

Analyse met infinitesimalen

Hans Vernaeve

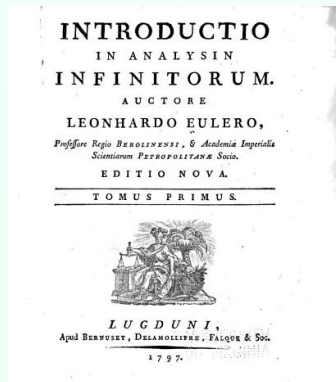
Universiteit Gent

Infinitesimalen in de 17de en 18de eeuw

Infinitesimalen = oneindig kleine getallen.

'Fysisch' hulpmiddel om eigenschappen van functies aan te tonen.

Gebruikt in de differentiaalrekening van Leibniz en Newton.



Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 1748.

Voorbeeld: de afgeleide van e^x

Voor een infinitesimaal dx geldt:

$$\frac{de^x}{dx}$$

Voorbeeld: de afgeleide van e^x

Voor een infinitesimaal dx geldt:

$$\frac{de^x}{dx} = \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx}$$

Voorbeeld: de afgeleide van e^x

Voor een infinitesimaal dx geldt:

$$\begin{aligned}\frac{de^x}{dx} &= \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} \\ &= \frac{e^x(e^{dx} - 1)}{dx}\end{aligned}$$

Voorbeeld: de afgeleide van e^x

Voor een infinitesimaal dx geldt:

$$\begin{aligned}\frac{de^x}{dx} &= \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} \\ &= \frac{e^x(e^{dx} - 1)}{dx} \\ &= e^x \frac{1 + dx + \frac{dx^2}{2} + \dots - 1}{dx}\end{aligned}$$

Voorbeeld: de afgeleide van e^x

Voor een infinitesimaal dx geldt:

$$\begin{aligned}\frac{de^x}{dx} &= \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} \\ &= \frac{e^x(e^{dx} - 1)}{dx} \\ &= e^x \frac{1 + dx + \frac{dx^2}{2} + \dots - 1}{dx} \\ &= e^x \left(1 + \frac{dx}{2} + \dots\right) = e^x\end{aligned}$$

Voorbeeld: de afgeleide van e^x

Voor een infinitesimaal dx geldt:

$$\begin{aligned}\frac{de^x}{dx} &= \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} \\ &= \frac{e^x(e^{dx} - 1)}{dx} \\ &= e^x \frac{1 + dx + \frac{dx^2}{2} + \dots - 1}{dx} \\ &= e^x \left(1 + \frac{dx}{2} + \dots\right) = e^x\end{aligned}$$

- eerste lijn: we delen door dx , dus $dx \neq 0$

Voorbeeld: de afgeleide van e^x

Voor een infinitesimaal dx geldt:

$$\begin{aligned}\frac{de^x}{dx} &= \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} \\ &= \frac{e^x(e^{dx} - 1)}{dx} \\ &= e^x \frac{1 + dx + \frac{dx^2}{2} + \dots - 1}{dx} \\ &= e^x \left(1 + \frac{dx}{2} + \dots\right) = e^x\end{aligned}$$

- eerste lijn: we delen door dx , dus $dx \neq 0$
- laatste lijn: we verwaarlozen dx , dus $dx = 0$.

De 19de eeuw: infinitesimalen verbannen

Wiskundige analyse werd ontwikkeld zonder infinitesimalen.



Bernard Bolzano (1781-1848)

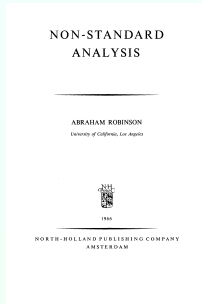


Karl Weierstrass (1815-1897)

f is continu in a als

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

De 20ste eeuw: infinitesimalen gefundeerd



Abraham Robinson, *Non-standard analysis*, 1966.

