



Krommen tekenen met de lat

Nationale WiskundeDagen Nederland 1 februari 2014

Michel Roelens

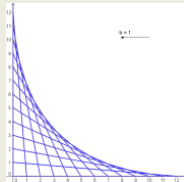
- KHLim Lerarenopleiding secundair onderwijs Diepenbeek
- Maria Boodschaplyceum, Brussel
- Redactie UITWISKELING, al 30 jaar!

Overzicht omhullenden

1. Foto



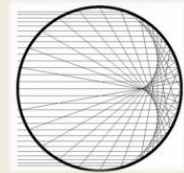
2. Tekening



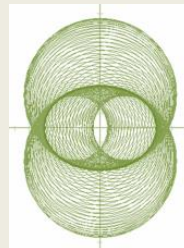
3. Ladder



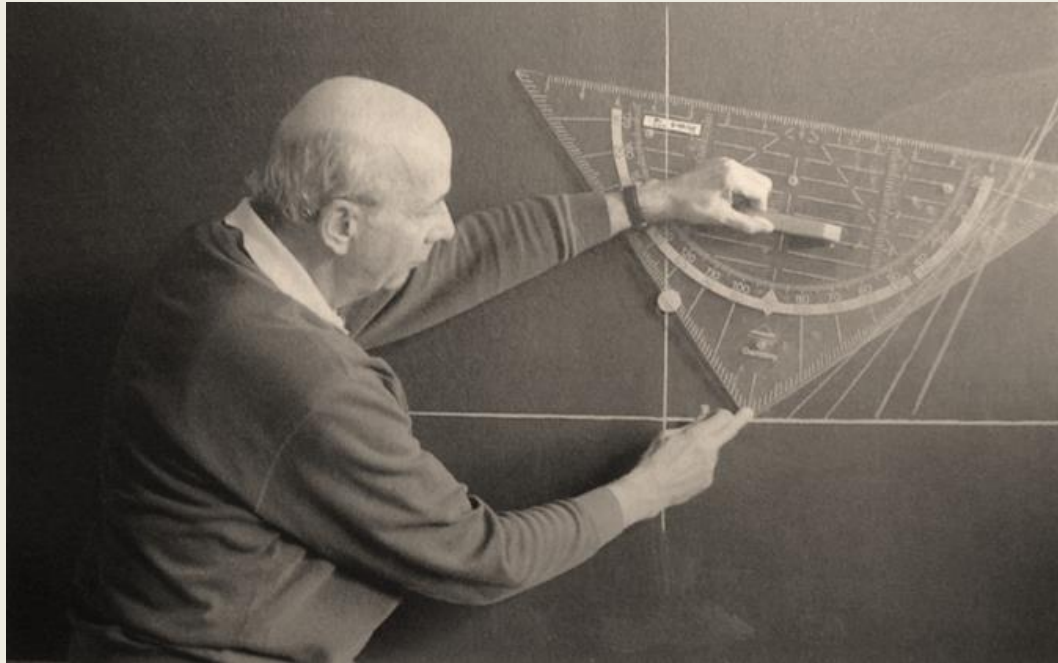
4. Kop koffie



5. Theorie?



Foto



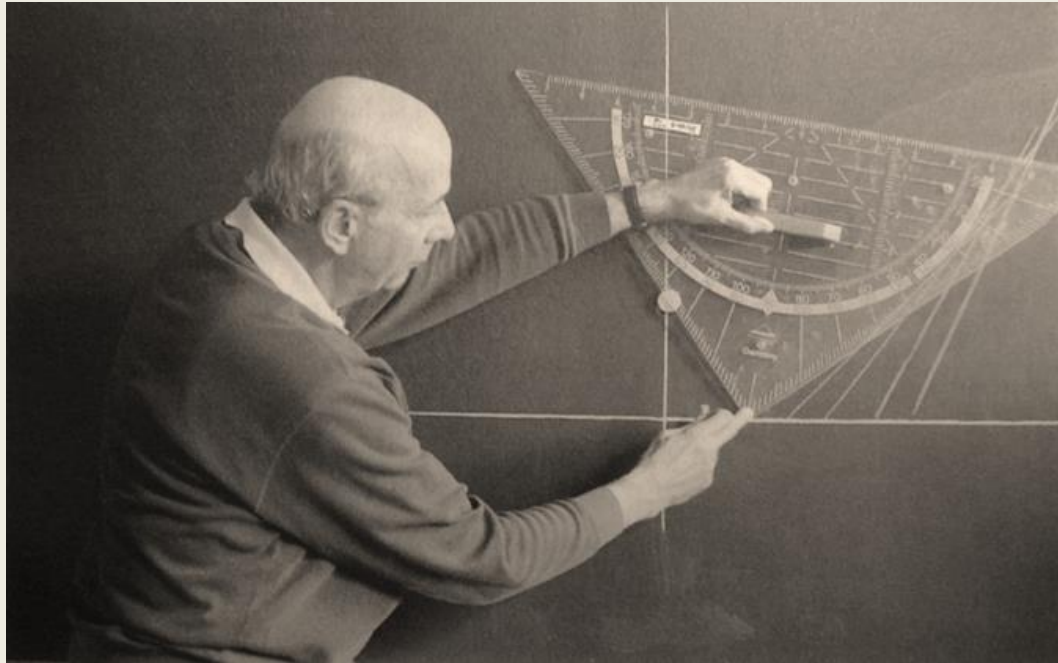
Waarom is dit een mooie foto?

Wie is het?

Günter Steinberg, 1933-2011



Foto



Doe hem na, op papier.

Waar wil hij naartoe?

Foto

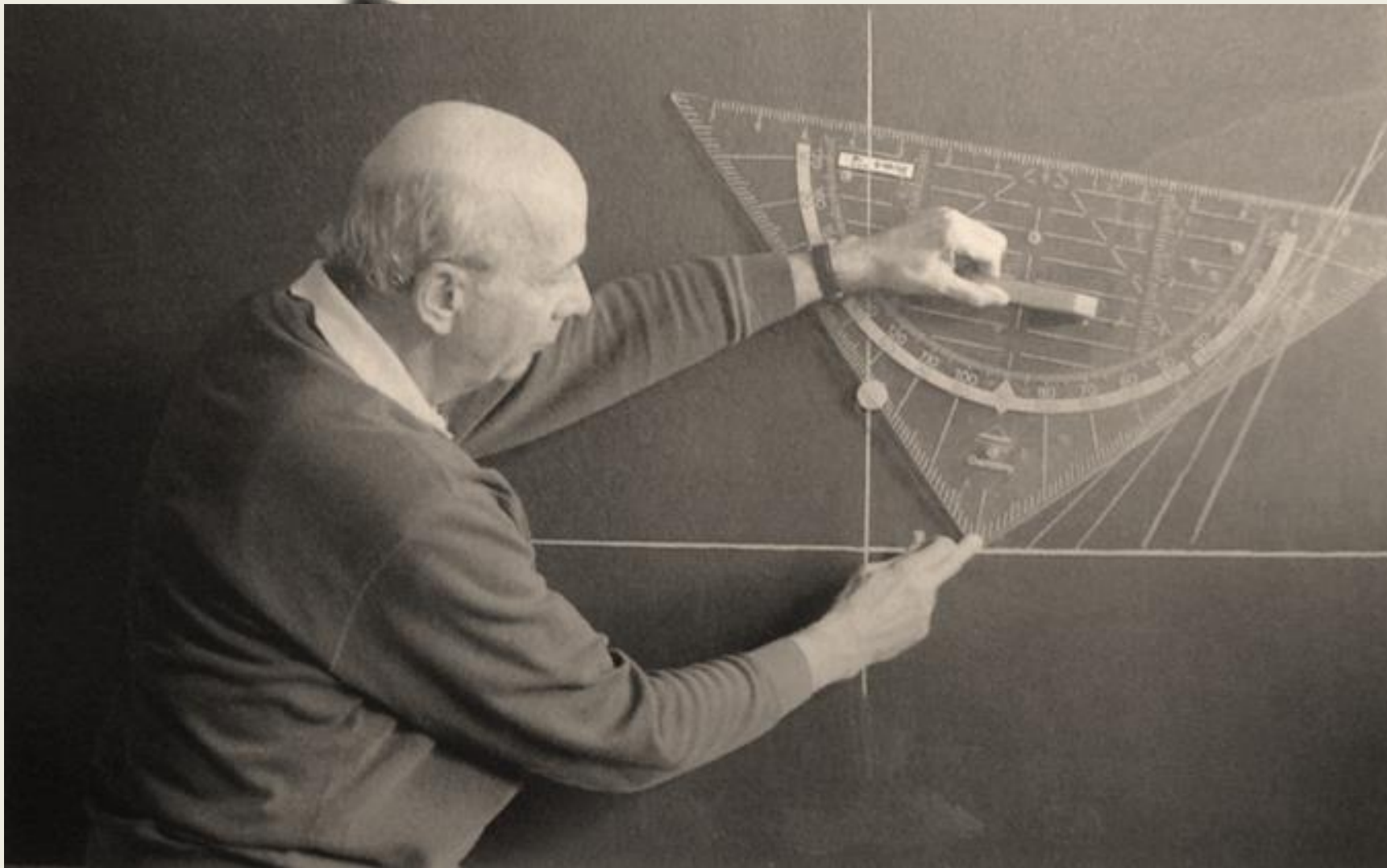


Foto: vergelijkingen van de rechten

$$A(0, 1)$$

$$P(p, 0)$$

Helling van AP is $-\frac{1}{p}$

Helling van l_p is p

$$l_p: y = p(x - p)$$

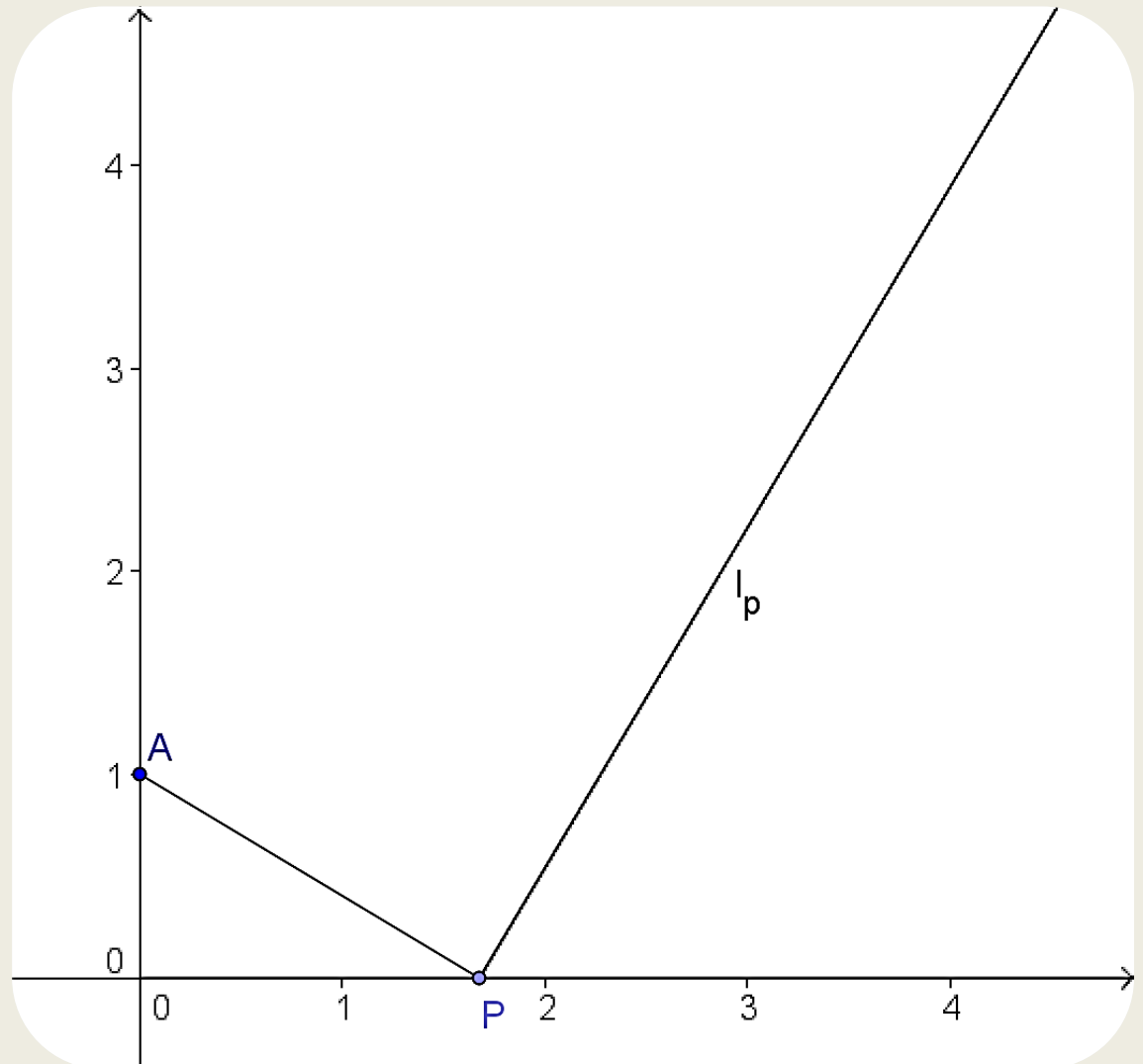


Foto: vergelijkingen van de rechten

$$A(0, 1)$$

$$P(p, 0)$$

Helling van AP is $-\frac{1}{p}$

Helling van l_p is p

$$l_p: y = p(x - p)$$

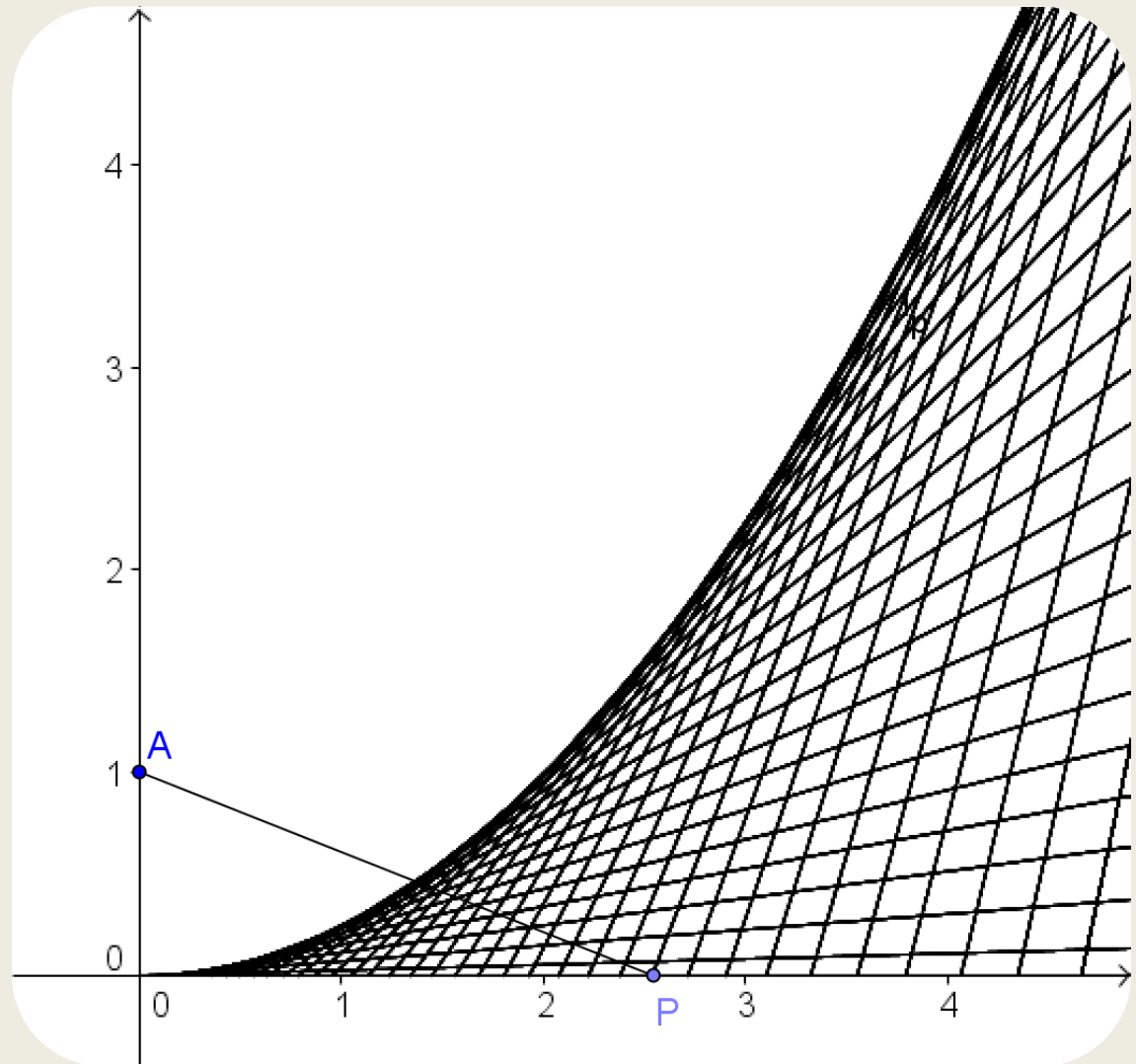


Foto: vergelijking van de omhullende?

