

OVER BALKEN WAARVAN HET VOLUME GELIJK IS AAN DE OPPERVLAKTE

RENÉ PANNEKOEK

DE VRAAG

Stel we hebben een balk B met ribbelengten a , b en c . Voor het gemak nemen we tevens steeds aan dat

$$a \leq b \leq c.$$

Dan is het volume van B gelijk aan

$$V = abc$$

en de oppervlakte aan

$$O = 2(ab + ac + bc).$$

We vragen ons nu af: zijn er balken B waarvoor a , b en c positieve gehele getallen zijn, en waarvan het volume gelijk is aan de oppervlakte? Met andere woorden: bestaan er drietallen (a, b, c) van positieve gehele getallen waarvoor geldt dat

$$abc = 2(ab + ac + bc)?$$

DE OPLOSSING

Als we bij de laatste vergelijking zowel het linker- als het rechterlid door abc delen, dan staat er

$$1 = \frac{2}{c} + \frac{2}{b} + \frac{2}{a},$$

en als we de termen herschikken krijgen we

$$(1) \quad \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1.$$

Een andere manier om dit te verwoorden is: vind drie breuken waarvan de teller 2 is en die samen 1 zijn. Een goede oefening in het werken met breuken! We zullen in het vervolg van deze tekst zien dat er bovendien genoeg oplossingen zijn om deze zoektocht tot een interessante te maken.

De eerste belangrijke opmerking is: a , b en c zijn niet alledrie groter dan 6. Stel namelijk dat a , b en c alledrie groter zouden zijn dan 6, dan zijn $2/a$, $2/b$ en $2/c$ alledrie kleiner dan $2/6$, en dan is hun som kleiner dan één:

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} < \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = 1,$$

Date: Wednesday 29th January, 2014.

hetgeen in tegenspraak is met de oorspronkelijke vergelijking (1). We weten nu dus dat tenminste één van de onbekenden a , b en c hooguit 6 is. Omdat we hebben aangenomen dat

$$a \leq b \leq c,$$

moet dus wel gelden dat $a \leq 6$. We gaan nu een gevalsonderscheid doen, waarin we de gevallen $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$, $a = 5$ en $a = 6$ afzonderlijk bekijken.

DE GEVALLEN $a = 1$ EN $a = 2$

De eerste twee gevallen zijn gemakkelijk uit te sluiten.

$\boxed{a = 1}$ Als $a = 1$, dan is het linkerlid van (1) gelijk aan $2/1 + 2/b + 2/c > 2$, hetgeen nooit gelijk kan zijn aan het rechterlid, dat gelijk is aan 1. Het geval $a = 1$ doet zich dus niet voor.

$\boxed{a = 2}$ Als $a = 2$, dan is het linkerlid van (1) gelijk aan $2/2 + 2/b + 2/c > 1$, en dus altijd groter dan 1. Het geval $a = 2$ doet zich dus eveneens niet voor.

DE OVERIGE GEVALLEN

Voor alle overgebleven waarden van a vinden we wel oplossingen.

$\boxed{a = 3}$ Als $a = 3$, dan wordt de vergelijking (1)

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1,$$

hetgeen we omschrijven tot

$$\frac{2}{3} + \frac{2b + 2c}{bc} = 1.$$

Trekken we van beide leden $2/3$ af, dan krijgen we

$$\frac{2b + 2c}{bc} = \frac{1}{3}.$$

Door kruislings te vermenigvuldigen vinden we

$$bc = 6b + 6c.$$

We herleiden het rechterlid op nul:

$$bc - 6b - 6c = 0$$

en tellen tenslotte bij beide leden 36 op:

$$(2) \quad bc - 6b - 6c + 36 = 36.$$

De truc is nu om het linkerlid te ontbinden in factoren: er geldt

$$bc - 6b - 6c + 36 = (b - 6)(c - 6)$$

en dus kunnen we vergelijking (2) schrijven als

$$(b - 6)(c - 6) = 36.$$

Nu zijn b en c gehele getallen, en dus zijn $b-6$ en $c-6$ dat ook. Bovendien is het product van $b-6$ en $c-6$ gelijk aan 36. Laten we alle paren van positieve gehele getallen m en n zodanig dat $mn = 36$ eens op een rijtje zetten:

