

Deze Workshop heeft geen Naam

Albert Visser

Descartes & OFR

Vrijdag, 31 Januari, 2014

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Overview

Boeketje Paradox

Semantische versus Verzamelingstheoretische Paradoxen

Belang van de Paradoxen

Tarski over de Semantische Paradoxen

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Overview

Boeketje Paradox

Semantische versus Verzamelingstheoretische Paradoxen

Belang van de Paradoxen

Tarski over de Semantische Paradoxen

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Overview

Boeketje Paradox

Semantische versus Verzamelingstheoretische Paradoxen

Belang van de Paradoxen

Tarski over de Semantische Paradoxen

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Overview

Boeketje Paradox

Semantische versus Verzamelingstheoretische Paradoxen

Belang van de Paradoxen

Tarski over de Semantische Paradoxen

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Overview

Boeketje Paradox

Belang van de Paradoxen

Tarski over de Semantische Paradoxen

Boeketje Paradox

Semantische versus Verzamelingstheoretische Paradoxen

Belang van de Paradoxen

Tarski over de Semantische Paradoxen



Universiteit Utrecht

Epimenides 1

Epimenides: Kretensische profeet, ±700 voor Christus.

Τύμβον ἐτεκτήναντο σέθεν, κύδιστε μέγιστε,
Κρηῆτες, αἰὲ ψευδεῖς, κακὰ θηρία, γαστέρες ἀργαί.
Ἀλλὰ σὺ γ' οὐ θνήσκεις, ἔστηκας γὰρ ζοὸς αἰεὶ,
Ἐν γὰρ σοὶ ζῶμεν καὶ κινύμεθ' ἡδὲ καὶ ἐσμέν.

They fashioned a tomb for you, holy and high one,
Cretans, always liars, evil beasts, idle bellies.
But you are not dead: you live and abide forever,
For in you we live and move and have our being.

Paulus in de brief aan Titus (hfst. 1, vs. 12): Eén van hun eigen profeten, zelf een Kretenzer, heeft gezegd: 'Kretenzers zijn onverbeterlijke leugenaars, gemene beesten, vadsige vreters.' En dit getuigenis is waar.

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Epimenides 2

De leugenaarsparadox:

Deze zin is onwaar.

Wat ik nu zeg is onwaar.

Als die zin waar zou zijn, dan is het zo wat hij uitdrukt. Dan is hij dus onwaar. Maar dan is de zin zowel waar als onwaar en dat kan niet. Dus moet de zin wel waar zijn. Maar hij zegt dat hij onwaar is, en dus, omdat hij waar is, is hij onwaar. Maar dan is de zin zowel waar als onwaar. Een tegenspraak.

(†) Was Epimenides uitspraak “Alle Kretenzers liegen altijd en ik ben een Kretenzer” echt een paradox?

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Epimenides 3



Figuur: Epimenides Steeg

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Er zit een Slang in je Broekzak 1

Hier volgt de Curry Paradox, genoemd naar Haskell B. Curry (1900-1982).

- C: Als deze zin waar is, dan zit er een slang in jouw broekzak.

Stel (a) C is waar. Dan hebben we: (b) als C waar is, dan zit er een slang in jouw broekzak. Met modus ponens voor (a) en (b) volgt: (c) je hebt een slang in je broekzak. We hebben uit de aanname (a) dat C waar is, afgeleid dat (c) je een slang in je broekzak hebt. Dus mogen we concluderen: (d) als C waar is, dan heb je een slang in je broekzak. Maar dat is precies wat C zegt. We hebben dus bewezen dat (e) C waar is. Maar uit (d) en (e) volgt: (f) *je hebt een slang in je broekzak!*

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Er zit een Slang in je Broekzak 2



Figuur: De Curry Paradox

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

De Yablo Paradox

De Yablo Paradox wordt toegeschreven aan Stephen Yablo in 1993.

S_1 voor alle $k > 1$ is S_k onwaar.

S_2 voor alle $k > 2$ is S_k onwaar.

S_3 voor alle $k > 3$ is S_k onwaar.

... ..

(†) Kunt u inzien dat dit tot een paradox leidt?

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

De Berry Paradox

De volgende paradox wordt door Bertrand Russell toegeschreven aan G.G. Berry (1867–1928), junior bibliothekaris in de Bodleian Library in Oxford.

Wat is het kleinste getal dat niet in minder dan veertien woorden gedefiniëerd kan worden?

(†) Kunt u inzien dat dit tot een paradox leidt?

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

De Grelling-Nelson Paradox

De Grelling-Nelson Paradox is in 1908 geformuleerd door Kurt Grelling (1886-1942) en Leonard Nelson (1882-1927).

We noemen een bijvoeglijk naamwoord *homologisch* als het van toepassing is op zichzelf. Zo niet dan noemen we het *heterologisch*.

Voorbeelden: “kort” is homologisch en “lang” is heterologisch.

(†) Is “cool” homologisch? Is “verhapseld” homologisch?

Is “heterologisch” heterologisch?

(†) Kunt u inzien dat dit tot een paradox leidt?

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

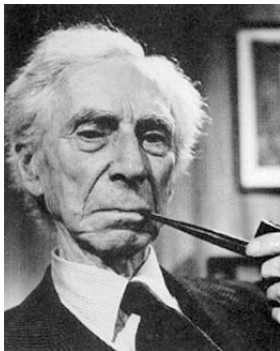
Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

De Russell Paradox 1



Figuur: Bertrand Russell, 1872–1970

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

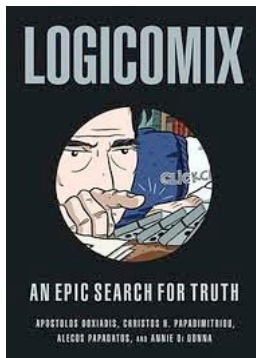
Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

De Russell Paradox 2



Figuur: Logicomix

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

De Russell Paradox 3

De eerste stap in Russell's project van een funderende encyclopedie van de wetenschappen was de behandeling van de wiskunde in de *Principles of Mathematics*. In 1901, wanneer hij een probleem in de theorie van ordinaalgetallen in de theorie van Cantor bestudeert, vindt hij de paradox. (Dit eerdere probleem was ontdekt door Cesare Burali-Forti.)

Zij $R := \{x \mid x \notin x\}$. Is $R \in R$? Als dit zo is dan is $R \notin R$. Een tegenspraak. Dus kan R niet in R zitten. Ergo $R \notin R$. Maar dan $R \in R$. Een tegenspraak.

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Brief van Russell aan Frege in 1902

Russell bestudeert Frege's werk om te kijken hoe Frege de paradox vermijdt. Antwoord: *niet*.

There is just one point where I have encountered a difficulty. You state that a function too, can act as the indeterminate element. This I formerly believed, but now this view seems doubtful to me because of the following contradiction. [...] Likewise there is no class (as a totality) of those classes which, each taken as a totality, do not belong to themselves. From this I conclude that under certain circumstances a definable collection does not form a totality.

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Overview

Boeketje Paradox

Semantische versus Verzamelingstheoretische Paradoxen

Belang van de Paradoxen

Tarski over de Semantische Paradoxen

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Frank Plumpton Ramsey

Frank Ramsey was, na Ludwig Wittgenstein, Russell's belangrijkste leerling.



Figuur: Frank P. Ramsey 1903-1930

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Verzamelings­theoretische versus Semantische Paradoxen

Ramsey stelt voor in 1925 om een onderscheid te maken tussen de semantische en de verzamelingstheoretische paradoxen.

- ▶ Verzamelings­theoretisch: Russell Paradox, Burali-Forti Paradox
- ▶ Semantisch: Leugenaarsparadox, Curry Paradox, Yablo Paradox, Berry Paradox, Grelling-Nelson Paradox.

Semantische begrippen: waarheid, definitie, van toepassing zijn op (satisfactie).

Ramsey's onderscheid is algemeen geaccepteerd, maar klopt het ook? ...

Boeketie Paradox

Semantische versus Verzamelingstheoretische Paradoxien

Belang van de Paradoxen

Tarski over de Semantische Paradoxen



Universiteit Utrecht

Overview

Boeketje Paradox

Semantische versus Verzamelingstheoretische Paradoxen

Belang van de Paradoxen

Tarski over de Semantische Paradoxen

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

**Belang van de
Paradoxen**

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Belang

1. De semantische paradoxen lijken een grens te stellen aan de mogelijkheid te denken *met absolute algemeenheid*. (Zelfs de uitspraak 'er is geen absoluut algemeen inzicht' probeert stiekem absoluut algemeen te zijn.)
2. De verzamelingtheoretische paradoxen zijn een obstakel voor het ontwikkelen van sterke systemen voor de grondslagen van de wiskunde.
3. De semantische paradoxen zijn een probleem voor de theoretische linguïstiek.
4. Als we de paradoxen temmen in een gecontroleerde omgeving dan komen er allerlei zeer nuttige dingen uit: recursie, Gödel's onvolledigheidsstellingen.
5. De paradoxen hebben een duidelijke entertainment waarde.

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Overview

Boeketje Paradox

Semantische versus Verzamelingstheoretische Paradoxen

Belang van de Paradoxen

Tarski over de Semantische Paradoxen

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Alfred Tarski



Figuur: Alfred Tarski 1901-1983

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

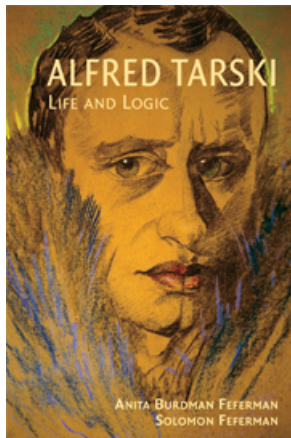
Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Feferman & Feferman



Figuur: Feferman & Feferman

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

The Semantic Conception of Truth 1944

The Semantic Conception of Truth is een populaire expositie van *Der Wahrheitsbegriff in den Formalisierten Sprachen* uit 1935. Dat gaat weer terug op een artikel van 1933 in het Pools.

