



Muziek uitgedrukt in getallen: de toonklasseverzamelingsentheorie en haar toepassingen

Aline Honingh

Institute for Logic, Language and Computation,
Universiteit van Amsterdam

Zebra boekje



Muziek uitgedrukt in getallen: De toonklasseverzamelings-
theorie en haar toepassingen.

Zebra reeks, deel 36, Epsilon uitgaven

Aline Honingh en Michiel Schuijjer

Toonklasseverzamelingentheorie?



- Theorie voor het analyseren van muziek
- Geïntroduceerd door Allen Forte en Milton Babbitt
- Beschrijft relaties tussen verzamelingen tonen

Overzicht



- Muziek
- Toonklassen
- Toonklassenverzamelingen
- Relaties tussen toonklasseverzamelingen
 - Transpositie
 - Inversie
 - Multiplicatie
- Equivalentie
- Intervalvector
- Toepassingen
 - Compositie
 - Analyse



Muziek: tonaal vs atonaal



- Tonale muziek: tonaal centrum, hierarchie tussen tonen en toonladder trappen maken verwachtingen

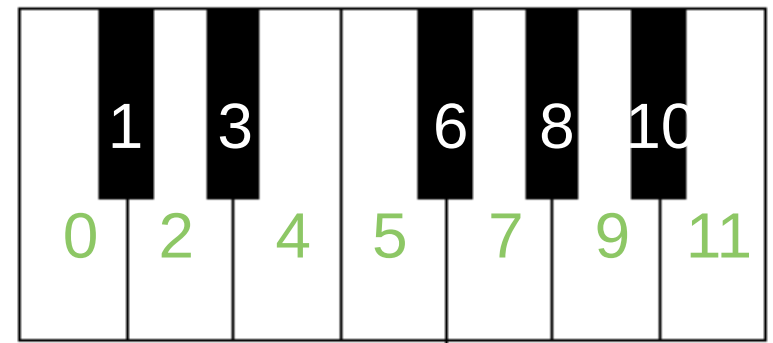


- Atonale muziek: elke toon is even belangrijk als elke andere

Tonen



Toonklassen



- Getal tussen 0 en 11
- referentie toon, bv C=0, dan C#/Db=1, D=2, etc.
- Octaaf equivalentie 
- Enharmonische equivalentie
- Toonklasse => interval t.o.v. C=0



- Als $A=0$ dan $C = \dots$



- Als $A=0$ dan $C = 3$
- Wat is de afstand tussen C en E ?



- Als $A=0$ dan $C = 3$
- Wat is de afstand tussen C en E ? 4 of 8

Toonklasseverzameling



- Groepje toonklassen
 - $C, C\#, D = \{0, 1, 2\}$
- Herhalingen tellen niet
 - $\{0, 0, 3, 3, 3\} = \{0, 3\}$
- Volgorde niet belangrijk – permutatie-equivalentie
 - $\{1, 0\} = \{0, 1\}$

Toonklasseverzameling



Implicaties:

- Melodie makkelijk te transformeren in TKV, maar omgekeerd niet
- Oneindig lange melodien kunnen weergegeven worden als (eindige) TKV

Operaties

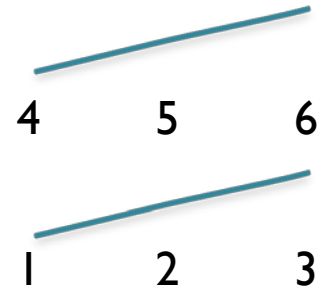


- Operaties transformeren toonklasseverzamelingen in andere verzamelingen
- Gebruikt door (moderne) componisten

Operaties: Transpositie



- $T_n(x) = x + n \pmod{12}$
 - $T_4\{0, 1, 4\} = \{4, 5, 8\}$
 - $T_7\{0, 2, 4, 6, 8\} = \{7, 9, 11, 1, 3\}$



- Sommige transposities zijn gelijk
 - $T_7 = T_{-5}$

- Voorbeeld

◦ Melodie



Transpositie



Transpositie voorbeelden (I)



