

Het probleem van Hilbert

René Pannekoek
Imperial College (Londen)

31 januari 2014

Leopold Kronecker (1823-1891)



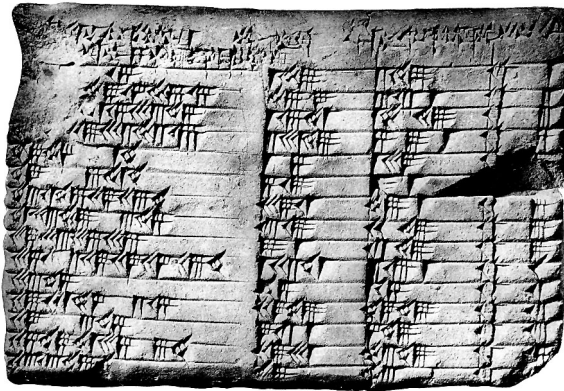
Motto

Leopold Kronecker (1823-1891):

“Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk”.



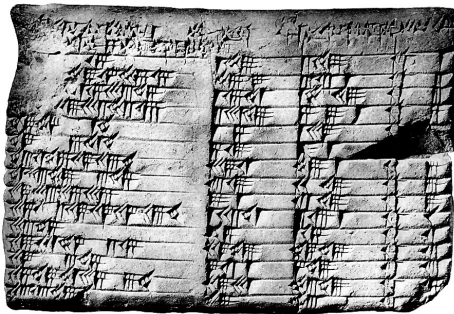
Plimpton 322: het begin van de getaltheorie?



Babylonisch kleitablet (± 1800 v. Chr.) met voorbeelden van de “stelling van Pythagoras” (in zestigtallig stelsel!).



Plimpton 322: het begin van de getaltheorie?



Er staan formules op als $119^2 + 120^2 = 169^2$;
 $4601^2 + 4800^2 = 6649^2$; $12709^2 + 13500^2 = 18541^2$ (!) en
(natuurlijk) $3^2 + 4^2 = 5^2$. De Babyloniërs moeten haast een
manier gehad hebben om deze formules te construeren.

De Pythagoreïsche vergelijking

Met andere woorden, de Babyloniërs konden geheeltallige oplossingen bepalen van de volgende vergelijking

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

De Pythagoreïsche vergelijking

Met andere woorden, de Babyloniërs konden geheeltallige oplossingen bepalen van de volgende vergelijking

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Vergelijkingen als deze worden tegenwoordig ook wel **Diophantische vergelijkingen** genoemd, naar Diophantos van Alexandrië (3e eeuw n. Chr.) die er zijn *Arithmetica* aan wijdde.

De Pythagoreïsche vergelijking

Met andere woorden, de Babyloniërs konden geheeltallige oplossingen bepalen van de volgende vergelijking

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Vergelijkingen als deze worden tegenwoordig ook wel **Diophantische vergelijkingen** genoemd, naar Diophantos van Alexandrië (3e eeuw n. Chr.) die er zijn *Arithmetica* aan wijdde.

Diophantische vergelijkingen zijn vergelijkingen met een restrictie op de toegestane oplossingen: men is alleen geïnteresseerd in **geheeltallige** oplossingen (soms mogen **rationale** oplossingen ook).

Het abominabele getal 17

Volgens Plutarchos “verafschuwden” de Pythagoreeërs het getal **17**. Zij beschouwden het als een onmineuze barrière tussen de getallen **16** en **18**, die immers in een verhouding van $9 : 8$ tot elkaar staan, precies de verhouding van een hele toon in het octaaf.

Het abominabele getal 17

Volgens Plutarchos “verafschuwden” de Pythagoreeërs het getal **17**. Zij beschouwden het als een onmineuze barrière tussen de getallen **16** en **18**, die immers in een verhouding van 9 : 8 tot elkaar staan, precies de verhouding van een hele toon in het octaaf.

Bovendien (aldus Plutarchos) zijn **16** en **18** de enige mogelijke oppervlaktes van een **rechthoek** waarvan **omtrek** en **oppervlakte** gelijk zijn...

De proef op de som

We nemen een rechthoek met zijdelengten a en b .



De proef op de som

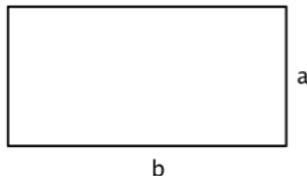
We nemen een rechthoek met zijdelengten a en b .



De oppervlakte is ab en de omtrek is $a + b + a + b = 2(a + b)$.

De proef op de som

We nemen een rechthoek met zijdelengten a en b .



De oppervlakte is ab en de omtrek is $a + b + a + b = 2(a + b)$.

We willen dus oplossen:

$$\mathbf{ab = 2(a + b)}$$

waarbij a en b positieve gehele getallen zijn.