- **Eerste idee: snijpunten van 'naburige' rechten**

Maar: de rechten vormen geen 'discrete' familie

Dus: snijpunt van l_p en $l_{p+\Delta p}$
 dan overstappen op de limiet voor $\Delta p \rightarrow 0$

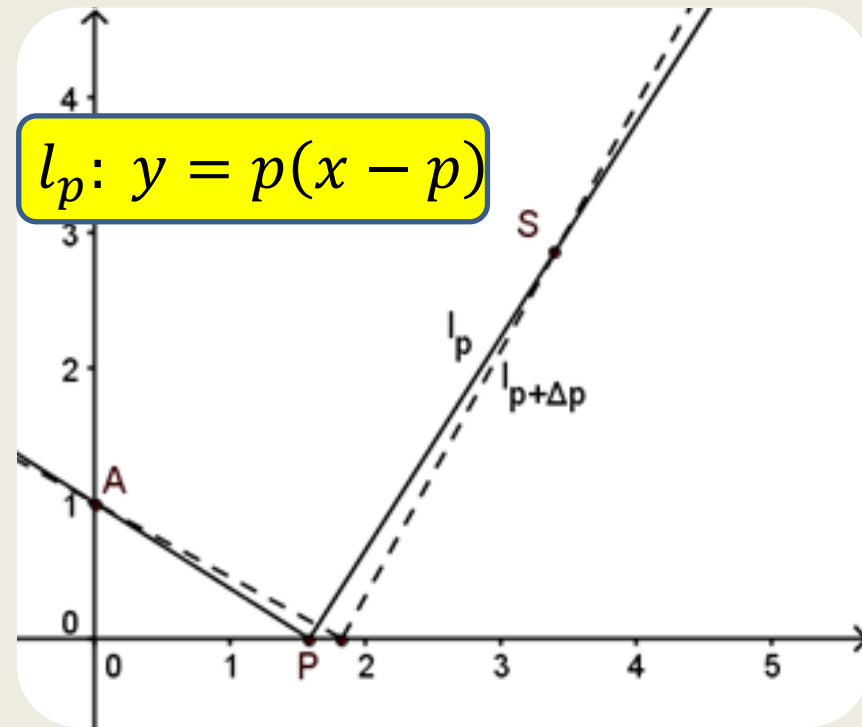


Foto: vergelijking van de omhullende?

$$S_{p,\Delta p}: \begin{cases} y = p(x - p) \\ y = (p + \Delta p)(x - (p + \Delta p)) \end{cases}$$

Dit stelsel oplossen naar x en y :

$$S_{p,\Delta p}: \begin{cases} x = 2p + \Delta p \\ y = p^2 + p\Delta p \end{cases}$$

In de limiet voor $\Delta p \rightarrow 0$:

$$T_p: \begin{cases} x = 2p \\ y = p^2 \end{cases}$$

Elimineer p :

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

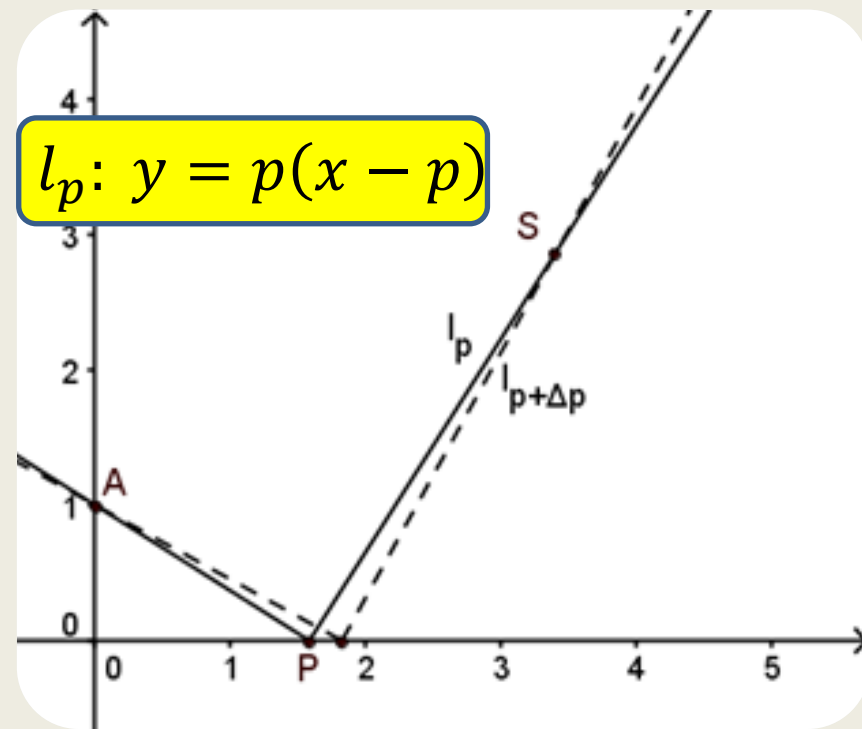


Foto: vergelijking van de omhullende?

(Halve) parabool!

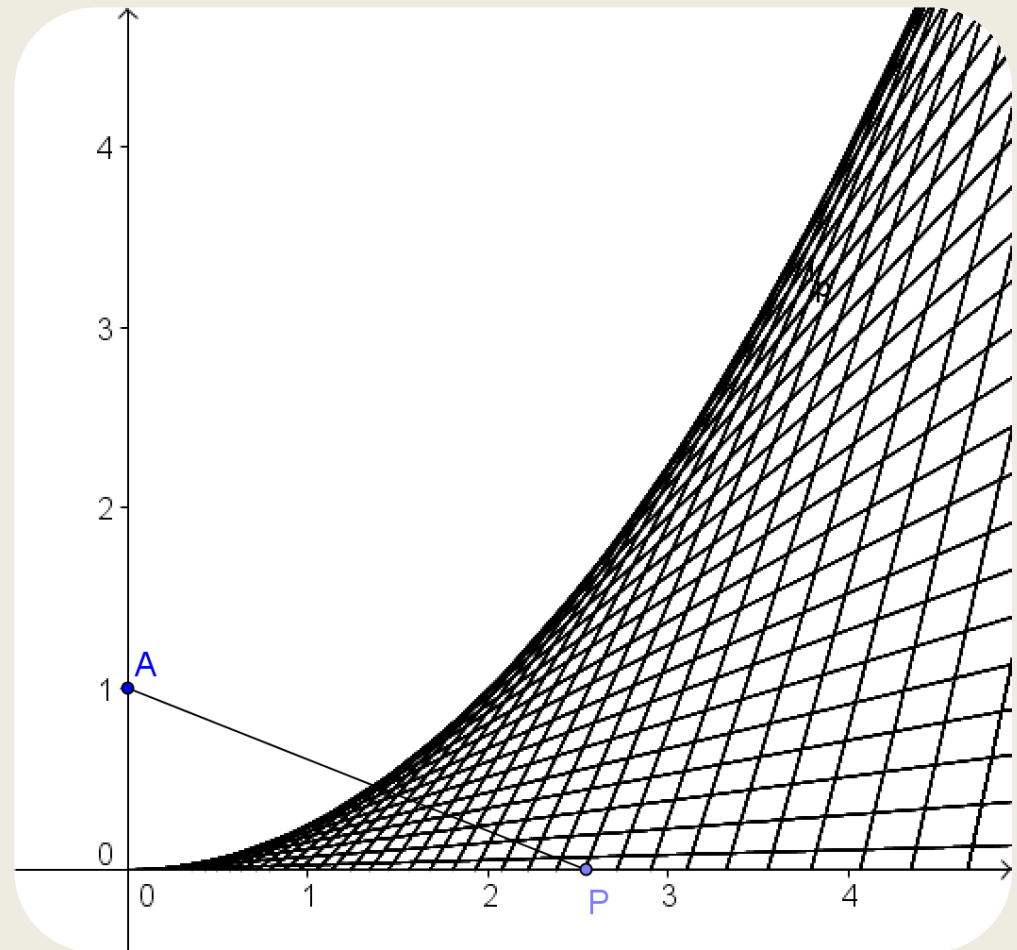


Foto: vergelijking van de omhullende?

- Tweede idee: smal verticaal venster

Punt x_0 op de x -as

De raaklijn in (x_0, y_0) is de rechte $l_p: y = f(x, p)$ waarvoor $f(x_0, p)$ maximaal is.

Dus:

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x_0, p) = 0$$

$$(x_0 - p) + p(-1) = 0$$

$$x_0 - 2p = 0$$

$$p = \frac{x_0}{2}$$

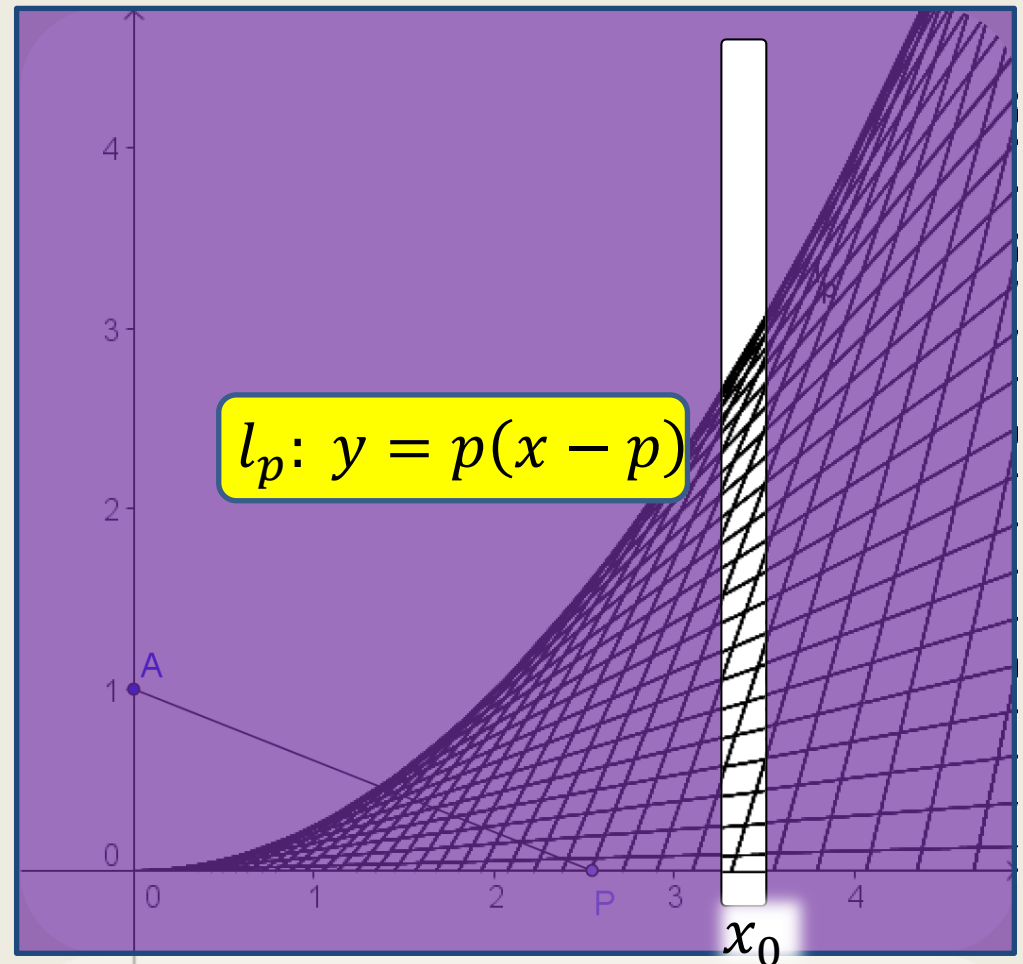


Foto: vergelijking van de omhullende?

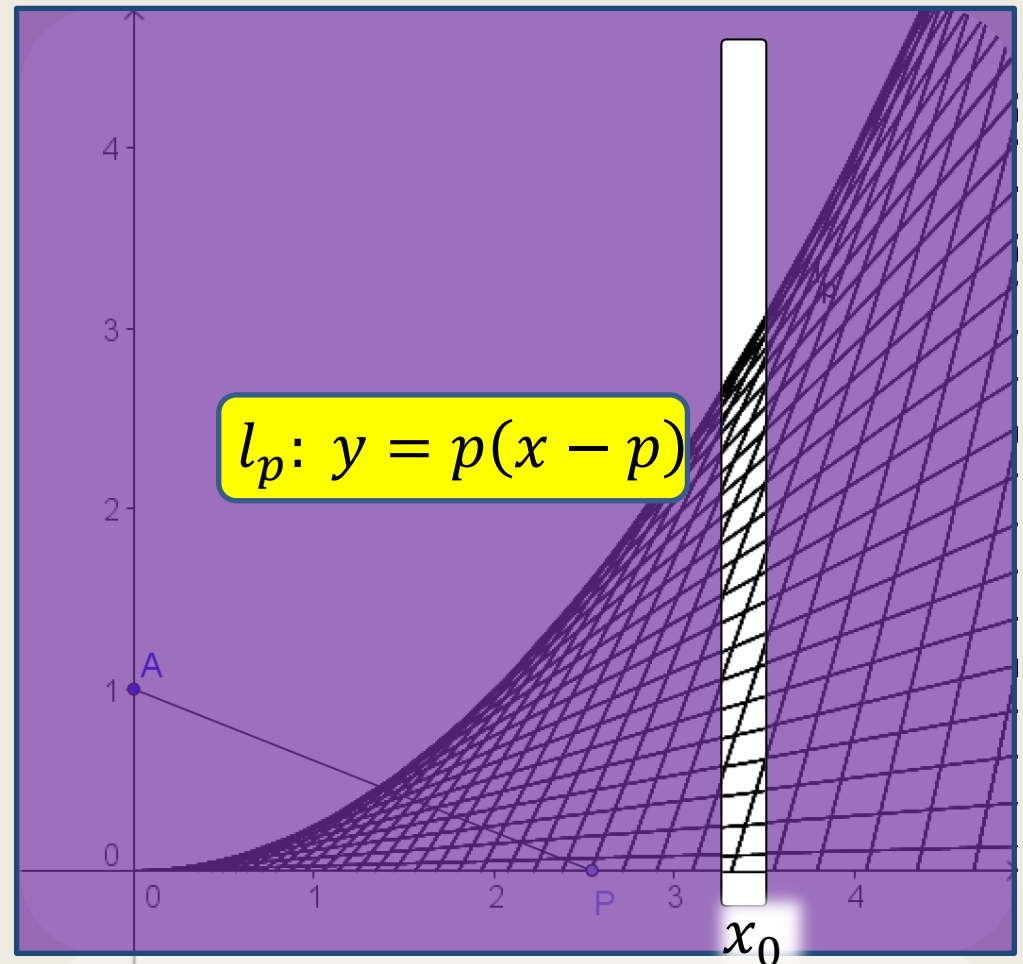
- Tweede idee: smal verticaal venster

$$p = \frac{x_0}{2}$$

y-waarde van de omhullende
bij x_0

$$\begin{aligned} &= f\left(x_0, \frac{x_0}{2}\right) \\ &= \frac{x_0}{2} \left(x_0 - \frac{x_0}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} x_0^2 \end{aligned}$$

Omhullende: $y = \frac{x^2}{4}$



De twee ideeën vergelijken

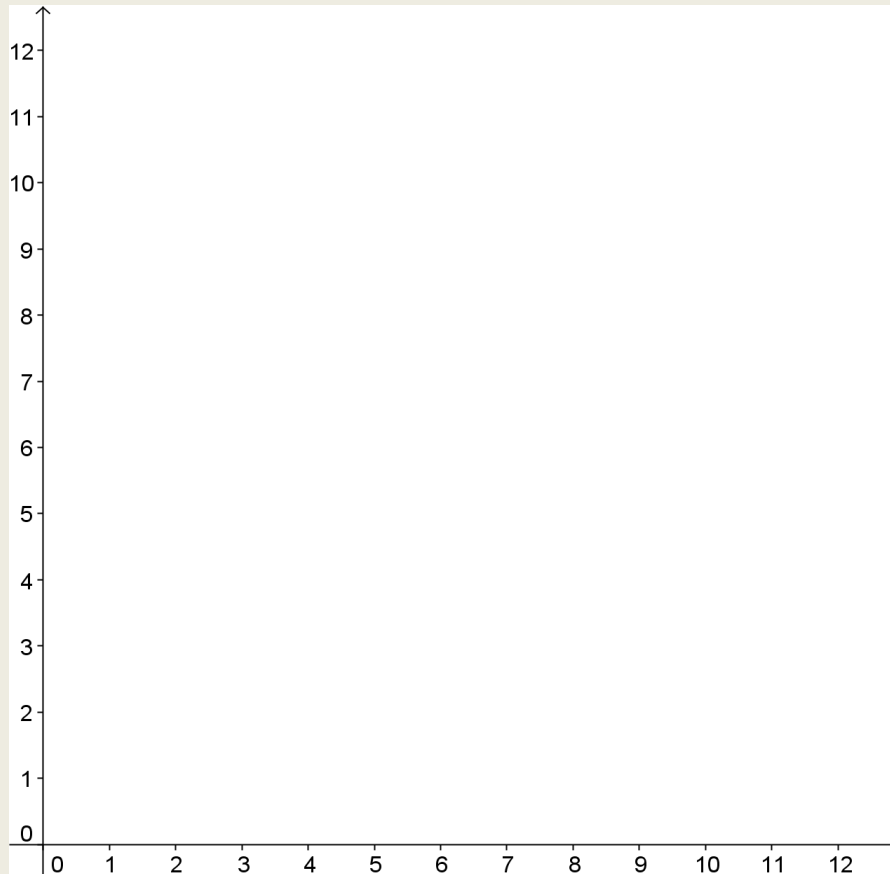
$$\begin{cases} f(x, p) = f(x, p + \Delta p) \\ y = f(x, p) \end{cases} \longrightarrow \Delta p \rightarrow 0 \longrightarrow \text{elimineer } p$$

$$\begin{cases} \frac{f(x, p + \Delta p) - f(x, p)}{\Delta p} = 0 \\ y = f(x, p) \end{cases} \xrightarrow{\Delta p \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial p} f(x, p) = 0 \\ y = f(x, p) \end{cases} \longrightarrow \text{elimineer } p$$

Twee keer hetzelfde?