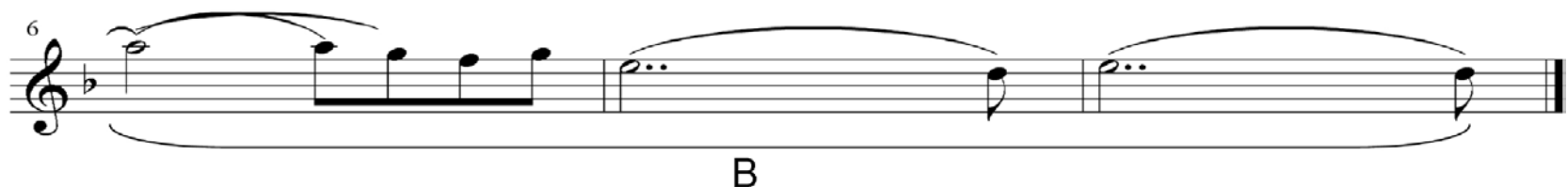
- Wordt gebruikt in zowel tonale als atonale muziek
 - Bon Jovi – Livin' on a prayer
 - Transpositie over kleine terts: T_3



Transpositie voorbeelden (2)



- Viool sonate Brahms



A



T₋₅

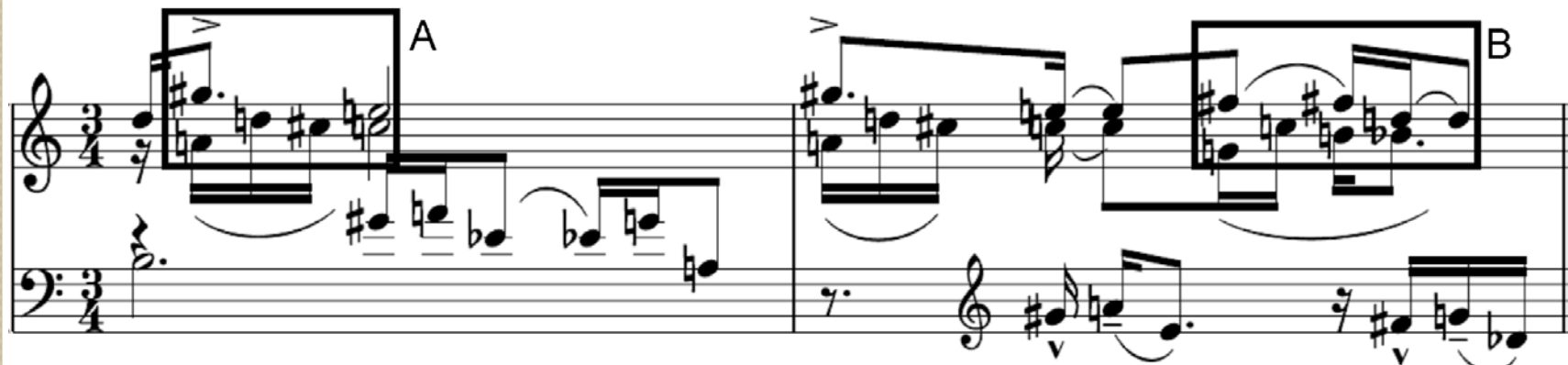
B



Transpositie voorbeelden (3)



- Schoenbergs Klavierstück opus II nr I.
mt 29-30



T_{-2}



Operaties:

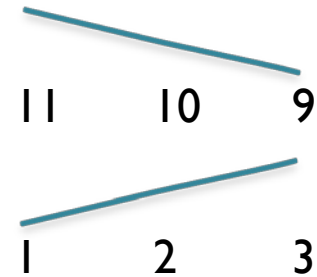
Inversie



- Spiegeling in het octaaf

$$I(x) = -x \pmod{12}$$

- $I\{1,2,3\} = \{11,10,9\}$



- Spiegeling in interval n

$$I_n(x) = n - x \pmod{12}$$

- Er geldt:

$$T_n I(x) = T_n(-x)$$

$$= n - x$$

$$= I_n(x)$$

- Voorbeeld

- Melodie



Inverse

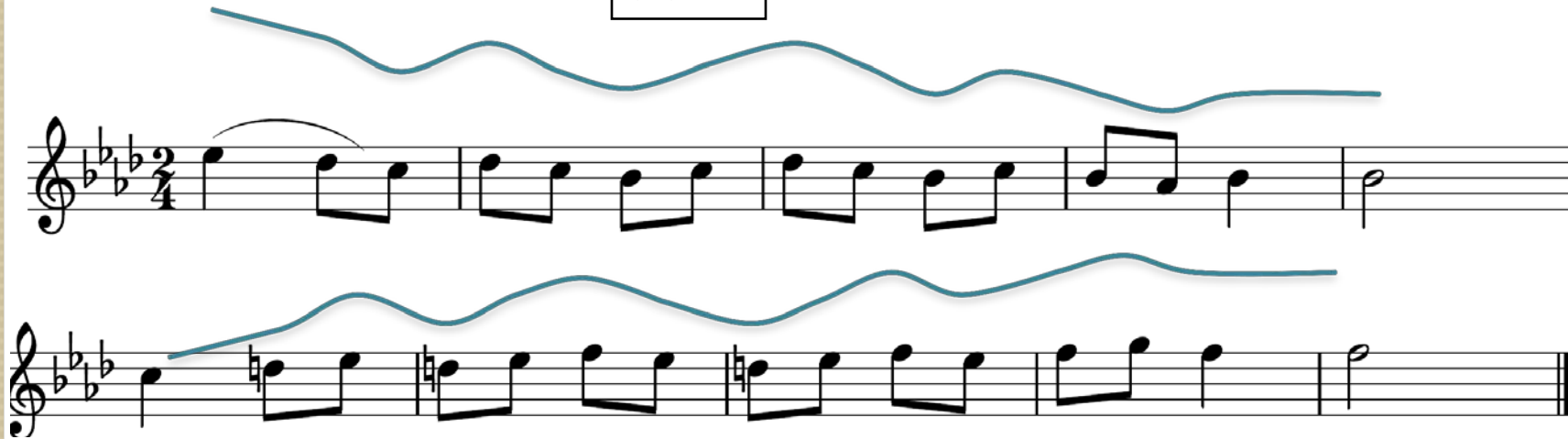
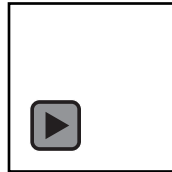


Inversie voorbeelden (I)



Wordt gebruikt in zowel tonale als atonale muziek

- Symfonie I van Brahms, 3de deel

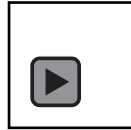


Inversie voorbeelden (2)



- Weberns variatie voor piano op. 27, dl 2

- Fragment



- Verzameling A



- Verzameling B

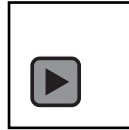


Inversie voorbeelden (2)



- Weberns variatie voor piano op. 27, dl 2

- Fragment



- Verzameling A



- Verzameling B



Operaties:

Multiplicatie



- Vergroting van intervallen

$$M_n(x) = nx \pmod{12}$$

$$M_5\{0,1,2,3\} = \{0,5,10,3\}$$

- Speciale gevallen:

$$M_1\{0,1,2\} = \{0,1,2\} \rightarrow M_1 = T_0$$

$$M_{11}\{0,1,2\} = \{0,11,10\} \rightarrow M_{11} = I$$

- Niet allemaal interessant:

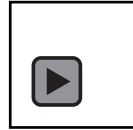
$$M_6\{0,1,3,4,5\} = \{0,6,6,0,6\} = \{0,6\}$$

- Alleen M_1, M_{11}, M_5, M_7 vormen bijectieve afbeeldingen

Multiplicatie voorbeeld



Bartoks derde strijkkwartet



$\{0, 1, 2, 3\}$



$M_7\{0, 1, 2, 3\} = \{0, 7, 2, 9\}$



Equivalentie



- Wanneer noemen we 2 toonklasse-verzamelingen equivalent?
 - Zijn $\{0, 1, 2, 3\}$ en $\{1, 2, 3, 4\}$ equivalent?
 - En $\{0, 1, 2, 3\}$ en $\{12, 11, 10, 9\}$?