De vergelijking $ab = 2(a + b)$

We willen oplossen, in (positieve) gehele getallen a en b :

$$ab = 2(a + b).$$

De vergelijking $ab = 2(a + b)$

We willen oplossen, in (positieve) gehele getallen a en b :

$$ab = 2(a + b).$$

Trek links en rechts $2(a + b)$ af:

$$ab - 2a - 2b = 0.$$

De vergelijking $ab = 2(a + b)$

We willen oplossen, in (positieve) gehele getallen a en b :

$$ab = 2(a + b).$$

Trek links en rechts $2(a + b)$ af:

$$ab - 2a - 2b = 0.$$

Tel nu links en rechts 4 op:

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4.$$

De vergelijking $ab = 2(a + b)$

We willen oplossen, in (positieve) gehele getallen a en b :

$$ab = 2(a + b).$$

Trek links en rechts $2(a + b)$ af:

$$ab - 2a - 2b = 0.$$

Tel nu links en rechts 4 op:

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4.$$

Merk nu op dat het linkerlid kan worden ontbonden!

$$(a - 2)(b - 2) = ab - 2a - 2b + 4$$

De vergelijking $ab = 2(a + b)$

We vervangen dus in

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4$$

het linkerlid

De vergelijking $ab = 2(a + b)$

We vervangen dus in

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4$$

het linkerlid, en krijgen dan

$$(a - 2)(b - 2) = 4.$$

De vergelijking $ab = 2(a + b)$

We vervangen dus in

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4$$

het linkerlid, en krijgen dan

$$(a - 2)(b - 2) = 4.$$

Twee getallen die vermenigvuldigd 4 zijn, dat kunnen er niet zoveel zijn! We hebben

$$\mathbf{1 \times 4 = 4, \quad 2 \times 2 = 4 \quad \text{en} \quad 4 \times 1 = 4.}$$

De vergelijking $ab = 2(a + b)$

We vervangen dus in

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4$$

het linkerlid, en krijgen dan

$$(a - 2)(b - 2) = 4.$$

Twee getallen die vermenigvuldigd 4 zijn, dat kunnen er niet zoveel zijn! We hebben

$$1 \times 4 = 4, \quad 2 \times 2 = 4 \quad \text{en} \quad 4 \times 1 = 4.$$

(We kunnen negatieve getallen buiten beschouwing laten.)

De vergelijking $ab = 2(a + b)$

We vervangen dus in

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4$$

het linkerlid, en krijgen dan

$$(a - 2)(b - 2) = 4.$$

Twee getallen die vermenigvuldigd 4 zijn, dat kunnen er niet zoveel zijn! We hebben

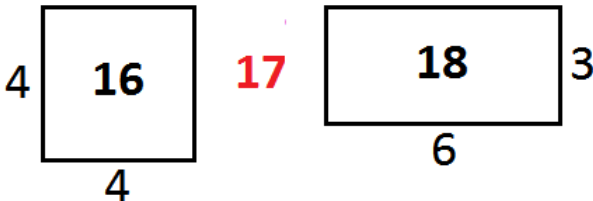
$$1 \times 4 = 4, \quad 2 \times 2 = 4 \quad \text{en} \quad 4 \times 1 = 4.$$

(We kunnen negatieve getallen buiten beschouwing laten.) Dus de oplossingen zijn:

$$\{\mathbf{a = 3, b = 6}\}, \quad \{\mathbf{a = 4, b = 4}\} \quad \text{en} \quad \{\mathbf{a = 6, b = 3}\}$$

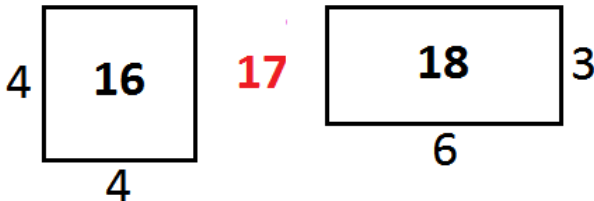
De vergelijking $ab = 2(a + b)$

We hebben bewezen: *de enige rechthoeken waarvan de omtrekken gelijk zijn aan de oppervlakten zijn de 4-bij-4 en de 3-bij-6.*



De vergelijking $ab = 2(a + b)$

We hebben bewezen: *de enige rechthoeken waarvan de omtrekken gelijk zijn aan de oppervlakten zijn de 4-bij-4 en de 3-bij-6.*



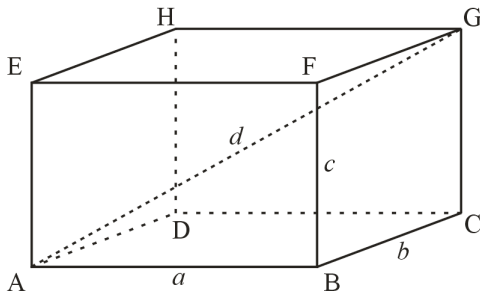
(Ook in Italië is 17 een ongeluksgetal: XVII is een anagram van VIXI = “ik heb geleefd”, een ietwat onheilspellende uitspraak...)

Uitdaging aan het publiek: Plutarchos in 3D

Variant: hoeveel **balken** zijn er waarvan de oppervlakte en **het volume** gelijk zijn?

