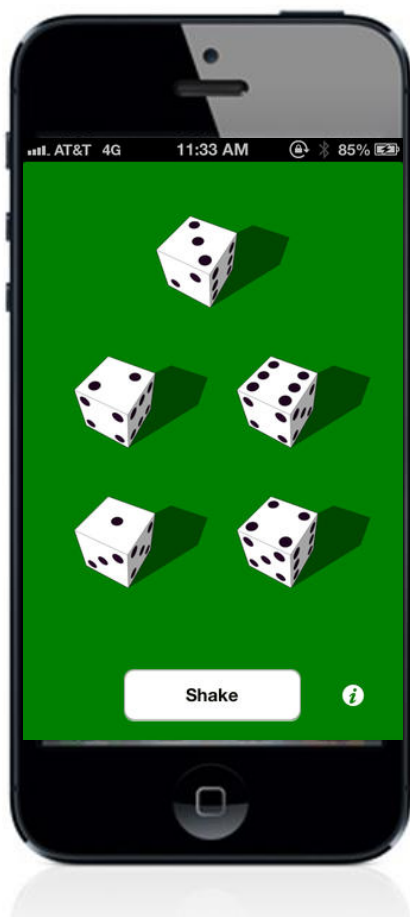




# Vakdidactiek van de Kansrekening

## Het Kansexperiment met Smartphone/ Ipad/ Tablet

### Inhoud

|    |             |   |
|----|-------------|---|
| 1. | Inleiding   | 2 |
| 2. | Het Project | 3 |

### Bijlagen:

|    |                                        |    |
|----|----------------------------------------|----|
| A. | Lesopzet                               | 5  |
| B. | Werkblad                               | 7  |
| C. | Verkenning Literatuur                  | 12 |
| D. | Gerichte Literatuurstudie              | 15 |
| E. | Samenvatting Gerichte Literatuurstudie | 19 |
| F. | Evaluatie Les                          | 20 |
| G. | Literatuurlijst                        | 26 |



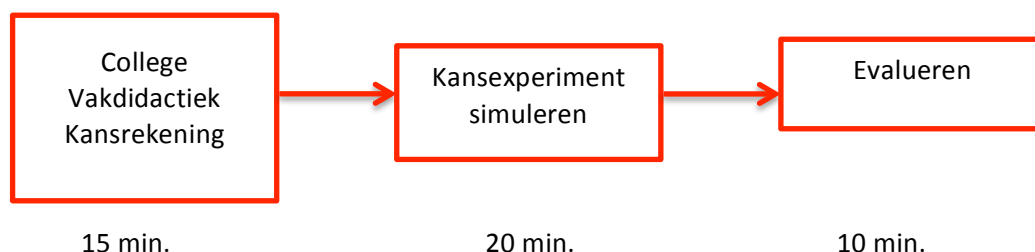
## 1. Inleiding

Ik ben Frederique Lampe. Sinds dit schooljaar werk ik op het Erasmiaans Gymnasium te Rotterdam. Hiervoor heb ik drie jaar als wiskunde docent gewerkt op het Luzac College Rotterdam. Na drie jaar wiskunde A te hebben gegeven aan de eindexamenklas van de havo en vwo, zie ik elk jaar leerlingen weer moeite hebben met kansrekening. Het gaat goed, zolang de stof per paragraaf getoetst wordt. Zodra leerlingen alle kansrekening onderwerpen door elkaar heen krijgen, raken ze snel in de war. Ze weten ook vaak niet wat voor antwoord ze kunnen verwachten waardoor ze niet in staat zijn hun antwoorden te controleren.

Omdat ik tijdens de lerarenopleiding geen vakdidactiek op gebied van kans heb gehad, leek dit mij een uitgewezen *kans* om mij te verdiepen in de vakdidactiek van kansrekening. Tijdens mijn vakdidactisch afstudeerproject voor de lerarenopleiding Hogeschool Rotterdam in juni 2013 (Begeleid door A. Monquil) heb ik ingezoomd op de vakdidactiek achter kansrekening op de middelbare school. Tijdens dit project ben ik op zoek gegaan om een antwoord te vinden op de vraag hoe je als docent de leerlingen meer begrip kan bij brengen op gebied van kans. Aan de hand van een literatuurstudie over kansrekening (Zie Bijlagen B,C en D), heb ik een les ontworpen, waarbij er een kansexperiment uitgevoerd wordt. Deze les heb ik zelf ook gedaan en geëvalueerd. (Zie Bijlage F)

Omdat ik veel goede reacties heb gekregen op mijn lesopzet (Zie Bijlage A en B) van de docenten van de Hogeschool en mijn collega's en omdat deze les gemakkelijk uitgevoerd kan worden met moderne middelen (Iphone/Ipad/tablet) in de klas, lijkt het me leuk om dit aan andere docenten te delen. Deze lesopzet kan goed omgevormd worden als werkgroep/workshop tijdens de Nationale Wiskunde Dagen. Aangezien ik flink de diepte in ben gegaan in de vakdidactiek van de kansrekening, zou ik tijdens de werkgroep/workshop tevens andere leraren een presentatie kunnen geven over de vakdidactiek van kansrekening en mijn ervaringen met deze les. (Zie Bijlage F) Door andere wiskundeleraren tijdens de National Wiskunde Dagen het experiment zelf te laten doen, zien ze hoe eenvoudig het is een kansexperiment in een korte tijd met leerlingen uit te voeren door moderne middelen in te zetten.

De werkgroep/workshop kan in 45 minuten uitgevoerd worden. Hieronder is de planning voor de workshop schematisch weergegeven.



Verder staat in dit document beknopt beschreven wat ik precies heb gedaan tijdens mijn afstudeerproject en wordt er de nodige achtergrondinformatie gegeven.



## 2. Het Project

Tijdens mijn vakdidactisch afstudeerproject begon ik met de zoektocht naar hoe ik leerlingen meer begrip bij kon brengen met kansrekenen. Na drie jaar lesgeven aan havo 4 en 5 wiskunde A merkte ik dat veel leerlingen moeite hadden met kansrekening. Wat kansrekening lastig maakt volgens Anastasiadou & Chadjipantelis, is dat een leerling bij kansrekening zowel een theoretische kans moet kunnen uitrekenen als een intuïtieve voorspelling moet kunnen doen. (Anastasiadou & Chadjipantelis, 2008) De literatuur rond kansrekening bracht mij nog op een ander interessant onderwerp gerelateerd aan kansrekening: Het stimuleren van de intuïtie tijdens het aanleren van kansrekening. Onderzoekers (Fishbein & Gazit, 1984) concludeerden dat de intuïtieve houding van leerlingen tijdens het leerproces niet genegeerd mag worden, omdat er anders een kans bestaat dat leerlingen zich laten misleiden door de rekenregels. Laat het nu net zo zijn dat de methode Getal en Ruimte vooral aandacht besteed aan de rekenmethodes bij kansrekenen. Mijn ervaring is dat leerlingen snel geneigd zijn de rekenmethodes door elkaar te halen.

Ik ging dus opzoek naar een lesopzet waarbij de leerlingen gestimuleerd werden hun intuïtieve voorspellingen te doen. Fishbein en Gazit concludeerden ook dat intuïtieve vaardigheden alleen worden aangeleerd, wanneer de leerling actief betrokken wordt bij de les. Papaïeronymou schreef dat docenten bewust moeten zijn van de kracht van simulaties als een techniek voor het oplossen van kansproblemen. (Papaïeronymou, 2010) Deze bovenstaande inzichten verkregen uit de literatuurstudie bracht mij bij het volgende ontwerp van een les: een les waarbij leerlingen een kansvraagstuk voor ogen krijgen, eerst een intuïtieve voorspelling doen, daarna het kansexperiment simuleren en vervolgens de theoretische kans uitrekenen. Deze les werd uitgevoerd en geëvalueerd.

### Doel van de les:

- Leerlingen intuïtief kansen laten voorspellen
- Leerlingen deze kansvraagstuk zowel empirisch (door middel van een experiment met een digitale applicatie) als theoretisch te laten berekenen en deze kansen met elkaar te vergelijken en te vergelijken met hun eerder gedane intuïtieve voorspelling.

Door deze actieve werkvorm waren de leerlingen op een andere manier bezig met kansrekening dan alleen sommetjes maken uit het boek. De leerlingen waren in staat een goede intuïtieve voorspelling te doen. Vrijwel alle groepjes van de pilotklas hadden de kansen van te voren intuïtief goed ingeschat. Na het doen van het experiment met behulp van een App op hun Smartphone, moesten de leerlingen de empirische kans uitrekenen en de theoretische kans uitrekenen. De leerlingen werden met behulp van een werkblad (Zie bijlage... ) eerst gevraagd om de een voorspelling doen op intuïtie, daarna de theoretische kans moeten uitrekenen en daarna aan de empirische kans uitrekenen door het experiment uit te voeren.

Opvallend om te zien was dat alle groepjes tijdens de les in staat waren om een juiste intuïtieve voorspelling te doen. Tijdens het uitrekenen van de kansen hebben de leerlingen alleen de neiging om zich weer te verliezen in de rekenmethodes. Ik denk dat het belangrijk is om leerlingen al meteen vanaf het begin van het onderwerp kansrekening gestimuleerd moeten worden om hun intuïtieve vaardigheden in te zetten en de antwoorden die ze uit kansberekening krijgen te checken aan de hand van hun voorspellingen. Nu vond deze les pas plaats aan het eind van het hoofdstuk. Door de leerlingen een kritische houding laten krijgen om antwoord te kunnen inschatten en controleren, zijn ze eerder in staat zich te verbeteren tijdens de kansrekening. Tijdens de les was gebleken dat de leerlingen in staat waren hun voorspellingen te vergelijken met de theoretische kans



en de empirische kans. Dit zal in de toekomst helpen bij later oplossen van kansexperimenten en er voor zorgen dat ze zich niet laten misleiden door rekenmethodes. Maar in welke maten dit effectief zal zijn, is tijdens dit project niet onderzocht. Dit zal een onderwerp zijn wat nader onderzocht kan worden.

