letters 'SS'. De afstand tussen twee opeenvolgende symmetriemiddelpunten is precies $\frac{d}{2}$.

Aangezien de samengestelde van twee puntspiegelingen t.o.v. opeenvolgende centra de minimale verschuiving is (zie eigenschappen inleiding) wordt de symmetriegroep van dit strookpatroon voortgebracht door twee puntspiegelingen:

$$\text{Sym}(S) = \langle S_A, S_B \rangle$$

6. De pb-vorm:



De symmetriegroep bevat:

- horizontale verschuivingen,
- de schuifspiegelingen bepaald door de verschuivingen met lengte een oneven veelvoud van $\frac{d}{2}$, samengesteld met de spiegeling t.o.v. de horizontale centrale as.

De samengestelden van twee evenwijdige schuifspiegelingen zijn verschuivingen. De symmetriegroep is bijgevolg voortgebracht door de minimale schuifspiegeling g , naar rechts, evenwijdig met de horizontale as:

$$\text{Sym}(pb) = \langle g \rangle$$

7. De MW-vorm:



De symmetriegroep bevat:

- horizontale verschuivingen,
- twee soorten spiegelingen met verticale symmetrieassen: de symmetrieassen (m en w) van de letters 'M' en 'W',

- twee soorten puntspiegelingen: met symmetriemiddelpunten (A en B) van de patronen ‘MW’ en ‘WM’, waarbij de afstand tussen twee opeenvolgende symmetriemiddelpunten precies $\frac{d}{2}$ is,
- de schuifspiegelingen bepaald door de verschuivingen met lengte een veelvoud van $\frac{d}{2}$, samen-
gesteld met de spiegeling t.o.v. de horizontale centrale as c .

Gebruikmakend van de eigenschappen over de samenstelling van isometrieën kunnen we stellen dat de symmetriegroep is voortgebracht door een puntspiegeling en een spiegeling t.o.v. een verticale as:

$$\text{Sym}(MW) = \langle S_A, s_m \rangle$$

d. Waarom zijn er maar zeven?

In tegenstelling tot de oneindige variatie die mogelijk is bij de rozetten, kunnen we de lezers geruststellen: er zijn maar zeven verschillende types strookpatronen, op de keuze van het basismotief na natuurlijk! We zijn nu klaar om dit te verklaren ([8][9]).

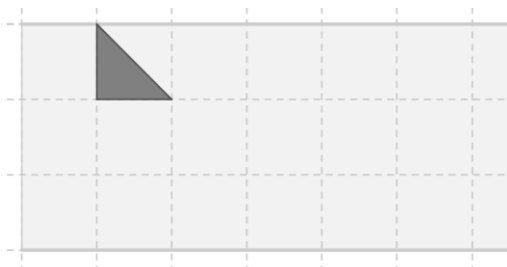
We hebben al gezien dat het friestype bepaald wordt door het al dan niet aanwezig zijn van bepaalde isometrieën in de symmetriegroep. We beschouwen theoretisch een strookpatroon en pakken het combinatorisch aan: zijn in de symmetriegroep volgende transformaties of combinaties ervan al dan niet te vinden?

- een spiegeling t.o.v. een verticale as (V: ja / neen)
- een spiegeling t.o.v. een horizontale as (H: ja / neen)
- een puntspiegeling (P: ja / neen)
- een schuifspiegeling (G: ja / neen)

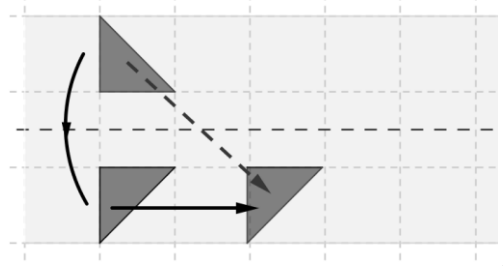
Op het eerste zicht geeft ons dat $2^4=16$ mogelijkheden. We gaan na dat sommige ‘ja’s’ implicaties hebben waardoor we het aantal mogelijkheden kunnen beperken. We laten de leerlingen de redeneringen opbouwen.

Beperkingen op combinaties van symmetrieën in een symmetriegroep

Redeneer voor elk van de volgende implicaties op basis van een tekening. Vertrek telkens van hetzelfde basispatroon.

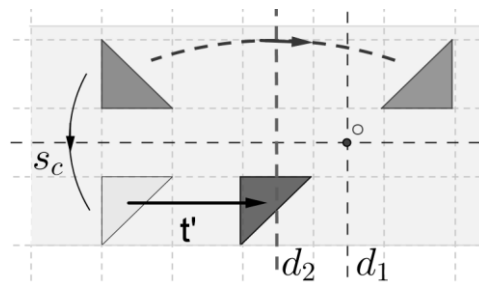


1. Als in de symmetriegroep van een fries een spiegeling zit t.o.v. een horizontale as, dan zit er ook een schuifspiegeling in. Verklaar.
(De samenstelling van een spiegeling t.o.v. de horizontale as en de minimale verschuiving in de friesrichting levert per definitie een schuifspiegeling.)



2. Zoek welke transformaties automatisch ook in de symmetriegroep van een fries zitten als er een puntspiegeling en een schuifspiegeling inzitten.

(De samenstelling van een schuifspiegeling evenwijdig met de friesrichting en een puntspiegeling t.o.v. een punt op de centrale as levert een spiegeling t.o.v. een verticale as.

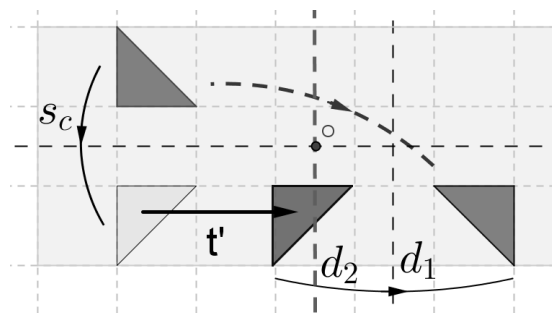


In de redenering maken we gebruik van de eigenschap dat je spiegelingen waarvan de assen orthogonaal zijn, in een samenstelling, van plaats mag verwisselen want in beide volgorden bepalen ze dezelfde puntspiegeling. Bovendien kan elke puntspiegeling geschreven worden als een samenstelling van twee spiegelingen met orthogonale assen.

$$S_O \circ t' \circ s_c = (s_{d_1} \circ s_c) \circ (s_{d_1} \circ s_{d_2}) \circ s_c = (s_{d_1} \circ s_{d_1}) \circ (s_c \circ s_c) \circ s_{d_2} = s_{d_2}$$

3. Ga na dat binnen de symmetriegroep van een fries de samengestelde van een schuifspiegeling en een spiegeling t.o.v. een verticale as een punt oplevert dat op zichzelf gestuurd wordt (een fixpunt). Welke isometrie zit er dan zeker in de symmetriegroep?

(De samengestelde stuurt de driehoek linksboven op de driehoek rechtsonder; het globale effect is hetzelfde als met een puntspiegeling. Het centrum is een fixpunt.



$$s_{d_1} \circ t' \circ s_c = s_{d_1} \circ (s_{d_1} \circ s_{d_2}) \circ s_c = s_{d_2} \circ s_c = S_O$$

4. Welke andere samengestelde levert opnieuw een schuifspiegeling op?

(De samengestelde van een puntspiegeling met een spiegeling t.o.v. een verticale as levert een schuifspiegeling op evenwijdig met de friesrichting.

	Verschuivingen	Spiegelingen horizontale as	Spiegelingen verticale as	Punt- spiegelingen	Schuif- spiegelingen
L-fries	X				
D-fries	X	X			X
V-fries	X		X		
H-fries	X	X	X	X	X
S-fries	X			X	
pb-fries	X				X
MW-fries	X		X	X	X

e. Fries-oefeningen

Een leuke manier om de friezen te beleven is om ze te ‘dansen’. John Conway liet met elk symmetriepatroon van een fries, een dansje overeenkomen [11], al zal men misschien wat halsbrekende toeren moeten uithalen om het uit te voeren.



‘Fries’-dansen!

Doe je schoenen en kousen uit, loop even door een ondiep verfbad en begin te ‘dansen’ op een lange strook wit papier volgens de pasjes die John Conway ons voorstelt.

Om te beginnen mag je huppelen op één been, volgens een rechte lijn. Heb je door dat je een friespatroon aan het dansen bent? Het is het eenvoudige L-patroon. Hieronder zie je verschillende danspatronen. Probeer in de rechterkolom elk patroon te linken aan een eenvoudig lettervoorbeeld.

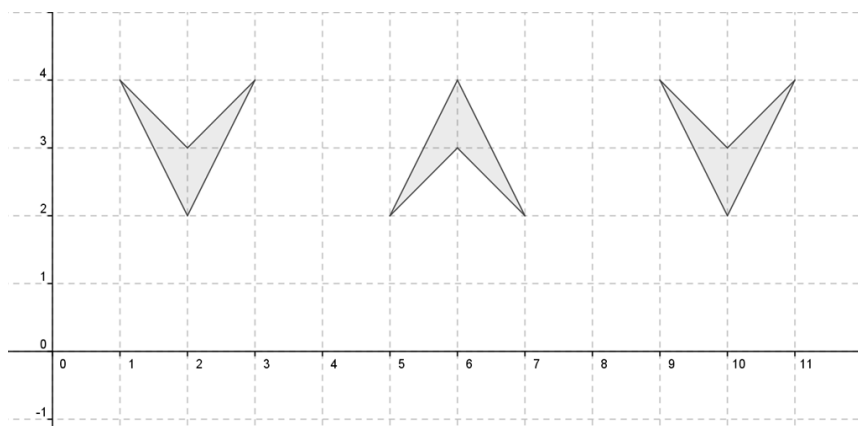
hop op één been		
stap		
sprong		
zijdelingse hop		
draaiende hop op één been		
zijdelings draaien		
draaiend springen		

(Van boven naar onder: L-vorm, pb-vorm, D-vorm, V-vorm, S-vorm, MW-vorm en H-vorm.)

Dit thema biedt veel mogelijkheden om oefeningen op te maken. Er kan vertrokken worden van eenvoudige voorbeelden die voorbereid worden met GeoGebra, of van meer complexe voorbeelden die in de reële wereld gevonden worden:

- het symmetriepatroon herkennen van complexe friezen op basis van eenvoudige startvoorbeelden (zoals met de Conway-dans), door de patronen te matchen;
- de symmetrieën van een strookpatroon in lijst brengen;
- twee friezen laten vergelijken waar ogenschijnlijk hetzelfde motief werd gebruikt, maar waar een deel is ingekleurd. Welk effect heeft dit op het symmetrietype? ([2] pag. 90)

- een motief geven (binnen GeoGebra) en vragen om een strookpatroon te maken dat aan bepaalde voorwaarden voldoet: bijvoorbeeld vertrekken van een ongelijkbenig driehoekje en vragen om er een V-patroon van te maken;
- een eenvoudig fries in een assenkruis plaatsen [7] en vragen naar voorschriften van de symmetrieën van het strookpatroon



Indien bovenstaande figuur een deel van een strookpatroon voorstelt, dan hebben de verschuivingen die in de symmetriegroep zitten voorschriften van de vorm

$$(x, y) \rightarrow (x + 8m, y) \text{ met } m \in \mathbb{Z}.$$

De spiegeling t.o.v. de rechte $x = 2$ heeft als voorschrift

$$(x, y) \rightarrow (4 - x, y).$$

Een manier om dit in te zien is om de transformatie te ontbinden: eerst een verschuiving naar links zo dat de spiegelas de y -as wordt, dan de spiegeling t.o.v. de y -as, daarna terug verschuiven naar rechts:

$$(x, y) \rightarrow (x - 2, y) \rightarrow (2 - x, y) \rightarrow (4 - x, y).$$

Willen we alle verticale symmetrieassen ($x = 2 + 4m$) in één keer erbij betrekken, dan doen we hetzelfde. De voorschriften worden:

$$(x, y) \rightarrow (4 + 8m - x, y) \text{ met } m \in \mathbb{Z}.$$

De puntspiegeling t.o.v. het punt $(4, 3)$ is een symmetrie van het patroon. Verschuif het punt eerst naar de oorsprong, spiegel t.o.v. de oorsprong en verschuif terug naar het punt $(4, 3)$. Het voorschrift wordt:

$$(x, y) \rightarrow (8 - x, 6 - y).$$

Naar analogie kan het voorschrift van elke puntspiegeling t.o.v. centra $(4m, 3)$ (met $m \in \mathbb{Z}$) bepaald worden:

$$(x, y) \rightarrow (8m - x, 6 - y) \text{ met } m \in \mathbb{Z}.$$

De schuifspiegelingen die de figuur invariant houden, hebben het voorschrift:

$$(x, y) \rightarrow (x + 8m + 4, 6 - y) \text{ met } m \in \mathbb{Z}.$$

Afhankelijk van het basismotief en het friestype zijn er veel variaties te maken op bovenstaande oefening.

Talrijke websites voorzien interessante oefeningen, waarvan sommige online op te lossen zijn: beelden: [2], [9], [10] ...

f. Creatief omgaan met friezen

Zelf friezen maken

- In kleedhokjes van kledingwinkels zien we soms dat twee spiegels tegenover elkaar geplaatst worden. Wiskundig is het een interessant gegeven, want we creëren een strookpatroon (in 3D). Dit idee kunnen we eveneens in de klas nabootsen. We plaatsen twee spiegels evenwijdig met elkaar en verticaal op een lessenaar. Nu kiezen we een basismotief dat we tussen de spiegels plaatsen. We hebben zo een fries gemaakt, want je ziet dat basismotief oneindig weerspiegeld worden in de spiegels. Het is eenvoudig te begrijpen dat we op deze manier maar een beperkt aantal symmetriepatronen kunnen maken want de spiegelingen t.o.v. verticale symmetrieassen zitten in ieder geval in de symmetriegroepen van deze friezen. In feite blijven er enkel het V-fries en het H-fries over. Toch is het interessant om te spelen met de vormen en na te denken hoe je de symmetrie van het basismotief kan uitbuiten.
- Een ander knutselidee gebeurt met schaar en papier [12]. Wie heeft er in zijn kinderjaren geen verjaardagsslingers gemaakt door eerst een strook papier herhaaldelijk te plooien volgens evenwijdige assen en daarna met de schaar te knippen en dus de symmetrie zijn werk te laten doen?



Het is een leuke uitdaging voor de leerlingen om strookpatronen te knippen die aan bepaalde voorwaarden voldoen. Merk op dat we naast verticale plooilijnen, ook voor een centrale horizontale plooilijn kunnen zorgen. Ook hier dezelfde beperkingen als met de spiegels: vermits we steeds symmetrieassen hebben, sluiten we een aantal types uit.

- Het zoeken naar of maken van leuke stempels (kan al met een aardappel ☺) kan leiden tot het naar hartenlust creëren van strookpatronen die aan bepaalde voorwaarden voldoen.

Friezen zoeken rondom ons

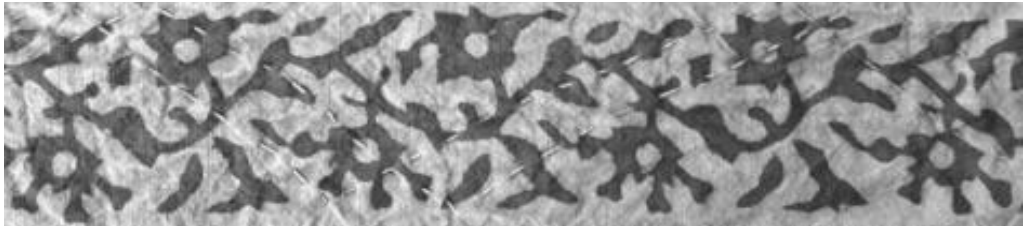
De lezers en de leerlingen worden uitgedaagd om foto's te maken van strookpatronen in de reële wereld en te droppen op de website: randen van tafelkleden, badhanddoeken, omheiningen van tuin en balkonnetjes, versieringen aan huizen, kerken, paleizen ... De zeven verschillende types moeten gevonden worden. We geven alvast een aanzet ... Wie herkent de friespatronen?



(V)



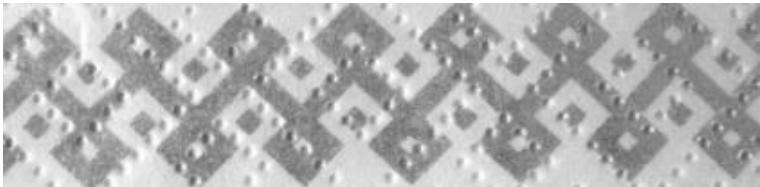
(H)



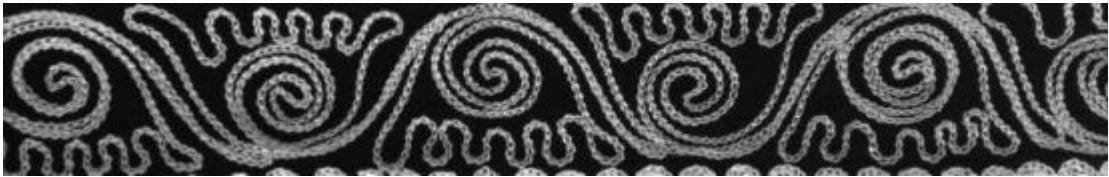
(L)



(pb)



(MW)



(S)



(D)

5. Behangpatronen

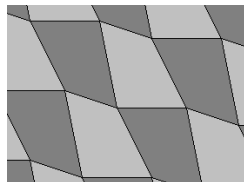
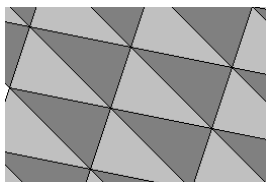
De rozetten (paragraaf 3) hebben geen verschuivingen in hun symmetriegroep. De friezen (paragraaf 4) hebben verschuivingen in hun symmetriegroep, maar enkel verschuivingen in één richting. De volgende stap bestaat uit (onbegrensde) figuren die invariant zijn voor verschuivingen in verschillende richtingen van het vlak. We zijn hiermee beland bij betegelingen en behangpatronen. Betegelingen kom je tegen in de natuur (bv. de zeshoekige cellen van een bijenraat), in de architectuur, in de beroemde kunstwerken van M. C. Escher... Behangpapier is meestal niet bedrukt met tegen elkaar aansluitende ‘tegels’, maar bezit wel dezelfde symmetrie-eigenschappen. De motiefjes komen terug zodat het patroon niet doorbroken wordt bij de ‘naden’ tussen twee vellen behangpapier...

Eerst onderzoeken we het verband tussen betegelingen in de stijl van Escher en transformaties. Dan definiëren we wat een behangpatroon is en vermelden we, zonder bewijs, hoeveel types behangpatronen er zijn.

a. Zelf een betegeling à la Escher maken

In de loep over ‘Betegelingen’ (Uitwisseling 22/3) was één paragraaf gewijd aan ‘Betegelen en transformaties’. De twee werkteksten van toen zijn beschikbaar op onze website www.uitwisseling.be (Uitwisseling Digitaal, 22/3). We vatten ze hier kort samen.

De eerste werktekst is getiteld ‘Het hele vlak betegelen met congruente, niet-regelmatige veelhoeken’. Aan de hand van de applet ‘Tegels leggen’ op www.wisweb.nl ontdekken de leerlingen dat je het vlak kunt betegelen (zonder overlappingen noch gaten) met een willekeurige driehoek of met een willekeurige vierhoek.



De transformatie die een tegel afbeeldt op zijn rechtstreekse buur (met één zijde gemeenschappelijk; hierboven in een verschillende kleur) is de puntspiegeling met als centrum het midden van de gemeenschappelijke zijde. Omdat de samengestelde van twee puntspiegelingen een verschuiving is (zie paragraaf 2), is een rechtstreekse buur van een rechtstreekse buur van een tegel (hierboven in een zelfde kleur) een schuifbeeld van die tegel. Merk op dat de kleuren niet ‘meetellen’ maar enkel bedoeld zijn om de tegels te kunnen onderscheiden.

De tweede werktekst van zes jaar geleden heet ‘Het vlak betegelen met beestjes of ander figuurtjes’. De leerlingen krijgen de volgende twee betegelingen te zien (niet van Escher zelf vanwege de auteursrechten). Ze moeten zoeken welke transformatie een tegel afbeeldt op een rechtstreekse buurtegel.



Voor de eerste betegeling is dit een puntspiegeling als je naar de buur ‘erboven’ of ‘eronder’ gaat en een verschuiving naar ‘links’ of naar ‘rechts’. Voor de tweede betegeling: een puntspiegeling naar ‘boven’ of naar ‘onder’ en een schuifspiegeling naar ‘links’ of naar ‘rechts’.

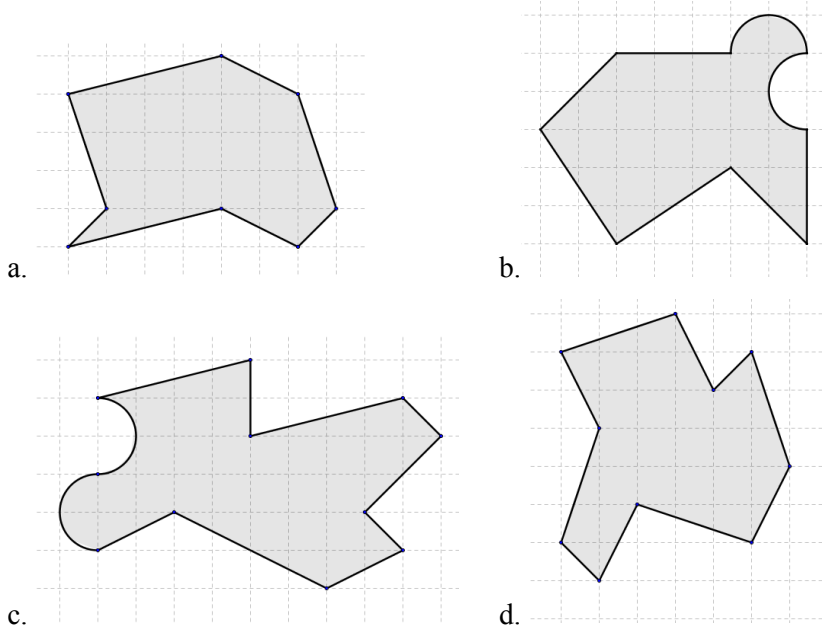
Vervolgens ontdekken de leerlingen dat ze dergelijke betegelingen kunnen maken door te vertrekken van ‘basistegels’. De basistegels zijn veelhoeken met als hoekpunten de ‘roosterpunten’ waar meer dan twee tegels (in deze voorbeelden: vier) samenkomen. De basistegels van de eerste betegeling hierboven zijn rechthoeken, die van de tweede vierkanten. Bij het vervormen van de zijden van de basistegel moet je rekening houden met de transformatie. Zo moet in onze voorbeelden de grens tussen twee tegels ‘boven’ elkaar puntsymmetrisch zijn, zodat de buurtegel ertegen past.

Tot daar de verwijzing naar de werkteksten van UW22/3.

In plaats van te starten met een volledige betegeling, kun je de leerlingen ook een tegel geven waarmee ze een betegeling moeten maken. Om (een deel van) de betegeling te construeren, hebben ze transformaties nodig. Als ze de tegel mogen uitknippen is de opgave te gemakkelijk; construeren met passer en geodriehoek of met passer en liniaal is interessant maar lastig en onnauwkeurigheden kunnen zich opstapelen. Een compromis is werken op ruitjespapier: het gaat vlot en de leerling is toch verplicht om bewust met transformaties te werken... De werktekst hieronder kun je bekijken als een alternatief voor de tweede werktekst van UW22/3. De eerste twee vragen zijn ontleend aan [15]. We kunnen nu vragen stellen die wat verder reiken, want de leerlingen kennen intussen de begrippen symmetriegroep, voortbrengers, enz.

Van tegel tot betegeling

1. Hier krijg je vier tegels. Laat zien dat je telkens het vlak kunt betegelen met identieke (congruente) kopieën van deze tegel. Teken hiertoe op ruitjespapier net genoeg tegels om duidelijk te maken dat je de betegeling op die manier altijd kunt verderzetten.

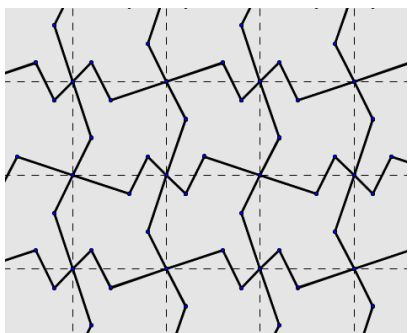


2. Leg uit welke transformaties je hebt gebruikt.

Een punt waar meer dan twee tegels samenkomen, noemen we een *roosterpunt* van de betegeling.

3. Duid de roosterpunten aan en verbind ze in stippellijn zo dat je een betegeling krijgt van eenvoudigere *basistegels*.

(We laten het enkel zien voor tegel d; de andere zijn analoog.)



In deze vier gevallen zijn de basistegels rechthoeken, maar dit hoeft niet altijd het geval te zijn. De gegeven tegel is ontworpen door te vertrekken van zo'n basistegel en de zijden te vervormen. De roosterpunten zijn hierbij op hun plaats gebleven.

4. Is elke vervorming mogelijk of moet je ervoor zorgen dat het 'uitkomt'? Maak dit concreet voor elke tegel van vraag 1.

(Tegel a: omdat de buurtegels (met een gemeenschappelijke zijde) elkaars schuifbeeld zijn, moeten de overstaande zijden elkaars schuifbeeld zijn. Twee aansluitende zijden van de tegel kunnen willekeurig vervormd worden, maar dan liggen de twee andere zijden vast als schuifbeelden.)

Tegel b: de twee zijden die samenkomen in het hoekpunt 'rechts boven' moeten elkaars draaibeeld zijn rond dit hoekpunt over 90° ; je kunt één van die twee vervormen zoals je wilt, maar de andere, ligt dan vast. Idem voor de twee andere zijden die samenkomen in het hoekpunt 'links beneden'.

Tegel c: elke zijde moet puntsymmetrisch zijn ten opzichte van zijn midden.

Tegel d: overstaande zijden moeten elkaars schuifspiegelbeeld zijn.)

Veronderstel dat deze betegelingen oneindig verder gaan in alle richtingen, m.a.w. dat het hele vlak met congruente kopieën van de tegel is betegeld. We beschouwen de symmetriegroep van de betegeling. Ook de bijbehorende 'basisbetegeling' (de betegeling in stippellijntjes op je eigen tekening, bestaande uit de nog niet vervormde basistegels) heeft een symmetriegroep.

5. Leg uit: de symmetriegroep van de betegeling is een deelgroep van de symmetriegroep van de basisbetegeling maar niet omgekeerd.

(Elke isometrie die de betegeling invariant laat, laat natuurlijk ook de roosterpunten en de basisbetegeling invariant. Het omgekeerde hoeft niet waar te zijn. Neem bv. tegel b: de basistegels zijn vierkanten en de basisbetegeling is gewoon 'ruitjespapier'. Er zijn onder andere spiegelingen die deze basisbetegeling invariant laten (spiegelingen ten opzichte van de diagonalen van de vierkanten, of ten opzichte van de lijnen zelf, of...). Maar de betegeling met tegel b is niet lijnsymmetrisch! Door de zijden van de basistegel te vervormen, is de lijnsymmetrie 'gebroken'...)

6. Voor welke ‘types’ vervormingen van de zijden uit de vier voorbeelden van vraag 1 zouden kunnen starten met basistegels die ‘echte’ parallelogrammen zijn (parallelogrammen die geen rechthoeken noch ruiten zijn)?

(Dit gaat enkel voor a, c en d. Niet voor b want de draaiingen zitten niet in de symmetriegroep van een betegeling met parallelogrammen.)

De symmetrieën van de betegelingen zijn niet alleen de symmetrieën die er met de vervorming van de zijden ‘in gestoken zijn’ maar ook alle samengestelden hiervan. De ‘voorgeprogrammeerde’ isometrieën zijn voortbrengers van de symmetriegroep.

7. Welke soort isometrieën zitten in de symmetriegroepen van onze vier betegelingen?

(Betegeling met tegel a: enkel verschuivingen want samengestelden van verschuivingen zijn opnieuw verschuivingen.)

Betegeling met tegel b: draaiingen over 90° , puntspiegelingen (samengestelden van twee draaiingen over 90° in dezelfde zin), verschuivingen (samengestelden van twee puntspiegelingen).

Betegeling met tegel c: puntspiegelingen en verschuivingen.

Betegeling met tegel d: schuifspiegelingen en verschuivingen.)

8. Leg uit waarom de betegelingen die we hier bestudeerd hebben, geen friezen zijn.

(De symmetriegroep bevat wel verschuivingen en de lengte van de schuifvectoren heeft wel een minimum, maar: de verschuivingen gebeuren in meer dan één richting.)

b. Symmetriegroepen van behangpatronen

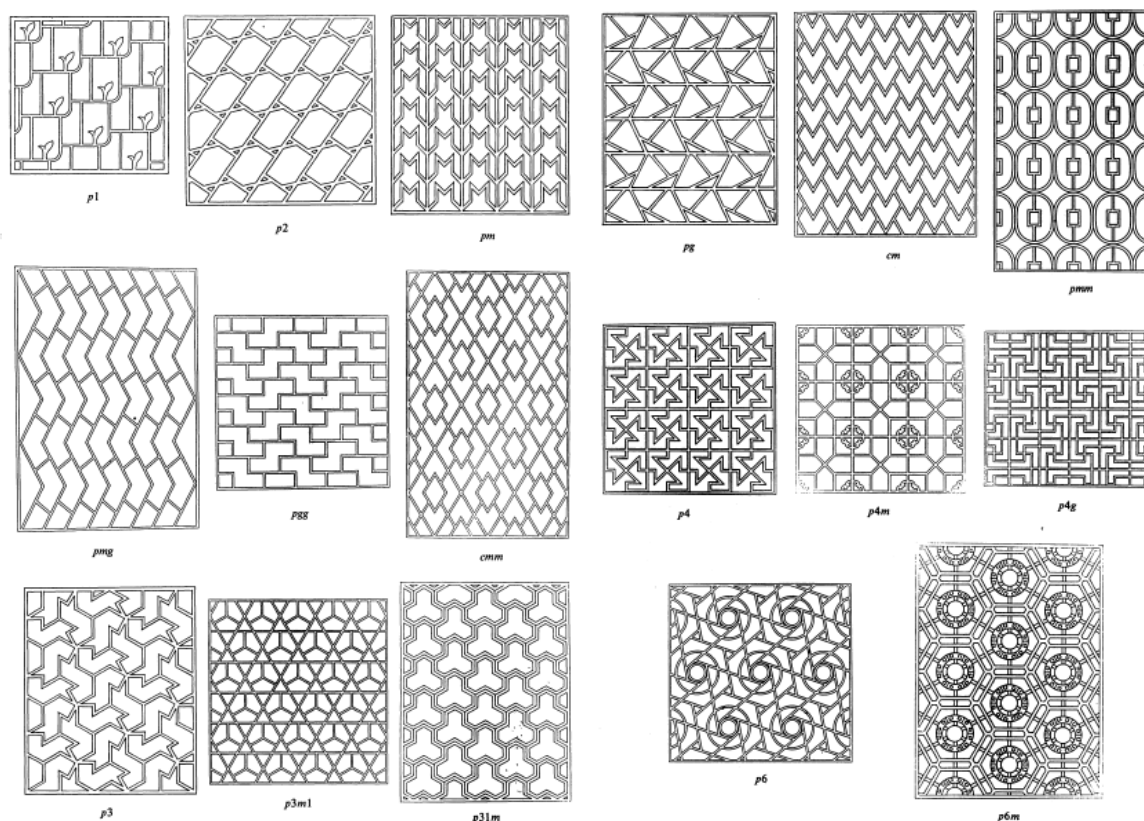
Om betegelingen à la Escher te classificeren, is de precieze vorm van de tegels niet belangrijk. Wat telt zijn de isometrieën die de ene tegel op de andere afbeelden en hiermee de hele betegeling invariant laten, anders gezegd de symmetrieën van de betegeling. Je kunt met dezelfde symmetriegroep heel verschillende betegelingen maken, maar vanuit symmetrie-oogpunt zijn die hetzelfde. Het hoeven zelfs geen betegelingen te zijn. Je kunt patronen maken die niet bestaan uit mooi tegen elkaar passende tegels. Je ziet dergelijk patronen in behangpapier. Meestal is er nog witruimte tussen de motiefjes. Men spreekt van *behangpatronen*.