Robinson realiseert de *Droom van Leibniz*



Gottfried Wilhelm von Leibniz (brief aan Varignon, 1702):

- *Aan het getallenstelsel moeten oneindig kleine en oneindig grote ideale elementen toegevoegd worden*
- *In het uitgebreide getallenstelsel moeten dezelfde rekenkundige wetten gelden als in het gewone stelsel*

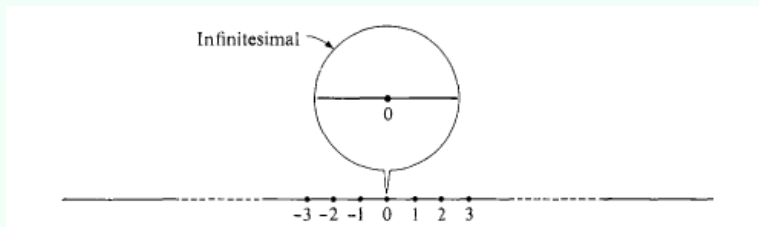
Robinson realiseert de *Droom van Leibniz*

Robinson construeert een uitbreiding ${}^*\mathbb{R}$ van $\mathbb{R}$ die infinitesimalen bevat:

Definitie

$x \in {}^*\mathbb{R}$ is **infinitesimaal** als $-r < x < r$ voor elke $r \in \mathbb{R}^+$.

Notatie: $x \approx 0$.



Notatie: $x \approx y$ betekent $x - y \approx 0$.

Robinson realiseert de *Droom van Leibniz*

Overdrachtsprincipe

Rekenregels voor reële getallen blijven gelden voor hyperreële getallen.

Voorbeelden

$$(\forall x)(x^2 \geq 0)$$

$$(\forall x, y)((x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0 \iff x = y = 1)$$

$$(\forall x)(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(xy = 1))$$

$$(\forall x)(|\sin x| \leq |x|)$$

$$(\forall x, y)(e^{x+y} = e^x e^y)$$

Robinson realiseert de *Droom van Leibniz*

Overdrachtsprincipe

Rekenregels voor reële getallen blijven gelden voor hyperreële getallen.

Voorbeelden

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})((x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0 \iff x = y = 1)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R})(xy = 1))$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(|\sin x| \leq |x|)$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(e^{x+y} = e^x e^y)$$

Robinson realiseert de *Droom van Leibniz*

Overdrachtsprincipe

Rekenregels voor reële getallen blijven gelden voor hyperreële getallen.

Voorbeelden

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(x^2 \geq 0)$$

$$(\forall x, y \in {}^*\mathbb{R})((x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \iff x = y = 1)$$

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in {}^*\mathbb{R})(xy = 1))$$

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(|\sin x| \leq |x|)$$

$$(\forall x, y \in {}^*\mathbb{R})(e^{x+y} = e^x e^y)$$

→ hyperreële getallen hebben zelfde *look and feel* als reële getallen

Voorbeeld: de afgeleide van e^x (nogmaals)

Voor een infinitesimaal dx geldt:

$$\begin{aligned}\frac{de^x}{dx} &= \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} \\ &= \frac{e^x(e^{dx} - 1)}{dx} \\ &= e^x \frac{1 + dx + \frac{dx^2}{2} + \dots - 1}{dx} \\ &= e^x \left(1 + \frac{dx}{2} + \dots\right) = e^x\end{aligned}$$

Voorbeeld: de afgeleide van e^x (nogmaals)

Voor een infinitesimaal $dx \neq 0$ geldt:

$$\begin{aligned}\frac{de^x}{dx} &= \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} \\ &= \frac{e^x(e^{dx} - 1)}{dx} \\ &= e^x \frac{1 + dx + \frac{dx^2}{2} + \dots - 1}{dx} \\ &= e^x \left(1 + \frac{dx}{2} + \dots\right) \approx e^x\end{aligned}$$

In niet-standaard analyse is $(e^x)' = \text{st}\left(\frac{de^x}{dx}\right)$, het unieke reëel getal $\approx \frac{de^x}{dx}$.