Dit afstudeerproject heeft mij de kans gegeven om mij te verdiepen in de kansrekening. Dit project heeft mij heel veel inzicht gegeven in de didactiek van kansrekening en hoe ik op een andere manier met kans aan de slag kan gaan in de klas. Het heeft mij als docent gestimuleerd om actieve werkvormen te bedenken rond het onderwerp kansrekening. Uiteindelijk heeft dit project geleid tot een mooi product: Een lesvoorbereiding waarbij leerlingen actief aan de slag gaan met kansrekening en ze gestimuleerd worden hun intuïtieve vaardigheden te benutten. Daarom denk ik dat dit een leuk en origineel onderwerp is om tijdens de Nationale Wiskunde Dagen te presenteren.

#### **Dobbelsteen App op Smartphone**

Het gebruik van digitale tools in plaats van concrete middelen zoals echte dobbelstenen heeft als voordeel dat er meer uitkomsten gegenereerd kunnen worden in korte tijd omdat het veel sneller gaat. (NCTM, 2007) Daarom is er gekozen voor het gebruik van een virtuele dobbelsteen App Dices (App van Kaeli Soft Games, gratis te downloaden via de Appstore) voor op een Smartphone. Aangezien een groot aantal leerlingen per klas een Smartphone of Ipad/Tablet bezit, kan dit ingezet worden als kans simulator. Ik heb voor mijn les gekozen voor de Iphone App Dices aangezien deze Applicatie gratis is en omdat ingesteld kan worden met hoeveel dobbelstenen er gegooit wordt. Daarnaast kan er gekozen worden op welke manier er 'gegooit' wordt: door met de Smartphone te schudden of door op het knopje *Launch* te drukken.







## Bijlage A | Lesopzet

### De duur van de simulatie, groepssamenstelling en turflijst

Om met het experiment zo dicht mogelijk bij de theoretische kans te laten komen, moet een experiment zo vaak mogelijk uitgevoerd worden. Met de App Dices kan in een seconde gegooid worden met één of meerdere dobbelstenen tegelijk. Dan moet de uitkomst daarna ook nog genoteerd worden. Dat duurt ook nog ongeveer twee seconden. Dat maakt dat het uitvoeren van een enkel experiment 3 seconde in beslag neemt. Als het experiment dan 10 minuten lang duurt, wat tijds technisch haalbaar is in een lesuur (lesuur duurt 60 minuten), is het dus mogelijk om per groepje (600 seconden : 3 seconden = ) 200 uitkomsten te genereren. Om een experiment echt maximaal 3 seconde te laten duren, is er voor gekozen om de leerlingen in tweetallen te laten werken, zodat de ene leerling kan 'gooien' en de andere leerling kan noteren. Om snel de uitkomsten te kunnen noteren, is er gekozen voor een turflijst: een schema op het werkblad waarop de leerlingen enkel turfjes moesten zetten. Het opschrijven van elke uitkomst neemt hierdoor dus vrijwel geen onnodig lange tijd in beslag. Om er voor te zorgen dat de resultaten afkomstig het experiment zo dicht mogelijk bij de theoretische kans uit te komen, zullen we aan het eind van de les alle gegevens van alle groepjes van de klas samenvoegen en de empirische kans uit rekenen. Dat maakt dus dat er totaal  $200 \times 4 = 800$  uitkomsten gegenereerd zouden kunnen worden zodat de empirische kans dicht bij de theoretische kans zal liggen.

### Werkblad

Aangezien er gekozen is om de leerlingen een snelle kant en klare turflijst te geven, om in een korte tijd zo veel mogelijk uitkomsten te laten generen, is er een werkblad gemaakt. Het voordeel voor een werkblad tijdens deze opdracht in de les is dat er stap voor stap uitgelegd kan worden wat de leerlingen moeten doen: eerst de App downloaden dan het experiment uitvoeren et cetera. Daardoor worden de stappen die de leerlingen maken automatisch gemonitord en de antwoorden die de leerlingen geven automatisch netjes door hun genoteerd. Door de werkbladen aan het eind van de les door de leerlingen te laten inleveren, kunnen de werkbladen gebruikt worden tijdens de evaluatie van de les.

### Vliegmodus en geluid aan

Om er voor te zorgen dat de leerlingen tussendoor geen telefoontjes of WhatsApp berichten krijgen of stiekem andere dingen aan het doen zijn op hun Smartphone, moet de telefoon op Vliegmodus gezet worden. Deze stap is verwerkt in het werkblad. De dobbelsteen App maakt geluid. Om er voor te zorgen dat de beleving van dobbelstenen gooien behouden wordt, moet het geluid van de Smartphone aangezet worden.

### Planning Les

De planning van de les is weergegeven in de volgende tabel: (Tabel 2)

| Tijd in minuten | Docent Activiteiten                                                                                                                            | Leerlingen activiteiten                                                          |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| 10              | Instructie + werkblad uitdelen                                                                                                                 | Luisteren                                                                        |
| 40              | In de gaten houden of ze alle stappen doorlopen + Rondlopen voor vragen + aantekeningen maken van verloop van de les + foto's en filmpje maken | Leerlingen werken werkblad door in tweetallen (Duur van experiment: 10 minuten.) |
| 10              | Afsluiten les: antwoorden van leerlingen met elkaar vergelijken en vragen wat leerlingen van les vonden.                                       | Leerlingen beantwoorden vragen                                                   |

Tabel 2: Schema planning



### Voorkennis Leerlingen:

- Leerlingen kunnen kansen uitrekenen met de productregel en de somregel
- De leerlingen kunnen kansen berekenen in de context van dobbelstenen, schijven en procenten.
- De leerlingen kunnen het verschil tussen empirische en theoretische kans omschrijven.

**Boek:** Getal en Ruimte Boek 1 Havo Hoofdstuk 6 Kansrekening. Paragraaf 1 t/m 4 zijn behandeld. Deze les vindt plaatst aan het eind van het hoofdstuk Kansrekening. De leerlingen moesten na deze les de diasnostische toets maken.

Hoofdstukken in het boek:

6.1 Kansen berekenen (Definitie van kans, eenvoudige samengestelde kansexperimenten met schijven, munten en dobbelstenen met behulp van roosters maken en systematisch noteren)

6.2 Empirische kansen (simuleren en kansen bij kruistabellen)

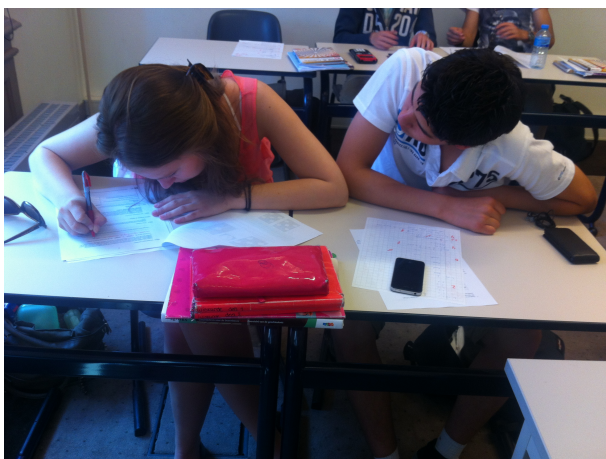
6.3 Kansbomen

6.4 Kansen vermenigvuldigen (Somregel, herhaald uitvoeren van kansexperiment en kansen en procenten)

### Doel van de les:

- Leerlingen intuïtief kansen laten voorspellen
- Leerlingen deze kansvraagstuk zowel empirisch (door middel van een experiment met een digitale applicatie) als theoretisch te laten berekenen en deze kansen met elkaar te vergelijken en te vergelijken met hun eerder gedane intuïtieve voorspelling.

De doel van de les is om de leerlingen de kans van een kansvraagstuk met dobbelstenen van te voren intuïtief te laten in schatten, daarna ze het kansexperiment te laten simuleren en vervolgens uit te rekenen en deze uitkomsten met elkaar te laten vergelijken om ze kritisch te laten zijn op het antwoord waar ze na berekenen op uit komen. Het hogere doel is om leerlingen kritischer te laten kijken naar hun antwoord na een kansberekening en om ze meer begrip te laten krijgen van kansrekening.



**Bijlage B | Werkblad**

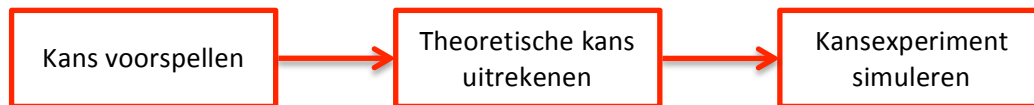
Naam: .....

Naam: .....

! Let op! Je levert dit werkblad aan het  
eind van de les bij de docent in.

## Kansexperiment simuleren

In dit experiment gaan jullie de theoretische kans benaderen door een kansexperiment na te bootsen met behulp van een dobbelsteen-App op een Smartphone. Uiteindelijk gaan jullie met behulp van jullie resultaten van het experiment deze empirische kans bepalen. Eerst ga je de theoretische kans berekenen, dan ga je het experiment uitvoeren en de empirische kans uitrekenen en daarna vergelijk je deze kansen met elkaar en met je vooraf gestelde voorspelling.