Equivalentie



- Allen Forte:
 - Transposities en inversies equivalent (bevatten zelfde intervallen)
 - Resultaat: 224 toonklasse-verzamelingen en vormt het universum van mogelijke toonklasseverzamelingen (tonale akkoorden zijn subset)
 - $\Rightarrow$ (equivalentie) klassen van toonklasseverzamelingen (TKV-klassen)

Primaire vorm



- TKV-klassen worden aangeduid met de primaire vorm
- De primaire vorm is de meest compact geordende verzameling van een klasse

Forte nummer



- Aanduiding voor TKV-klasse

Interval vector	Forte nr.	Primaire vorm	geinverteerde vorm
[000000]	0-1:	{}	
[000000]	1-1:	{0}	
[100000]	2-1:	{0,1}	
[010000]	2-2:	{0,2}	
[001000]	2-3:	{0,3}	
[000100]	2-4:	{0,4}	
[000010]	2-5:	{0,5}	
[000001]	2-6:	{0,6}	
[210000]	3-1:	{0,1,2}	
[111000]	3-2:	{0,1,3}	{0,2,3}
[101100]	3-3:	{0,1,4}	{0,3,4}
[100110]	3-4:	{0,1,5}	{0,4,5}
[100011]	3-5:	{0,1,6}	{0,5,6}
[020100]	3-6:	{0,2,4}	
[011010]	3-7:	{0,2,5}	{0,3,5}
[010101]	3-8:	{0,2,6}	{0,4,6}

Forte nummer



Sommige akkoorden zouden anders naamloos zijn gebleven



Stravinsky's le Sacre du Printemps, Les augures
printanieres: Danses des adolescentes, 7-32 {0, 1, 3, 4, 6, 8, 9}

Intervalvector

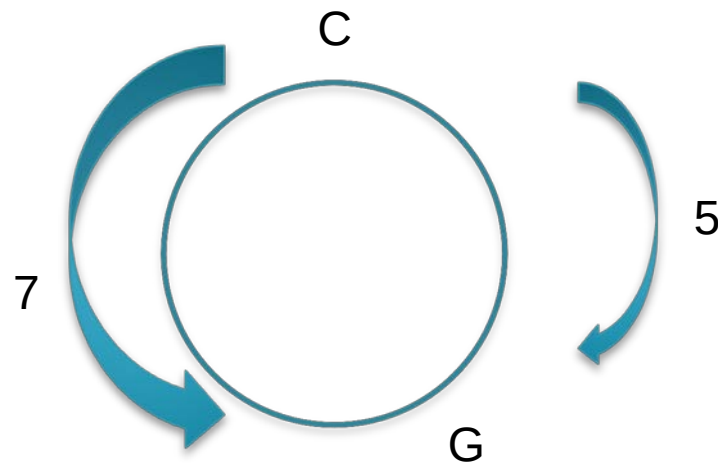


- De intervalvector geeft aan hoeveel intervallen van een bepaalde intervalklasse in een toonklasseverzameling aanwezig zijn
- Alle verzamelingen in een TKV-klasse hebben dezelfde intervalvector,

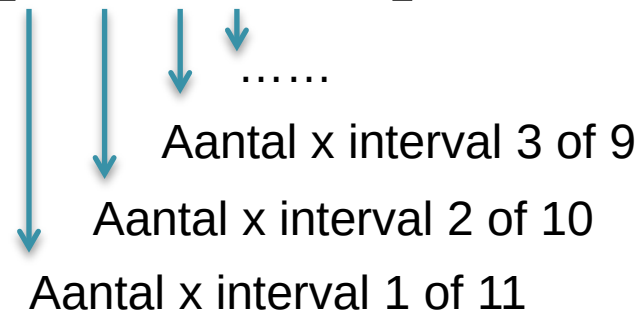
Intervalvector



- Zes intervalklassen (1=11, 2=10, 3=9, 4=8, 5=7, 6)



- Intervalvector: [x x x x x x]



Intervalvector



Voorbeeld:

Toonklasseverzameling:

$\{0, 1, 2, 3\}$

Intervalvector:

$[x \ x \ x \ x \ x \ x]$

Intervalvector



Voorbeeld:

Toonklasseverzameling:

$$\begin{array}{c} \textcolor{red}{1} \quad \textcolor{red}{1} \quad \textcolor{red}{1} \\ \hline \{0, 1, 2, 3\} \end{array}$$

Intervalvector:

$$[\textcolor{red}{3} \ x \ x \ x \ x \ x]$$

Intervalvector



Voorbeeld:

Toonklasseverzameling:

$$\{0, 1, 2, 3\}$$

Diagram illustrating the set $\{0, 1, 2, 3\}$ with intervals of 2 marked above and below the elements 1 and 2.