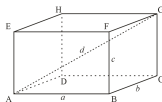
Uitdaging aan het publiek: Plutarchos in 3D

Variant: hoeveel **balken** zijn er waarvan de oppervlakte en **het volume** gelijk zijn?



Uitdaging aan het publiek: Plutarchos in 3D

Welke **balken** hebben **oppervlakte** = **volume**?

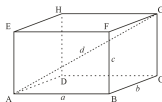


Dan moet er dus gelden:

$$2bc + 2ac + 2ab = abc,$$

Uitdaging aan het publiek: Plutarchos in 3D

Welke **balken** hebben **oppervlakte** = **volume**?



Dan moet er dus gelden:

$$2bc + 2ac + 2ab = abc,$$

oftewel, als we linker- en rechterlid door abc delen:

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1.$$

Dat wil zeggen: *vind alle drietallen positieve breuken waarvan de teller 2 is en waarvan de som 1 is.* (Er zijn 10 oplossingen!)

Diophantische vergelijkingen: geschiedenis (1/4)

- Het **rundveeprobleem** van Archimedes. Dit komt neer op $x^2 - 4729494y^2 = 1$ (een zogenaamde *Pell-vergelijking*).
- Indirecte aanwijzingen dat de oude Grieken en Indiërs $x^2 - 2y^2 = 1$ konden oplossen in gehele getallen.
- In **Diophantos'** *Arithmetica*: vooral kwadratische en derdegraadsvergelijkingen. Het **porisme** van Diophantos: stel een rationaal getal a kan geschreven worden als $x^3 - y^3$, dan kan het *ook* geschreven worden als $z^3 + w^3$ (hier zijn x, y, z, w *positieve* rationale getallen).

Diophantische vergelijkingen: geschiedenis (2/4)

- In China en India (eerste millennium n. Chr.): lineaire Diophantische vergelijkingen zoals $ax + by = c$.
- **Brahmagupta** maakte vooruitgang met Pell-vergelijkingen ($x^2 - Ny^2 = 1$). **Bhāskara** gaf (veel later) een oplossingsmethode.
- **Leonardo van Pisa** (“Fibonacci”): een van de eerste belangrijke Europese wiskundigen sinds de oude Grieken. Gaf een oplossingsmethode voor het stelsel

$$\begin{cases} x^2 + 5 = y^2 \\ x^2 - 5 = z^2 \end{cases}$$

in rationale getallen; dit noemen we tegenwoordig een “kromme van geslacht één”.

Diophantische vergelijkingen: geschiedenis (3/4)

- **Al-Bhagdâdi** (13^e eeuw) gaf lijst met 33 onopgeloste problemen, zoals: *bewijs dat er geen rechthoekige driehoek is waarvan alle zijden kwadraten zijn.*
- **Pi  re de Fermat**: bewees dat er geen rechthoekige driehoek bestaat met gehele zijdelengten en waarvan de oppervlakte een kwadraat is. Dit geeft de vergelijking

$$y^2 = x^3 - 4x.$$

- Verder luidt de “**laatste stelling van Fermat**” dat

$$x^n + y^n = z^n$$

geen niet-triviale oplossingen heeft voor $n \geq 3$. Fermat bewees dit alleen voor $n = 4$, met zijn methode van “oneindige afdaling”.

Diophantische vergelijkingen: geschiedenis (4/4)

- **Leonhard Euler:** bewees dat

$$xy(x + y) = a$$

geen rationale oplossingen heeft als $a = 1$ of $a = 3$. Euler gaf ook oneindig veel rationale oplossingen van

$$xyz(x + y + z) = a$$

voor een willekeurig rationaal getal a .

- **Lagrange** bewees dat elk positief geheel getal a geschreven kan worden als

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a$$

met x, y, z, w gehele getallen.

Bewijzen dat een vergelijking geen oplossingen heeft

Conclusie: een bonte stoet vergelijkingen, weinig systematiek.
Tijd voor een algemene theorie.

Bewijzen dat een vergelijking geen oplossingen heeft

Conclusie: een bonte stoet vergelijkingen, weinig systematiek.
Tijd voor een algemene theorie.

De grote vraag in het huidige onderzoek:

**Hoe bewijs je dat een vergelijking
geen oplossingen heeft?**

Bewijzen dat een vergelijking geen oplossingen heeft

Conclusie: een bonte stoet vergelijkingen, weinig systematiek.
Tijd voor een algemene theorie.

De grote vraag in het huidige onderzoek:

**Hoe bewijs je dat een vergelijking
geen oplossingen heeft?**

Een even klassiek als krachtig antwoord:

kijk naar deling met rest.

Een voorbeeld

Puzzel. Los op in gehele getallen, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3101.$$

Een voorbeeld

Puzzel. Los op in gehele getallen, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3101.$$

Oplossing. We merken eerst op: als je een derdemacht van een geheel getal deelt door 9, krijg je rest 0, rest 1 of rest 8.