**Stap 1:** Vorm een tweetal en zet jullie naam boven aan dit werkblad

**Stap 2:** Taken verdelen

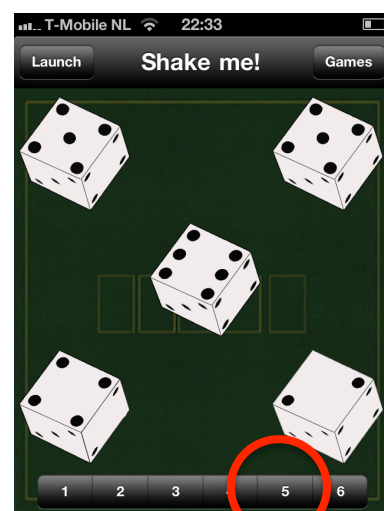
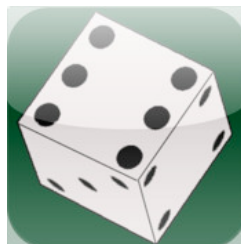
De een gaat de antwoorden netjes opschrijven op dit werkblad en turfjes zetten tijdens het experiment: de schrijver. De andere persoon moet de Smartphone of Ipad bedienen tijdens het experiment en moet telkens controleren of de schrijver wel het juiste opschrijft op het werkblad.

**Telefoon/Ipad bediener en controleur =** .....

**Schrijver =** .....

**Stap 3:** Download op één van jullie Smartphones of Ipads de gratis App **'Dices'**. Zoek naar de App: 'Dices' en download de App van Kaeli Soft Games. (Witte dobbelsteen Groene achtergrond)

**Stap 4:** Zet het **geluid** van de telefoon **aan** maar zet de telefoon wel **op vliegtuigmodus** zodat je tijdens het experiment niet gestoord wordt.





**Stap 5:** Zet het aantal dobbelstenen op 5. Door te schudden of door Launch te klikken gooi je als ware opnieuw.

**Stap 6: Verwachtingen vaststellen**

Jullie gaan nu door middel van het experiment je antwoord Beantwoord dus zonder een berekening te maken eerst de onderstaande vragen! Bedenk (door te schatten en niet door te berekenen) bij welke vraag jullie verwachten dat er een grotere kans uit komt. Omcirkel jullie antwoord en schrijf duidelijk op waarom jullie dat verwachten.

Wij denken dat er bij **vraag 1** / **vraag 2** een grotere kans uit komt, omdat :

.....

.....

Hoeveel keer zo groot denken jullie dat deze kans (van de zojuist door jullie omcirkelde vraag) is?

.....

De twee kans vraagstukken die jullie gaan oplossen met behulp van het experiment zijn:



1. Wat is de kans dat je één zes gooit als je vijf keer met een dobbelsteen gooit?

2. Wat is de kans dat je met de eerste dobbelsteen (dobbelsteen links boven) een 6 gooit en met de andere vier dobbelstenen geen zes gooit?

**Stap 7: Theoretische kans berekenen**

Bereken nu de theoretische kans van beide vragen. Schrijf jullie berekening en het antwoord hier op:

| Vraag                                                                                                                                       | Theoretische kans berekening | Antwoord |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|----------|
| 1. Wat is de kans dat je één zes gooit als je met vijf dobbelstenen gooit?                                                                  |                              |          |
| 2. Wat is de kans dat je met de eerste dobbelsteen (dobbelsteen links boven) een 6 gooit en met de andere vier dobbelstenen geen zes gooit? |                              |          |



|                 |  |  |
|-----------------|--|--|
| geen zes gooit? |  |  |
|-----------------|--|--|

**Stap 8: Kansen vergelijken**

Vergelijk nu jullie voorspelling bij stap 5 met jullie antwoorden bij stap 6. Zijn er verschillen?

Ja / Nee

Zo ja, waar denken jullie dat het aan ligt?

Onze voorspelling / Onze berekening

Als jullie denken dat het aan je berekening ligt: controleer je berekening en pas deze wellicht aan.

**! De docent loopt rond om je berekening van de theoretische kans te controleren.**

**Stap 9: Het experiment uitvoeren**

Om een kansexperiment zo goed mogelijk te simuleren, moet je het kansexperiment heel vaak uitvoeren. Je gaat **nu tien minuten** lang met je App zo vaak mogelijk dobbelstenen gooien. De schrijver zet turfjes bij het juiste veld in **het onderstaande schema**. **Schrijf niet te groot**. De andere bedient de Smartphone of Ipad.

Turven: Na 4 streepjes, zet je een horizontaal streepje en begin je een nieuw turf rijtje. +++ +++

|                                                                                                                                                                                           |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p>1. Eén 6 gegooid met één van de vijf dobbelstenen.</p> <p>Bijvoorbeeld:</p>                         |  |
| <p>2. Een 6 gegooid met eerste dobbelsteen (dobbelsteen links boven)</p> <p>Bijvoorbeeld:</p>          |  |
| <p>3. Als er geen van bovenstaande situaties is, dan zet je hier een turfje.</p> <p>Bijvoorbeeld:</p>  |  |

**Stap 10:**      **Alle uitkomsten tellen**

Als je 10 minuten lang het experiment hebt uit gevoerd, tellen jullie hoeveel keer elk van de drie situaties voor kwam. Schrijf hier de uiteindelijke aantallen:

| Situatie                                                                  | Jullie eigen aantallen: Stap 9 | Aantallen van alle groepjes bij elkaar Stap 10 |
|---------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|------------------------------------------------|
| Eén 6 gegooid met één van de vijf dobbelstenen.                           |                                |                                                |
| 2. Een 6 gegooid met eerste dobbelsteen                                   |                                |                                                |
| 3. Als er geen van bovenstaande situaties is, dan zet je hier een turfje. |                                |                                                |
| <b>Totaal aantal keer uitgevoerde experimenten</b>                        |                                |                                                |

**Stap 11:**      **Aantallen op bord schrijven**

Vul jullie aantallen in op het schema op het bord. Nadat je zelf het experiment hebt uitgevoerd, tellen we uiteindelijk alle aantallen van alle groepjes van de klas op om zo dicht mogelijk bij de theoretisch kans uit te komen. Neem deze aantallen van alle groepjes samen over in jullie schema hier boven in de rechter kolom.

**Stap 12:**      Empirische kans berekenen

Bereken nu met behulp van de aantallen van alle groepjes bij elkaar (De aantallen uit de rechter kolom bij stap 10) de kans op de drie gebeurtenissen.

| Situatie                                                       | Empirische kansberekening | Antwoord empirische kans | Antwoord theoretische kans (stap 6) |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| Eén 6 gegooid                                                  |                           |                          |                                     |
| Eén 6 gegooid met eerste dobbelsteen (dobbelsteen links boven) |                           |                          |                                     |
| Geen van het bovenstaande                                      |                           |                          |                                     |



|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

**Stap 13:**      **Kansen met elkaar vergelijken.**

Schrijf nu jullie antwoorden van de theoretische kansen van stap 6 er bij in het vorige schema van stap 11. Wat valt jullie op als jullie de theoretische kansen en de empirische kansen met elkaar vergelijken?

.....

.....

.....

.....

**Stap 14:**      **Juiste verwachting?**

Zijn jullie verwachting uit gekomen met wat jullie bij stap 4 hebben als voorspelling hadden gedaan ?

.....

.....

**Stap 15:**      **Ervaring?**

Wat vonden jullie van deze les? Schrijf er een toelichting bij.

.....

.....

.....

**Dankjewel voor jullie inzet!**



## Bijlage C | Verkenning Literatuur

Statistiek en kansrekening wordt vaak met elkaar verwisseld. Er is in combinatie met kansrekening ook veel literatuur te vinden over statistiek. In dit afstudeerproject richt ik mij echter specifiek op kansrekening. Daarom begin ik met de definitie van kansrekening. Ik beantwoord de vraag wat kansrekening is en hoe en waarom het is ontstaan. Daarna geef ik een samenvatting van vakdidactiek van de kansrekening in de literatuur.

### De definitie van kansrekening

Kans is een begrip wat alles te maken heeft met toevallige gebeurtenissen. Het voorspellen van de waarschijnlijkheid van toevallige gebeurtenissen wordt berekend met behulp van kansrekening.

De definitie van begrippen rond kansrekening zijn in het volgende schema weergegeven:

#### Kans

*"...is een tak van de wiskunde die zich bezighoudt met situaties waarin het toeval een rol speelt. Het berekenen van de kansen bij de mogelijke resultaten van toevalsexperimenten is één van de hoofddoelstellingen"*

(Woorden.org)

#### Kansrekening

*"Definieert begrippen als 'kans' en 'kansvariabele' en leidt regels af om met kansen te rekenen."*

(wynneconsult.com) Synoniemen voor kansrekening zijn waarschijnlijkheidsleer of waarschijnlijkheidsrekening. (encyclo.nl)

#### Probalisme

Een ander begrip wat in de literatuur vaak genoemd wordt is probalisme. Probalisme is de leer van de waarschijnlijkheid, of te wel waarschijnlijkheidsleer. Deze leer zegt dat de absolute waarheid niet bestaat, maar dat door kennis deze waarheid steeds beter benaderd kan worden. (encyclopex.com)

### Waarom bestaat kansrekening?

Al eeuwen lang houden mensen zich bezig met kansrekening. In de middeleeuwen paste Johan de Wit (Wikipedia) al kansrekening toe om op de meest lucratieve lijfrente uit te rekenen, wat ook wel de start van de verzekeringswiskunde genoemd wordt. En in de 17<sup>e</sup> eeuw schreef Christiaan Huygens (Zwaneveld, 2012) in *van Rekeningh en spelen van geluck* over de beste tactieken bij kansspellen.

