

Statistische paradoxen in de rechtszaal - theorie, voorbeelden en antwoorden

Charlotte Vlek

www.charlottevlek.nl

c.s.vlek@rug.nl

1 februari, 2014

1 Theorie

1.1 Bayesiaanse statistiek

Met Bayesiaanse statistiek kunnen we onderzoeken hoe kansen veranderen doordat nieuwe kennis wordt toegevoegd. In de rechtszaal gaat het dus om hoe de a-priori kans op een hypothese H verandert na bewijsstuk E in de a posteriori kans $P(H|E)$.

De a posteriori kans is een voorwaardelijke kans:

- $P(H)$ is de kans op hypothese H
- $P(\neg H)$ is de kans op niet H . $P(\neg H) = 1 - P(H)$
- $P(H|E)$ is de voorwaardelijke kans op H gegeven E

$$P(H|E) = \frac{P(H, E)}{P(E)}$$

- A priori: $P(H)$
- A posteriori: $P(H|E)$

In veel gevallen kunnen we $P(E|H)$ experimenteel vaststellen (bijvoorbeeld bij DNA bewijs), en gebruiken we de regel van Bayes om de kans $P(H|E)$ te vinden. Regel van Bayes:

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)}$$

Zie het voorbeeld van de Vaatstra-zaak in Sectie 2.2.

1.2 Bayesiaanse netwerken

Wanneer er meerdere bewijsstukken gebruikt worden, kan het soms voorkomen dat die onderling van elkaar afhangen (zie het voorbeeld van de Sally Clark-zaak in Sectie 2.3). Ook willen we er soms meer variabelen bij betrekken dan alleen een hypothese en een bewijsstuk. Met een Bayesiaans netwerk kunnen we de (on)afhankelijkheden tussen meerdere variabelen representeren.

Een Bayesiaans netwerk bestaat uit een gerichte, acyclische graaf en conditionele kanstabellen bij elke knoop in de graaf. Samen representeren de graaf en de tabellen een simultane kansverdeling over alle variabelen.

Een gerichte graaf bestaat uit

- een collectie *knopen* $V = \{V_1, V_2, \dots\}$ en

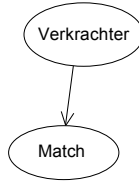


Figure 1: Een voorbeeld van een Bayesiaans netwerk

- een collectie paren van knopen: de pijlen $E = \{(V_1, V_2), (V_i, V_j) \dots\}$

Voor een Bayesiaans netwerk moet deze graaf altijd niet-cyclisch zijn (geen pijlen $V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_1$). De pijlen geven (on)afhankelijkheden tussen variabelen aan. Strict genomen betekent het ontbreken van een pijl dat de variabelen onafhankelijk zijn. Wanneer er wel een pijl staat *kan* dit betekenen dat de variabelen afhankelijk zijn (er kan correlatie zijn, zeker niet altijd causaliteit). Elke knoop heeft verschillende waarden, bijvoorbeeld *waar* en *onwaar*.

	Verkrachter = waar	Verkrachter = onwaar
Match = waar	1	0,0000005
Match = onwaar	0	0,9999995

Table 1: Conditionele kans tabel voor de knoop Match

Conditionele kans tabellen zoals in Tabel 1 geven de bijbehorende kansen voor elke knoop, conditioneel op de ouders van de knoop. De ouders van een knoop X (genoteerd als $\text{pa}(X)$) zijn alle knopen Y die met een pijl verbonden zijn met X in de richting $Y \rightarrow X$. Kortom: $\text{pa}(X) = \{Y | Y \rightarrow X\}$. Een knoop zonder ouders heeft een tabel met niet-conditionele kansen.