Deling met rest

De rest na deling door 9 van een geheel getal n is één van de getallen

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Deling met rest

De rest na deling door 9 van een geheel getal n is één van de getallen

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Voorbeelden:

$$31 = 3 \times 9 + 4 \implies 31 \text{ heeft rest } 4$$

$$1 = 0 \times 9 + 1 \implies 1 \text{ heeft rest } 1$$

$$3101 = 344 \times 9 + 5 \implies 3101 \text{ heeft rest } 5$$

Deling met rest

De rest na deling door 9 van een geheel getal n is één van de getallen

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Voorbeelden:

$$31 = 3 \times 9 + 4 \implies 31 \text{ heeft rest } 4$$

$$1 = 0 \times 9 + 1 \implies 1 \text{ heeft rest } 1$$

$$3101 = 344 \times 9 + 5 \implies 3101 \text{ heeft rest } 5$$

Algemeen: als n na deling door 9 rest 0 heeft, kunnen we schrijven: $n = 9k$ (met k weer een geheel getal).

Deling met rest

De rest na deling door 9 van een geheel getal n is één van de getallen

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Voorbeelden:

$$31 = 3 \times 9 + 4 \implies 31 \text{ heeft rest } 4$$

$$1 = 0 \times 9 + 1 \implies 1 \text{ heeft rest } 1$$

$$3101 = 344 \times 9 + 5 \implies 3101 \text{ heeft rest } 5$$

Algemeen: als n na deling door 9 rest 0 heeft, kunnen we schrijven: $n = 9k$ (met k weer een geheel getal). Als n na deling door 9 rest 1 heeft, kunnen we schrijven: $n = 9k + 1$

Deling met rest

De rest na deling door 9 van een geheel getal n is één van de getallen

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Voorbeelden:

$$31 = 3 \times 9 + 4 \implies 31 \text{ heeft rest } 4$$

$$1 = 0 \times 9 + 1 \implies 1 \text{ heeft rest } 1$$

$$3101 = 344 \times 9 + 5 \implies 3101 \text{ heeft rest } 5$$

Algemeen: als n na deling door 9 rest 0 heeft, kunnen we schrijven: $n = 9k$ (met k weer een geheel getal). Als n na deling door 9 rest 1 heeft, kunnen we schrijven: $n = 9k + 1$, enzovoort.

Rest na deling door 9 van een derdemacht

Stel n is een geheel getal. Als we de rest na deling door 9 van n weten, dan weten we ook de rest na deling door 9 van n^3 .

Rest na deling door 9 van een derdemacht

Stel n is een geheel getal. Als we de rest na deling door 9 van n weten, dan weten we ook de rest na deling door 9 van n^3 .

Tabel:

n	n^3	haakjes wegwerken	rest

Rest na deling door 9 van een derdemacht

Stel n is een geheel getal. Als we de rest na deling door 9 van n weten, dan weten we ook de rest na deling door 9 van n^3 .

Tabel:

n	n^3	haakjes wegwerken	rest
$9k$	$(9k)^3$	$729k^3$	

Rest na deling door 9 van een derdemacht

Stel n is een geheel getal. Als we de rest na deling door 9 van n weten, dan weten we ook de rest na deling door 9 van n^3 .

Tabel:

n	n^3	haakjes wegwerken	rest
$9k$	$(9k)^3$	$729k^3$	0

Rest na deling door 9 van een derdemacht

Stel n is een geheel getal. Als we de rest na deling door 9 van n weten, dan weten we ook de rest na deling door 9 van n^3 .

Tabel:

n	n^3	haakjes wegwerken	rest
$9k$	$(9k)^3$	$729k^3$	0
$9k + 1$	$(9k + 1)^3$	$729k^3 + 243k^2 + 27k + 1$	

Rest na deling door 9 van een derdemacht

Stel n is een geheel getal. Als we de rest na deling door 9 van n weten, dan weten we ook de rest na deling door 9 van n^3 .

Tabel:

n	n^3	haakjes wegwerken	rest
$9k$	$(9k)^3$	$729k^3$	0
$9k + 1$	$(9k + 1)^3$	$729k^3 + 243k^2 + 27k + 1$	1

Rest na deling door 9 van een derdemacht

Stel n is een geheel getal. Als we de rest na deling door 9 van n weten, dan weten we ook de rest na deling door 9 van n^3 .

Tabel:

n	n^3	haakjes wegwerken	rest
$9k$	$(9k)^3$	$729k^3$	0
$9k + 1$	$(9k + 1)^3$	$729k^3 + 243k^2 + 27k + 1$	1
$9k + 2$	$(9k + 2)^3$	$729k^3 + 486k^2 + 108k + 8$	

Rest na deling door 9 van een derdemacht

Stel n is een geheel getal. Als we de rest na deling door 9 van n weten, dan weten we ook de rest na deling door 9 van n^3 .