Op vele plaatsten kan een pdf van *Semantic Conception* worden gedownload.

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Conventie of Criterium T

De zin “sneeuw is wit” is waar dan en slechts dan als sneeuw wit is.

De zin X is waar dan en slechts dan als p .

Taal over taal: *Mention (suppositio materialis)* en *Use (suppositio formalis)*.

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

The White Knight 1



Figuur: De Witte Ridder

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Tarski's Lijst van Verdachten 1

Wat is verantwoordelijk voor de leugenaarsparadox?

- A. Zelfreferentie
- B. Logica
- C. Semantische Geslotenheid

Hoe weten we dat de lijst volledig is?

Problemen de keuze voor zelfreferentie:

- ▶ Het is erg moeilijk een voldoende omvattende definitie te geven van wat hier zelfreferentie betekent.
Denk aan de Yablo en de Grelling Paradox.
- ▶ Onproblematische voorbeelden van zelfreferentie.
Deze zin is kort. Er staat geen spelvaud in deze zin.

Boeketie Paradox

Semantische versus Verzamelingstheoretische Paradoxien

Belang van de Paradoxen

Tarski over de Semantische Paradoxen



Universiteit Utrecht

Tarski's Lijst van Verdachten 2

Veranderen van de logica: Tarski:

It would be superfluous to stress here the consequences of rejecting the assumption (II), that is, of changing our logic (supposing this were possible) even in its more elementary and fundamental parts.

Heer Bommel, De Achtgever:

Ping Po stelt vast dat alles, sleutel, schat, en I Oen, weg is. Maar de wijze kent geen boosheid. Heer Ollie vraagt hem wat de betekenis is van zijn repeterende zin: "De schat moet terugkomen, want anders . . ." Volgens de wijsgeer is dat duidelijk. Anders is de schat weg! "Is dat alles"?, vraagt Tom Poes. "Dat is alles, kunt u zich iets ergers bedenken?"

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Objecttaal en Metataal

Tarski's oplossing van de semantische paradoxen is: *geen semantisch gesloten talen gebruiken*. Dit betekent dat we onderscheiden tussen de taal waarin een waarheidsclaim gedaan wordt, *de metataal*, en de taal waarvoor we de waarheidclaim doen: *de objecttaal*.

“Deze zin is onwaar” zou zowel tot de object en de metataal moeten horen.

Dit is dus niet een oplossing gestoeld op een diagnose, maar een ingenieursoplossing om de paradox te vermijden.

Het onderscheid tussen *mention* en *use* is dus iets heel anders dan het onderscheid tussen object- en metataal. “Deze zin is kort” kan heel goed in de objecttaal zitten.

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Vragen 1

(†) Voor welke van de volgende zinnen is het onderscheid tussen objecttaal en metataal relevant?

- a. Jan heet “Jan”.
- b. “Jan” en Jan zijn beiden kort.
- c. “Jan is niet “Jan”” is waar.

(†) Bezie de volgende zin.

Knip de knappe kapper knipt precies degenen die zichzelf niet knippen. Wie knipt Knip?

Hebben we hier te doen met een paradox? Zo nee, waarom niet? Zo ja, moeten we nu ter oplossing metakappers invoeren?

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Vragen 2

(†) Een kleine mention & use quiz. Laten we de naam van Netelenbos “Fluppie” noemen. Geef aan welke van de volgende uitspraken waar dan wel onwaar is.

1. Netelenbos heet Netelenbos.
2. Netelenbos heet “Netelenbos”.
3. Netelenbos heet Fluppie.
4. Netelenbos heet “Fluppie”.
5. Fluppie is “Netelenbos”.
6. “Netelenbos” heet ““Netelenbos””.
7. Fluppie heet ““Netelenbos””.
8. Fluppie heet “Fluppie”.
9. “Fluppie” is ““Netelenbos””.

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht

Conclusie

Tarski's 'oplossing' is een goede manier om de paradoxen te vermijden. Hij is echter niet overtuigend als filosofische oplossing omdat hij ons geen goed verhaal levert over wat er in de paradoxen aan de hand is.

Verder werk: bijvoorbeeld Saul Kripke *Outline of a theory of truth* (1975).

De semantische paradoxen zullen ons nog wel even bezig houden. Elk jaar verschijnen er tientallen artikelen over dit onderwerp. Dat zal nog wel meer worden als de Chinezen en de Indiers er ook over gaan nadenken.

Boeketje Paradox

Semantische versus
Verzamelingstheo-
retische
Paradoxen

Belang van de
Paradoxen

Tarski over de
Semantische
Paradoxen



Universiteit Utrecht