Intervalvector:

$$[3 \text{ } 2 \text{ } x \text{ } x \text{ } x \text{ } x]$$

Intervalvector



Voorbeeld:

Toonklasseverzameling:

$$\overbrace{\{0, 1, 2, 3\}}^3$$

Intervalvector:

$$[3 \ 2 \ | \ x \ x \ x]$$

Intervalvector



Voorbeeld:

Toonklasseverzameling:

$\{0, 1, 2, 3\}$

Intervalvector:

$[3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$

Intervalvector, Z-relatie



- Transpositie, inversie $\Rightarrow$ dezelfde intervalvector
- Verzamelingen met dezelfde intervalvector $\nRightarrow$ transpositie, inversie

Vb:

$\{0, 1, 4, 6\}$ is Z-gerelateerd aan $\{0, 1, 3, 7\}$

Intervalvector is $[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

Z-relatie



4-Z15	4-Z15	4-Z15	4-Z15	4-Z29	4-Z29	4-Z29	4-Z29
{0,1,4,6}	{0,1,4,6}	{1,3,6,7}	{0,1,4,6}	{0,1,3,7}	{1,6,7,9}	{0,4,9,10}	{0,4,6,7}



Wiskunde



Opgaven:

- Is T_n hetzelfde als IT_n ?
- Laat zien dat een verzameling van n toonklassen ——— intervallen bevat.
- Controleer dat $M5(4-Z|5)=4-Z29$.

Vragen:

- Hoe komt het dat sommige Z -paren aan elkaar gerelateerd zijn door multiplicatie?
- Zijn er nog meer wiskundige relaties?

Toepassingen



- Compositie
- Muziek analyse
- Abstractie $\Rightarrow$ algoritmes (bv classificatie)

Compositie



- De theorie is *geen* compositietechniek
- Het is een inventaris van relaties
- Het kan helpen de keuzemogelijkheden te beperken

Compositie



Maarten van Norden



Square Roots

- Gebruikt hexachorden als bouwstenen van zijn compositie
- Hexachorden hebben speciale eigenschappen
- Segmenteert hexachord in kleine verzamelingen
- Legt relatie tussen paren van verzamelingen vast op wiskundige manier

Muziek analyse

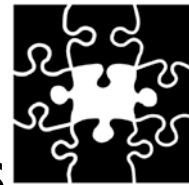


Wat voor inzicht geeft analyse ons?

- Als bepaalde intervalcombinaties, die los staan van het muzikale idoom (bv tonaal), vaak terugkeren, karakteriseert dit de muziek
- Terugkerende intervalcombinaties zorgen voor samenhang

Muziek analyse

Vb van samenhang door interval combinaties



Schönberg, Fünf Klavierstücke,
op. 23, I, maat 1-4



(a)

Combinaties van klasse
3-2: {0,1,3}



(b)

Combinaties van klasse
3-3: {0,1,4}



(c)

Muziek analyse



Maar...

- Hadden we deze samenhang ook gehoord zonder de relaties te bekijken?

Belangrijke vraag bij muziekanalyse:

- Hoever kun je gaan bij het vaststellen van relaties?

Toonklasseverzamelingsentheorie



- Muziek
- Toonklassen
- Toonklassenverzamelingen
- Relaties tussen toonklasseverzamelingen
 - Transpositie
 - Inversie
 - Multiplicatie
- Equivalentie
- Intervalvector
- Toepassingen
 - Compositie
 - Analyse

Bedankt!



<http://staff.science.uva.nl/~ahoningh>

Email: A.K.Honingh@uva.nl



UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM



INSTITUTE FOR LOGIC, LANGUAGE AND COMPUTATION



Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek