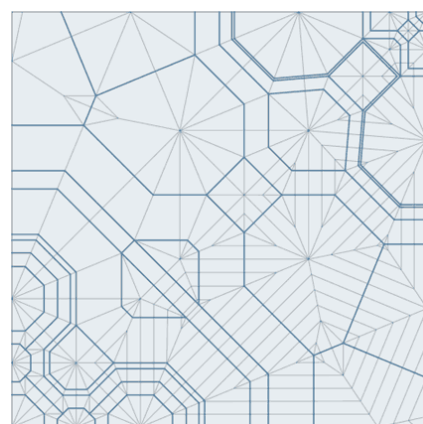
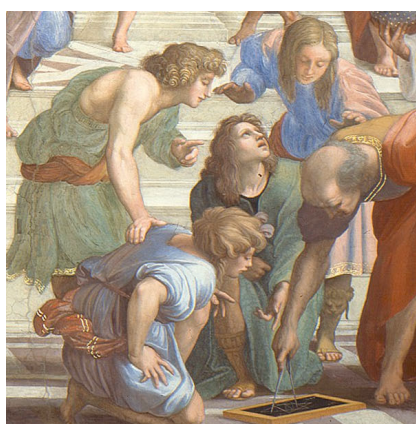


Constructies met passer en liniaal, origami en meccano

Luuk Hoevenaars, Hogeschool Utrecht

luuk.hoevenaars@hu.nl



Hand-out voor de Nederlandse Wiskunde Dagen 2014

De module in vogelvlucht

De module gaat over de mogelijkheden én de **on**mogelijkheden die horen bij de constructiemethoden passer en liniaal, origami en meccano.

Studielast

De module bedraagt 40 slu.

Onderdelen, werkvormen en toetsing

Het eerste deel gaat over de onmogelijkheid van de klassieke passer-en-liniaal constructieproblemen uit de Griekse Oudheid. Centraal staat het bewijs van de onmogelijkheid van verdubbeling van de kubus, het wiskundig gereedschap is de theorie van lichamen. De leerlingen werken grotendeels zelfstandig de hoofdstukken van het moduleboekje door, waarbij ze onderweg een meetkundige rekenmachine maken in geogebra en daarmee (in de voetsporen van Gauss) een regelmatige zeventienhoek construeren. Uitwisselen en bespreken van geogebra macro's is een essentieel onderdeel hiervan.

Het tweede deel bestaat uit een kennismaking met de constructiemethoden Origami en Meccano, middels interactieve lessen en het zelfstandig werken met werkbladen. Centraal hierbij staan de vergelijking tussen de spelregels van passer-en-liniaal en die van origami, de flexibiliteit / rigiditeit van meccano-constructies en de extra mogelijkheden die de nieuwe constructiemethoden bieden.

In het derde deel werken leerlingen in groepjes aan een zelf gekozen eindopdracht. Deze hebben over het algemeen een open karakter en nieuwsgierigheid en creativiteit van de leerlingen wordt gestimuleerd. Via tussentijdse presentaties wordt input en feedback van medeleerlingen verzameld en verwerkt.

Toetsing

- Deel 1: Beoordeling van huiswerkopdrachten en de geogebra opdracht, weging 33%
- Deel 2: Geen beoordeling, oriëntatie voor de eindopdrachten
- Deel 3: Beoordeling van verslag middels een rubric, weging 67%

Materialen

Alle materialen zijn te vinden via een dropbox link:

<https://www.dropbox.com/sh/l5qjnccup35jkdq/uh2fjWlyTD>

Docentmateriaal

- Moduleboekje met uitwerkingen
- Eindopdrachten met bronnen
- Powerpoint presentaties om te gebruiken tijdens de lessen
- Achtergronden en literatuurlijst

Leerlingmateriaal

- Moduleboekje zonder uitwerkingen
- Werkindeling
- Instructies en rubric horend bij de eindopdrachten

Wat volgt zijn de werkbladen Origami en Meccano uit deel 2:

1. Breuken vouwen met Origami (doeners)
2. Driedeling van een hoek met Origami (denkers)
3. Driedeling van een hoek met Meccano (3a denkers & 3b doeners)
4. Een regelmatige vijfhoek met Meccano (4a denkers & 4b doeners)

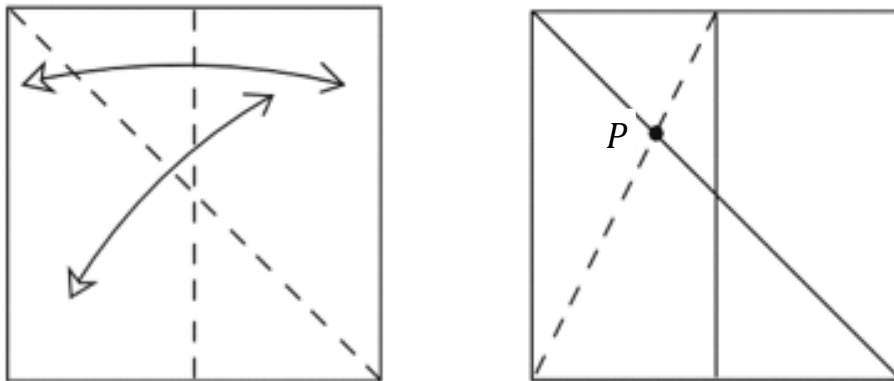
Werkblad 1: breuken vouwen met Origami

*Met de meetkundige rekenmachine die je in Geogebra hebt gebouwd kun je op basis van **passer-en-liniaalconstructies** meetkundig optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en worteltrekken.*

*In deze opdracht maak je een begin met het onderzoeken van de mogelijkheden van een meetkundige rekenmachine op basis van **Origami**.*

Wat doet deze vouw?