Infinitesimale karakterisering van continuïteit

Stelling

f is continu in $a \iff (\forall x \approx a) f(x) \approx f(a)$.

Bewijs.



Infinitesimale karakterisering van continuïteit

Stelling

f is continu in $a \iff (\forall x \approx a) f(x) \approx f(a)$.

Bewijs.

$\Rightarrow$: kies $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Bij definitie bestaat $\delta \in \mathbb{R}^+$ waarvoor

$$(\forall x \in \mathbb{R})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$



Infinitesimale karakterisering van continuïteit

Stelling

f is continu in $a \iff (\forall x \approx a) f(x) \approx f(a)$.

Bewijs.

$\Rightarrow$: kies $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Bij definitie bestaat $\delta \in \mathbb{R}^+$ waarvoor

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$



Infinitesimale karakterisering van continuïteit

Stelling

f is continu in $a \iff (\forall x \approx a) f(x) \approx f(a)$.

Bewijs.

$\Rightarrow$: kies $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Bij definitie bestaat $\delta \in \mathbb{R}^+$ waarvoor

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Als nu $x \approx a$, dan is $|x - a| < \delta$



Infinitesimale karakterisering van continuïteit

Stelling

f is continu in $a \iff (\forall x \approx a) f(x) \approx f(a)$.

Bewijs.

$\Rightarrow$: kies $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Bij definitie bestaat $\delta \in \mathbb{R}^+$ waarvoor

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Als nu $x \approx a$, dan is $|x - a| < \delta$, en dus ook $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.



Infinitesimale karakterisering van continuïteit

Stelling

f is continu in $a \iff (\forall x \approx a) f(x) \approx f(a)$.

Bewijs.

$\Rightarrow$: kies $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Bij definitie bestaat $\delta \in \mathbb{R}^+$ waarvoor

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Als nu $x \approx a$, dan is $|x - a| < \delta$, en dus ook $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

We hebben dus bewezen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\forall x \approx a) |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.



Infinitesimale karakterisering van continuïteit

Stelling

f is continu in $a \iff (\forall x \approx a) f(x) \approx f(a)$.

Bewijs.

$\Rightarrow$: kies $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Bij definitie bestaat $\delta \in \mathbb{R}^+$ waarvoor

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Als nu $x \approx a$, dan is $|x - a| < \delta$, en dus ook $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

We hebben dus bewezen: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\forall x \approx a) |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

M.a.w., $(\forall x \approx a) f(x) \approx f(a)$. □

Infinitesimale karakterisering van continuïteit

Stelling

f is continu in $a \iff (\forall x \approx a) f(x) \approx f(a)$.

Bewijs.

$\Leftarrow$: kies $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Nu moeten we bewijzen dat

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$



Infinitesimale karakterisering van continuïteit

Stelling

f is continu in $a \iff (\forall x \approx a) f(x) \approx f(a)$.

Bewijs.

$\Leftarrow$: kies $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Nu moeten we bewijzen dat

$$(\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}^+)(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$



Infinitesimale karakterisering van continuïteit

Stelling

f is continu in $a \iff (\forall x \approx a) f(x) \approx f(a)$.

Bewijs.

$\Leftarrow$: kies $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Nu moeten we bewijzen dat

$$(\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}^+)(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Dit is vervuld, want kies willekeurig $\delta \approx 0$, $\delta > 0$. Als dan $|x - a| < \delta$, dan is $x \approx a$ □

Infinitesimale karakterisering van continuïteit

Stelling

f is continu in $a \iff (\forall x \approx a) f(x) \approx f(a)$.

Bewijs.

$\Leftarrow$: kies $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Nu moeten we bewijzen dat

$$(\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}^+)(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Dit is vervuld, want kies willekeurig $\delta \approx 0$, $\delta > 0$. Als dan $|x - a| < \delta$, dan is $x \approx a$, en dus ook $f(x) \approx f(a)$. □

Infinitesimale karakterisering van continuïteit

Stelling

f is continu in $a \iff (\forall x \approx a) f(x) \approx f(a)$.

Bewijs.

$\Leftarrow$: kies $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Nu moeten we bewijzen dat

$$(\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}^+)(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Dit is vervuld, want kies willekeurig $\delta \approx 0$, $\delta > 0$. Als dan $|x - a| < \delta$, dan is $x \approx a$, en dus ook $f(x) \approx f(a)$. I.h.b. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. □

Vanwaar de benaming *niet-standaard* analyse?

- Modeltheorie = deel van de logica.
- Bestudeert welke wiskundige structuren (*modellen*) aan een gegeven stel axioma's voldoen.

Vanwaar de benaming *niet-standaard* analyse?

- Modeltheorie = deel van de logica.
- Bestudeert welke wiskundige structuren (*modellen*) aan een gegeven stel axioma's voldoen.

Voorbeeld (Axioma's van het euclidisch vlak)

- Door iedere twee verschillende punten gaat een rechte.
- Ieder lijnstuk kan verlengd worden tot een rechte.
- Er bestaat een cirkel met een gegeven lijnstuk als straal en een van de eindpunten als middelpunt.
- Alle rechte hoeken zijn gelijk.
- Gegeven een rechte L en een punt p niet op L gelegen, bestaat er juist één rechte door p die L niet snijdt (*parallelpostulaat*).

Vanwaar de benaming *niet-standaard* analyse?

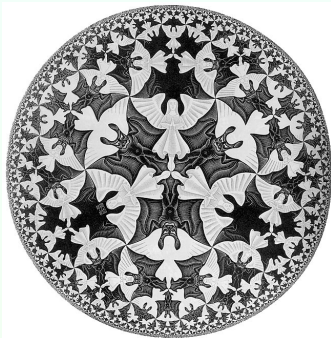
- Door iedere twee verschillende punten gaat een rechte.
- Ieder lijnstuk kan verlengd worden tot een rechte.
- Er bestaat een cirkel met een gegeven lijnstuk als straal en een van de eindpunten als middelpunt.
- Alle rechte hoeken zijn gelijk.

Klassieke vlakke meetkunde = een *model* voor dit axiomastelsel.

Vanwaar de benaming *niet-standaard* analyse?

- Door iedere twee verschillende punten gaat een rechte.
- Ieder lijnstuk kan verlengd worden tot een rechte.
- Er bestaat een cirkel met een gegeven lijnstuk als straal en een van de eindpunten als middelpunt.
- Alle rechte hoeken zijn gelijk.

Klassieke vlakke meetkunde = een *model* voor dit axiomastelsel.

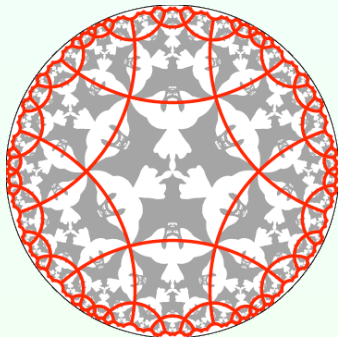


Er bestaan andere modellen!
Bijv.: hyperbolische meetkunde
(Gauss - Bolyai - Lobachevsky,
1824–1832)

Vanwaar de benaming *niet-standaard* analyse?

- Door iedere twee verschillende punten gaat een rechte.
- Ieder lijnstuk kan verlengd worden tot een rechte.
- Er bestaat een cirkel met een gegeven lijnstuk als straal en een van de eindpunten als middelpunt.
- Alle rechte hoeken zijn gelijk.

Klassieke vlakke meetkunde = een *model* voor dit axiomastelsel.

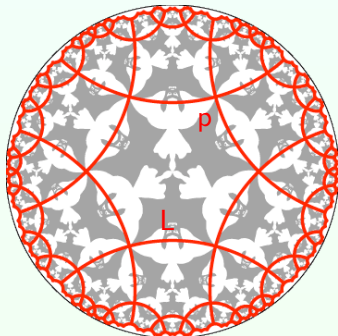


Er bestaan andere modellen!
Bijv.: hyperbolische meetkunde
(Gauss - Bolyai - Lobachevsky,
1824–1832)

Vanwaar de benaming *niet-standaard* analyse?

- Door iedere twee verschillende punten gaat een rechte.
- Ieder lijnstuk kan verlengd worden tot een rechte.
- Er bestaat een cirkel met een gegeven lijnstuk als straal en een van de eindpunten als middelpunt.
- Alle rechte hoeken zijn gelijk.

Klassieke vlakke meetkunde = een *model* voor dit axiomastelsel.



Er bestaan andere modellen!
Bijv.: hyperbolische meetkunde
(Gauss - Bolyai - Lobachevsky,
1824–1832)

Vanwaar de benaming *niet-standaard* analyse?

Niet-standaard model = een ander model van een axiomastelsel dan het model dat men oorspronkelijk voor ogen had

Vanwaar de benaming *niet-standaard* analyse?

Niet-standaard model = een ander model van een axiomastelsel dan het model dat men oorspronkelijk voor ogen had

Voorbeelden

- De hyperbolische meetkunde is een *niet-standaard* model van de axioma's van Euclides (zonder parallellenpostulaat)

Vanwaar de benaming *niet-standaard* analyse?

Niet-standaard model = een ander model van een axiomastelsel dan het model dat men oorspronkelijk voor ogen had

Voorbeelden

- De hyperbolische meetkunde is een *niet-standaard* model van de axioma's van Euclides (zonder parallellenpostulaat)
- ${}^*\mathbb{R}$ is een *niet-standaard* model van $\mathbb{R}$

Euler's afleiding van $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$(a \in \mathbb{R}, a > 1, x \in \mathbb{R})$

Zij $\varepsilon \approx 0$, zodat $a^\varepsilon = 1 + \delta$ voor een zekere $\delta \approx 0$.

Euler's afleiding van $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$(a \in \mathbb{R}, a > 1, x \in \mathbb{R})$

Zij $\varepsilon \approx 0$, zodat $a^\varepsilon = 1 + \delta$ voor een zekere $\delta \approx 0$. [a^x cnt. $\Rightarrow a^\varepsilon \approx a^0 = 1$]

Euler's afleiding van $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$(a \in \mathbb{R}, a > 1, x \in \mathbb{R})$

Zij $\varepsilon \approx 0$, zodat $a^\varepsilon = 1 + \delta$ voor een zekere $\delta \approx 0$. [a^x cnt. $\Rightarrow a^\varepsilon \approx a^0 = 1$]

Stel $\delta = k\varepsilon$. Dan is $a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon$.

Euler's afleiding van $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$(a \in \mathbb{R}, a > 1, x \in \mathbb{R})$

Zij $\varepsilon \approx 0$, zodat $a^\varepsilon = 1 + \delta$ voor een zekere $\delta \approx 0$. [a^x cnt. $\Rightarrow a^\varepsilon \approx a^0 = 1$]

Stel $\delta = k\varepsilon$. Dan is $a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon$.

Stel nu $\omega = \frac{x}{\varepsilon}$. Vermits $\varepsilon \approx 0$, is ω oneindig groot.

Euler's afleiding van $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$(a \in \mathbb{R}, a > 1, x \in \mathbb{R})$

Zij $\varepsilon \approx 0$, zodat $a^\varepsilon = 1 + \delta$ voor een zekere $\delta \approx 0$. [a^x cnt. $\Rightarrow a^\varepsilon \approx a^0 = 1$]

Stel $\delta = k\varepsilon$. Dan is $a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon$.

Stel nu $\omega = \frac{x}{\varepsilon}$. Vermits $\varepsilon \approx 0$, is ω oneindig groot. Dan is

$$a^x = a^{\varepsilon\omega} = (a^\varepsilon)^\omega = (1 + k\varepsilon)^\omega = \left(1 + \frac{kx}{\omega}\right)^\omega$$

Euler's afleiding van $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$(a \in \mathbb{R}, a > 1, x \in \mathbb{R})$

Zij $\varepsilon \approx 0$, zodat $a^\varepsilon = 1 + \delta$ voor een zekere $\delta \approx 0$. [a^x cnt. $\Rightarrow a^\varepsilon \approx a^0 = 1$]

Stel $\delta = k\varepsilon$. Dan is $a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon$.

Stel nu $\omega = \frac{x}{\varepsilon}$. Vermits $\varepsilon \approx 0$, is ω oneindig groot. Dan is

$$\begin{aligned} a^x &= a^{\varepsilon\omega} = (a^\varepsilon)^\omega = (1 + k\varepsilon)^\omega = \left(1 + \frac{kx}{\omega}\right)^\omega \\ &= 1 + \omega \frac{kx}{\omega} + \binom{\omega}{2} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^2 + \dots + \binom{\omega}{n} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^n + \dots \end{aligned}$$

Euler's afleiding van $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$(a \in \mathbb{R}, a > 1, x \in \mathbb{R})$

Zij $\varepsilon \approx 0$, zodat $a^\varepsilon = 1 + \delta$ voor een zekere $\delta \approx 0$. [a^x cnt. $\Rightarrow a^\varepsilon \approx a^0 = 1$]

Stel $\delta = k\varepsilon$. Dan is $a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon$.

Stel nu $\omega = \frac{x}{\varepsilon}$. Vermits $\varepsilon \approx 0$, is ω oneindig groot. Dan is

$$\begin{aligned} a^x &= a^{\varepsilon\omega} = (a^\varepsilon)^\omega = (1 + k\varepsilon)^\omega = \left(1 + \frac{kx}{\omega}\right)^\omega \\ &= 1 + \omega \frac{kx}{\omega} + \binom{\omega}{2} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^2 + \dots + \binom{\omega}{n} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^n + \dots \\ &= 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{k^n x^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

want

$$\binom{\omega}{n} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^n = \frac{\omega!}{(\omega - n)! n!} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^n = \frac{\omega(\omega - 1) \dots (\omega - n + 1)}{n!} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^n$$

Euler's afleiding van $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$(a \in \mathbb{R}, a > 1, x \in \mathbb{R})$

Zij $\varepsilon \approx 0$, zodat $a^\varepsilon = 1 + \delta$ voor een zekere $\delta \approx 0$. [a^x cnt. $\Rightarrow a^\varepsilon \approx a^0 = 1$]

Stel $\delta = k\varepsilon$. Dan is $a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon$.

Stel nu $\omega = \frac{x}{\varepsilon}$. Vermits $\varepsilon \approx 0$, is ω oneindig groot. Dan is

$$\begin{aligned} a^x &= a^{\varepsilon\omega} = (a^\varepsilon)^\omega = (1 + k\varepsilon)^\omega = \left(1 + \frac{kx}{\omega}\right)^\omega \\ &= 1 + \omega \frac{kx}{\omega} + \binom{\omega}{2} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^2 + \dots + \binom{\omega}{n} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^n + \dots \\ &= 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{k^n x^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

want

$$\begin{aligned} \binom{\omega}{n} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^n &= \frac{\omega!}{(\omega - n)! n!} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^n = \frac{\omega(\omega - 1) \dots (\omega - n + 1)}{n!} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^n \\ &= \frac{\omega}{\omega} \frac{\omega - 1}{\omega} \dots \frac{\omega - n + 1}{\omega} \frac{(kx)^n}{n!} \end{aligned}$$

Euler's afleiding van $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$(a \in \mathbb{R}, a > 1, x \in \mathbb{R})$

Zij $\varepsilon \approx 0$, zodat $a^\varepsilon = 1 + \delta$ voor een zekere $\delta \approx 0$. [a^x cnt. $\Rightarrow a^\varepsilon \approx a^0 = 1$]

Stel $\delta = k\varepsilon$. Dan is $a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon$.