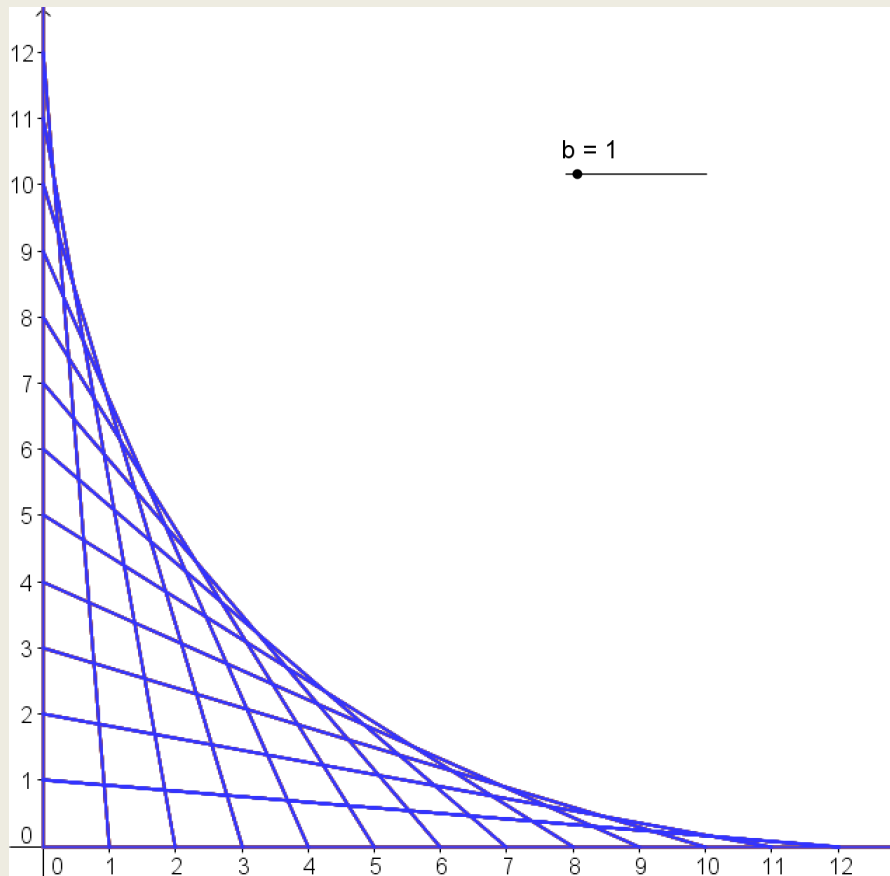
Tekening

Verbind het eerste punt (1) van een as met het laatste (12) van de andere, het tweede (2) met het voorlaatste (11), enz.



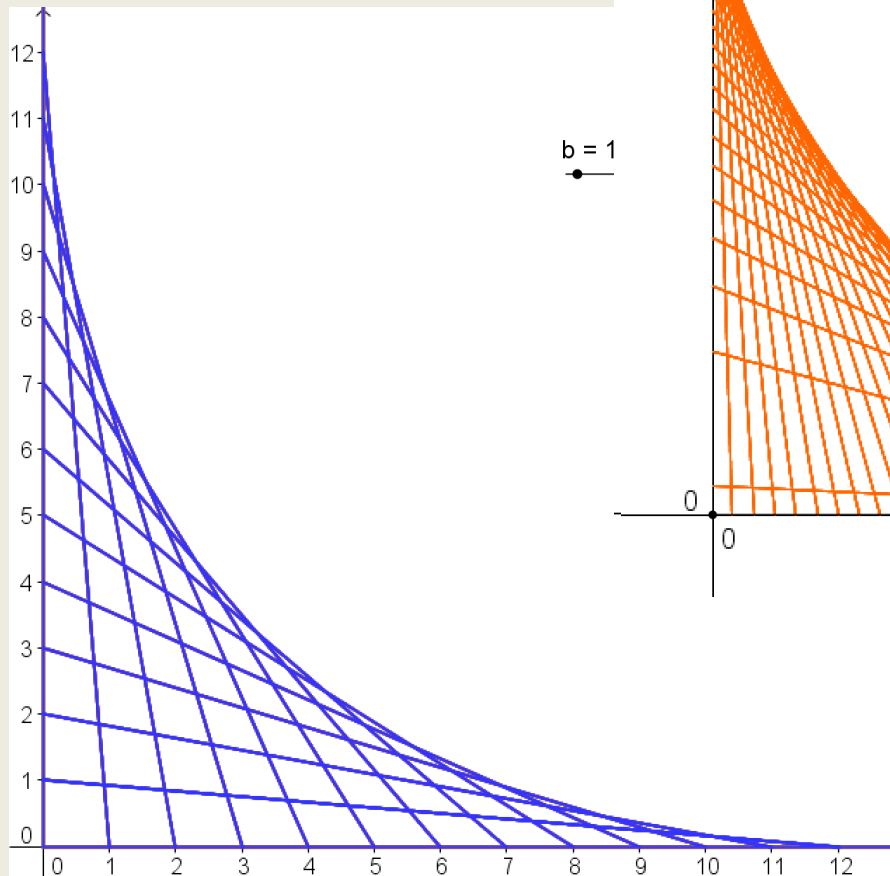
Tekening

We verbinden $(n, 0)$ met $(0, 13 - n)$, voor $n = 0, 1, \dots, 13$.

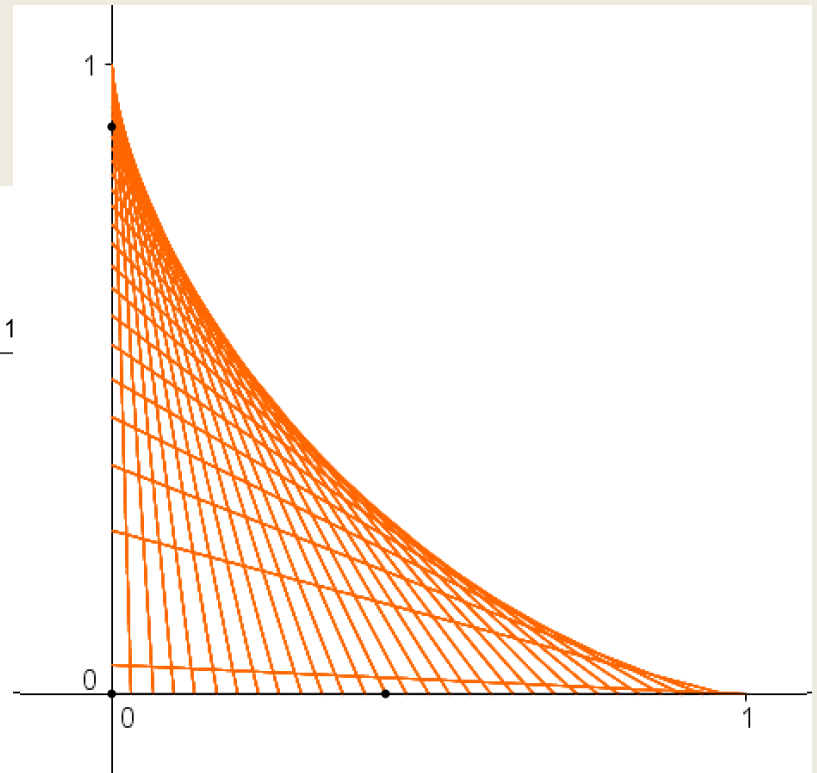


Tekening

Niet verwarren met de ladder

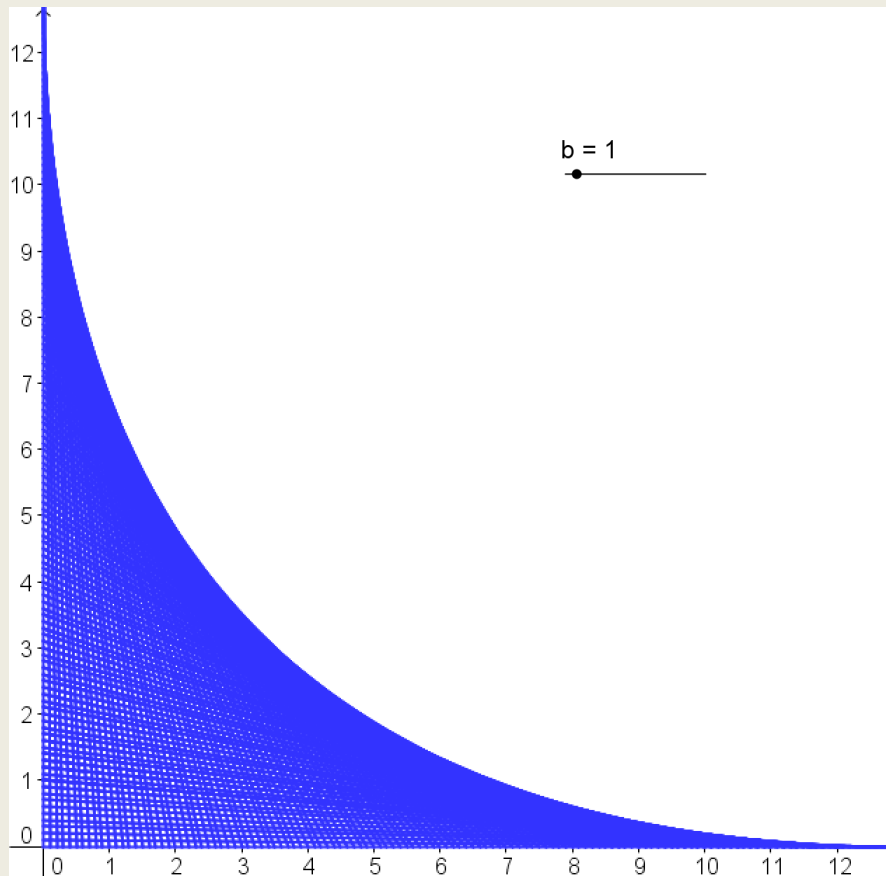


$b = 1$



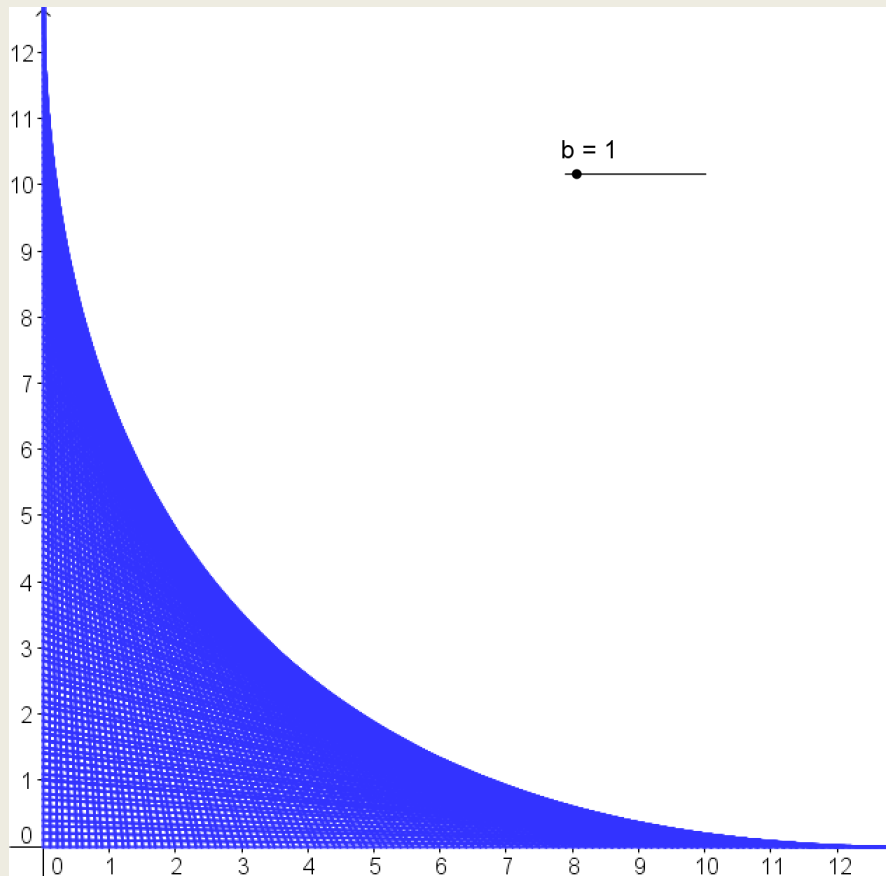
Tekening

Om echt de omhullende te zien: oneindig veel rechten



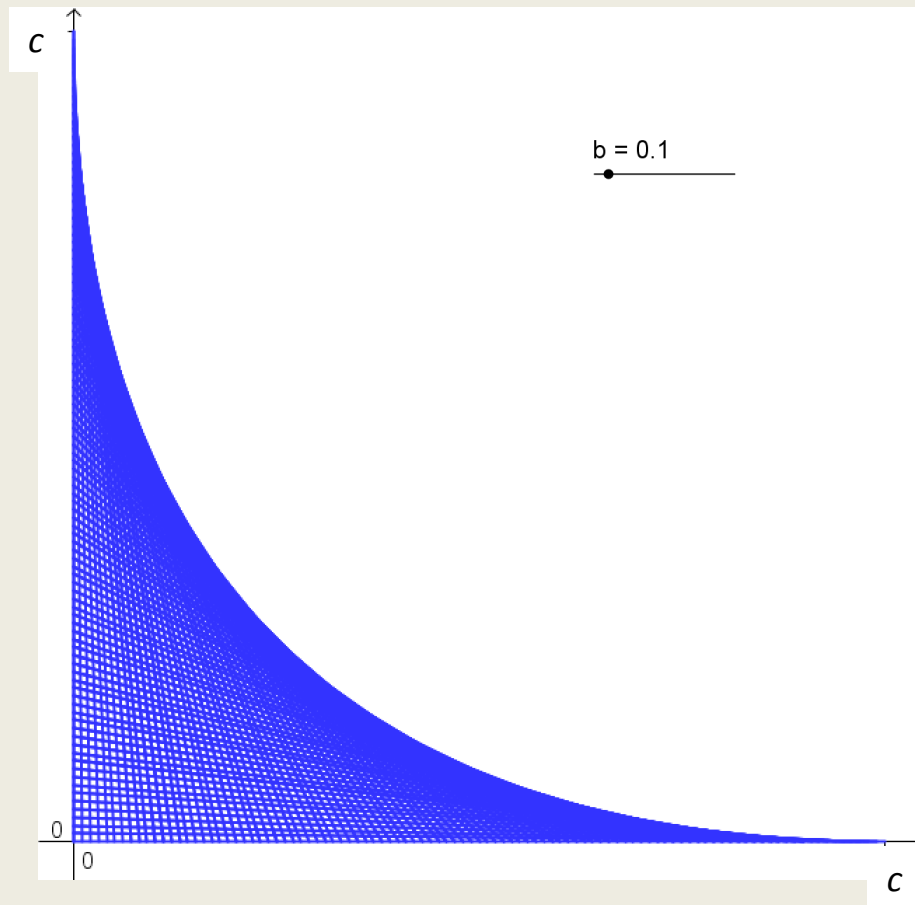
Tekening

We verbinden $(x, 0)$ met $(0, 13 - x)$ voor $x \in [0, 13]$. Waarom 13?



Tekening

We verbinden $(a, 0)$ met $(0, b)$ voor $a, b \in [0, 1]; a + b = c$



Tekening: vergelijking van de omhullende?

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

$$(bx + ay = ab)$$

$$y = -\frac{\frac{c}{a} - a}{a}x + (c - a)$$

$$y = \left(1 - \frac{c}{a}\right)x + (c - a)$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = 0$$

$$\frac{c}{a^2}x - 1 = 0$$

$$a = \sqrt{cx}$$

en dus, door symmetrie, $b = \sqrt{cy}$ (horizontaal venster).

Vermits $a + b = c$ hebben we: $\sqrt{cx} + \sqrt{cy} = c$ of: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$

Tekening: welke kromme?

We hebben verondersteld dat $a, b \geq 0$.

Hoe wordt de tekening als we deze veronderstelling laten varen?