Kansrekening is ontstaan vanuit de praktijk. De rekenregels voor de kansrekening zijn gaandeweg ontstaan. (Zwaneveld, 2012) In de schoolboeken wordt er met kansrekening vooral gerekend met de dobbelsteen, een pot met knikkers en de munt. Volgens de statisticus Jan Salomon Cramer die veel literaire werken op zijn naam heeft staan, zijn dit misleidende voorbeelden omdat ze door de mens zelf vervaardigd om het kansmodel na te bootsen. Buiten deze schoolvoorbeelden, is er tussen model en realiteit altijd een kwestie van interpretatie en veronderstellingen. Cramer zegt dat een kansmodel ten alle tijden toetsbaar moet zijn. (Cramer, 2000) De Rus Gnedenko schreef in 1962 in zijn boek *Probability*. (Gnedenko, 1962) dat een kansmodel in principe altijd eindeloos herhaald zou moeten worden om de kans te kunnen testen. Het is echter niet of nauwelijks mogelijk een





kansexperiment in de realiteit oneindig veel te herhalen. Hoogleraar kansrekening Ronald Meester aan de Vrije Universiteit in Amsterdam gaf in zijn lezing hier een mooi voorbeeld van. (Meester, 2000) Hij beschrijft dat de bepaling van de hoogte dijken in Nederland wordt vastgesteld aan de hand van een kansmodel dat rekening houdt met een overstroming, bij bepaalde dijkhoogte binnen bepaalde tijd. Zo was deze kans bij het bepalen van de hoogte van de Deltawerken 1 op de 10 000 jaar. Het empirisch testen van deze voorspelling gaat niet, aangezien er niet getest kan worden in een veelvoud van 10 000 jaar. Er is geen informatie van de afgelopen 10 000 jaren en we kunne niet in de toekomst kijken. Natuurlijk wordt er bij veel kansmodellen gerekend met informatie uit het verleden, bijvoorbeeld bij medische voorspellingen zoals: Wat is de kans dat een vrouw borstkanker krijgt? Echter ontwikkelt de wetenschap zich in rap tempo door en is de informatie over de laatste 30 jaar voor dit voorbeeld waarschijnlijk niet meer representatief. We kunnen echter niet in de toekomst kijken. We moeten het dus van de verzamelde data van het verleden hebben of van het simuleren van kansen via computermodellen.

Het berekenen van een kansexperiment met een dobbelsteen en het berekenen van een kans dat een verzekering geld moet uitkeren is nauwelijks met elkaar te vergelijken. Dantzig schreef 50 jaar geleden dat als een statisticus alleen maar zich aan wiskundige modellen zou houden, dat dit nooit in de realiteit toegepast zou kunnen worden, omdat er altijd aannames en veronderstellingen gedaan moeten worden (dat bepaalde verschijnselen bijvoorbeeld niet onafhankelijk van elkaar zijn) voordat er gerekend kan worden. (Cramer, 2000)

## De didactiek van kansrekening

Tijdens mijn zoektocht naar literatuur over de didactiek achter de kansrekening, kwam ik er al snel achter dat ik over de grens moest kijken. Ook dr. Arthur Bakker, assistent professor aan de Universiteit van Utrecht die onderzoek doet naar statistiek en onderwijs, vertelde mij via een e-mailwisseling dat ik weinig kans had Nederlandse literatuur te vinden. Hij schreef mij:

*‘tja lastig. in Nederland is kansrekening steeds meer naar achteren geschoven. Ik meen in de Hawex-tijd omdat het zo moeilijk bleek te zijn. Als je internationaal kijkt, is er veel keus.’*

Kansrekening zit pas tijdens de jaren 50 in het Nederlandse schoolprogramma. (Greer, 2001) In de wiskunde leraren opleiding op de Hogeschool Rotterdam wordt in de vierjarige opleiding geen enkele aandacht besteed aan kansrekening tijdens vakdidactiek. Kansrekening komt enkel voor in het vak Statistiek in het derde jaar. Dit terwijl het eindexamen wiskunde A havo en vwo voor een groot deel uit kansrekening bestaat. Dit valt natuurlijk te verklaren omdat in de bovenbouw leerlingen pas voor wiskunde A kunnen kiezen en dan pas kansrekening een groot deel van de stof bedraagt en de tweedegraads lerarenopleiding alleen docenten opleid voor de onderbouw. Maar toch komt in de onderbouwstof ook kansrekening voor; dan weliswaar in mindere maten. In het Amerikaanse artikel ‘Recommended knowledge of Probability for secondary teachers’ kennen ze het probleem van het kansrekeningsonderwijs toe aan het feit dat niet alle docenten zelf kansrekening op school hebben gehad. Er is een tekort aan kennis. Docenten blijken ook weinig aandacht te besteden aan de voorbereiding van kansrekening. (Penas, 1987) Als je besluit om wiskunde docent te worden, ben je goed in wiskunde en doe je wiskunde B. Bij wiskunde B wordt veel minder aandacht besteed aan kansrekening. Papaieronymou pleit daarom voor het extra opleiden van docenten in de didactiek van kansrekening, de geschiedenis van kans, informatie over statistische tijdschriften, verenigingen en conferenties. (Papaieronymou, 2010)

In het Handboek Wiskunde Didactiek van de eerstegraads wiskundelerarenopleiding, 2012-2013 (Zwaneveld, 2012) worden een aantal zaken vast gesteld die bij kansrekening belangrijk zijn: de realistisch context waarin het kansexperiment zich afspeelt, het begrip kans, het kans model en de



rekenregels die bij de kansrekening gebruikt worden. Er is echter heel weinig literatuur te vinden over de vakdidactiek achter de rekenregels van kansrekening. Hier zal ik dus niet verder op in gaan.

In het hoofdstuk over kansrekening in het vakdidactisch rapport van de eerste graads lerarenopleiding wordt geschreven dat leerlingen moeite hebben met het schakelen tussen begrippen. (Zwaneveld, 2012) Bij kansrekening moeten leerlingen snel kunnen schakelen tussen bepaalde begrippen. De begrippen die genoemd worden zijn: frequentistisch-theoretisch, individueel- geheel, vooraf-achteraf, continue-discreet, serieel-parallel, onafhankelijk-disjunct, verwachting-gemiddelde. In het volgende overzicht worden een aantal begrippen uitgelegd:

#### Frequentistisch-Theoretisch

Als er in een artikel staat: 10 % van de vrouwen krijgt borstkanker, zien leerlingen niet snel de link naar een kansexperiment wat meerdere keren wordt uitgevoerd: de kans is 0,1.

#### Individueel-geheel

Dan wordt het ook moeilijk gevonden om kansuitspraken, die het resultaat zijn van kansrekening, niet altijd zomaar op concrete individuele gevallen kunt toepassen. Het optreden van een overstroming op een bepaald moment, zegt heel weinig over het voorkomen in langere periode.

#### Vooraf-achteraf

Er worden zowel vooraf voorspellingen gedaan van gebeurtenissen, maar het komt ook vaak voor dat er op bestaande data kansrekening wordt losgelaten.

#### Serieel-parallel

Het is voor leerlingen vaak lastig te bedenken wanneer ze kansen moeten optellen en wanneer ze deze moeten vermenigvuldigen. Mijn eigen manier is altijd door de leerlingen er in te stampen of = plus en = keer. Dit verschil is soms alleen wel moeilijk uit een contextsom te halen.

Een ander probleem wat beschreven in het vakdidactisch rapport (Zwaneveld, 2012) is dat de uitkomst van het kansexperiment niet vast staat. Dit kunnen leerlingen als vaag ervaren. Anastasiadou en Chadjipantelis stellen een oorzaak waarom kansrekening moeilijk te onderwijzen blijkt. Zij zeggen dat een leerling bij kansrekening intuïtieve het voorspellingen doen en het theoretisch onderbouwingen maken moet kunnen onderscheiden en dat leerlingen bij kansrekening beide vaardigheden moet kunnen. (Anastasiadou & Chadjipantelis, 2008) Fishbein en Gazit hebben in de jaren 50 onderzocht wat het effect is op het goed intuïtief kunnen inschatten van kansen door het vroeg aanleren van kansrekening. Zij concludeerden dat het een positief effect heeft om leerlingen vroeg kansrekening te leren. Als leerlingen te weinig begrip hebben van kansrekening, wordt het lastig om kansen in te kunnen schatten en te kunnen controleren of de uitgerekende kans klopt. Maar ze zeggen ook dat er tijdens het aanleren van kansrekening ruimte gelaten moet worden voor het doen van intuïtieve voorspellingen om juist goed kansrekening te kunnen leren. (Fishbein & Gazit, 1984)



## Bijlage D | Gerichte Literatuurstudie

### Onderzoeksvraag:

#### Hoe kan tijdens de les leerlingen intuïtieve vaardigheden bijbrengen, zodat ze meer begrip van kansrekening krijgen?

- Wat is intuïtie?
- Wat is er al gedaan op scholen om intuïtie te vergroten bij kansrekenen?
- Wat voor onderzoeken zijn er gedaan om intuïtie te vergroten bij kansrekenen?
- Wat voor algemenere middelen zijn er al in het onderwijs gebruikt om leerlingen beter begrip te laten krijgen van kansrekening?