Tabel:

n	n^3	haakjes wegwerken	rest
$9k$	$(9k)^3$	$729k^3$	0
$9k + 1$	$(9k + 1)^3$	$729k^3 + 243k^2 + 27k + 1$	1
$9k + 2$	$(9k + 2)^3$	$729k^3 + 486k^2 + 108k + 8$	8

Rest na deling door 9 van een derdemacht

Stel n is een geheel getal. Als we de rest na deling door 9 van n weten, dan weten we ook de rest na deling door 9 van n^3 .

Tabel:

n	n^3	haakjes wegwerken	rest
$9k$	$(9k)^3$	$729k^3$	0
$9k + 1$	$(9k + 1)^3$	$729k^3 + 243k^2 + 27k + 1$	1
$9k + 2$	$(9k + 2)^3$	$729k^3 + 486k^2 + 108k + 8$	8
$9k + 3$	$(9k + 3)^3$	$729k^3 + 729k^2 + 243k + 27$	

Rest na deling door 9 van een derdemacht

Stel n is een geheel getal. Als we de rest na deling door 9 van n weten, dan weten we ook de rest na deling door 9 van n^3 .

Tabel:

n	n^3	haakjes wegwerken	rest
$9k$	$(9k)^3$	$729k^3$	0
$9k + 1$	$(9k + 1)^3$	$729k^3 + 243k^2 + 27k + 1$	1
$9k + 2$	$(9k + 2)^3$	$729k^3 + 486k^2 + 108k + 8$	8
$9k + 3$	$(9k + 3)^3$	$729k^3 + 729k^2 + 243k + 27$	0

Rest na deling door 9 van een derdemacht

Stel n is een geheel getal. Als we de rest na deling door 9 van n weten, dan weten we ook de rest na deling door 9 van n^3 .

Tabel:

n	n^3	haakjes wegwerken	rest
$9k$	$(9k)^3$	$729k^3$	0
$9k + 1$	$(9k + 1)^3$	$729k^3 + 243k^2 + 27k + 1$	1
$9k + 2$	$(9k + 2)^3$	$729k^3 + 486k^2 + 108k + 8$	8
$9k + 3$	$(9k + 3)^3$	$729k^3 + 729k^2 + 243k + 27$	0
$9k + 4$	$(9k + 4)^3$	$729k^3 + 972k^2 + 432k + 64$	1
$9k + 5$	$(9k + 5)^3$	$729k^3 + 1215k^2 + 675k + 125$	8
$9k + 6$	$(9k + 6)^3$	$729k^3 + 1458k^2 + 972k + 216$	0
$9k + 7$	$(9k + 7)^3$	$729k^3 + 1701k^2 + 1323k + 343$	1
$9k + 8$	$(9k + 8)^3$	$729k^3 + 1944k^2 + 1728k + 512$	8

Een voorbeeld

Puzzel. Los op in $\mathbb{Z}$, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3101.$$

Oplossing. Een derdemacht levert na deling door 9 altijd rest 0, 1 of 8 op. Het getal 3101 geeft na deling door 9 **rest 5**. We maken een tabel met “resten na deling door 9”:

Een voorbeeld

Puzzel. Los op in $\mathbb{Z}$, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3101.$$

Oplossing. Een derdemacht levert na deling door 9 altijd rest 0, 1 of 8 op. Het getal 3101 geeft na deling door 9 **rest 5**. We maken een tabel met “resten na deling door 9”:

[illegible]

Een voorbeeld

Puzzel. Los op in $\mathbb{Z}$, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3101.$$

Oplossing. Een derdemacht levert na deling door 9 altijd rest 0, 1 of 8 op. Het getal 3101 geeft na deling door 9 **rest 5**. We maken een tabel met “resten na deling door 9”:

rest van:	x^3	y^3	z^3	$x^3 + y^3 + z^3$	x^3	y^3	z^3	$x^3 + y^3 + z^3$
1	8	8						

Een voorbeeld

Puzzel. Los op in $\mathbb{Z}$, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3101.$$

Oplossing. Een derdemacht levert na deling door 9 altijd rest 0, 1 of 8 op. Het getal 3101 geeft na deling door 9 **rest 5**. We maken een tabel met “resten na deling door 9”:

rest van:	x^3	y^3	z^3	$x^3 + y^3 + z^3$	x^3	y^3	z^3	$x^3 + y^3 + z^3$
1	8	8	8					

Een voorbeeld

Puzzel. Los op in $\mathbb{Z}$, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3101.$$

Oplossing. Een derdemacht levert na deling door 9 altijd rest 0, 1 of 8 op. Het getal 3101 geeft na deling door 9 **rest 5**. We maken een tabel met “resten na deling door 9”:

rest van:	x^3	y^3	z^3	$x^3 + y^3 + z^3$	x^3	y^3	z^3	$x^3 + y^3 + z^3$
	0	0	0	0	0	8	8	7
	0	0	1	1	1	1	1	3
	0	0	8	8	1	1	8	1
	0	1	1	2	1	8	8	8
	0	1	8	0	8	8	8	6

Een voorbeeld

Puzzel. Los op in $\mathbb{Z}$, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3101.$$

Oplossing. Een derdemacht levert na deling door 9 altijd rest 0, 1 of 8 op. Het getal 3101 geeft na deling door 9 **rest 5**. We maken een tabel met “resten na deling door 9”:

rest van:	x^3	y^3	z^3	$x^3 + y^3 + z^3$	x^3	y^3	z^3	$x^3 + y^3 + z^3$
	0	0	0	0	0	8	8	7
	0	0	1	1	1	1	1	3
	0	0	8	8	1	1	8	1
	0	1	1	2	1	8	8	8
	0	1	8	0	8	8	8	6

We krijgen nooit 5 als uitkomst. Er zijn dus geen oplossingen!

Het voorbeeld van Reichardt en Lind

Probleem. Los op in $\mathbb{Z}$, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$2y^2 = x^4 - 17.$$

Poging. Laten we eerst eens kijken naar resten na **deling door 2**. Als $x = 1$ en $y = 0$, dan zijn de resten van linkerlid en rechterlid beide gelijk aan 0.

Het voorbeeld van Reichardt en Lind

Probleem. Los op in $\mathbb{Z}$, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$2y^2 = x^4 - 17.$$

Poging. Laten we eerst eens kijken naar resten na **deling door 2**. Als $x = 1$ en $y = 0$, dan zijn de resten van linkerlid en rechterlid beide gelijk aan 0. **Deling door 3** dan misschien?

Het voorbeeld van Reichardt en Lind

Probleem. Los op in $\mathbb{Z}$, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$2y^2 = x^4 - 17.$$

Poging. Laten we eerst eens kijken naar resten na **deling door 2**. Als $x = 1$ en $y = 0$, dan zijn de resten van linkerlid en rechterlid beide gelijk aan 0. **Deling door 3** dan misschien? Nee: als $x = 1$ en $y = 0$, dan zijn de resten van linkerlid en rechterlid beide gelijk aan 2.

Het voorbeeld van Reichardt en Lind

Probleem. Los op in $\mathbb{Z}$, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$2y^2 = x^4 - 17.$$

Poging. Laten we eerst eens kijken naar resten na **deling door** 2. Als $x = 1$ en $y = 0$, dan zijn de resten van linkerlid en rechterlid beide gelijk aan 0. **Deling door 3** dan misschien? Nee: als $x = 1$ en $y = 0$, dan zijn de resten van linkerlid en rechterlid beide gelijk aan 2. **Deling door 4:** als $x = 1$ en $y = 0$, dan zijn de resten van linkerlid en rechterlid beide gelijk aan 0. Enzovoorts...

Het voorbeeld van Reichardt en Lind

Probleem. Los op in $\mathbb{Z}$, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$2y^2 = x^4 - 17.$$

Poging. We proberen weer een tegenspraak af te leiden door te kijken naar resten na deling door n .

Het voorbeeld van Reichardt en Lind

Probleem. Los op in $\mathbb{Z}$, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$2y^2 = x^4 - 17.$$

Poging. We proberen weer een tegenspraak af te leiden door te kijken naar resten na deling door n . In een tabel:

n	x	y	n	x	y
2	1	0	7	3	2
3	1	1	8	1	2
4	1	0	9	1	1
5	0	2	10	5	2
6	1	1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Nog geen tegenspraak in zicht...

Het voorbeeld van Reichardt en Lind

Probleem. Los op in $\mathbb{Z}$, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$2y^2 = x^4 - 17.$$

Poging. We proberen weer een tegenspraak af te leiden door te kijken naar resten na deling door n . In een tabel:

n	x	y	n	x	y
2	1	0	7	3	2
3	1	1	8	1	2
4	1	0	9	1	1
5	0	2	10	5	2
6	1	1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Nog geen tegenspraak in zicht... Sterker nog, Reichardt en Lind bewezen dat we die ook niet krijgen, voor geen enkele n .

Het voorbeeld van Reichardt en Lind

Probleem. Los op in $\mathbb{Z}$, of bewijs dat er geen oplossing bestaat:

$$2y^2 = x^4 - 17.$$

Poging. We proberen weer een tegenspraak af te leiden door te kijken naar resten na deling door n . In een tabel:

n	x	y	n	x	y
2	1	0	7	3	2
3	1	1	8	1	2
4	1	0	9	1	1
5	0	2	10	5	2
6	1	1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

We krijgen zo dus nooit een tegenspraak. Toch heeft bovenstaande vergelijking geen oplossing in $\mathbb{Z}$!

Hoe nu verder?

Rekenen met “deling door rest” is dus niet het definitieve antwoord.

Hoe nu verder?

Rekenen met “deling door rest” is dus niet het definitieve antwoord.

Idee: een methode bedenken die **wel** altijd werkt!

David Hilbert



David Hilbert (1862-1943)

Für uns gibt es kein Ignorabimus, und meiner Meinung nach auch für die Naturwissenschaft überhaupt nicht. [...] Statt des törichten Ignorabimus heiße im Gegenteil unsere Losung:

*Wir müssen wissen,
Wir werden wissen.*

Hilberts tiende probleem

Op het 2^e Internationale Congres voor Wiskundigen in Parijs in 1900 gaf David Hilbert een voordracht met de eenvoudige titel *Mathematische Probleme*. Hij besprak 23 problemen die volgens hem in de 20^e eeuw moesten worden opgelost.

Probleem 10

Gegeven een Diophantische vergelijking in een willekeurig aantal onbekenden en met geheeltallige coëfficiënten: ontwerp een procedure waardoor in een eindig aantal stappen kan worden vastgesteld of de vergelijking oplosbaar is in gehele getallen.

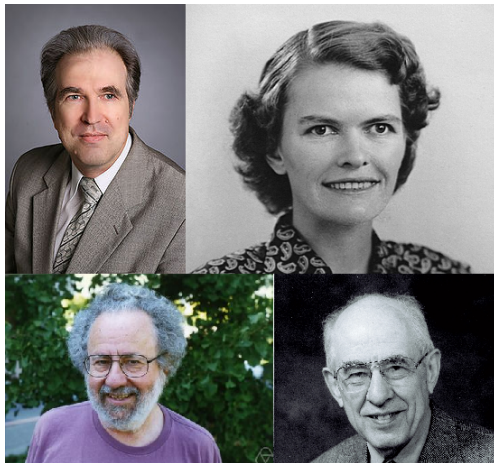
Wir werden nie wissen...

Probleem 10

Gegeven een Diophantische vergelijking in een willekeurig aantal onbekenden en met geheeltallige coëfficiënten: ontwerp een procedure waardoor in een eindig aantal stappen kan worden vastgesteld of de vergelijking oplosbaar is in gehele getallen.

In 1970 bewees **Joeri Matijasevitsj** dat zo'n procedure niet kan bestaan! Matijasevitsj' stelling was de laatste bouwsteen in een langslpende wiskundige ontwikkeling, waaraan eerder **Julia Robinson**, **Martin Davis** en **Hilary Putnam** hadden bijgedragen.

Matijasevitsj, Robinson, Davis en Putnam



Hoe nú verder?

Goed, Hilberts tiende probleem is kennelijk onoplosbaar.
Laten we dus een vraag bedenken die **wel** een antwoord heeft!

Hoe nú verder?

Goed, Hilberts tiende probleem is kennelijk onoplosbaar.
Laten we dus een vraag bedenken die **wel** een antwoord heeft!
Deze misschien?

Probleem 10 over $\mathbb{Q}$

*Gegeven een Diophantische vergelijking in een willekeurig aantal onbekenden en met **rationale** coëfficiënten: ontwerp een procedure waardoor in een eindig aantal stappen kan worden vastgesteld of de vergelijking oplosbaar is in **rationale** getallen.*

Hoe nú verder?

Goed, Hilberts tiende probleem is kennelijk onoplosbaar.
Laten we dus een vraag bedenken die **wel** een antwoord heeft!
Deze misschien?

Probleem 10 over $\mathbb{Q}$

*Gegeven een Diophantische vergelijking in een willekeurig aantal onbekenden en met **rationale** coëfficiënten: ontwerp een procedure waardoor in een eindig aantal stappen kan worden vastgesteld of de vergelijking oplosbaar is in **rationale** getallen.*

Status van dit probleem: vooralsnog onopgelost.

Vergelijkingen in twee variabelen, oplossingen in $\mathbb{Q}$

Wat kunnen we wél?

Voor Diophantische vergelijkingen in **twee** variabelen ziet de situatie er aanmerkelijk beter uit dan voor het algemene geval; helemáál als we oplossingen in $\mathbb{Q}$ toestaan.

Vergelijkingen in twee variabelen, oplossingen in $\mathbb{Q}$

Wat kunnen we wél?

Voor Diophantische vergelijkingen in **twee** variabelen ziet de situatie er aanmerkelijk beter uit dan voor het algemene geval; helemáál als we oplossingen in $\mathbb{Q}$ toestaan.

In de theorie speelt **meetkunde** een doorslaggevende rol.

Huidige stand van zaken

Vergelijkingen van het type

$$f(x, y) = 0$$

worden tegenwoordig opgevat als een **kromme**. (Teken bijvoorbeeld de oplossingen in $\mathbb{R}^2$.)

Huidige stand van zaken

Vergelijkingen van het type

$$f(x, y) = 0$$

worden tegenwoordig opgevat als een **kromme**. (Tekenen bijvoorbeeld de oplossingen in $\mathbb{R}^2$.)

Ook voor krommen is het antwoord op Hilberts vraag nog niet bekend...

... maar de theorie is inmiddels zo omvangrijk en krachtig dat we de “meeste” vergelijkingen van bovenstaand type (en met enigszins beschaafde coëfficiënten) wel aan kunnen.