Neem $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ of $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{c}$ of $-\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$.

(Dat volstaat!)

Kwadrateer (twee keer):

$$x + y \pm 2\sqrt{xy} = c$$

$$\pm 2\sqrt{xy} = c - x - y$$

$$4xy = c^2 + x^2 + y^2 + 2xy - 2cx - 2cy$$

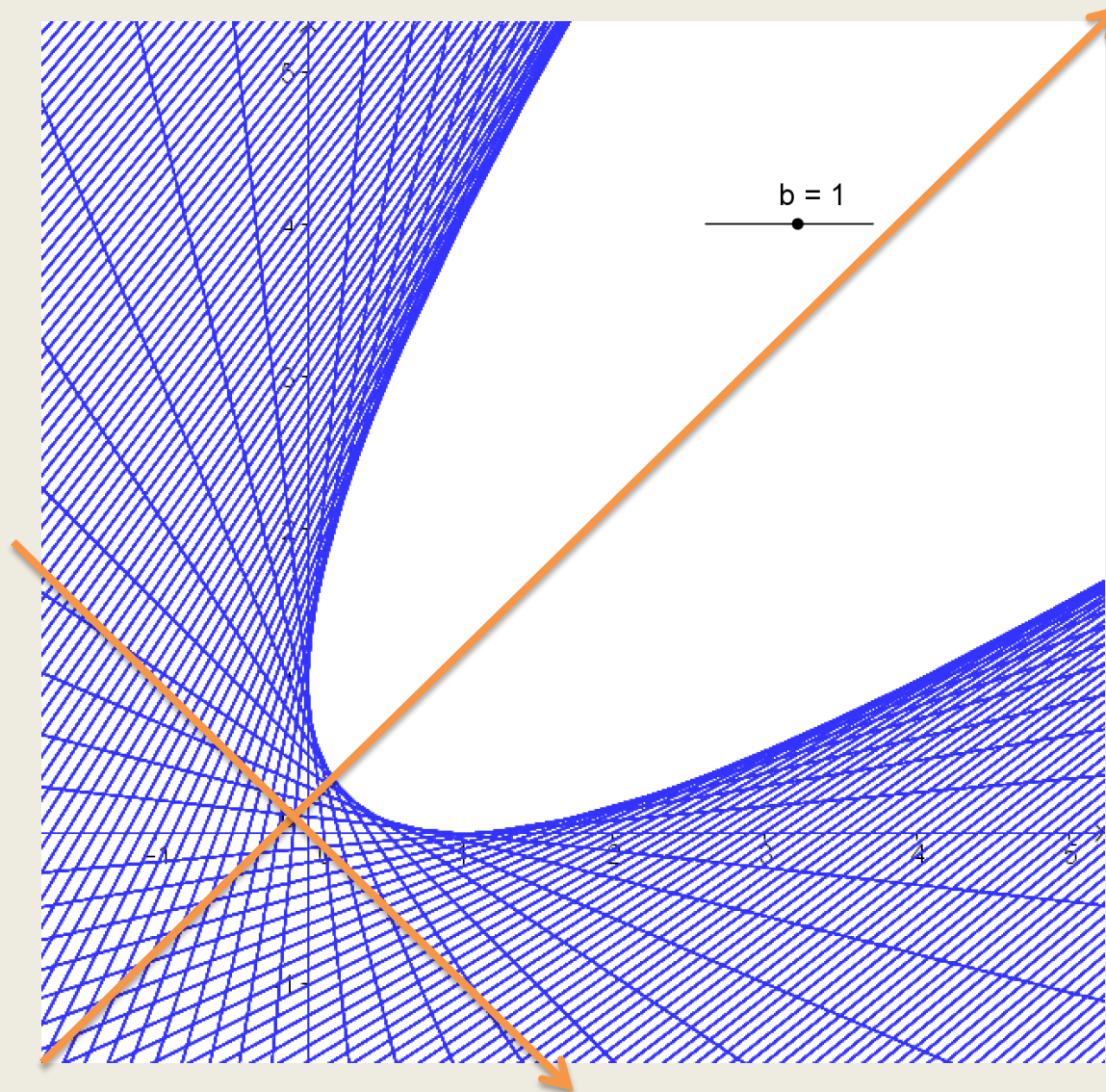
$$2cx + 2cy = x^2 - 2xy + y^2 + c^2$$

$$2c(x + y) = (x - y)^2 + c^2$$

$$2cv = u^2 + c^2$$

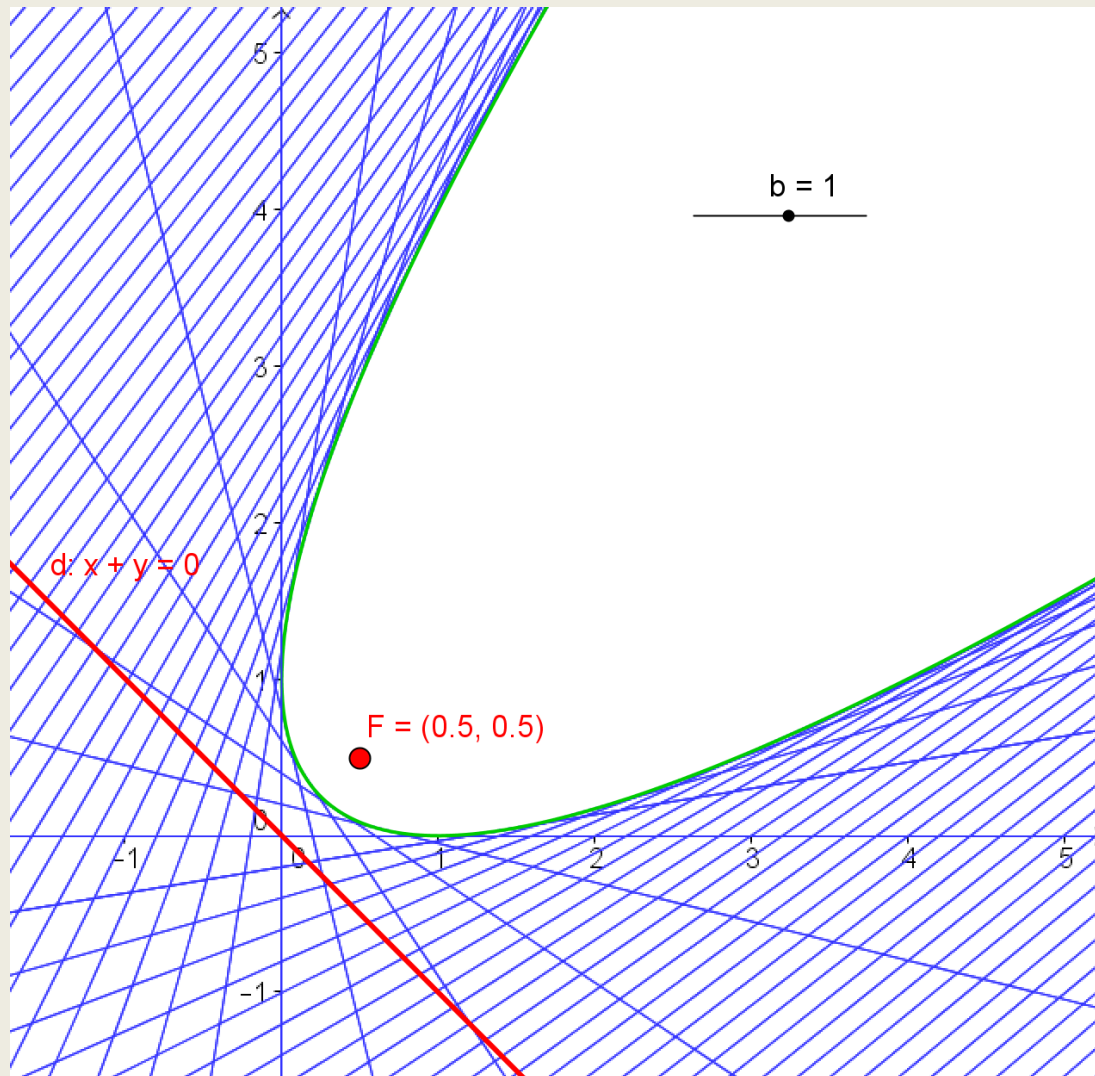
Een parabool!

Tekening: welke kromme?

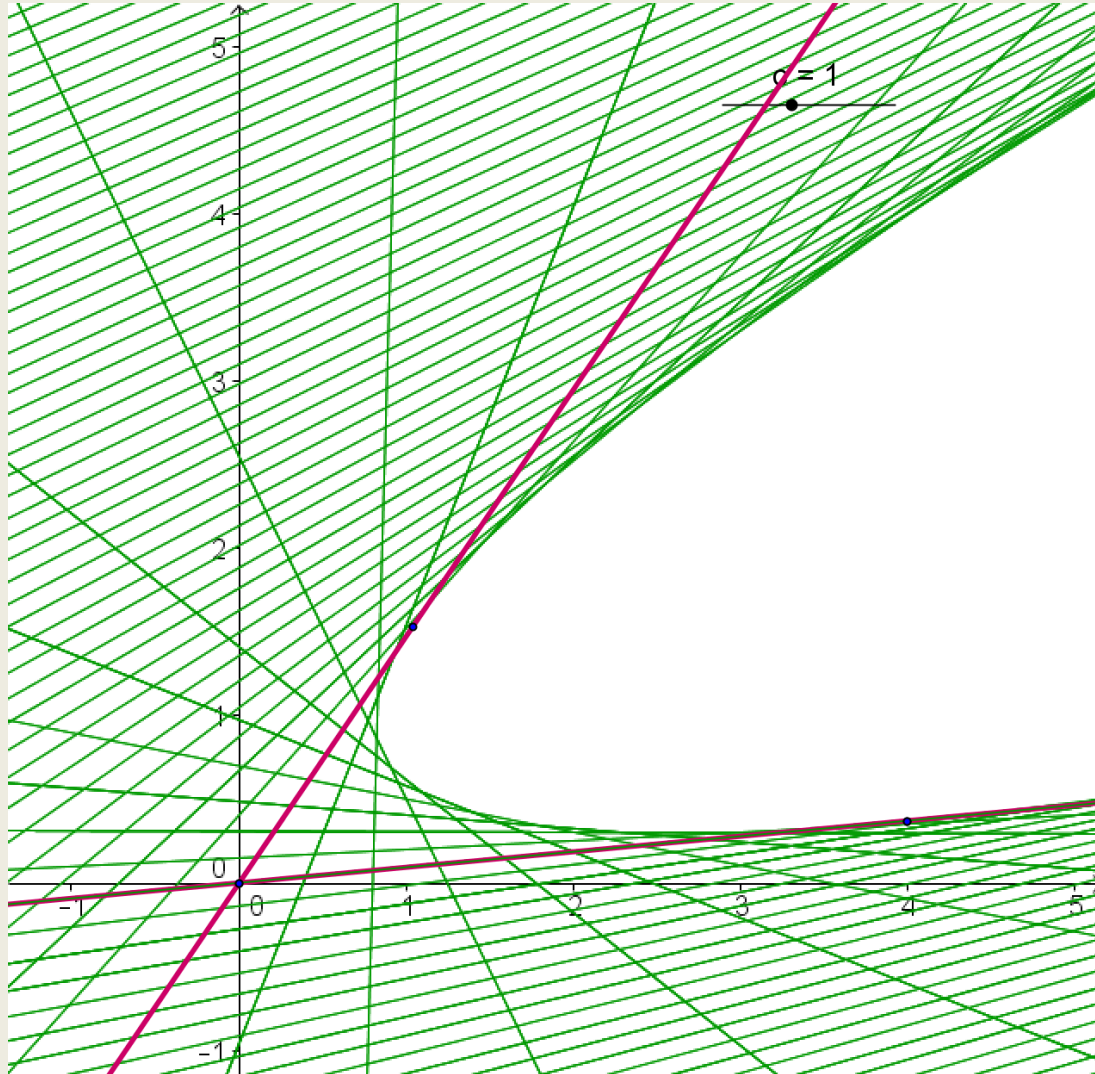


Tekening: welke kromme?