### Definitie beschrijving intuïtie

De definitie van intuïtief is het ongegrond doen van uitspraken of voorspellingen vanuit een oergevoel. Deze voorspelling is ontstaan door vanzelfsprekendheid of een logische gedachten. Dit staat lijnrecht tegenover de wetenschap. Anderzijds komen wetenschappers op nieuwe theorieën en ideeën door hun intuïtie in te zetten en verkondigde de Franse wiskundige en filosoof Poincaré een eeuw geleden dat er zonder intuïtie wetenschappers nooit ontdekkingen zouden gedaan kunnen hebben. (Poincaré, 1905)

#### Intuïtie

- Een menselijke eigenschap om iets aan te voelen zonder er goed over na te denken. (Woorden.org)
- Een met inzicht verkregen ingeving die zonder redenatie is verkregen. (Curtuurwoordenboek.nl)
- Het vermogen om in te schatten zonder eerst een berekening te maken of alle gegevens op een rijtje te zetten. (Derks, 2011)

### Gebruik van intuïtie voor het doen van voorspellingen

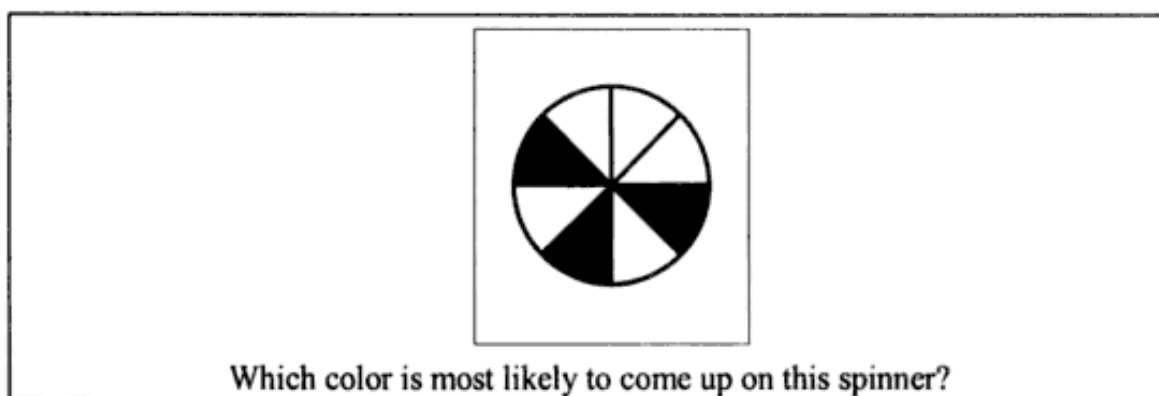
Het blijkt dat kinderen al vroeg aan kansrekening worden blootgesteld en zelfs al intelligente keuzes kunnen maken in kansspelen. Ze laten bijvoorbeeld kansen liggen omdat ze bang zijn om te verliezen. (Hallen, 2013) Hoe mensen leren kansen in te schatten is een veel besproken onderwerp in de literatuur. W. Feller stelt dat kinderen van 6 jaar of jonger het verschil niet weten tussen een toevaligheid of een gewone gebeurtenis. (Feller, 1968) Fishbein en Gazit hebben onderzocht of probabilistische intuïtie verbeterd door jong aan leren van kansrekening. Uit onderzoek wat gedaan is bij kinderen high school leerlingen (5,6,7 grade) blijkt dat het aanleren van kansrekening in zekeren maten effect heeft op intuïtief gebaseerde misconcepties, de mate van het representatief zijn en het waarnemen van een geluk kans. (Fishbein & Gazit, 1984) Maar Fishbein en Gazit beschrijven dat het beïnvloeden van de probabilistische intuïtie, deze intuïtie bij een leerling ook juist kan afzwakken, omdat ze dan weer te veel gaan redeneren.



## Verschillende soorten intuïtie in de wiskunde

Henk Barendregt, onderzoeker aan de Katholieke Universiteit Nijmegen, onderscheidt twee soorten intuïtie die bij wiskunde een rol spelen: *grote intuïtie* en *kleine intuïtie*. Bij de *grote intuïtie* wordt intuïtie gebruikt tijdens het tot stand komen van complexe bewijzen. Welke stap in een complex bewijs gebaseerd is op redeneren of op intuïtie is niet altijd terug te leiden. Met de *kleine intuïtie* wordt bedoeld dat wiskundige in staat zijn informatie zelf in te vullen. In boeken staan bijvoorbeeld niet alle wiskundige stappen opgeschreven omdat het anders te grote stukken tekst worden. Een mens die iets van het onderwerp af weet kan de ontbrekende stappen zelf invullen. Dit is een vorm van intuïtie. (Barendrecht)

Fishbein en Gazit maken onderscheid tussen eersterangs en tweederangs probabilistische intuïties. Eersterangs intuïties zijn gebaseerd op cognitief geloof wat wordt gevoed door ervaringen van het individu zonder enige systematische aanpak. Het voorbeeld wat Fishbein en Gazit hierbij geven is dat als je een kind vraagt welke kleur de meeste kans heeft om aangewezen te worden op de ronddraaiende schijf, hij of zij antwoordt: 'Zwart heeft de grootse kans, omdat het mijn favoriete kleur is.' (Zie figuur 2) (Fishbein & Gazit, 1984) (Jones & Thornton)



Figuur 2: Een vraag die Fishbein en Gazit tijdens het onderzoek stelden.

Fishbein en Gazit pleiten er daarom voor dat de intuïtieve houding van een leerling niet moet worden genegeerd tijdens het leerproces van kansrekening. Als deze intuïtie correct is, help het de leerling juist met het verwerven en integreren van wetenschappelijke concepten. Maar als deze intuïtieve ideeën van een leerling niet juist zijn, moeten ze worden bijgestuurd. Als het onderwijsprogramma geen ruimte laat voor mogelijke intuïtieve vooroordelen, is er een kans dat de leerlingen worden misleid door methodes die hun zijn geleerd. Daarnaast zijn Fishbein en Gazi van mening dat intuïtieve vermoedens alleen maar kunnen worden ontwikkeld wanneer de leerlingen actief worden betrokken in de les en niet door de theorie alleen maar uitgelegd te krijgen. (Fishbein & Gazit, 1984)

## Gebruik van Simulaties ter bevordering van begrip kansrekening

Papaieronymou (Papaieronymou, 2010) geeft aanbevelingen voor docenten voor het lesgeven van kansrekening. Docenten zouden in staat moeten zijn om technologie te gebruiken om simulaties te maken om kans concepten te illustreren en moeten in staat zijn concreet materiaal te gebruiken, zoals dobbelstenen, kaarten, tollen om kans concepten te presenteren in de wiskunde klas. Verder zou een docent op de hoogte moeten zijn van gevarieerde materialen en programma's (computer programma's zoals Fathom en DataScope) die helpen bij het uitleggen van kansconcepten aan de



leerlingen. Docenten moeten bewust zijn kracht van simulaties als een techniek dat kan worden gebruikt voor het oplossen van kansproblemen.

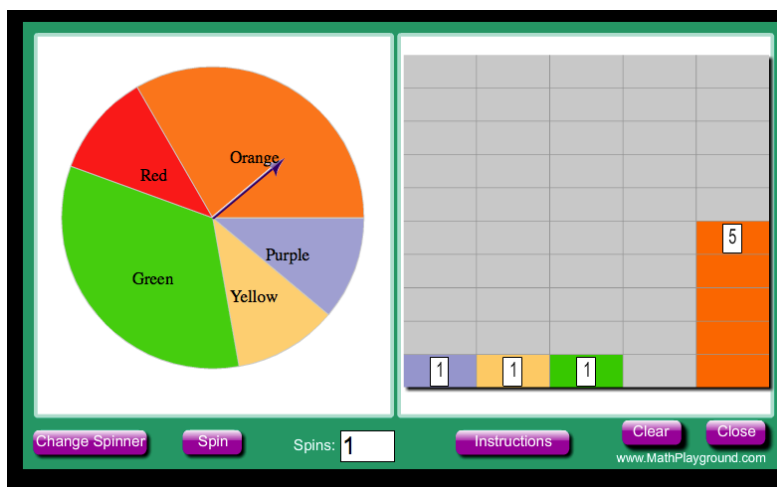
De universiteit van Granada (Batanero, Godino, & Rafael, 2004) deed met leerlingen een experiment om te laten zien dat dit zinvol is tijdens het lesgeven van kansrekening. De leerlingen moesten 40 keer met een munt gooien en telkens opschrijven wat ze hadden gegooid. Het doel van het experiment was om leerlingen het begrip willekeur gingen begrijpen. Het feit dat ze een rijtje getallen genereerde en een willekeurige set kregen, legde de link naar wetenschappers voor simulaties gebruik maken van 'random number generators', omdat het zelf genereren van een rij willekeurige getallen veel tijd in beslag neemt.

Het Navarro College in Texas deed onderzoek naar het gebruik van online simulatie-tools wat ingezet kan worden voor het doen van kanssimulaties in de klas. (NCTM, 2007) Ze vergeleken het inzetten van concreet materiaal met virtuele tools op internet. De conclusie was dat met een digitale tool (the virtual spin (Zie Figuur: 3) de leerlingen in een korte tijd honderd keer meer uitkomsten konden genereren dan met concrete objecten zoals een munt of dobbelsteen. Hoe groter het aantal experimenten, hoe nauwkeuriger het empirische resultaat het bij de theoretische kans komt te liggen. Doormiddel van het onderzoek naar kansen, leerden de leerlingen hoe ze hun eigen kans experiment konden opstellen en deden ze voorspellingen voor de theoretische kans. Daarna vergeleken ze de uitkomsten van het experiment met de theoretische kans. Doordat ze de tol zelf konden veranderen, werd het verschil tussen onafhankelijke en afhankelijke gebeurtenissen ook duidelijk. (NCTM, 2007)

Er zijn veel gratis online tools beschikbaar om simulaties na te bootsen.