Stel nu $\omega = \frac{x}{\varepsilon}$. Vermits $\varepsilon \approx 0$, is ω oneindig groot. Dan is

$$\begin{aligned} a^x &= a^{\varepsilon\omega} = (a^\varepsilon)^\omega = (1 + k\varepsilon)^\omega = \left(1 + \frac{kx}{\omega}\right)^\omega \\ &= 1 + \omega \frac{kx}{\omega} + \binom{\omega}{2} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^2 + \dots + \binom{\omega}{n} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^n + \dots \\ &= 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{k^n x^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

want

$$\begin{aligned} \binom{\omega}{n} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^n &= \frac{\omega!}{(\omega - n)! n!} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^n = \frac{\omega(\omega - 1) \dots (\omega - n + 1)}{n!} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^n \\ &= \frac{\omega}{\omega} \frac{\omega - 1}{\omega} \dots \frac{\omega - n + 1}{\omega} \frac{(kx)^n}{n!} = 1 \dots 1 \cdot \frac{(kx)^n}{n!} \end{aligned}$$

Euler's afleiding van $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$(a \in \mathbb{R}, a > 1, x \in \mathbb{R})$

Zij $\varepsilon \approx 0$, zodat $a^\varepsilon = 1 + \delta$ voor een zekere $\delta \approx 0$. [a^x cnt. $\Rightarrow a^\varepsilon \approx a^0 = 1$]

Stel $\delta = k\varepsilon$. Dan is $a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon$.

Stel nu $\omega = \frac{x}{\varepsilon}$. Vermits $\varepsilon \approx 0$, is ω oneindig groot. Dan is

$$\begin{aligned} a^x &= a^{\varepsilon\omega} = (a^\varepsilon)^\omega = (1 + k\varepsilon)^\omega = \left(1 + \frac{kx}{\omega}\right)^\omega \\ &= 1 + \omega \frac{kx}{\omega} + \binom{\omega}{2} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^2 + \dots + \binom{\omega}{n} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^n + \dots \\ &= 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{k^n x^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

Vermits a willekeurig is, kunnen we a zo kiezen dat $k = 1$

Euler's afleiding van $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$(a \in \mathbb{R}, a > 1, x \in \mathbb{R})$

Zij $\varepsilon \approx 0$, zodat $a^\varepsilon = 1 + \delta$ voor een zekere $\delta \approx 0$. [a^x cnt. $\Rightarrow a^\varepsilon \approx a^0 = 1$]

Stel $\delta = k\varepsilon$. Dan is $a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon$.

Stel nu $\omega = \frac{x}{\varepsilon}$. Vermits $\varepsilon \approx 0$, is ω oneindig groot. Dan is

$$\begin{aligned} a^x &= a^{\varepsilon\omega} = (a^\varepsilon)^\omega = (1 + k\varepsilon)^\omega = \left(1 + \frac{kx}{\omega}\right)^\omega \\ &= 1 + \omega \frac{kx}{\omega} + \binom{\omega}{2} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^2 + \dots + \binom{\omega}{n} \left(\frac{kx}{\omega}\right)^n + \dots \\ &= 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{k^n x^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

Vermits a willekeurig is, kunnen we a zo kiezen dat $k = 1$, d.w.z.

$$a = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \dots = 2.71828182845904523536028 \dots$$

Voor dit getal zullen we het symbool e gebruiken.