

DEZE WORKSHOP HEEFT GEEN NAAM

ALBERT VISSER

1. BOEKETJE PARADOX

1.1. **De Leugenaarsparadox.** Epimenides: Kretensische profeet, ± 700 voor Christus.

They fashioned a tomb for you, holy and high one,
Cretans, always liars, evil beasts, idle bellies.
But you are not dead: you live and abide forever,
For in you we live and move and have our being.

Paulus in de brief aan Titus (hfst. 1, vs. 12): Eén van hun eigen profeten, zelf een Kretenzer, heeft gezegd: ‘Kretenzers zijn onverbeterlijke leugenaars, gemene beesten, vadsige vreters.’ En dit getuigenis is waar.

De leugenaarsparadox:

Deze zin is onwaar.

Wat ik nu zeg is onwaar.

Als die zin waar zou zijn, dan is het zo wat hij uitdrukt. Dan is hij dus onwaar. Maar dan is de zin zowel waar als onwaar en dat kan niet. Dus moet de zin wel waar zijn. Maar hij zegt dat hij onwaar is, en dus, omdat hij waar is, is hij onwaar. Maar dan is de zin zowel waar als onwaar. Een tegenspraak.

(†) Was Epimenides uitspraak “Alle Kretenzers liegen altijd en ik ben een Kretenzer” echt een paradox?

1.2. **De Curry Paradox.** Hier volgt de Curry Paradox, genoemd naar Haskell B. Curry (1900-1982).

- C: Als deze zin waar is, dan zit er een slang in jouw broekzak.

Stel (a) C is waar. Dan hebben we: (b) als C waar is, dan zit er een slang in jouw broekzak. Met modus ponens voor (a) en (b) volgt: (c) je hebt een slang in je broekzak. We hebben uit de aanname (a) dat C waar is, afgeleid dat (c) je een slang in je broekzak hebt. Dus mogen we concluderen: (d) als C waar is, dan heb je een slang in je broekzak. Maar dat is precies wat C zegt. We hebben dus bewezen dat (e) C waar is. Maar uit (d) en (e) volgt: (f) *je hebt een slang in je broekzak!*

1.3. De Yablo Paradox. De Yablo Paradox wordt toegeschreven aan Stephen Yablo in 1993.

S_1 : voor alle $k > 1$ is S_k onwaar.

S_2 : voor alle $k > 2$ is S_k onwaar.

S_3 : voor alle $k > 3$ is S_k onwaar.

...: ...

(†) Kunt u inzien dat dit tot een paradox leidt?

1.4. De Berry Paradox. De volgende paradox wordt door Bertrand Russell toegeschreven aan G.G. Berry (1867–1928), junior bibliothekaris in de Bodleian Library in Oxford.

Wat is het kleinste getal dat niet in minder dan veertien woorden gedefiniëerd kan worden?

(†) Kunt u inzien dat dit tot een paradox leidt?

1.5. De Grelling-Nelson Paradox. De Grelling-Nelson Paradox is in 1908 geformuleerd door Kurt Grelling (1886-1942) en Leonard Nelson (1882-1927).

We noemen een bijvoeglijk naamwoord *homologisch* als het van toepassing is op zichzelf. Zo niet dan noemen we het *heterologisch*.

Voorbeelden: “kort” is homologisch en “lang” is heterologisch.

(†) Is “cool” homologisch? Is “verhapseld” homologisch?

Is “heterologisch” heterologisch?

(†) Kunt u inzien dat dit tot een paradox leidt?

1.6. De Russell Paradox. De eerste stap in Russell’s project van een funderende encyclopedie van de wetenschappen was de behandeling van de wiskunde in de *Principles of Mathematics*. In 1901, wanneer hij een probleem in de theorie van ordinaalgetallen in de theorie van Cantor bestudeert, vindt hij de paradox. (Dit eerdere probleem was ontdekt door Cesare Burali-Forti.)

Zij $R := \{x \mid x \notin x\}$. Is $R \in R$? Als dit zo is dan is $R \notin R$. Een tegenspraak. Dus kan R niet in R zitten. Ergo $R \notin R$. Maar dan $R \in R$. Een tegenspraak.

Russell bestudeert Frege’s werk om te kijken hoe Frege de paradox vermijdt. Antwoord: *niet*. In 1902 stuurt hij een brief aan Frege.

There is just one point where I have encountered a difficulty. You state that a function too, can act as the indeterminate element. This I formerly believed, but now this view seems doubtful to me because of the following contradiction. [...] Likewise there is no class (as a totality) of those classes which, each taken as a totality, do not belong to themselves. From this I conclude that under certain circumstances a definable collection does not form a totality.

2. SEMANTISCHE VERSUS VERZAMELINGSTHEORETISCHE PARADOXEN

2.1. **Frank Plumpton Ramsey.** Frank Ramsey was, na Ludwig Wittgenstein, Russell's belangrijkste leerling. Ramsey stelt voor in 1925 om een onderscheid te maken tussen de semantische en de verzamelingstheoretische paradoxen.

- Verzamelingsstheoretisch: Russell Paradox, Burali-Forti Paradox
- Semantisch: Leugenaarsparadox, Curry Paradox, Yablo Paradox, Berry Paradox, Grelling-Nelson Paradox.

Semantische begrippen: waarheid, definitie, van toepassing zijn op (satisfactie).

Ramsey's onderscheid is algemeen geaccepteerd, maar klopt het ook? ...