#### Internet tools

- Het gebruik van virtuele tollen ([http://www.unpracticalmath.com/applets/virtual\\_spinner.html](http://www.unpracticalmath.com/applets/virtual_spinner.html))
- Zelf instelbare spinner met weergave van grafiek er naast <http://www.mathplayground.com/probability.html> (zie figuur 3) Bij deze spinner kan ingesteld worden hoeveel delen de schijf heeft en welk aandeel elke kleur moet hebben.
- Elektronische dobbelsteen (<http://dobbelsteen.virtuworld.net/> en <http://www.dicesimulator.com/> )



Figuur 3: Een online spinner die handmatig ingesteld kan worden. <http://www.mathplayground.com/probability.html>

#### Apps

Voor op Smartphones en Ipad's zijn er veel verschillende gratis Apps te vinden in de Appstore om een kan simulatie na te bootsen. Enkele voorbeelden zijn:

- Dice roll lite
- Dices



## Gebruik van concreet materiaal ter bevordering van begrip bij kansrekening

Papaieronymou schrijft dat docenten weet moeten hebben van het gebruik van kans in veel verschillende gebieden en het vele voorkomen van kansen in de kranten en tijdschriften. Docenten zouden uit een experiment conclusies en verwachtingen moeten kunnen trekken. (Papaieronymou, 2010)

Om maatschappelijke vorming te bevorderen rond het onderwerp kans, heeft Verbeek een idee bedacht voor docenten om een 'Kanskoffer' (Zie figuur 4) in te richten met allerlei concreet materiaal: kaarten, punaises, dobbelstenen, lotto kaarten, krasloten etc.. De inspiratie voor deze voorwerpen kunnen afkomstig zijn van de wiskunde methode zelf, maar kan ook uitgebreid worden met het door de docent gevonden materiaal wat met kans te maken heeft. Daarbij kan bijvoorbeeld gedacht worden aan verzekeringsfolders. Door kinderen te leren omgaan met kansen draagt het bij aan de ontwikkeling van een gecijferd mens zodat ze in staat zijn kansen af te wegen en te beredeneren en beslissingen kan nemen op ratio en niet alleen maar op gevoel. Het koffertje kan gebruikt worden als in de les als demonstratie materiaal maar om activerende didactiek te bewerkstelligen en de kinderen er zelf mee aan de slag te laten gaan. (Verbeek, 2008)

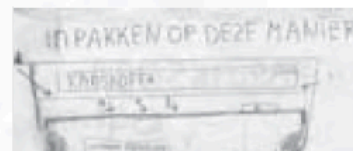


### Inhoud kanskoffer

- |                                                    |                           |
|----------------------------------------------------|---------------------------|
| 1 roulettespel                                     | 10 mastermind             |
| 2 dubbel kaartspel in houder                       | 11 doosje met 50 punaises |
| 3 rad van avontuur in doos                         | 12 5 munten in etui       |
| 4 kanstol van pim-pam-pet                          | 13 doosje paperclips      |
| 5 zakje bingo/lottogetallen in doos                | 14 bierviltjes            |
| 6 houder met 5 dobbelstenen                        | 15 fruitautomaat in doos  |
| 7 doos met gekleurde dobbelstenen                  | 16 doosje pokerstenen     |
| 8 25 pionnen + dobbelsteen                         | 17 yachzee kaartjes       |
| 9 zakje met 20 balletjes (zwart, blauw, wit, geel) | 18 lottoballenpen         |

### In het deksel

- a sheets met boomdiagrammen
- b verwisselbare schijven voor de kanstol
- c boekje casino met spelregels
- d gebruiksaanwijzing bij de koffer
- e opdrachtkaarten voor bij de fruitautomaat

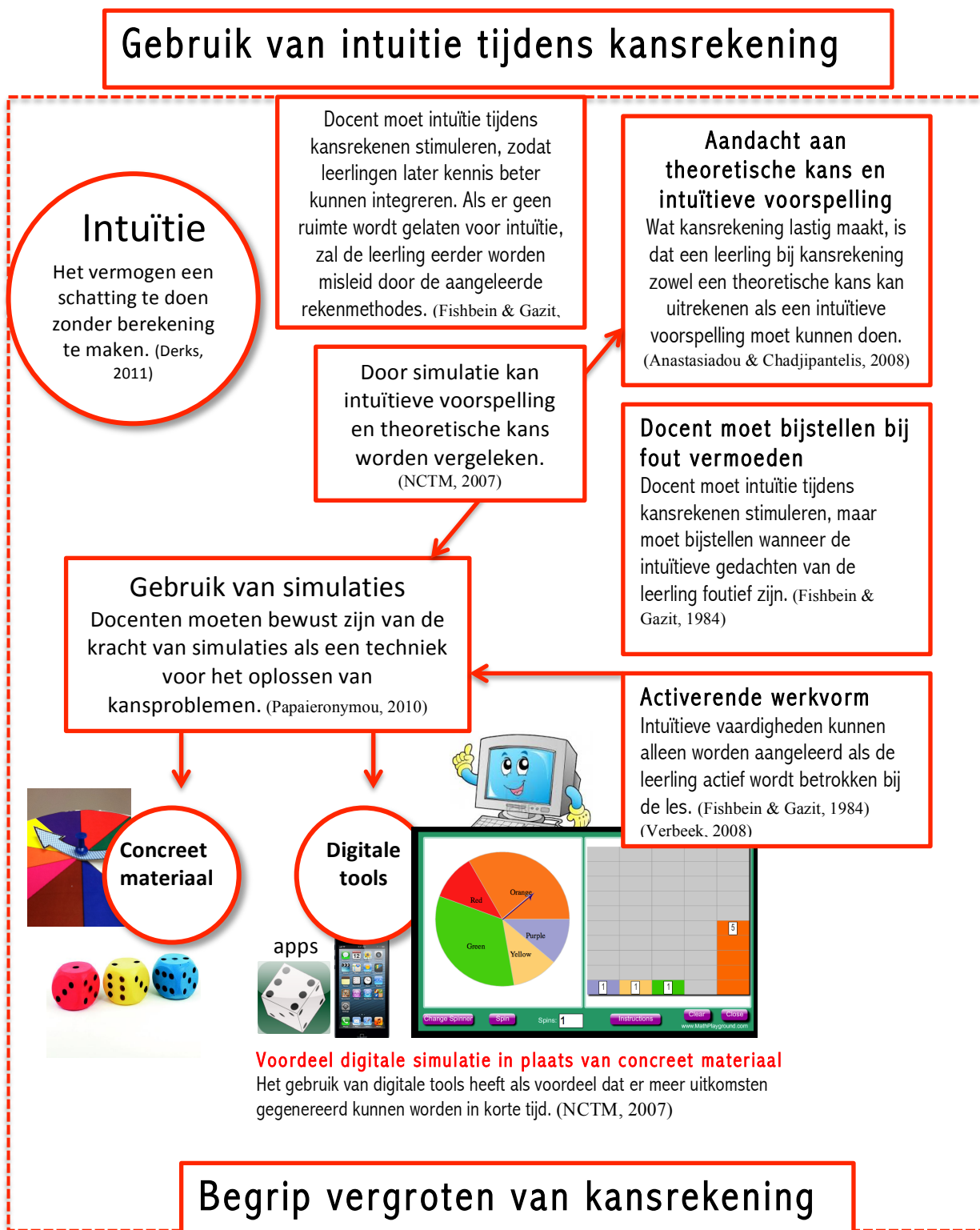


Figuur 4 : Kanskoffer uit Euclides Kans Special. (Verbeek, 2008)



## Bijlage E | Samenvatting Gerichte Literatuurstudie

Het gerichte literatuuronderzoek heeft geleid tot verschillende bruikbare informatie voor het ontwerpen van een les om de intuïtieve vaardigheid van de leerling te bevorderen tijdens kansrekening. De gevonden informatie is samengevat in het volgende figuur:







## Bijlage F | Evaluatie Les

De les verliep over het algemeen goed en de uitkomsten waren niet teleurstellend. Hier staat beschreven wat er tijdens de les is gebeurd, wat er goed ging en wat er minder goed ging. De evaluatie wordt geïllustreerd met foto's die tijdens de les gemaakt zijn.

### Gegevens les

Datum: vrijdag 21 juni 1<sup>e</sup> uur

Klas: 4 havo wiskunde A

Aantal leerlingen: 6 (3 groepjes van 2)

School: Luzac Lyceum Rotterdam

### Evaluatie naar aanleiding van observatie van de les

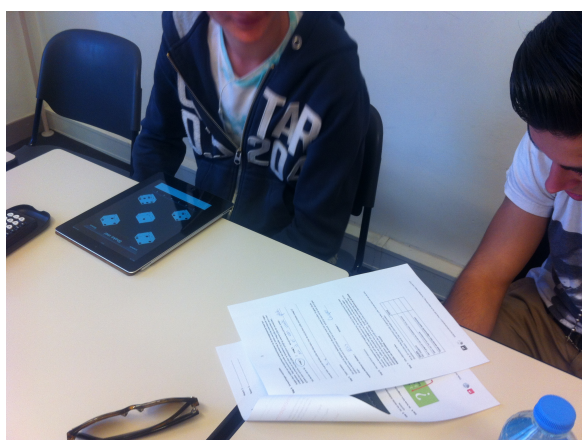
Aangezien de klas maar uit maximaal 9 leerlingen bestaat, had ik als docent genoeg tijd om de les te leiden en om tegelijkertijd zelf de observatie van de les te doen. Tijdens de les heb ik een lijstje bijgehouden van dingen die mij tijdens de les opvielen. Deze punten staan hier onder stuk voor stuk beschreven en zijn geïllustreerd met foto's.

### Wat ging er goed tijdens de les?

- **Alle leerlingen hadden Iphone:** Alle leerlingen waren in bezit van een Iphone of Ipad.
- **Downloaden App snel:** Het downloaden van de App ging heel snel. Binnen no-time hadden alle groepjes een dobbelsteen-App.
- **Andere App:** Een groepje had per ongeluk een andere dobbelsteen-App gevonden die de zelfde functies bezat. Dit ging verder prima. Ook zij konden het experiment op de juiste manier uitvoeren. (Zie figuur. 5)



Figuur 5: Gebruik van een andere dobbelsteen-App die ook voldeed.



Figuur 6: Een groepje maakte gebruik van een Ipad. Ook hier kon de dobbelsteen-App op gedownload worden.

- **Ook Ipad toegestaan:** Een groepje had gevraagd of ze in plaatst van een smart Phone, een Ipad mochten gebruiken. Ook op de Ipad konden ze de juiste App downloaden en het experiment uitvoeren. Dit was dus verder geen probleem. (Zie figuur. 6)
- **Alarm zetten:** Een leerling zette het alarm op de Iphone om 10 minuten, zodat ze de tijd niet kon vergeten.





Figuur 7: Een leerling schudt met de Ipad om de dobbelstenen te 'gooien'.