Vergelijkingen in twee variabelen, oplossingen in $\mathbb{Q}$

Beschouw een Diophantische vergelijking in twee variabelen

$$f(x, y) = 0.$$

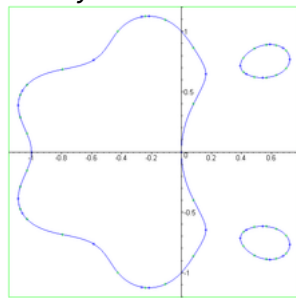
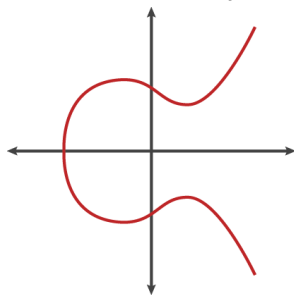
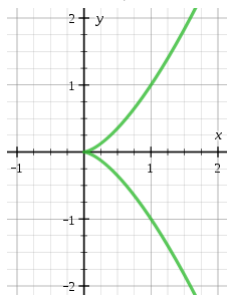
Tekent men de oplossingsverzameling in $\mathbb{R}^2$, dan krijgt men een **kromme** in het vlak (“een impliciet gedefinieerde kromme”).

Vergelijkingen in twee variabelen, oplossingen in $\mathbb{Q}$

Beschouw een Diophantische vergelijking in twee variabelen

$$f(x, y) = 0.$$

Tekent men de oplossingsverzameling in $\mathbb{R}^2$, dan krijgt men een **kromme** in het vlak (“een impliciet gedefinieerde kromme”). Hieronder ziet men o.a. $y^2 = x^3$ en $y^2 = x^3 - x + 1$.



Het geslacht van een kromme

Meetkundigen delen krommen in naar hun **geslacht**; dit is een niet-negatief geheel getal, vaak genoteerd als g .

De eigenschappen van de vergelijking $f(x, y)$ zijn goed te begrijpen in termen van de g van de bijbehorende kromme.

Het geslacht van een kromme

Meetkundigen delen krommen in naar hun **geslacht**; dit is een niet-negatief geheel getal, vaak genoteerd als g .

De eigenschappen van de vergelijking $f(x, y)$ zijn goed te begrijpen in termen van de g van de bijbehorende kromme.

g	eigenschappen van de kromme
$g = 0$	
$g = 1$	
$g > 1$	

Het geslacht van een kromme

Meetkundigen delen krommen in naar hun **geslacht**; dit is een niet-negatief geheel getal, vaak genoteerd als g .

De eigenschappen van de vergelijking $f(x, y)$ zijn goed te begrijpen in termen van de g van de bijbehorende kromme.

g	eigenschappen van de kromme
$g = 0$	al dan niet bestaan van een oplossing is eenvoudig na te gaan (met modularekenen!); zo ja, dan altijd oneindig veel, en er is een formule die ze allemaal geeft
$g = 1$	
$g > 1$	

Het geslacht van een kromme

Meetkundigen delen krommen in naar hun **geslacht**; dit is een niet-negatief geheel getal, vaak genoteerd als g .

De eigenschappen van de vergelijking $f(x, y)$ zijn goed te begrijpen in termen van de g van de bijbehorende kromme.

g	eigenschappen van de kromme
$g = 0$	al dan niet bestaan van een oplossing is eenvoudig na te gaan (met modularekenen!); zo ja, dan altijd oneindig veel, en er is een formule die ze allemaal geeft
$g = 1$	niet altijd gemakkelijk na te gaan of er een oplossing is; zo ja, dan hebben we te maken met een elliptische kromme , waarover zeer uitgebreide theorie bestaat; zijn er oneindig veel oplossingen, dan is er geen formule
$g > 1$	

Het geslacht van een kromme

Meetkundigen delen krommen in naar hun **geslacht**; dit is een niet-negatief geheel getal, vaak genoteerd als g .

De eigenschappen van de vergelijking $f(x, y)$ zijn goed te begrijpen in termen van de g van de bijbehorende kromme.

g	eigenschappen van de kromme
$g = 0$	al dan niet bestaan van een oplossing is eenvoudig na te gaan (met modularekenen!); zo ja, dan altijd oneindig veel, en er is een formule die ze allemaal geeft
$g = 1$	niet altijd gemakkelijk na te gaan of er een oplossing is; zo ja, dan hebben we te maken met een elliptische kromme , waarover zeer uitgebreide theorie bestaat; zijn er oneindig veel oplossingen, dan is er geen formule
$g > 1$	altijd eindig veel oplossingen (Gerd Faltings, 1983)

Toepassing

Zij $n > 0$ een geheel getal. Een vergelijking van de vorm

$$ax^n + by^n = c \quad (1)$$

hoort bij een kromme van geslacht

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Toepassing

Zij $n > 0$ een geheel getal. Een vergelijking van de vorm

$$ax^n + by^n = c \quad (1)$$

hoort bij een kromme van geslacht

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Als $n > 3$, dan hebben we $g > 1$, en dus heeft (1) slechts eindig veel oplossingen in rationale getallen – *en dus ook eindig veel oplossingen in gehele getallen!*