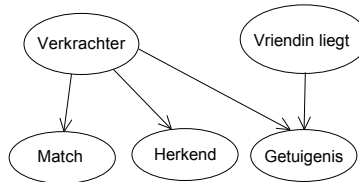


Figure 2: Een Bayesiaans netwerk voor de Adams-zaak

Berekeningen binnen een Bayesiaans netwerk kunnen gebruik maken van onafhankelijkheden in het netwerk. Vanwege die onafhankelijkheden hoeven we voor elke knoop alleen naar de voorouders (ouders van ouders van ouders etc) te kijken. Voor een netwerk met knopen $A_1, \dots, A_n$ (over het domein $U = \{A_1, \dots, A_n\}$) vinden we de gezamenlijke kansverdeling als volgt:

$$P(U) = \prod_{i=1}^n P(A_i | \text{pa}(A_i))$$

Zie bijvoorbeeld het netwerk in Figuur 2. Voor de kans $P(\text{Getuigenis} = \text{waar}, \text{Verkrachter} = \text{waar}, \text{Vriendin liegt} = \text{waar})$ vermenigvuldigen we de (conditionele) kansen van deze knopen, maar hoeven we de knopen Herkend en Match niet mee te nemen, omdat het geen ouders zijn van Getuigenis, Verkrachter of Vriendin liegt.

$$\begin{aligned}
 &P(\text{Getuigenis} = \text{waar}, \text{Verkrachter} = \text{waar}, \text{Vriendin liegt} = \text{waar}) \\
 &= P(\text{Getuigenis} = \text{waar} | \text{Verkrachter} = \text{waar}, \text{Vriendin liegt} = \text{waar}) \\
 &\cdot P(\text{Verkrachter} = \text{waar}) \cdot P(\text{Vriendin liegt} = \text{waar})
 \end{aligned}$$

Als we niets weten over de waarde van Verkrachter en Vriendin liegt, dan tellen we de kansen voor alle mogelijke waarden van die twee variabelen bij elkaar op (dit heet marginaliseren):

$$\begin{aligned}
 &P(\text{Getuigenis} = \text{waar}) \\
 &= P(\text{Getuigenis} = \text{waar}, \text{Verkrachter} = \text{waar}, \text{Vriendin liegt} = \text{waar}) \\
 &+ P(\text{Getuigenis} = \text{waar}, \text{Verkrachter} = \text{waar}, \text{Vriendin liegt} = \text{onwaar}) \\
 &+ P(\text{Getuigenis} = \text{waar}, \text{Verkrachter} = \text{onwaar}, \text{Vriendin liegt} = \text{waar}) \\
 &+ P(\text{Getuigenis} = \text{waar}, \text{Verkrachter} = \text{onwaar}, \text{Vriendin liegt} = \text{onwaar})
 \end{aligned}$$

Elke term in deze som kunnen we berekenen met het product zoals hierboven beschreven.

Met de regel van Bayes kunnen we opnieuw berekeningen doen voor variabelen in het netwerk. De regel van Bayes met meer bewijsstukken luidt als volgt:

$$P(H|E_1, E_2, E_3) = \frac{P(E_1, E_2, E_3|H) \cdot P(H)}{P(E_1, E_2, E_3)}$$

2 Voorbeelden

2.1 De gatecrasher paradox

In het Amerikaanse burgerrecht geldt dat de aanklager wint als zijn of haar claim waarschijnlijk is dan niet. Dit wordt doorgaans vertaald naar de eis dat zijn claim met een kans groter dan 0,5 waar moet zijn. Nu bekijken we het volgende geval:

- 499 personen kochten een kaartje van 20 dollar voor een voetbalwedstrijd
- er zaten 1000 personen in het stadion ten tijde van de wedstrijd
- 501 personen hebben dus zonder te betalen de wedstrijd gezien (andere opties zoals seizoenskaarten e.d. laten we in dit voorbeeld even buiten beschouwing)

Tegen elk van de 1000 bezoekers kan de eigenaar van het stadion nu een rechtszaak aanspannen: de kans dat die bezoeker in overtreding was, is 0,501 (en dus voldoende hoog om de aanklager gelijk te geven). Stel nu dat iedereen die in overtreding was alsnog het geld voor een kaartje (20 dollar) moet betalen aan de eigenaar. Dan krijgt de eigenaar 1000 keer de prijs van een kaartje, terwijl hij maar 501 had misgelopen. Kortom: de eigenaar maakt winst: hij krijgt nu 499 kaartjes extra uitbetaald. Een winst van $499 \cdot 20 = 9980$ dollar!

2.2 De Vaatstra-zaak

Na een grootschalig DNA-onderzoek werd Jasper S. veroordeeld voor de verkrachting en moord op Marianne Vaatstra. Voorafgaand aan dit onderzoek was Jasper S. niet speciaal verdacht: hij was slechts 1 van de 8000 mannen die in de omgeving woonde. Nadat er een DNA-match werd gevonden steeg die kans tot bijna 1.