- **Dobbelsteen-App:** De leerlingen hadden het geluid van Smartphone of Ipad aan staan. Dit gaf wel wat geluid volume in de klas, maar was niet storend. De leerlingen vonden het leuk om dobbelstenen te 'gooien'. (Zie figuur 7) Ze begonnen eerst met schudden van Ipad en iPhone maar na een tijdje kregen ze een lamme arm en drukte ze op het knopje om te kunnen gooien. Dit bleek ook sneller te zijn.

- **Spontane verandering van lesopzet, gegevens van alle groepjes bundelen:** Toen de leerlingen bezig waren met het experiment, bedacht ik dat de kans veel dichter bij theoretische kans zou zitten als alle uitkomsten van alle groepjes bij elkaar gevoegd zouden worden in plaats van de groepjes eerst zelf te laten rekenen met alleen hun antwoorden. Ik tekende een schema op het bord waar de leerlingen als ze klaar waren met het experiment hun aantallen moesten invullen. (Zie Figuur: 8).



Figuur 8: Een leerling zet de aantallen van het kansexperiment op het bord.

Een ander voordeel van het maken van een schema met alle aantallen van de groepjes was, dat de leerlingen dan elkaars uitkomsten zagen en het met elkaar konden vergelijken. Daarnaast maakte dit het gemakkelijk en leuk om aan het eind van de les het experiment met alle groepjes te evalueren. Helaas maakte een van de groepjes een trage start (de groep die snel afgeleid was) en genereerde zij minder uitkomsten dan beoogd.

- **Uitkomsten experiment dicht bij theoretische kans:**

In figuur 9 is het schema te zien waar de drie groepjes hun aantallen hebben neergezet. Ten eerste is te zien dat de aantallen van de drie verschillende groepjes dicht bij elkaar lagen. Toen de leerlingen dit op het bord zagen staan, wantrouwde ze meteen de dobbelsteen-App niet meer. Verder is te zien dat de empirische kans

$5^x$  Gooien

theoretisch

$$\left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \binom{5}{1} = 0,402$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,080 \text{ en } 6 \text{ is links boven}$$

$$- 0,402 + 0,080 = 0,518 \text{ de rest complement}$$

|            | Elis&Cas | Frank&Larise | Rich. & Charl | Totaal |        |
|------------|----------|--------------|---------------|--------|--------|
| 1x6 gooien | 36       | 52           | 38            | 126    | 0,332  |
| 1x6 gooien | 10       | 12           | 9             | 31     | 0,0816 |
| de rest    | 65       | 97           | 61            | 223    | 0,587  |
| Totaal     | 111      | 161          | 108           | 380    |        |

Figuur 9: Schema op bord met de uitkomsten van elk groepje en de berekening van de theoretische kans.



afkomstig van het door de leerlingen uitgevoerde experiment (Zie getallen rechts van de kolom) dicht in de buurt ligt bij de theoretische kans (Zie meest linker kolom). In tabel 1 zijn de kansen nogmaals schematisch weergegeven. De kans op vraag 1 is ongeveer 5 keer zo groot als de kans op vraag 2.

| Kansvraagstuk                                                                                 | Theoretische kans                                               | Empirische kans                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| Vraag 1: P(1 keer zes gooien als er met 5 dobbelstenen gegooid wordt.)                        | $\frac{1}{6} \cdot \frac{5^4}{6} \binom{5}{1} = \mathbf{0,402}$ | $\frac{126}{380} = \mathbf{0,332}$ |
| Vraag 2: P(1 keer zes gooien met eerste dobbelsteen als er met 5 dobbelstenen gegooid wordt.) | $\frac{1}{6} \cdot \frac{5^4}{6} = \mathbf{0,080}$              | $\frac{31}{380} = \mathbf{0,082}$  |
| P(Alle overige situaties)                                                                     | $1 - (0,402 + 0,080) = \mathbf{0,518}$                          | $\frac{223}{380} = \mathbf{0,587}$ |

Table 1: Schema met kansen afkomstig van theoretische berekening en empirische berekening. Er is te zien dat de empirische kans afkomstig van experiment in de klas in de buurt ligt van de theoretische kans.

### Wat ging er niet goed tijdens de les?

- **Leerlingen afwezig:** Helaas waren er drie leerlingen ziek. Hierdoor was er een groepje minder dan in eerste instantie vanuit gegaan was.
- **Niet duidelijk bladzijde omslaan:** Voor de leerlingen was het eerst niet duidelijk dat ze de volgende bladzijde van het werkblad moesten omslaan.
- **Meteen kansprobleem theoretisch uitrekenen:** Bij het zien van het kansvraagstukken begonnen ze meteen de theoretische kansen uit te rekenen. Ze hielden zich in eerste instantie niet aan het stappenplan zoals het werkblad dat aangaf. Door in te grijpen heb ik ze er op gewezen dat ze eerst de bladzijde moesten omslaan en niet mochten beginnen met theoretisch berekenen.
- **Snel afgeleid:** Twee leerlingen waren snel afgeleid en waren telkens andere dingen aan het doen. Ik moest er bovenop zitten om ze de stappen juist te laten doen. Deze leerlingen hebben beide concentratie problemen. Deze leerlingen had ik niet bij elkaar moeten zetten, maar omdat er een van deze twee te laat kwam en de andere leerlingen niet meer kwamen wegens ziekte, moesten ze wel bij elkaar. Dit groepjes heeft uiteindelijk ook veel te weinig uitkomsten gegenereerd.
- **Sceptische houding tegenover digitale dobbelstenen:** Een groepje kreeg toevallig bij de eerste keer gooien met 5 dobbelstenen heel veel zessen als uitkomst. Een van de leerlingen uit dit groepje riep: 'Hij is altijd hoog, dit is fraude mevrouw'. Deze leerlingen waren sceptisch over de eerlijkheid van de digitale dobbelsteen-App.
- **Niet houden aan taakverdeling:** In een groepje die snel afgeleid was en die niet genoeg uitkomsten gegenereerd hadden, ging een van de twee in eerste instantie alles zelf doen: zowel opschrijven als gooien. De andere groepsgenoot deed helemaal niks deed en zat toe te kijken. Ik had het meteen door en heb ze tot orde geroepen. Op deze manier zouden ze te weinig uitkomsten genereren.



- **Moeite met uitrekenen van theoretische kans na experiment:** Nadat de leerlingen het experiment hadden uitgevoerd, hadden ze opeens allemaal veel moeite met het uitrekenen van de theoretische kans. Het uitrekenen van de empirische kans ging goed. Ik had het idee dat ze door de eenvoudige berekening van de empirische kans (deel : geheel) , dit zo veel afwijkt van het uitrekenen van de theoretische kans, dat ze het even niet meer wisten hoe ze het theoretisch moesten uitrekenen. Het voordeel was dat ik het schema op het bord had staan. We hebben uiteindelijk klassikaal de theoretische kans uitgerekend en heb ik de berekening in het schema op het bord gezet. Een groepje heeft deze berekening daadwerkelijk overgenomen in zijn werkblad. De anderen hebben niet meer de moeite genomen de berekening over te nemen in het werkblad.
- **Turflijst niet te vinden:** Twee groepjes konden de turflijst niet vinden, omdat ze het werkblad niet goed hadden gelezen.
- **Verwarring bij turflijst:** Alle groepjes hadden moeite met het op de goede manier turven van de uitkomsten van het experiment. Ze zeiden: 'Maar 3 zessen gooien, dan gooi je toch ook een 6? Ze turfden dus in eerste instantie veel te veel turfjes in de eerste rij. (Zie Tabel 2: Schema zoals turflijst) Twee groepjes moesten opnieuw beginnen met turven. Ze hadden de eerste turfjes doorgestreept en zijn op niet begonnen.

|                                                                |                 |
|----------------------------------------------------------------|-----------------|
| Eén 6 gegooid                                                  | +++ +++         |
| Een 6 gegooid met eerste dobbelsteen (dobbelsteen links boven) | +++             |
| Alle overige situaties                                         | +++ +++ +++ +++ |

Tabel 2: Schema turflijst zoals weergegeven achter aan het werkblad (Zie bijlage B)



Figuur 10: Instructie die was weergegeven op de eerste bladzijde van het werkblad (Zie bijlage B) om aan te duiden wanneer er aan de eerste vraag wordt voldaan en wanneer er aan de tweede vraag wordt voldaan.



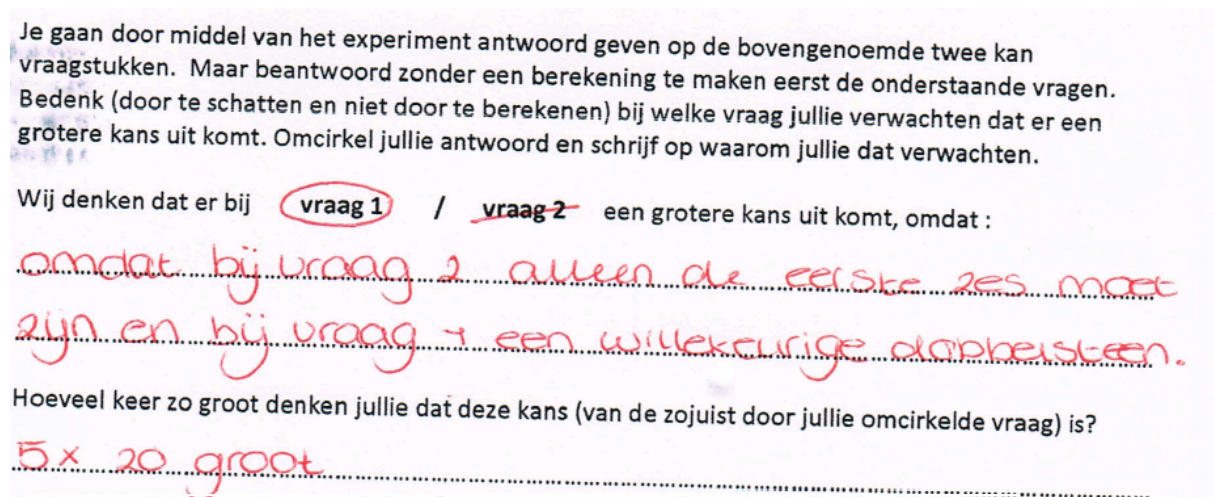


## Evaluatie naar aanleiding van de ingevulde werkbladen

Alle scans van de door de leerlingen ingevulde werkbladen zijn als bijlage in dit verslag bijgevoegd. (Zie bijlage C *Ingevulde Werkbladen Leerlingen*) Hieronder staan een aantal punten beschreven die opvallen.

### Wat ging er goed bij het invullen van het werkblad?

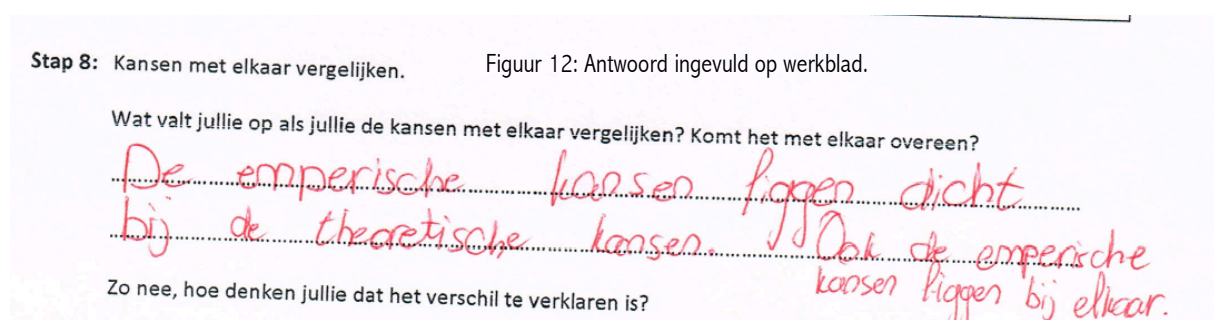
- **Verwachting goed vastgesteld:** Alle drie de groepjes hadden de uitkomst van de kansvraagstukken goed voorspeld. (Vraagstukken: 1. Wat is de kans dat je één zes gooit als je vijf keer met een dobbelsteen gooit? 2. Wat is de kans dat je met de eerste dobbelsteen (dobbelsteen links boven) een 6 gooit en met de andere vier dobbelstenen geen zes gooit?) Opvallend genoeg hadden twee van de groepjes ook nog intuïtief goed geraden hoeveel keer zo groot de kans op vraagstuk 1 zal zijn. Twee antwoordden op deze vraag 5 keer zo groot (Zie figuur 11) wat het juiste antwoord betrof en het derde groepje zat ook in de buurt en antwoordde 4 keer zo groot.



Figuur 11: Ingevuld antwoord op werkblad.

### Wat ging er niet goed bij het invullen van het werkblad?

- **Niet alle vragen zijn ingevuld:** De leerlingen hadden lang niet alle vragen ingevuld. Enkel één groepjes heeft de theoretische kans berekening genoteerd in het schema. Omdat de lesopzet tijdens de les een beetje veranderd was, (omdat we opeens de aantallen gingen optellen met het schema op het bord en omdat de leerlingen moeite hadden met het berekenen van de theoretische kans) hebben we alle overige vragen die ook op het werkblad stonden klassikaal gedaan. Hierdoor hebben de leerlingen het niet meer in hun werkblad gezet. Daar had ik zelf ook niet goed op aangestuurd dat het alsnog in het werkblad ingevuld moest worden. Een groep heeft bij stap 8 de vraag beantwoord: Wat valt je op als jullie de kansen met elkaar vergelijken dat de empirische kans dicht bij de theoretische kans ligt. (Zie figuur: 12)



Figuur 12: Antwoord ingevuld op werkblad.



- **Theoretische kans en Emperische kans door elkaar gehaald:** Een van de drie groepjes had de emperische kans berekening ingevuld bij de theoretische kans. Deze leerlingen haalden het begrip theoretisch en empirisch door elkaar.
- **Stappen op werkblad dubbel genummerd:** Er is iets mis gegaan bij het nummeren van de stappen op het werkblad. De stappen 3 en 5 komen twee keer voor.

### Evaluatie met leerlingen

Aan het eind van de les heb ik de leerlingen gevraagd wat hen opviel tijdens het doen van het experiment en het maken van het werkblad. Ze vertelden dat ze verbaast waren dat de dobbelsteen-App echt goed en betrouwbaar was. Daarnaast zeiden ze dat het hun opviel dat de empirische kans dicht bij de theoretische kans lag. Ook bespraken we of ze in eerste instantie de voorspelling goed hadden gedaan. Ze kwamen er achter dat alle drie de groepjes de juiste voorspelling hadden gedaan.

Verder heb ik de leerlingen gevraagd hoe ze de les ervaren hadden. Ze zeiden dat ze het wel moeilijk vonden om uiteindelijk de kans theoretisch uit te rekenen en dat ze in verwarring waren gebracht na het doen van het experiment. Ze zeiden wel dat dat ze het een leuke les vonden.



## Bijlage G | Gerichter Literatuurstudie

# Bibliografie

- Anastasiadou, S., & Chadjipantelis, T. (2008). Opgeroepen op mei 23, 2013, van [https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icme11/ICME11\\_TSG13\\_18T\\_anastasiadou.pdf](https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icme11/ICME11_TSG13_18T_anastasiadou.pdf)
- Barendrecht, H. (sd). (Katholieke Universiteit Nijmegen) Opgehaald van <ftp://ftp.cs.ru.nl/pub/CompMath.Found/knaw.pdf>
- Barendrecht, H. (1999, 4 24). Opgehaald van <ftp://ftp.cs.ru.nl/pub/CompMath.Found/knaw.pdf>
- Batanero, C., Godino, J., & Rafael, R. (2004). Training Teachers To Teach Probability. *Journal of Statistics Education Volume 12 number 1* .
- Beck, S. A. ; Huse, V. E. . (2007). Opgeroepen op mei 26, 2013, van <http://www.math.ccsu.edu/mitchell/math412tcmvirtualspinprob.pdf>
- Cramer, J. (2000, december). Opgeroepen op mei 20, 2013, van <http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2000-01-4-367.pdf>
- Cultuurwoordenboek.nl. (sd). Opgeroepen op september 8, 2013, van <http://www.cultureelwoordenboek.nl/index.php?lem=3814>
- Derks, F. (2011, mei 31). Opgeroepen op mei 30, 2013, van <http://www.werkenmetintuïtie.com/2011/05/intu%C3%Aftie-en-zijn-zweverige-imago.html>
- encyclo.nl. (sd). Opgeroepen op mei 20, 2013, van (<http://www.encyclo.nl/begrip/kansrekening>)
- encyclopedex.com. (sd). Opgeroepen op mei 20, 2013, van <http://www.encyclopedex.com/probabilisme/>
- Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (Vol. 1). New York: Wiley.
- Fishbein, E., & Gazit, A. (1984). *Educational Studies in Mathematics*. Springer.
- Gnedenko, B. (1962). *Probability Theory* (Vol. Fifth edition). Chelsea: American Mathematical Society.
- Greer, B. (2001). *Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Hallen, P. v. (2013, februari 11). *dS De Standaard*. Opgeroepen op mei 22, 2013, van ([http://www.standaard.be/cnt/DMF20130210\\_00464588](http://www.standaard.be/cnt/DMF20130210_00464588) 11/02/2013 | )
- Jones, G. A., & Thornton, A. C. *Exploring Probability in School Challenges for Teaching and Learning*. (G. U. Library, Red., & . p., Vert.) Gold Coast Campus Australia: Springer,.
- Meester, R. (2000, maart 24). *Kennislink.nl*. Opgeroepen op mei 20, 2013, van <http://www.kennislink.nl/publicaties/zin-en-onzin-van-de-waarschijnlijkheidsrekening>
- NCTM. (2007). Opgeroepen op mei 26, 2013, van <http://www.math.ccsu.edu/mitchell/math412tcmvirtualspinprob.pdf>



Papaieronymou, I. (2010). Opgeroepen op mei 20, 2013, van <http://fractus.uson.mx/Papers/CERME6/wg3.pdf#page=16>

Penas, L. M. (1987). *Probability and statistics in midwest high schools. (pp. 122).* , VA: American Statistical Association Proceedings of the Section on Statistical Education.

Poincaré, H. (1905). Intuition and Logic,. (t. i. Halsted, Red.) *La valeur de la science* .

Reichard, L. A. (2010). *Getal en Ruimte Wi havo A deel 2* (Vol. 12e oplagen). EPN.

Verbeek, J. (2008). Kanskoffer, Een idee voor de dectie wiskunde. *Euclides Kans Special* , 4 (83), 148.

Wikipedia. (sd). *Wikipedia*. Opgeroepen op mei 20, 2013, van [http://nl.wikipedia.org/wiki/Johan\\_de\\_Witt](http://nl.wikipedia.org/wiki/Johan_de_Witt)

Wikipedia.nl. (sd). *Wikipedia.nl*. Opgeroepen op mei 20, 2013, van [http://nl.wikipedia.org/wiki/Johan\\_de\\_Witt](http://nl.wikipedia.org/wiki/Johan_de_Witt)

Woorden.org. (sd). Opgeroepen op juni 10, 2013, van <http://www.woorden.org/woord/kansrekening>

Woorden.org. (sd). Opgeroepen op september 8, 2013, van <http://www.woorden.org/woord/intu%C3%Aftie>

wynneconsult.com. (sd). *Kennis Basis Statistiek*. Opgeroepen op mei 20, 2013, van <http://www.wynneconsult.com/root/HomePageKB012.htm>

Zwaneveld, B. (2012). *Handboek Wiskunde Didactiek*. Eerste graads lerarenopleiding.