m	n	m	n
1	36	9	4
2	18	12	3
3	12	18	2
4	9	36	1
6	6		

Er zijn dus 9 manieren om 36 te schrijven als product van twee positieve gehele getallen, en daarvan is

$$(b-6)(c-6) = 36$$

er eentje. Als we alle mogelijkheden in bovenstaande tabel langsgaan, dan vinden we de volgende negen mogelijkheden:

$$\begin{aligned} b-6 &= 1, c-6 = 36 \implies b = 7, c = 42 \\ b-6 &= 2, c-6 = 18 \implies b = 8, c = 24 \\ b-6 &= 3, c-6 = 12 \implies b = 9, c = 18 \\ b-6 &= 4, c-6 = 9 \implies b = 10, c = 15 \\ b-6 &= 6, c-6 = 6 \implies b = 12, c = 12 \\ b-6 &= 9, c-6 = 4 \implies b = 15, c = 10 \\ b-6 &= 12, c-6 = 3 \implies b = 18, c = 9 \\ b-6 &= 18, c-6 = 2 \implies b = 24, c = 8 \\ b-6 &= 36, c-6 = 1 \implies b = 42, c = 7 \end{aligned}$$

Merk op dat we wegens $a \leq b \leq c$ alleen de eerste vijf oplossingen goedkeuren (dit is ook logisch, want de laatste vier oplossingen krijg je gewoon door bij de eerste vier oplossingen de waarden van b en c om te keren).

De oplossingen die we zo vinden voor (1) zijn dus: $(a, b, c) = (3, 7, 42)$, $(a, b, c) = (3, 8, 24)$, $(a, b, c) = (3, 9, 18)$, $(a, b, c) = (3, 10, 15)$ en $(a, b, c) = (3, 12, 12)$.

$a = 4$ De analyse van het geval $a = 4$ verloopt analoog aan die van het geval $a = 3$. Als $a = 4$, dan wordt de vergelijking (1)

$$\frac{2}{4} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1,$$

hetgeen we omschrijven tot

$$\frac{1}{2} + \frac{2b+2c}{bc} = 1.$$

Trekken we van beide leden $1/2$ af, dan krijgen we

$$\frac{2b+2c}{bc} = \frac{1}{2}.$$

Door kruislings te vermenigvuldigen vinden we

$$bc = 4b + 4c.$$

We herleiden het rechterlid op nul:

$$bc - 4b - 4c = 0$$

en tellen tenslotte bij beide leden 16 op:

$$(3) \quad bc - 4b - 4c + 16 = 16.$$

De truc is weer gelegen in ontbinding van het linkerlid: er geldt

$$bc - 4b - 4c + 16 = (b - 4)(c - 4)$$

en dus kunnen we vergelijking (4) schrijven als

$$(b - 4)(c - 4) = 16.$$

Laten we weer alle paren van positieve gehele getallen m en n zodanig dat $mn = 16$ in een tabel zetten:

m	n	m	n
1	16	8	2
2	8	1	16
4	4		

Er zijn dus 5 manieren om 16 te schrijven als product van twee positieve gehele getallen, en daarvan is

$$(b - 4)(c - 4) = 16$$

er weer eentje. Net als in het geval $a = 3$ kunnen we de tweede kolom van de tabel buiten beschouwing laten. Als we alle mogelijkheden in bovenstaande tabel langsgaan, dan vinden we de volgende negen mogelijkheden:

$$b - 4 = 1, c - 4 = 16 \implies b = 5, c = 20$$

$$b - 4 = 2, c - 4 = 8 \implies b = 6, c = 12$$

$$b - 4 = 4, c - 4 = 4 \implies b = 8, c = 8$$

De oplossingen die we zo vinden voor (1) zijn dus: $(a, b, c) = (4, 5, 20)$, $(a, b, c) = (4, 6, 12)$ en $(a, b, c) = (4, 8, 8)$.