- H : Jasper S. is de dader
- E : DNA-bewijs
- A priori kans: $P(H) = \frac{1}{8000} = 0,000125$
- Het DNA-bewijs:

	H	$\neg H$
E	1	$6,67 \cdot 10^{-20}$
$\neg E$	0	$(1 - 6,67 \cdot 10^{-20})$

Berekening:

$$\begin{aligned} P(H|E) &= \frac{P(E|H)P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|\neg H)P(\neg H)} \\ &= \frac{1 \cdot 0,000125}{1 \cdot 0,000125 + 6,67 \cdot 10^{-20} \cdot (1 - 0,000125)} \\ &= 0,999999999999999472... \end{aligned}$$

2.3 De Sally Clark-zaak

Sally Clark verloor kort na elkaar haar twee van haar kinderen. Een mogelijke oorzaak was wiegendood, maar men vond dit verdacht en klaagde haar aan voor moord. Een arts werd opgeroepen als expert in de zaak, en legde uit dat de kans dat een kind overlijdt aan wiegendood ongeveer 1 op 8500 is, dus een kans van 0,00012. Men argumenteerde dus:

- Kans dat één kind aan wiegendood overlijdt: 0,00012.
- Kans dat twee kinderen in hetzelfde gezin aan wiegendood overlijden: $0,00012^2 = 0,000000014$

Later bleek dat wiegendood een genetische factor heeft. Twee overlijdensgevallen binnen een gezin zijn dus niet onafhankelijk.

3 Antwoorden

3.1 Opdracht 1: de regel van Bayes

We willen afleiden:

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)}$$

Met gebruik van

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}$$

Oplossing: om te beginnen schrijven we $P(H|E)$ uit met de definitie van de voorwaardelijke kans:

$$P(H|E) = \frac{P(H, E)}{P(E)}$$

Door hetzelfde uit te schrijven voor $P(E|H)$ kunnen we $P(H, E)$ anders opschrijven (omdat $P(A, B) = P(B, A)$):

$$\begin{aligned} P(E|H) &= \frac{P(E, H)}{P(H)} \\ &= \frac{P(H, E)}{P(H)} \\ P(H, E) &= P(E|H) \cdot P(H) \end{aligned}$$

Dit vullen we in in de eerdere vergelijking met $P(H|E)$ aan de linkerkant:

$$\begin{aligned} P(H|E) &= \frac{P(H, E)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E)} \end{aligned}$$

3.2 Opdracht 2: groene en blauwe taxi's

1. De a priori kans $P(H) = 0,15$.
2. De voorwaardelijke kans $P(E|H)$ is gegeven in de tabel. Deze kunnen we schrijven als $P(E|H) = \frac{P(E, H)}{P(H)}$. Daaruit volgt dat $P(E, H) = P(E|H) \cdot P(H)$. Dit gebruiken we om de gevraagde kans te berekenen: $P(E, H) = 0,8 \cdot 0,15 = 0,12$.
3. Op dezelfde manier leiden we af dat $P(E, \neg H) = P(E|\neg H) \cdot P(\neg H)$. Dus $P(E, \neg H) = 0,2 \cdot 0,85 = 0,17$.
4. $P(E) = P(E, H) + P(E, \neg H) = 0,12 + 0,17 = 0,29$.
5. Met de regel van Bayes berekenen we

$$\begin{aligned} P(H|E) &= \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E)} \\ &= \frac{0,8 \cdot 0,15}{0,29} \\ &\approx 0.41 \end{aligned}$$

6. Met de regel van Bayes berekenen we

$$\begin{aligned} P(\neg H|E) &= \frac{P(E|\neg H) \cdot P(\neg H)}{P(E)} \\ &= \frac{0,2 \cdot 0,85}{0,29} \\ &\approx 0.586 \end{aligned}$$

De kans dat het groene taxibedrijf verantwoordelijk is voor de aanrijding is nog steeds groter dan de kans dat het blauwe bedrijf verantwoordelijk is. Hoewel de kansen dicht bij elkaar liggen, zou de boete nog steeds naar het groene taxibedrijf moeten gaan.

3.3 Opdracht 3: de Adams-zaak

1. De rechter begaat de prosecutor's fallacy. Hij ziet de voorwaardelijke kans $P(E|\neg H)$ (dat het DNA-bewijs gevonden zou worden terwijl Adams onschuldig is) aan voor $P(\neg H|E)$ (dat Adams onschuldig is gegeven het DNA-bewijs).
2. De a priori kans dat Adams schuldig is: $P(H) = \frac{1}{400.000} = 0,0000025$
3. De tabel (met rechtsbovenin de random match probability, $\frac{1}{2.000.000}$)

	H	$\neg H$
E	1	0,0000005
$\neg E$	0	0,9999995

4. De kans op bewijsstuk E is

$$\begin{aligned}
 P(E) &= P(E, H) + P(E, \neg H) \\
 &= P(E|H) \cdot P(H) + P(E|\neg H) \cdot P(\neg H) \\
 &= 1 \cdot 0,0000025 + 0,0000005 \cdot (1 - 0,0000025) \\
 &= 0,0000299999
 \end{aligned}$$

5. We maken gebruik van het antwoord op de vorige vraag:

$$\begin{aligned}
 P(H|E) &= \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E)} \\
 &= \frac{1 \cdot 0,0000025}{0,0000299999} \\
 &= 0,8333361112
 \end{aligned}$$

6. Uit de vorige vraag bleek dat de kans dat Adams schuldig is gegeven het DNA-bewijs 0,84 is. Hoewel een absolute grens niet te trekken is, lijkt deze kans te laag om met voldoende zekerheid te concluderen dat Adams schuldig is. Overigens geldt in het Nederlandse strafrecht altijd dat er tenminste twee bewijsstukken moeten zijn. Het DNA-bewijs alleen zou dus niet voldoende zijn.

3.4 Opdracht 4: de Adams-zaak in een Bayesiaans netwerk

1. De 0 in de onderste tabel is de kans dat de getuigenis (de vriendin getuigt: Adams was bij haar die avond) er zou zijn als Adams wel de verkrachter was, en de vriendin niet liegt. Dit is dus de kans $P(\text{Getuigenis} = \text{waar} | \text{Verkrachter} = \text{waar}, \text{Vriendin liegt} = \text{onwaar})$.
2. Deze kans is 0 omdat als Adams de verkrachter was, hij niet bij zijn vriendin geweest kan zijn die avond. Omdat zij de waarheid spreekt, kan zij niet de getuigenis hebben afgelegd waarin ze zegt dat hij bij haar was. Het vaststellen van deze kans is natuurlijk open voor interpretatie, zulke kansschattingen zijn (bijna altijd) subjectief.
3. De kans op de getuigenis als Adams de verkrachter was, en de vriendin liegt, is $P(\text{Getuigenis} = \text{waar} | \text{Verkrachter} = \text{waar}, \text{Vriendin liegt} = \text{waar})$. Dit kunnen we aflezen uit de onderste tabel: 0,99.

4. De kans op de getuigenis gegeven dat Adams de verkrachter was, is $P(\text{Getuigenis} = \text{waar} | \text{Verkrachter} = \text{waar})$. Dit kunnen we als volgt berekenen:

$$\begin{aligned} &P(\text{Getuigenis} = \text{waar} | \text{Verkrachter} = \text{waar}) \\ &= P(\text{Getuigenis} = \text{waar} | \text{Verkrachter} = \text{waar}, \text{Vriendin liegt} = \text{waar}) \cdot P(\text{Vriendin liegt} = \text{waar}) \\ &+ P(\text{Getuigenis} = \text{waar} | \text{Verkrachter} = \text{waar}, \text{Vriendin liegt} = \text{onwaar}) \cdot P(\text{Vriendin liegt} = \text{onwaar}) \\ &= 0,99 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,6 \\ &= 0,396 \end{aligned}$$

5. De kans $P(\text{Verkrachter} = \text{waar} | \text{Match} = \text{waar}) \approx 0,84$ verandert niet. Dit komt doordat de nieuw toegevoegde variabelen (zolang ze geen waarde hebben gekregen) geen invloed hebben op de berekening van deze kans. Overigens zou deze kans wel veranderen als er knopen waren toegevoegd die met een pijl naar de knoop Verkrachter toe wezen.

6. We gebruiken de volgende afkortingen:

- V: Verkrachter
- M: Match
- H: Herkend
- G: Getuigenis
- Vr: Vriendin liegt

Met de notatie $\neg V$ bedoelen we: Verkrachter = onwaar. Met de regel van Bayes kunnen we de kans als volgt uitschrijven:

$$P(V|M, \neg H, G) = \frac{P(M, \neg H, G|V) \cdot P(V)}{P(M, \neg H, G)}$$

waar

$$\begin{aligned} &P(M, \neg H, G) \\ &= P(M|V) \cdot P(\neg H|V) \cdot P(G|V) \cdot P(V) \\ &+ P(M|\neg V) \cdot P(\neg H|\neg V) \cdot P(G|\neg V) \cdot P(\neg V) \end{aligned}$$

Door alle getallen in te vullen komen we op de volgende berekening:

$$\frac{(0,0000025 \cdot 1 \cdot 0,1 \cdot (0,99 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,6))}{(0,0000025 \cdot 1 \cdot 0,1 \cdot (0,99 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,6)) + (0,9999975 \cdot 0,0000005 \cdot 0,9 \cdot (0,1 \cdot 0,4 + 0,9 \cdot 0,6))} \approx 0,275$$

3.5 Opdracht 5: De verklaring van een verdachte

1. De gevraagde kans is $P(\text{Marjan} = \text{waar} | \text{Verklaring} = \text{waar})$. Deze kunnen we als volgt berekenen:

$$P(\text{Marjan} = \text{waar} | \text{Verklaring} = \text{waar}) = \frac{P(\text{Verklaring} = \text{waar} | \text{Marjan} = \text{waar}) \cdot P(\text{Marjan} = \text{waar})}{P(\text{Verklaring} = \text{waar})}$$

Het gedeelte onder de breukstreep berekenen we als volgt:

$$\begin{aligned}
P(\text{Verklaring} = \text{waar}) &= P(\text{Verklaring} = \text{waar} | \text{Marjan} = \text{waar}, \text{Beekman} = \text{waar}) \\
&\quad \cdot P(\text{Marjan} = \text{waar}) \cdot P(\text{Beekman} = \text{waar}) \\
&+ P(\text{Verklaring} = \text{waar} | \text{Marjan} = \text{waar}, \text{Beekman} = \text{onwaar}) \\
&\quad \cdot P(\text{Marjan} = \text{waar}) \cdot P(\text{Beekman} = \text{onwaar}) \\
&+ P(\text{Verklaring} = \text{waar} | \text{Marjan} = \text{onwaar}, \text{Beekman} = \text{waar}) \\
&\quad \cdot P(\text{Marjan} = \text{onwaar}) \cdot P(\text{Beekman} = \text{waar}) \\
&+ P(\text{Verklaring} = \text{waar} | \text{Marjan} = \text{onwaar}, \text{Beekman} = \text{onwaar}) \\
&\quad \cdot P(\text{Marjan} = \text{onwaar}) \cdot P(\text{Beekman} = \text{onwaar}) \\
&= 0,1 \cdot 0,0001 \cdot 0,0001 + 0,6 \cdot 0,0001 \cdot 0,9999 \\
&+ 0,99 \cdot 0,0001 \cdot 0,9999 + 0,001 \cdot 0,9999 \cdot 0,9999 \\
&\approx 0,001159
\end{aligned}$$

Dus krijgen we

$$P(\text{Marjan} = \text{waar} | \text{Verklaring} = \text{waar}) \approx \frac{(0,1 \cdot 0,0001 + 0,99 \cdot 0,9999) \cdot 0,0001}{0,001159} \approx 0,0854$$

2. In deze vraag maken we gebruik van $P(\text{Verklaring} = \text{waar}) \approx 0,001159$ uit de vorige vraag. Dan krijgen we:

$$P(\text{Beekman} = \text{waar} | \text{Verklaring} = \text{waar}) \approx \frac{(0,1 \cdot 0,0001 + 0,6 \cdot 0,9999) \cdot 0,0001}{0,001159} \approx 0,0518$$

3. Met alleen de verklaring van Beekman ligt het het meest voor de hand om Marjan te verdenken.
4. Met de nieuwe informatie dat er geen sleepspoor is gevonden berekenen we nu zowel $P(\text{Marjan} = \text{waar} | \text{Verklaring} = \text{waar}, \text{Sleepspoor} = \text{onwaar})$ als $P(\text{Beekman} = \text{waar} | \text{Verklaring} = \text{waar}, \text{Sleepspoor} = \text{onwaar})$. Maar eerst berekenen we $P(\text{Verklaring} = \text{waar}, \text{Sleepspoor} = \text{onwaar})$:

$$\begin{aligned}
&P(\text{Verklaring} = \text{waar}, \text{Sleepspoor} = \text{onwaar}) \\
&= P(\text{Verklaring} = \text{waar} | \text{Marjan} = \text{waar}, \text{Beekman} = \text{waar}) \\
&\quad \cdot P(\text{Sleepspoor} = \text{onwaar} | \text{Marjan} = \text{waar}, \text{Beekman} = \text{waar}) \\
&\quad \cdot P(\text{Marjan} = \text{waar}) \cdot P(\text{Beekman} = \text{waar}) \\
&+ P(\text{Verklaring} = \text{waar} | \text{Marjan} = \text{waar}, \text{Beekman} = \text{onwaar}) \\
&\quad \cdot P(\text{Sleepspoor} = \text{onwaar} | \text{Marjan} = \text{waar}, \text{Beekman} = \text{onwaar}) \\
&\quad \cdot P(\text{Marjan} = \text{waar}) \cdot P(\text{Beekman} = \text{onwaar}) \\
&+ P(\text{Verklaring} = \text{waar} | \text{Marjan} = \text{onwaar}, \text{Beekman} = \text{waar}) \\
&\quad \cdot P(\text{Sleepspoor} = \text{onwaar} | \text{Marjan} = \text{onwaar}, \text{Beekman} = \text{waar}) \\
&\quad \cdot P(\text{Marjan} = \text{onwaar}) \cdot P(\text{Beekman} = \text{waar}) \\
&+ P(\text{Verklaring} = \text{waar} | \text{Marjan} = \text{onwaar}, \text{Beekman} = \text{onwaar}) \\
&\quad \cdot P(\text{Sleepspoor} = \text{onwaar} | \text{Marjan} = \text{onwaar}, \text{Beekman} = \text{onwaar}) \\
&\quad \cdot P(\text{Marjan} = \text{onwaar}) \cdot P(\text{Beekman} = \text{onwaar}) \\
&= 0,01 \cdot 0,1 \cdot 0,0001 \cdot 0,0001 + 0,01 \cdot 0,99 \cdot 0,0001 \cdot 0,9999 \\
&+ 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,0001 \cdot 0,9999 + 0,5 \cdot 0,0001 \cdot 0,9999 \cdot 0,9999 \\
&\approx 0,00053
\end{aligned}$$

Hiermee berekenen we

$$\begin{aligned}
 & P(\text{Marjan} = \text{waar} | \text{Verklaring} = \text{waar}, \text{Sleepspoor} = \text{onwaar}) \\
 &= \frac{P(\text{Verklaring} = \text{waar}, \text{Sleepspoor} = \text{onwaar} | \text{Marjan} = \text{waar}) \cdot P(\text{Marjan} = \text{waar})}{P(\text{Verklaring} = \text{waar}, \text{Sleepspoor} = \text{onwaar})} \\
 &= \frac{(0,01 \cdot 0,1 \cdot 0,0001 + 0,01 \cdot 0,99 \cdot 0,9999) \cdot 0,0001}{0,00053} \\
 &\approx 0,00187
 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
 & P(\text{Beekman} = \text{waar} | \text{Verklaring} = \text{waar}, \text{Sleepspoor} = \text{onwaar}) \\
 &= \frac{P(\text{Verklaring} = \text{waar}, \text{Sleepspoor} = \text{onwaar} | \text{Beekman} = \text{waar}) \cdot P(\text{Beekman} = \text{waar})}{P(\text{Verklaring} = \text{waar}, \text{Sleepspoor} = \text{onwaar})} \\
 &= \frac{(0,01 \cdot 0,1 \cdot 0,0001 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,9999) \cdot 0,0001}{0,00053} \\
 &\approx 0,0566
 \end{aligned}$$

Deze berekeningen laten zien dat het zonder het sleepspoor waarschijnlijker is dat Beekman het heeft gedaan.