Vouw F
op d

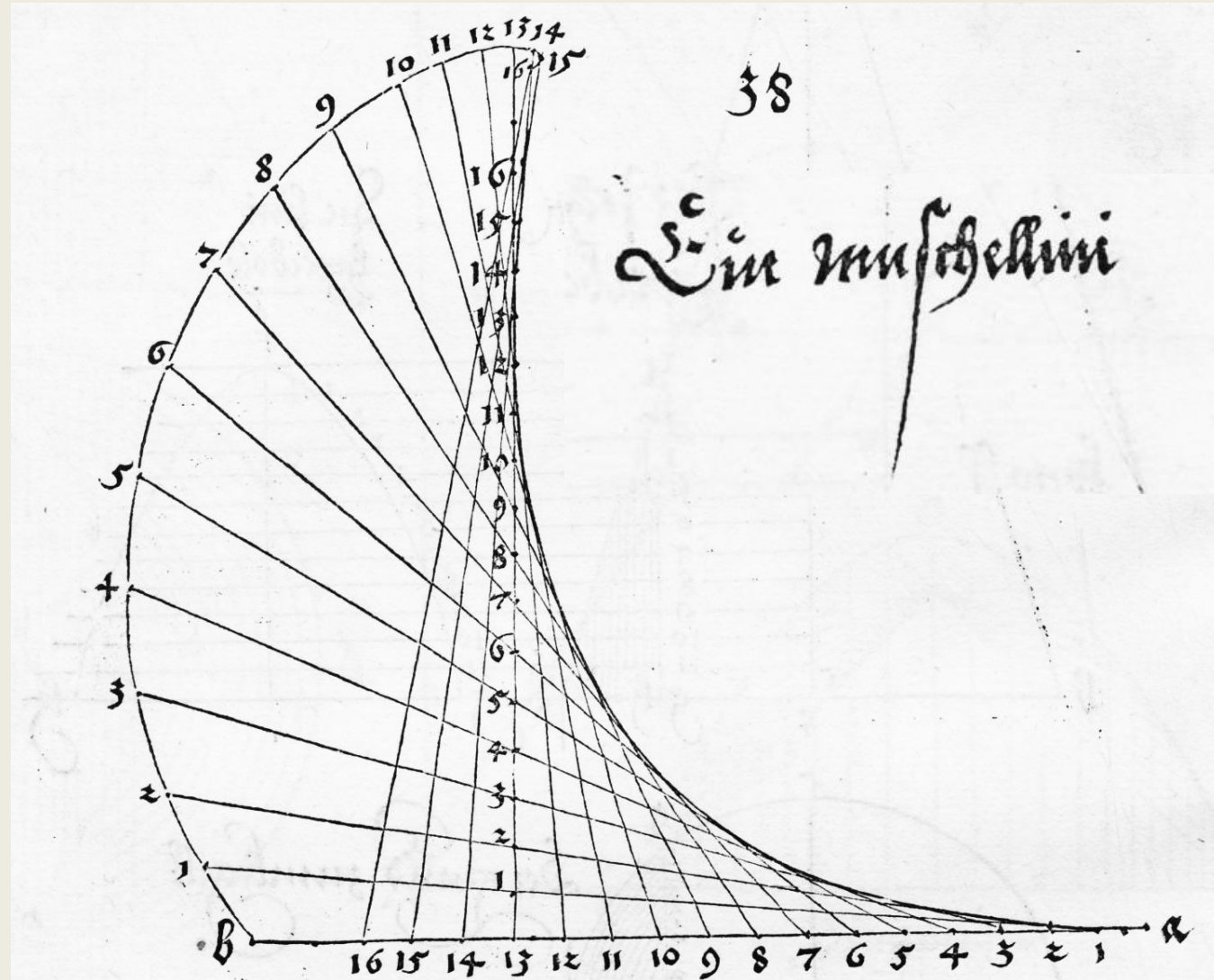


Tekening: affien transformeren

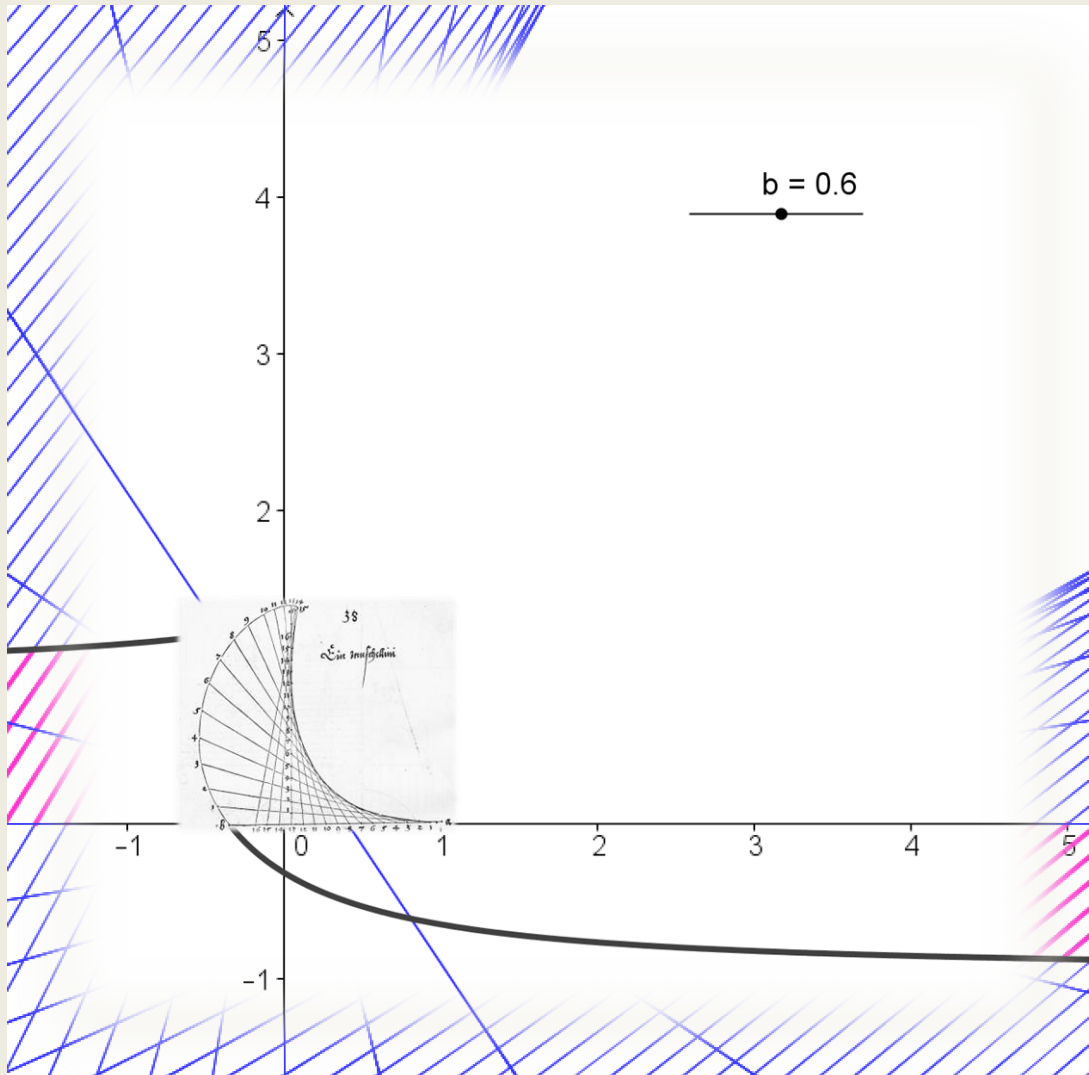


Tekening: versie van Dürer

Dürer 1525



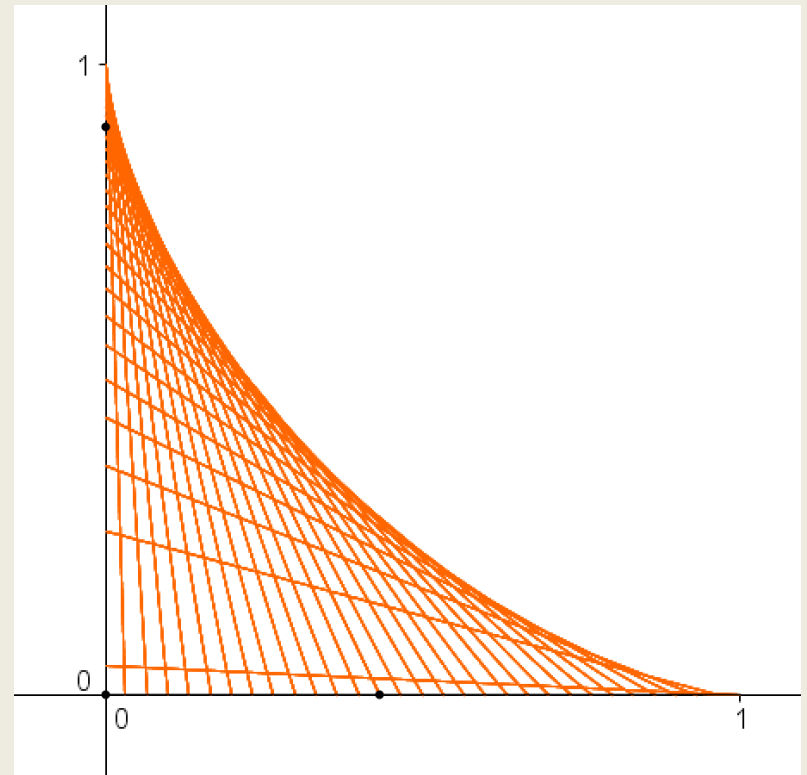
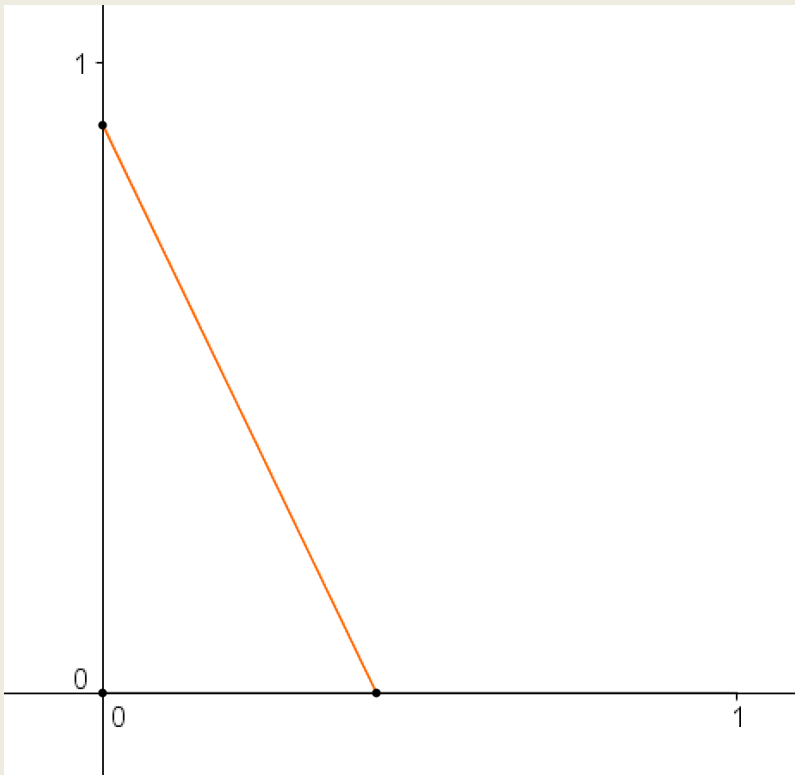
Tekening: versie van Dürer



10.55?
Ladder overslaan

Ladder

We verbinden $(a, 0)$ met $(0, b)$ zo dat $a^2 + b^2 = c^2$.



Ladder: vergelijking van de omhullende?

$$y = -\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a}x + \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = 0$$

$$-\frac{\frac{a}{\sqrt{c^2 - a^2}}a - \sqrt{c^2 - a^2}}{a^2}x - \frac{a}{\sqrt{c^2 - a^2}} = 0$$

$$\frac{c^2x - a^3}{a^2\sqrt{c^2 - a^2}} = 0$$

$$a = \sqrt[3]{c^2x}$$

en door symmetrie $b = \sqrt[3]{c^2y}$.

Omhullende: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$

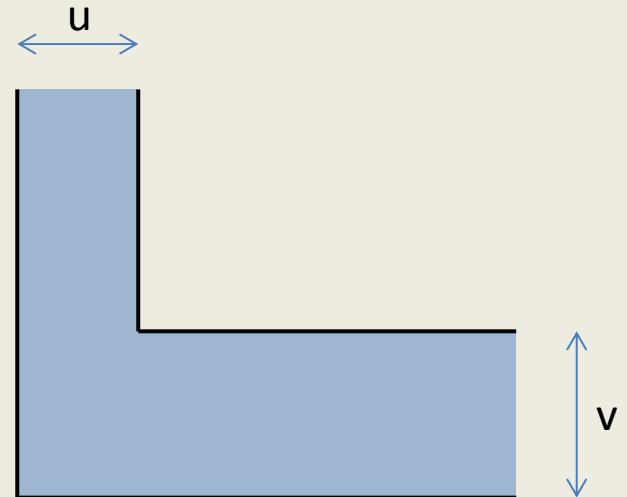
Ladder: vergelijking van de omhullende?

Oefening

Lengte L van de langste ladder die je horizontaal kunt verplaatsen door een hoek tussen twee gangen met breedtes u en v ?

Het punt (u, v) moet op de omhullende $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}}$ liggen.

Dus: $L = \left(u^{\frac{2}{3}} + v^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.



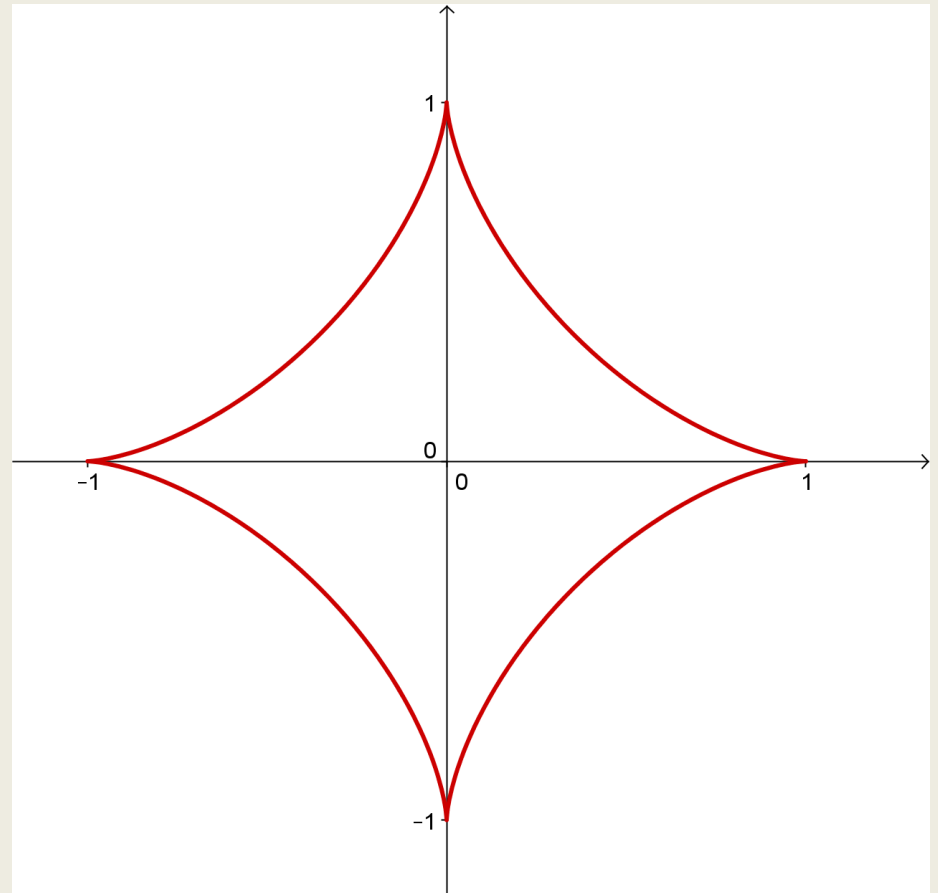
Ladder: welke kromme?

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$$

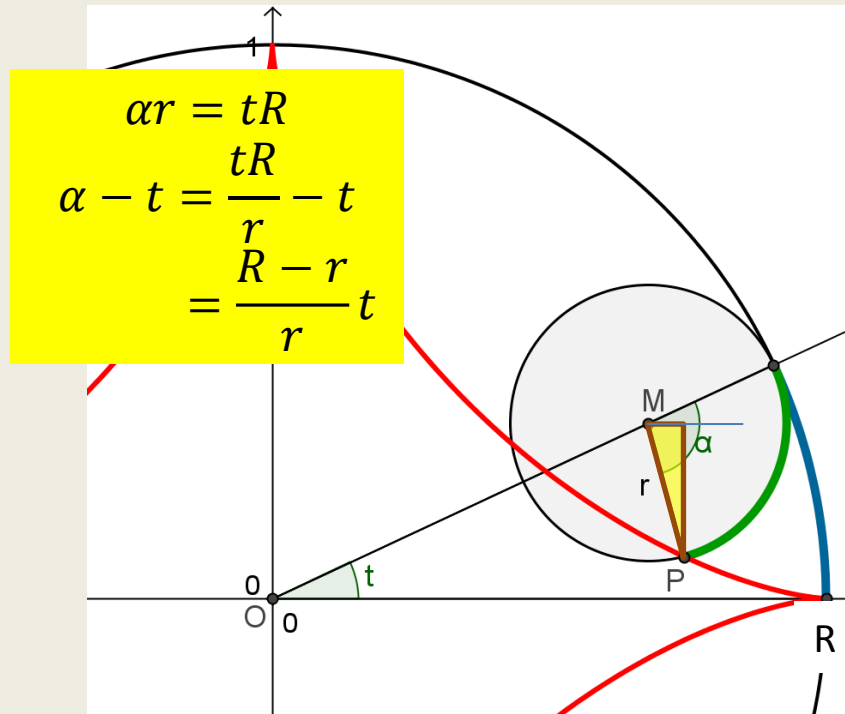
$$\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}}\right)^2 + \left(\frac{y^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}}\right)^2 = 1$$

Parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{3}} = c^{\frac{1}{3}} \cos t \\ y^{\frac{1}{3}} = c^{\frac{1}{3}} \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} x = c \cos^3 t \\ y = c \sin^3 t \end{cases}$$



Hypocycloïde



$$M \begin{cases} x = (R - r) \cos t \\ y = (R - r) \sin t \end{cases}$$

$$P \begin{cases} x = (R - r) \cos t + r \cos \frac{R-r}{r} t \\ y = (R - r) \sin t - r \sin \frac{R-r}{r} t \end{cases}$$

Hypocycloïde $R = c; r = \frac{c}{4}$

$$P \begin{cases} x = (R - r) \cos t + r \cos \frac{R-r}{r} t \\ y = (R - r) \sin t - r \sin \frac{R-r}{r} t \end{cases}$$

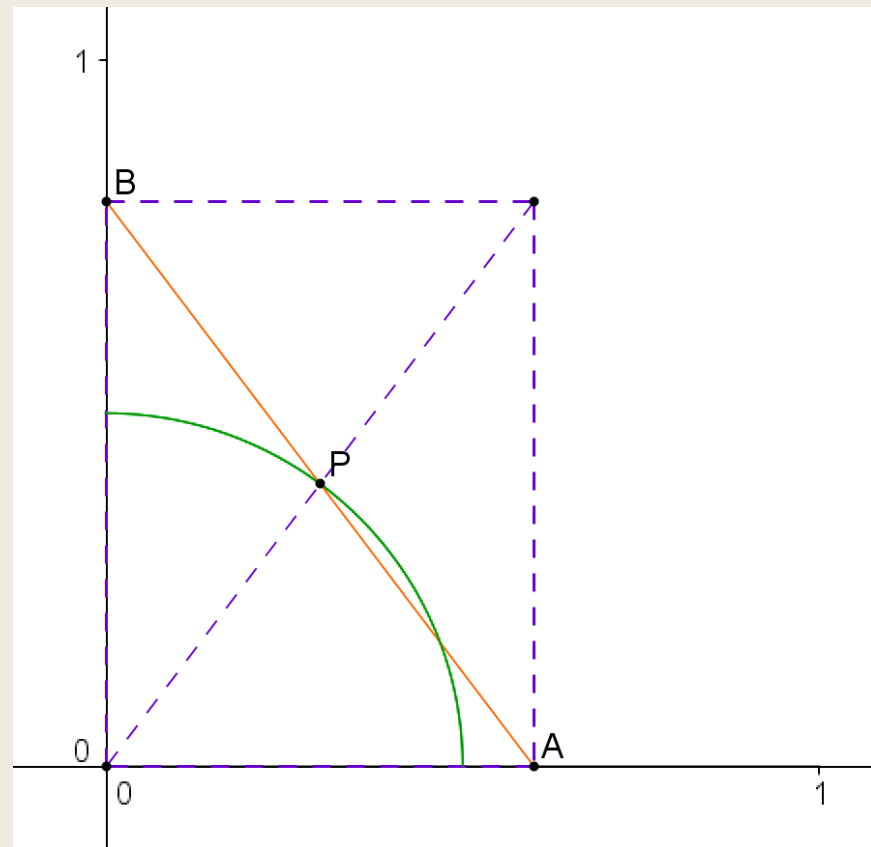
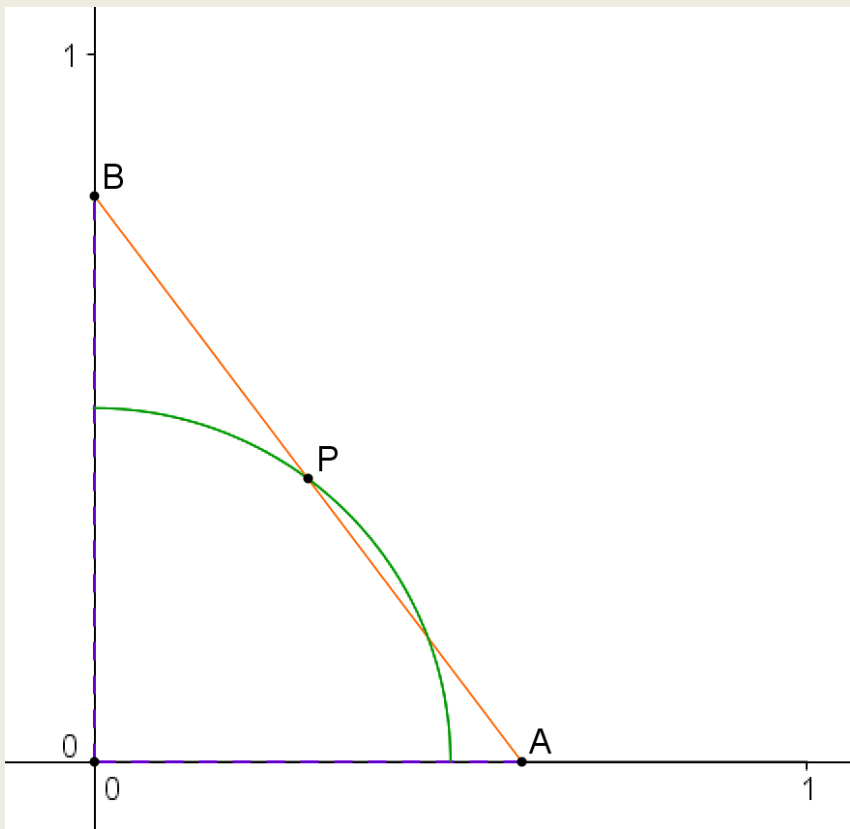
$$P \begin{cases} x = \frac{3c}{4} \cos t + \frac{c}{4} \cos 3t \\ y = \frac{3c}{4} \sin t - \frac{c}{4} \sin 3t \end{cases}$$

Mislukt? (niet $c \cos^3 t$ en $c \sin^3 t$?)

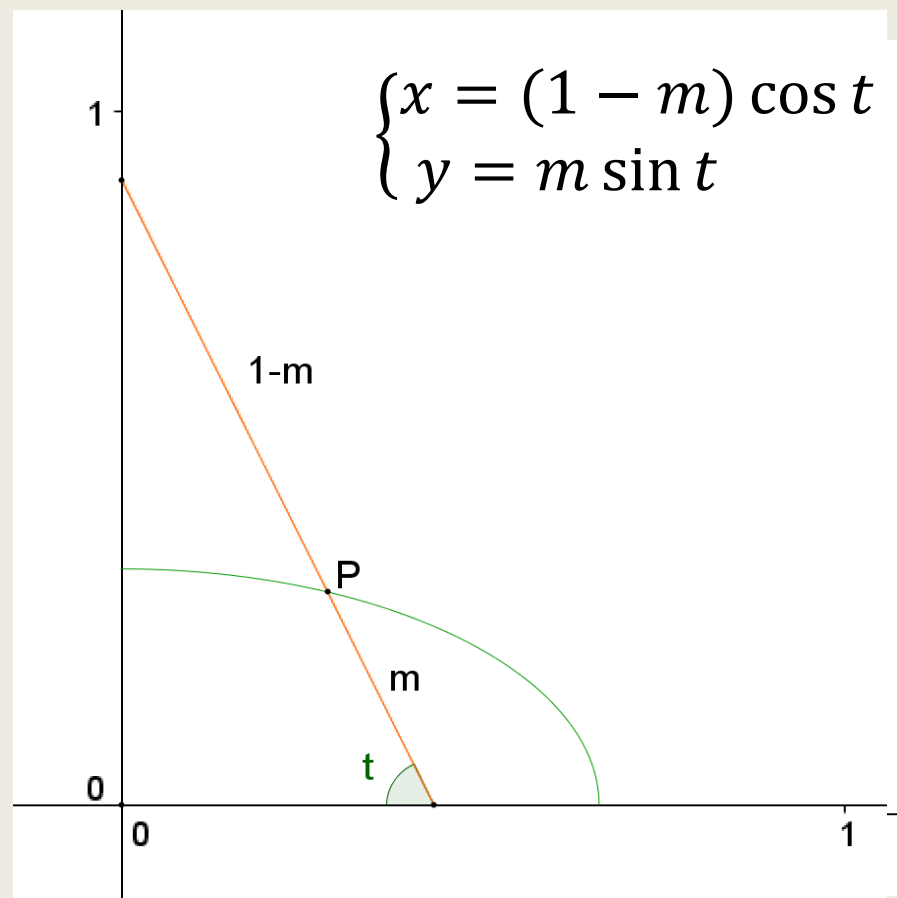
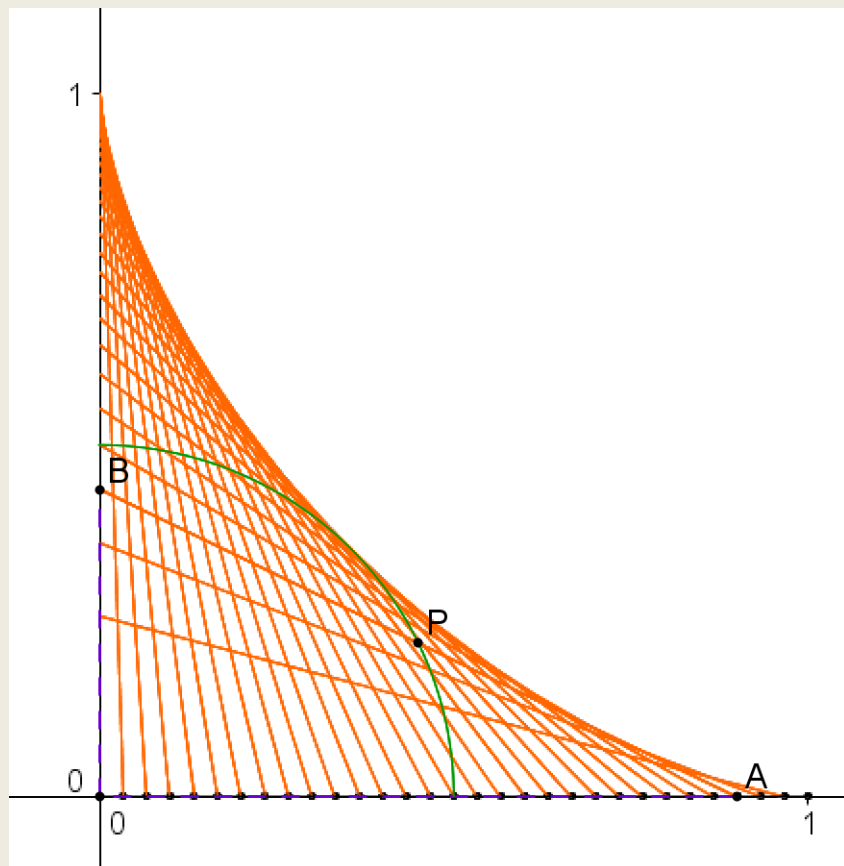
- $\frac{3c}{4} \cos t + \frac{c}{4} \cos 3t = \frac{3c}{4} \cos t + \frac{c}{4} (4 \cos^3 t - 3 \cos t) = c \cos^3 t$
- $\frac{3c}{4} \sin t - \frac{c}{4} \sin 3t = \frac{3c}{4} \sin t - \frac{c}{4} (3 \sin t - 4 \sin^3 t) = c \sin^3 t$

Neen, het was goed.

Het midden van de ladder

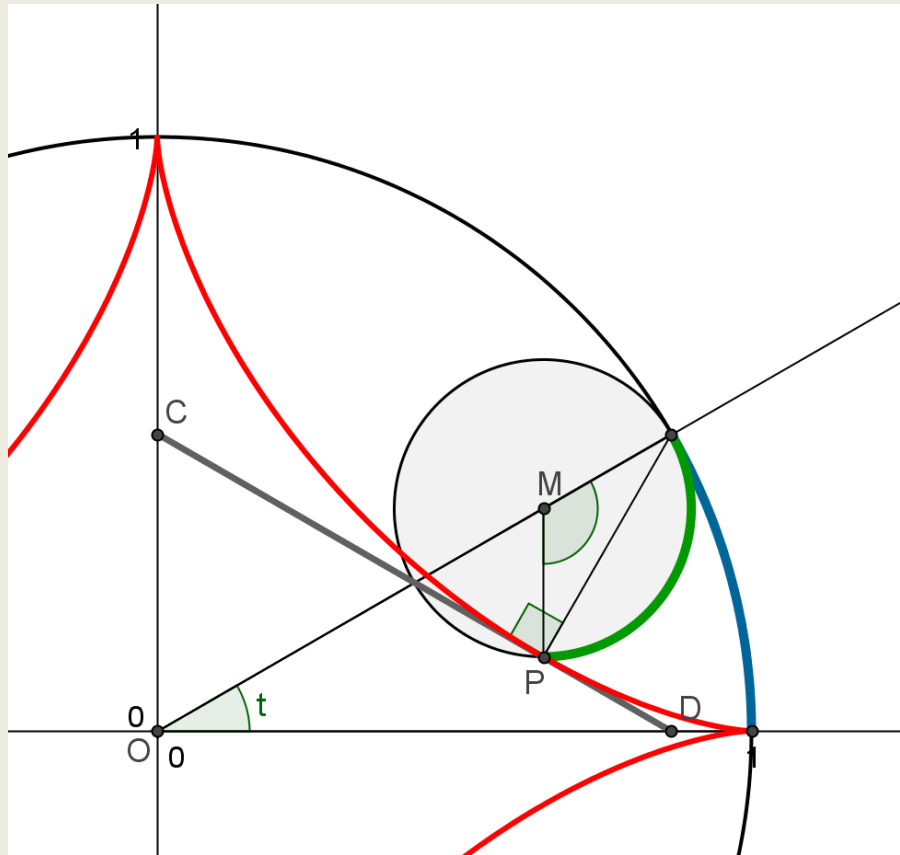


Dubbele omhullende



Berekenen of de beweging zien?

Ogenblikkelijke draaiing



Garagepoort



Garagepoort



Kop koffie: kijk!



Kop koffie: kijk!

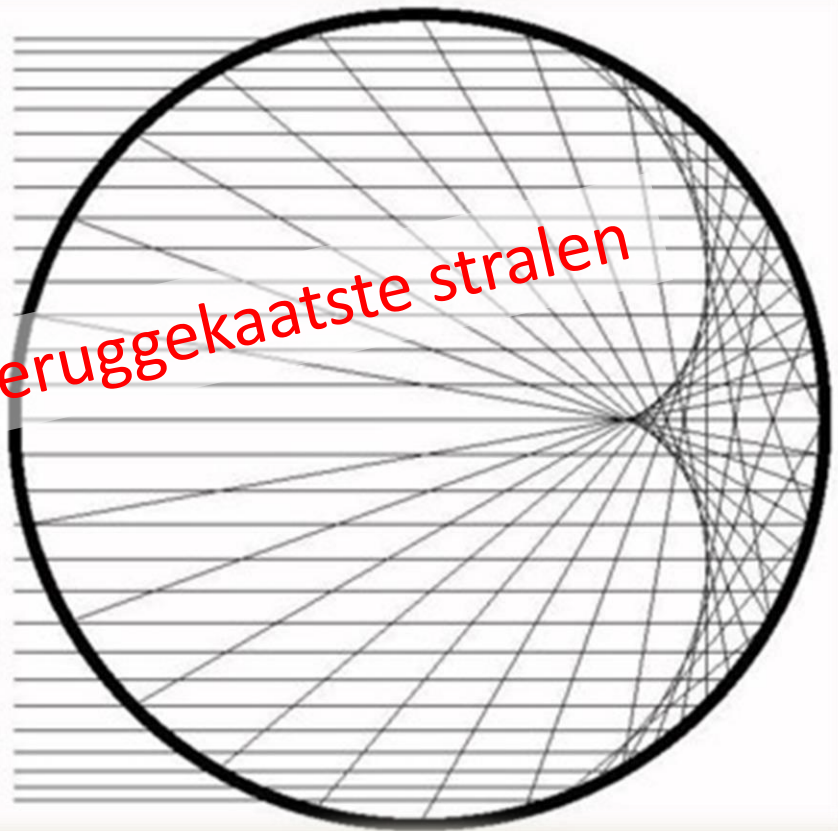


Brandkromme

Leonardo da Vinci (16^{de} eeuw), Christiaan Huygens (17^{de} eeuw),
Joh. Bernoulli (eind 17^{de} eeuw)...



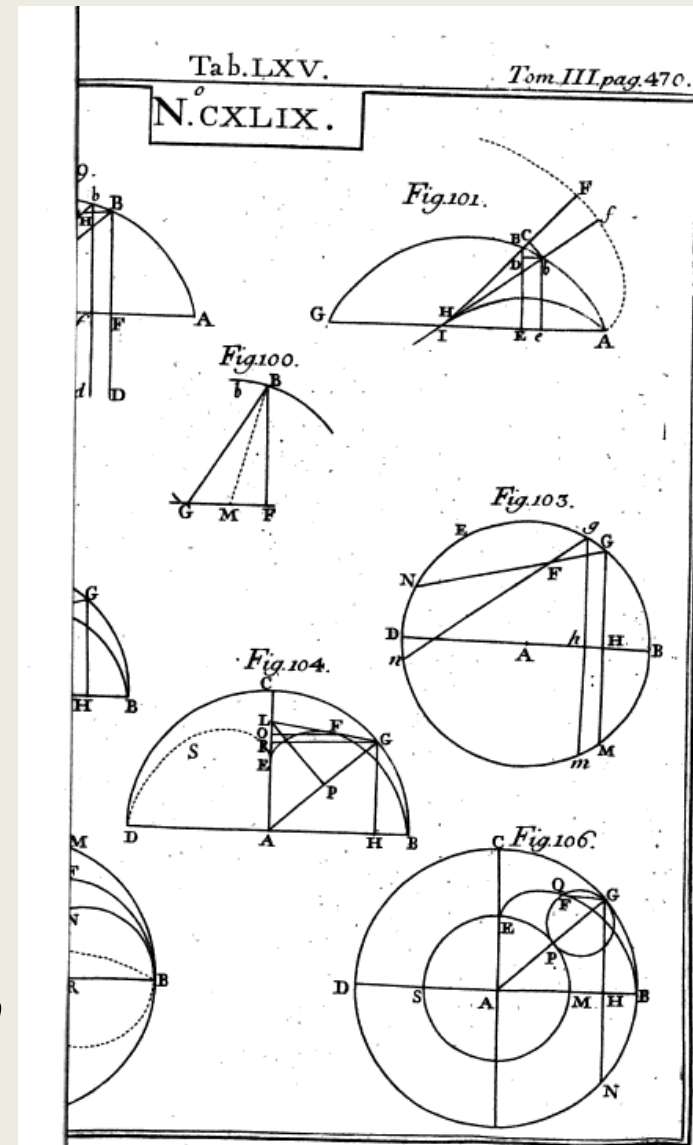
Omhullende van de teruggekaatste stralen



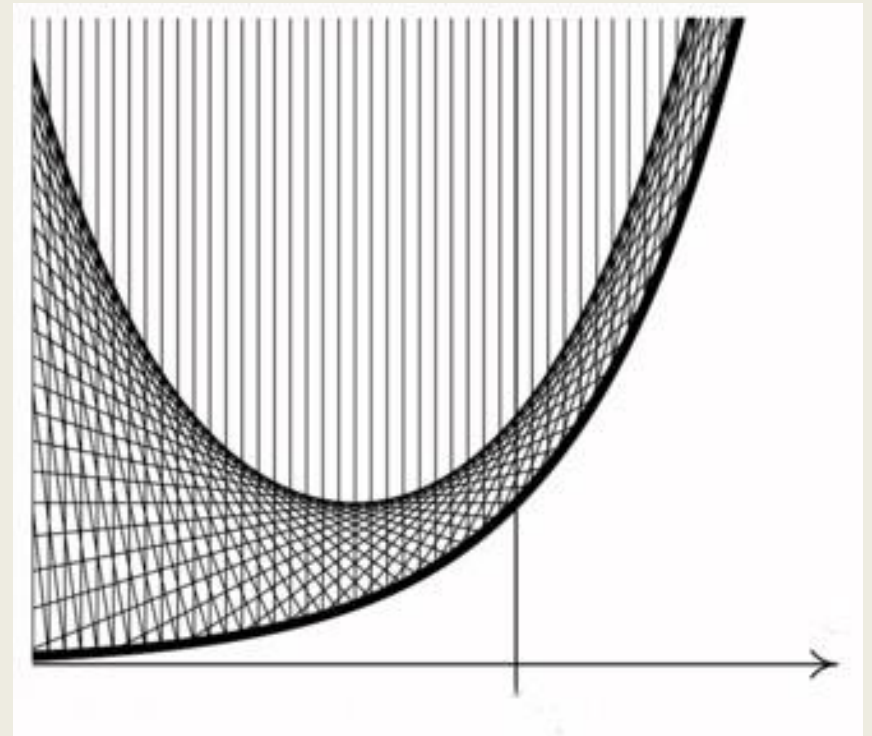
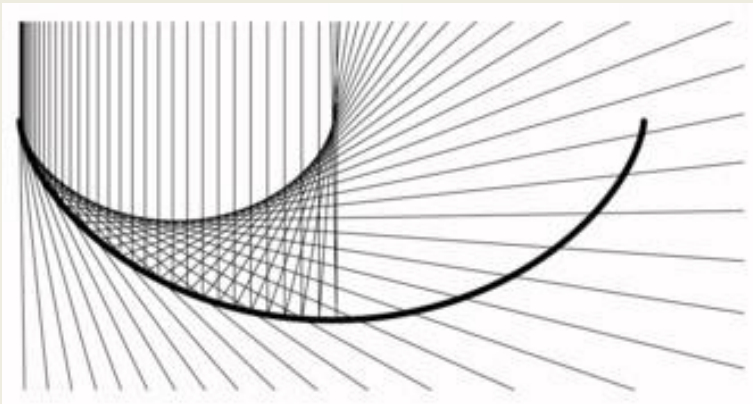
Brandkromme



Joh. Bernoulli, *Caustica circularis radiorum parallelorum*



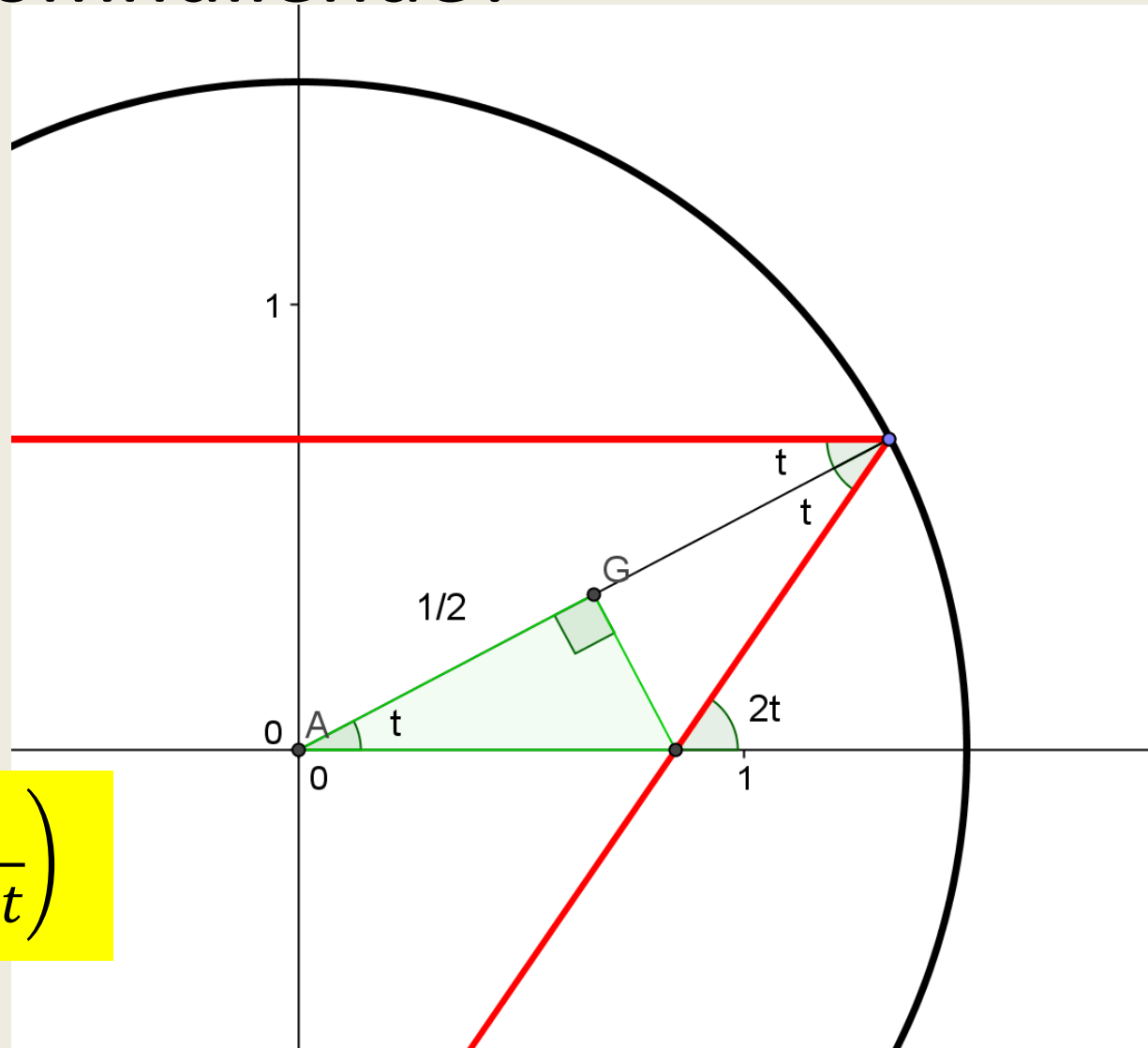
Andere brandkrommen



Kop koffie: vergelijking van de omhullende?

Neem $R = 1, r = \frac{1}{2}$

$$y = \tan 2t \left(x - \frac{1}{2 \cos t} \right)$$



Kop koffie: vergelijking van de omhullende?

$$y = \tan 2t \left(x - \frac{1}{2 \cos t} \right)$$

We draaien ons gezichtspunt.

$$x = \frac{1}{\tan 2t} y + \frac{1}{2 \cos t}$$

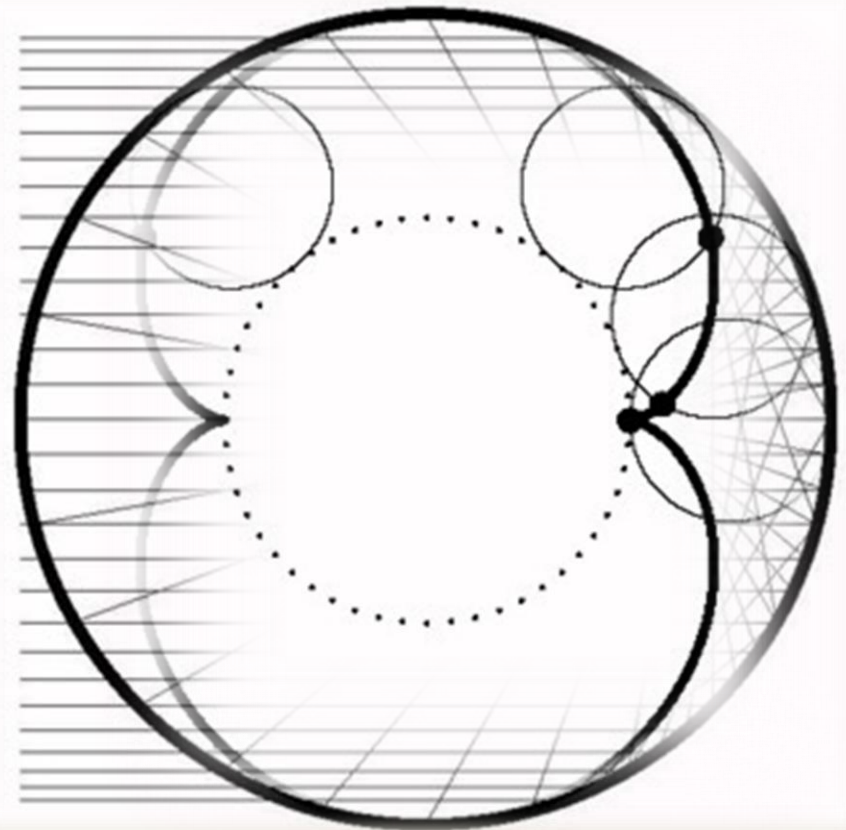
$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0$$

$$y = \sin^3 t$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\tan 2t} \sin^3 t + \frac{1}{2 \cos t} \\ &= \dots = \cos t \left(\frac{1}{2} - \cos^2 t \right) \end{aligned}$$

Kop koffie: welke kromme?

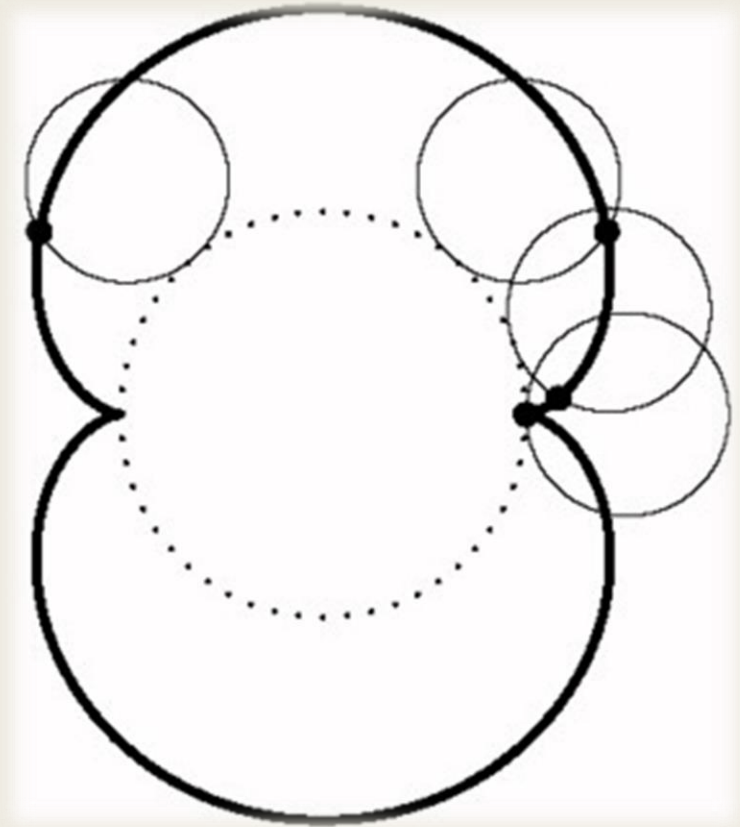
Epicycloïde $\left(\frac{r}{R} = \frac{1}{2}\right)$
“nefroïde”



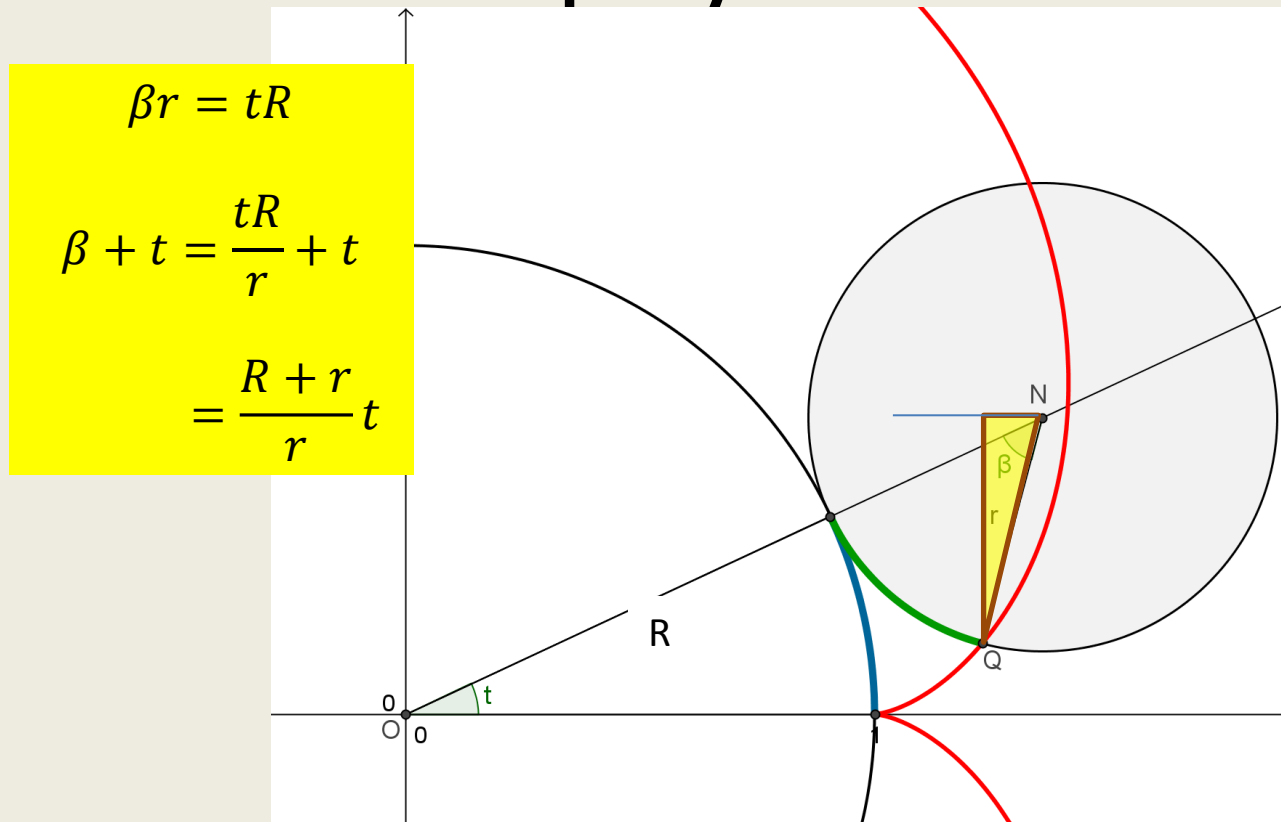
Kop koffie: welke kromme?

Epicycloïde $\left(\frac{r}{R} = \frac{1}{2}\right)$

“nefroïde”



Epicycloïde



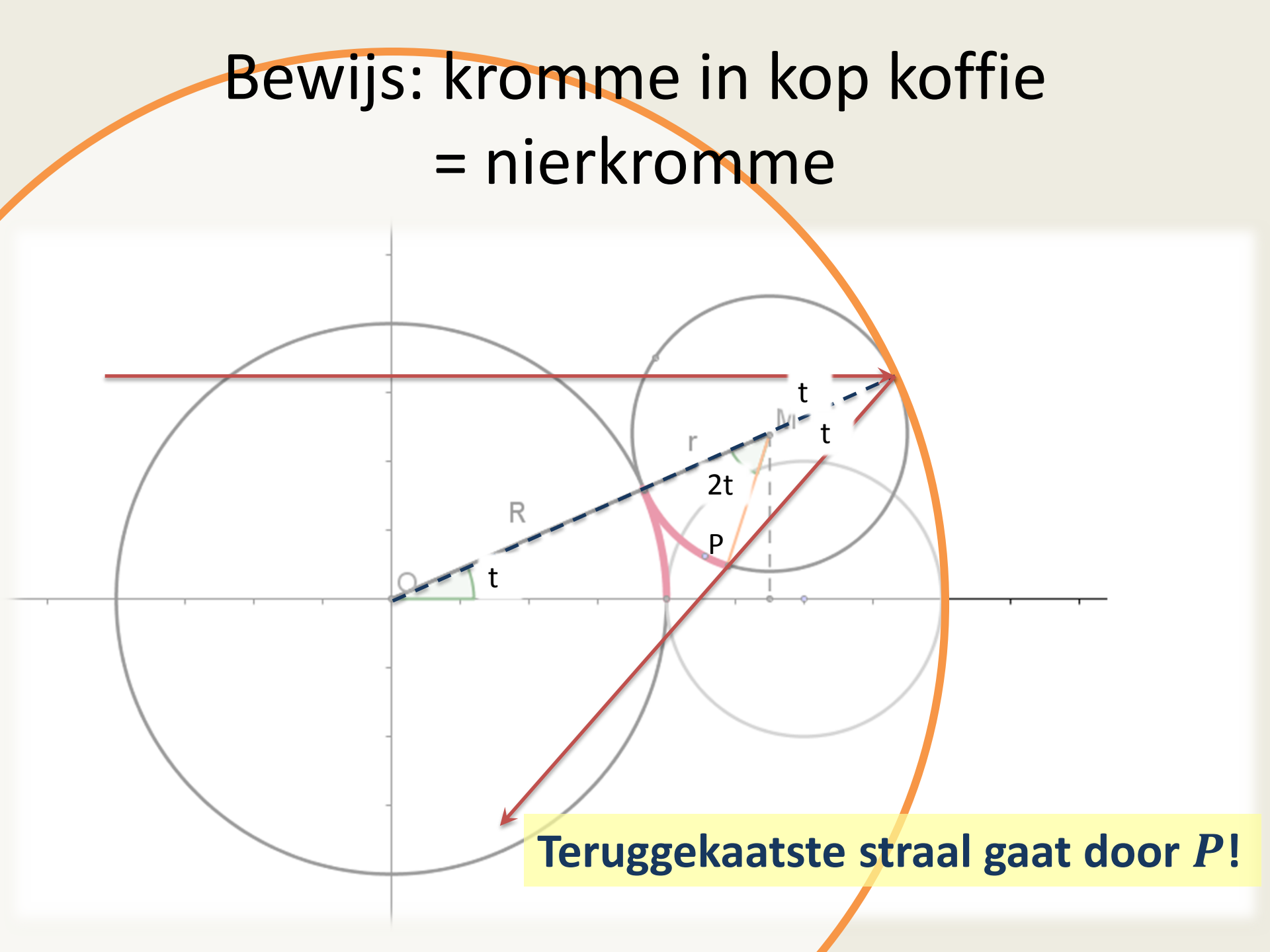
$$N \begin{cases} x = (R + r) \cos t \\ y = (R + r) \sin t \end{cases}$$

Kop koffie: nierkromme?