Na de laatste opgave van de vorige werktekst ligt het voor de hand om de volgende definitie te geven, analoog aan die van een fries.

Een behangpatroon is een vlakke figuur waarvan de symmetriegroep verschuivingen in meer dan één richting bevat en waarbij de lengte van de vectoren van deze verschuivingen een minimum heeft.

In paragraaf 4 werden de leerlingen begeleid om de verschillende types van friezen te ontdekken en om te verklaren waarom er geen andere types mogelijk zijn. Ze vonden zeven types. Ook voor de behangpatronen bestaat een volledige classificatie van de mogelijke symmetriegroepen. Er zijn 17 types van behangpatronen (*the 17 wallpaper groups*). We gaan hier niet in op de verklaring waarom er juist 17 zijn en welke die types zijn. In de werktekst hierboven werd kennis gemaakt met vier van deze 17. Omdat het gaat over 17 symmetriegroepen en er veel figuren zijn die dezelfde symmetriegroep hebben, kunnen de figuren waarmee ze voorgesteld worden, heel verschillend zijn. Bij de friezen kon dat met letters of met voetjes of nog anders. Hieronder een voorstelling van de 17 wallpaper groups uit [16]. Leerlingen die er meer over willen opzoeken, vinden op het internet ook een algoritme om te

bepalen van welk type een behangpatroon is. Ze zouden dit kunnen toepassen op de vier betegelingen van de vorige werktekst.



Bibliografie

- [1] H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, inc. (New York-London-Sydney-Toronto), 1969
- [2] CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), *Pour une culture mathématique accessible à tous. Elaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes*, Nivelles, 2004, <http://www.enseignement.be/index.php?page=25074>
- [3] G. Karssenberg, *Patronen in Islamitische Mozaïeken*, Lesserie, Mathematisch Instituut Utrecht & Freudenthal Instituut Utrecht
- [4] L.C. Kinsey, T.E. Moore, *Symmetry, shape and space. An introduction to mathematics through geometry*, Key College Publishing, 2002
- [5] A. Nicolas, *Parcelles d'infini. Promenade au jardin d'Escher*, Belin – Pour la science, 2006
- [6] M. Roelens, *Symmetrische figuren*, Uitwisseling 20/2
- [7] J. Top, *Symmetrie*, <http://www.math.rug.nl/~top/lectures/symmetry2009.pdf>
- [8] J. van de Craats, *Symmetrie in islamitische ornamentale kunst*, CWI-syllabus 53: Structuur in schoonheid (Amsterdam), 2004

- [9] <http://web.science.mq.edu.au/~chris/geometry/chap07.pdf>
- [10] <http://mathcentral.uregina.ca/RR/database/RR.09.01/mcdonald1/>
- [11] <http://www.neiu.edu/~bhdayton/strips/stripframe.html>
- [12] <http://resources.educ.queensu.ca/fmc/june2002/PaperDoll.htm>
- [13] http://euler.slu.edu/escher/index.php/Rotational_Symmetry
- [14] <http://www.kaleidoscopesusa.com/about/how-kaleidoscopes-work/>
- [15] D. Odiet, *Clin d'oeil à un artiste: M. C. Escher. Comment initier des élèves de 14-15 ans à l'art des pavages?* Lezing op het congres van de Société belge des Professeurs de Mathématiques d'Expression française te Luik, 22-24 augustus 2012.
- [16] D. Schattschneider, *The plane symmetry groups: their recognition and notation*, American Mathematical Monthly 85/6 (1978), 439-450, online beschikbaar: www.math.fsu.edu/~quine/MB_10/schattschneider.pdf.

Michel en Anne