3. BELANG VAN DE PARADOXEN

1. De semantische paradoxen lijken een grens te stellen aan de mogelijkheid te denken *met absolute algemeenheid*. (Zelfs de uitspraak 'er is geen absoluut algemeen inzicht' probeert stiekem absoluut algemeen te zijn.)
2. De verzamelingstheoretische paradoxen zijn een obstakel voor het ontwikkelen van sterke systemen voor de grondslagen van de wiskunde.
3. De semantische paradoxen zijn een probleem voor de theoretische linguïstiek.
4. Als we de paradoxen temmen in een gecontroleerde omgeving dan komen er allerlei zeer nuttige dingen uit: recursie, Gödel's onvolledigheidsstellingen.
5. De paradoxen hebben een duidelijke entertainment waarde.

4. TARSKI OVER DE SEMANTISCHE PARADOXEN

The Semantic Conception of Truth van 1944 is een populaire expositie van *Der Wahrheitsbegriff in den Formalisierten Sprachen* uit 1935. Dat gaat weer terug op een artikel van 1933 in het Pools.

Op vele plaatsten kan een pdf van *Semantic Conception* worden gedownload.

Conventie of Criterium T: De zin "sneeuw is wit" is waar dan en slechts dan als sneeuw wit is. De zin X is waar dan en slechts dan als p .

Taal over taal: *Mention* (*suppositio materialis*) en *Use* (*suppositio formalis*).

4.1. **The White Knight.** '... The name of the song is called "Haddocks' Eyes."'

'Oh, that's the name of the song, is it?' Alice said, trying to feel interested.

'No, you don't understand,' the Knight said, looking a little vexed. 'That's what the name is called. The name really is "The Aged Aged Man."'

'Then I ought to have said "That's what the song is called"'? Alice corrected herself.

'No, you oughtn't: that's quite another thing! The song is called "Ways and Means": but that's only what it's called, you know!'

‘Well, what is the song, then?’ said Alice, who was by this time completely bewildered.

‘I was coming to that,’ the Knight said. ‘The song really is “A-sitting On A Gate”: and the tune’s my own invention.’

4.2. **Tarski’s Lijst van Verdachten 1.** Wat is verantwoordelijk voor de leugenaarsparadox?

- A. Zelfreferentie
- B. Logica
- C. Semantische Geslotenheid

Hoe weten we dat de lijst volledig is?

Problemen de keuze voor zelfreferentie:

- Het is erg moeilijk een voldoende omvattende definitie te geven van wat hier zelfreferentie betekent.
Denk aan de Yablo en de Grelling Paradox.
- Onproblematische voorbeelden van zelfreferentie.
Deze zin is kort. Er staat geen spelvaud in deze zin.

Veranderen van de logica: Tarski:

It would be superfluous to stress here the consequences of rejecting the assumption (II), that is, of changing our logic (supposing this were possible) even in its more elementary and fundamental parts.

Heer Bommel, De Achtgever:

Ping Po stelt vast dat alles, sleutel, schat, en I Oen, weg is. Maar de wijze kent geen boosheid. Heer Ollie vraagt hem wat de betekenis is van zijn repeterende zin: “De schat moet terugkomen, want anders . . .” Volgens de wijsgeer is dat duidelijk. Anders is de schat weg! “Is dat alles”?, vraagt Tom Poes. “Dat is alles, kunt u zich iets ergers bedenken?”

4.3. **Objecttaal en Metataal.** Tarski’s oplossing van de semantische paradoxen is: *geen semantisch gesloten talen gebruiken*. Dit betekent dat we onderscheiden tussen de taal waarin een waarheidsclaim gedaan wordt, *de metataal*, en de taal waarvoor we de waarheidsclaim doen: *de objecttaal*.

“Deze zin is onwaar” zou zowel tot de object en de metataal moeten horen.

Dit is dus niet een oplossing gestoeld op een diagnose, maar een ingenieursoplossing om de paradox te vermijden.

Het onderscheid tussen *mention* en *use* is dus iets heel anders dan het onderscheid tussen object- en metataal. “Deze zin is kort” kan heel goed in de objecttaal zitten.

4.4. **Vragen.** (†) Voor welke van de volgende zinnen is het onderscheid tussen objecttaal en metataal relevant?

- a. Jan heet “Jan”.
- b. “Jan” en Jan zijn beiden kort.

c. “Jan is niet “Jan”” is waar.

(†) Bezie de volgende zin.

Knip de knappe kapper knipt precies degenen die zichzelf niet knippen. Wie knipt Knip?

Hebben we hier te doen met een paradox? Zo nee, waarom niet? Zo ja, moeten we nu ter oplossing metakappers invoeren?

(†) Een kleine mention & use quiz. Laten we de naam van Netelenbos “Fluppie” noemen. Geef aan welke van de volgende uitspraken waar dan wel onwaar is.

- (1) Netelenbos heet Netelenbos.
- (2) Netelenbos heet “Netelenbos”.
- (3) Netelenbos heet Fluppie.
- (4) Netelenbos heet “Fluppie”.
- (5) Fluppie is “Netelenbos”.
- (6) “Netelenbos” heet ““Netelenbos””.
- (7) Fluppie heet ““Netelenbos””.
- (8) Fluppie heet “Fluppie”.
- (9) “Fluppie” is ““Netelenbos””.

4.5. **Conclusie.** Tarski’s ‘oplossing’ is een goede manier om de paradoxen te vermijden. Hij is echter niet overtuigend als filosofische oplossing omdat hij ons geen goed verhaal levert over wat er in de paradoxen aan de hand is.

De semantische paradoxen zullen ons nog wel even bezig houden. Elk jaar verschijnen er tientallen artikelen over dit onderwerp. Dat zal nog wel meer worden als de Chinezen en de Indiers er ook over gaan nadenken.

WIJSBEGEERTE, FACULTEIT GEESTESWETENSCHAPPEN, UNIVERSITEIT UTRECHT, JANSKERKHOF 13, 3512BL UTRECHT, THE NETHERLANDS

E-mail address: a.visser@uu.nl