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos t - r \cos \frac{R + r}{r} t \\ y = (R + r) \sin t - r \sin \frac{R + r}{r} t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1,5 \cos t - 0,5 \cos 3t \\ y = 1,5 \sin t - 0,5 \sin 3t \end{cases}$$

Bewijs: kromme in kop koffie = nierkromme

Teruggekaatste straal gaat door P !



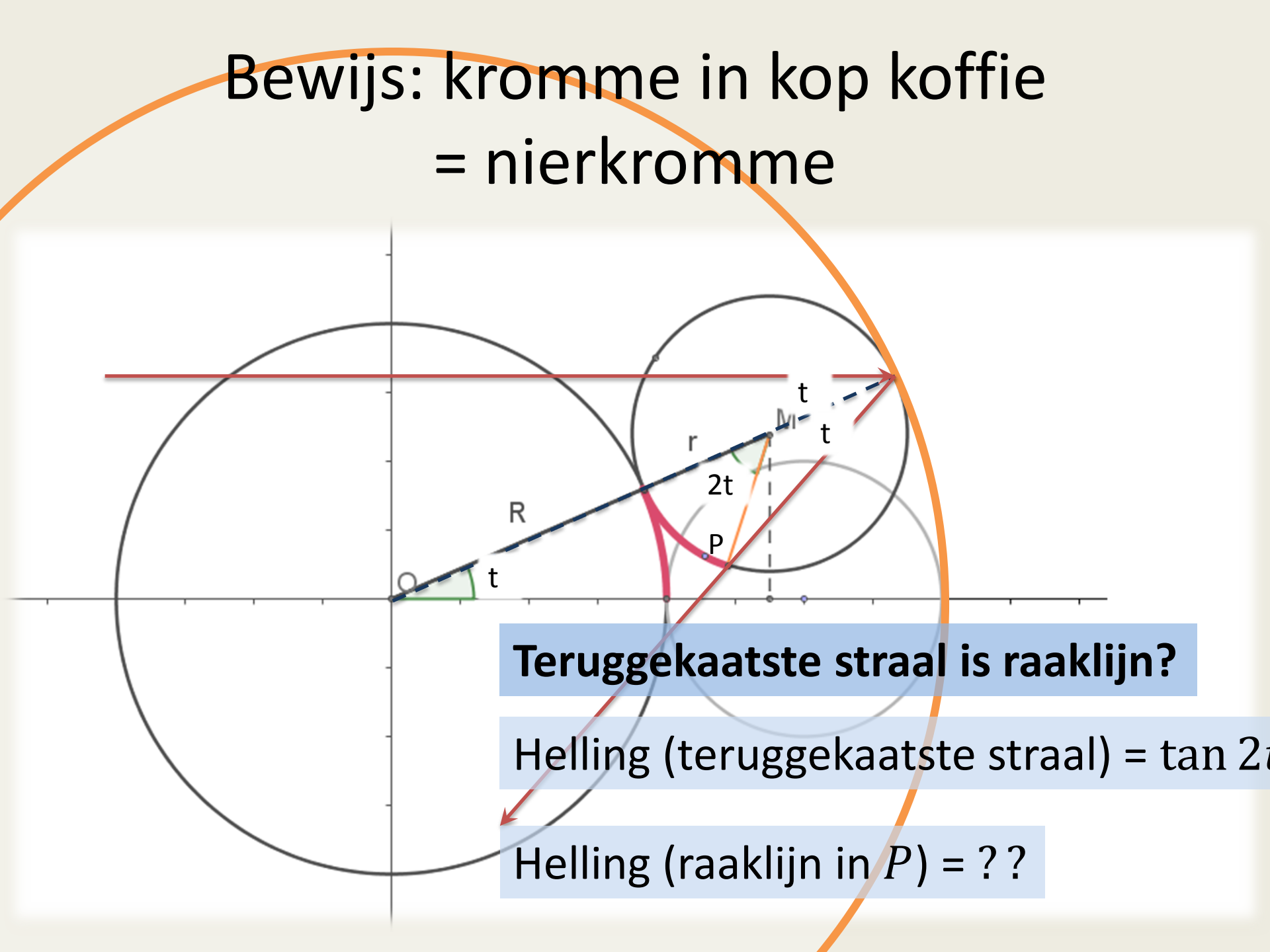
Teruggekaatste straal gaat door P !

Bewijs: kromme in kop koffie
= nierkromme

Teruggekaatste straal is raaklijn?

Helling (teruggekaatste straal) = $\tan 2t$

Helling (raaklijn in P) = ??



Teruggekaatste straal is raaklijn?

Helling (teruggekaatste straal) = $\tan 2\alpha$

Helling (raaklijn in P) = ??

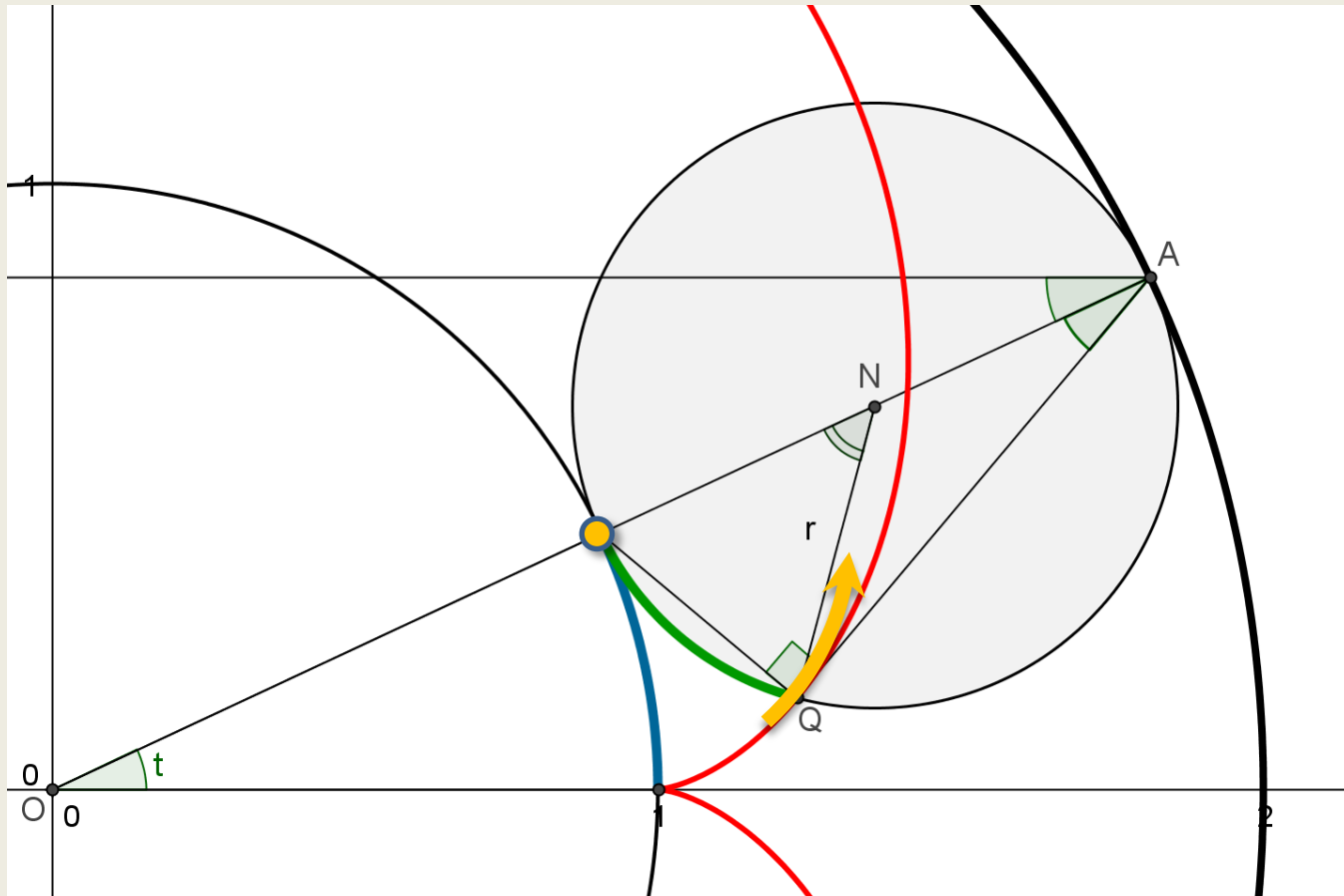
Bewijs: kromme in kop koffie = nierkromme

$$\text{Neem } R = 1; r = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} x = 1,5 \cos t - 0,5 \cos 3t \\ y = 1,5 \sin t - 0,5 \sin 3t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Helling (raaklijn in } P) &= \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{1,5 \cos t - 1,5 \cos 3t}{-1,5 \sin t + 1,5 \sin 3t} \\ &= \frac{\cos t - \cos 3t}{-\sin t + \sin 3t} \\ &= \frac{2 \sin 2t \sin t}{2 \cos 2t \sin t} \quad (\text{Simpson}) \\ &= \tan 2t. \end{aligned}$$

De beweging zien

Ogenblikkelijke draaiing





Two variabelen

$$\left\{ \begin{array}{l} y = f(x, m) \\ \frac{\partial f}{\partial m} = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{F(x, y, m) = f(x, m) - y} \left\{ \begin{array}{l} F(x, y, m) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial m} = 0 \end{array} \right.$$

Verschillende versies: equivalent?

- **S** Kromme van de snijpunten van 'oneindig dichte' lijnen
- **R** Kromme rakend aan alle lijnen van de familie
- **G** Grenskromme van een gebied (de unie van alle lijnen)
- **P** met Partiële afgeleiden:
$$\begin{cases} F(x, y, m) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial m} = 0 \end{cases}$$

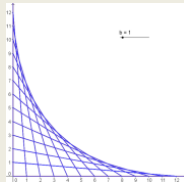
Overzicht omhullenden

1. Foto



S, G, P

2. Tekening



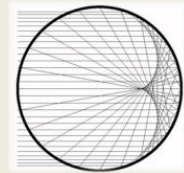
P

3. Ladder



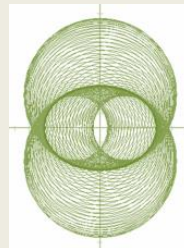
P

4. Kop koffie



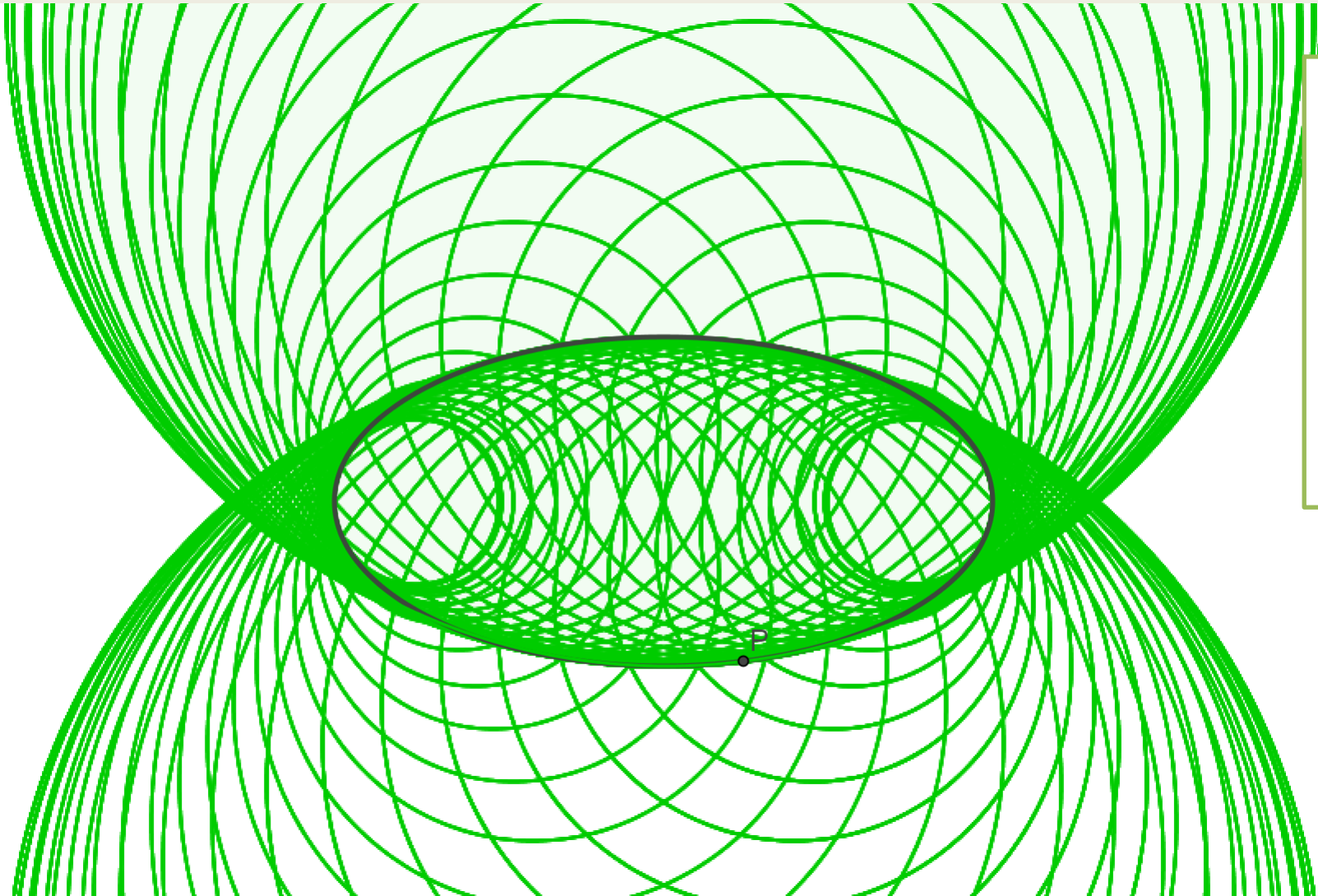
P, R

5. Theorie?



S, G, P, R: equivalent?

Verschillende versies: equivalent?



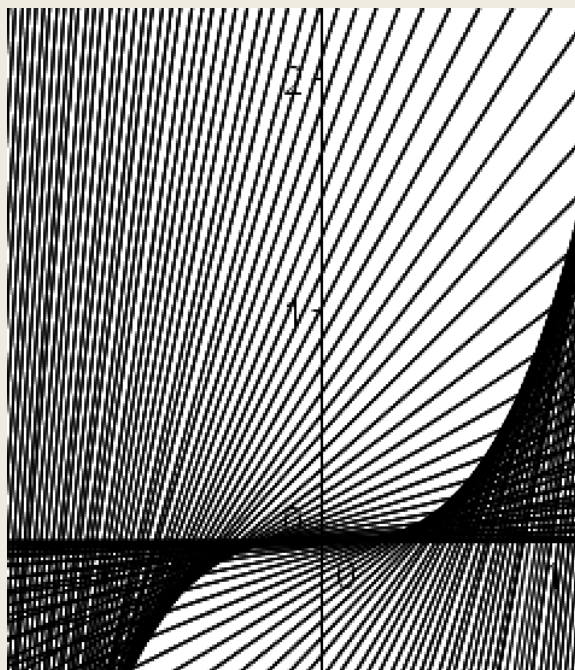
Niet S

R

Niet G

P

Verskillende versies: equivalent?



$$y - t^3 = 3t^2(x - t)$$

S

R

Niet G

P (maar...)

Verschillende versies: equivalent?

$$x^2 + y^2 - \sin^2 t = 0$$

Wat stelt dit voor?

Niet S

Niet R

G

P

Toegankelijk onderwerp?

We zijn niet verplicht om alles te doen.

De ideeën zijn toegankelijk (snijpunten – verticaal venster).

Blijf weg van de 'algemene' theorie...

Zware berekeningen zijn vaak te omzeilen

...door mooie ideeën

...waar je leerlingen niet aan denken.

Uitnodiging

Antwerpen

(niet ver van Nederland!)

Hele dag, lunch incl.

Slechts 55 euro (45 euro
voor abonnees)

www.uitwiskeling.be

UITWISKELING FEEST!
MAAK HET MEE!



zaterdag 15 maart 2014

Bibliografie

- Kalman, D. (2007), Solving the ladder problem on the back of an envelope, *Mathematics Magazine* 80/3
- Kindt, M. (2005), Wat te bewijzen is (29) : parabool als omhullende, *Nieuwe Wiskrant* 24/4
- Kock, A (2007), Envelopes – notion and definiteness, *Beitraege zur Alg. und Geometrie* 48, 345-350
- Lenders, L. *Een astroïde in de garage*, users.skynet.be/cabri-applets/garagepoort.pdf
- Roelens, M. (2012), Weerkaatsing in een kop koffie, *Uitwiskeling* 28/4, 6-9
- Roelens, M. (2013), Een foto en een omhullende, *Uitwiskeling* 29/2, 2013, 13-15
- Steinberg, G. (2000), Experimente im Analysisunterricht, *Der Mathematikunterricht* 46/5-6, 72-90
- van der Craats, J., *Eenvoud bij tekenen en rekenen*, staff.science.uva.nl/~craats/eenvoud.pdf
- Zeitler, H. (1980), Über Brennkurven, *Didaktik der Mathematik* 8/1, 1-11