$a = 5$ De analyse van het geval $a = 5$ verloopt grotendeels analoog aan die van de vorige twee gevallen. In één stap is echter een nieuwe truc vereist. Als $a = 5$, dan wordt de vergelijking (1)

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1,$$

hetgeen we omschrijven tot

$$\frac{2}{5} + \frac{2b + 2c}{bc} = 1.$$

Trekken we van beide leden $2/5$ af, dan krijgen we

$$\frac{2b + 2c}{bc} = \frac{3}{5}.$$

Door kruislings te vermenigvuldigen vinden we

$$3bc = 10b + 10c.$$

We herleiden het rechterlid op nul:

$$3bc - 10b - 10c = 0.$$

Nu doen we iets wat we in de vorige twee gevallen niet deden: we vermenigvuldigen beide leden met 3:

$$9bc - 30b - 30c = 0,$$

en tellen tenslotte bij beide leden 100 op:

$$(4) \quad 9bc - 30b - 30c + 100 = 100.$$

Dit heeft weer tot gevolg dat we tot ontbinding van het linkerlid over kunnen gaan. Er geldt immers:

$$9bc - 30b - 30c + 100 = (3b - 10)(3c - 10)$$

en dus kunnen we vergelijking (4) schrijven als

$$(3b - 10)(3c - 10) = 100.$$

Laten we weer alle paren van positieve gehele getallen m en n zodanig dat $mn = 100$ in een tabel zetten:

m	n	m	n
1	100	20	5
2	50	25	4
4	25	50	2
5	20	100	1
10	10		

Er zijn dus 9 manieren om 100 te schrijven als product van twee positieve gehele getallen, en daarvan is

$$(3b - 10)(3c - 10) = 100$$

er weer eentje. Net als in het geval $a = 3$ kunnen we de tweede kolom van de tabel buiten beschouwing laten. *Anders dan in de voorgaande gevallen* zullen we zien dat niet elke schrijfwijze van 100 als een product mn aanleiding geeft tot een oplossing van onze vergelijking (1) in gehele getallen. Lopen we weer bij alle mogelijkheden langs, dan vinden we de volgende mogelijkheden:

$$3b - 10 = 1, 3c - 10 = 100 \implies b = 11/3, c = 110/3$$

$$3b - 10 = 2, 3c - 10 = 50 \implies b = 4, c = 20$$

$$3b - 10 = 4, 3c - 10 = 25 \implies b = 14/3, c = 35/3$$

$$3b - 10 = 5, 3c - 10 = 20 \implies b = 5, c = 10$$

$$3b - 10 = 10, 3c - 10 = 10 \implies b = 20/3, c = 20/3$$

De eerste, derde en vijfde oplossing geven geen gehele getallen voor b en c , dus die vallen af. De tweede oplossing geeft $(a, b, c) = (5, 4, 20)$, maar die hadden we bij het geval $a = 4$ (maar dan met a en b omgewisseld). De enige nieuwe oplossing die we vinden is dus de vierde: $(a, b, c) = (5, 5, 10)$.

$\boxed{a = 6}$ In vergelijking met de voorgaande gevallen kunnen we bij $a = 6$ enigszins de bocht afsnijden. Herinner je dat we hadden afgesproken:

$$a \leq b \leq c.$$

Welnu, laten we nu eens de aanname doen dat tenminste één van de onbekenden b en c op z'n minst 7 is. We zullen laten zien dat deze aanname niet waar kan zijn. Omdat $b \leq c$ geldt dan wegens de aanname dat $c \geq 7$. Ook geldt wegens $a \leq b$ dat $b \geq 6$. Dan krijgen we

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = \frac{2}{6} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} < \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{7},$$

waar we hebben gebruikt dat $b \geq 6$ en $c \geq 7$. Maar nu geldt voor het rechterlid van bovenstaande vergelijking dat

$$\frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{7} = \frac{20}{21} < 1,$$

en dit is in tegenspraak met onze vergelijking (1).

We zien uit het bovenstaande argument dat b en c beide hooguit zes zijn, en omdat $a \leq b \leq c$ moet dus wel gelden dat $a = b = c = 6$. We constateren dat dit inderdaad een oplossing geeft; de tiende en laatste oplossing is dus $(a, b, c) = (6, 6, 6)$.

HET RESULTAAT

We zetten de tien gevonden oplossingen nog eens in een tabel, met daarbij het volume (en dus ook de oppervlakte!) van de corresponderende balk.

a	b	c	abc	a	b	c	abc
3	7	42	882	4	5	20	400
3	8	24	576	4	6	12	288
3	9	18	486	4	8	8	256
3	10	15	450	5	5	10	250
3	12	12	432	6	6	6	216