Volg de vouwinstructies van onderstaande figuur om punt P te vouwen.



Het vierkant heeft zijden met lengte 1 en het punt linksonder is de oorsprong.

Vraag 1: Zoek de coördinaten van P .

Vraag 2: Waarom is dit interessant? Waar kan dit voor worden gebruikt?

Vraag 3: Hoe kun je deze methode generaliseren, bijvoorbeeld om een lijnstuk van lengte $1/5$ of $1/n$ te vouwen?

Vraag 4: Hoe vouw je een algemene breuk m/n ?

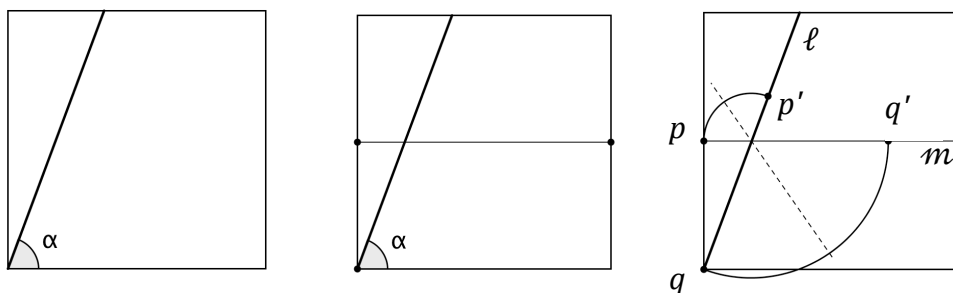
Werkblad 2: driedeling van een hoek met Origami

Driedeling van een hoek is in het algemeen:

- met passer en liniaal onmogelijk
- met meccano wel mogelijk (zie een andere eindopdracht)

In deze opdracht onderzoek je of driedeling van een hoek met Origami mogelijk is.

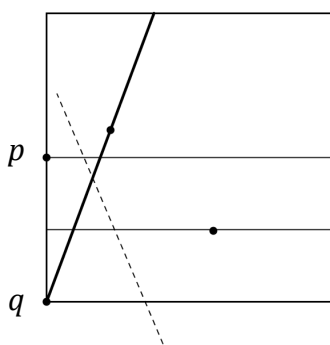
Neem een vierkant vel papier en vouw een lijn ℓ onder een willekeurige horizontale hoek α .
Vouw een lijn m door het midden van het papier en vouw dan zoals in de derde figuur:
vouw tegelijkertijd p op ℓ en q op m .



De beeldpunten van p en q na het vouwen (dit is hetzelfde als spiegelen in de vouwlijn) noemen we p' en q' .

Vraag 1: Vouw de lijn qq' en bewijs dat dit de bissectrice is van $\angle \alpha$.

In onderstaande figuur vouw je het papier nogmaals horizontaal door de helft. Dan vouw je punt p en punt q gelijktijdig zoals aangegeven.



Vraag 2: Wat voor bijzondere lijn is qq' nu? Bewijs dit.

Vraag 3: Maak nu niet twee gelijke stroken zoals hierboven, maar drie gelijke stroken met punt p weer op de bovenste lijn. Vouw weer punt p op lijn ℓ en punt q op de grens van de onderste strook. Deelt qq' hoek α in vier gelijke hoeken?

Vraag 4: Kun je een (andere) manier verzinnen om een hoek in vieren te vouwen?

Werkblad 3a: driedeling van een hoek met Meccano (theoriegedeelte)

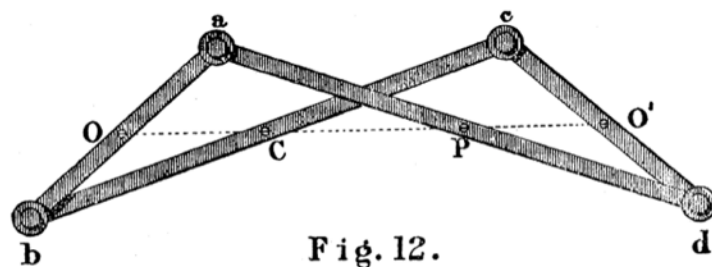
Driedeling van een hoek is in het algemeen:

- met passer en liniaal onmogelijk
- met origami wel mogelijk (zie een andere eindopdracht)

In deze opdracht onderzoek je of driedeling van een hoek met Meccano mogelijk is.

In 1877 verscheen het artikel "How to draw a straight line" van Arthur Kempe. Het gaat over constructies met stangen en verbindingpunten daartussen, zogenaamde *linkages*. In figuur 1 zie je een voorbeeld van zo'n linkage, waarin de stangen rondom de punten a, b, c en d kunnen scharnieren. De punten O, O', C, P zullen we negeren.

Verder is van deze linkage gegeven: $|ab| = |cd| = 2$ en $|bc| = |ad| = 4$

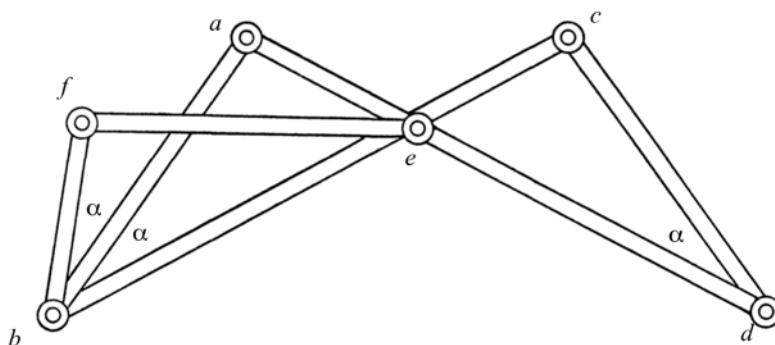


Figuur 1: Een linkage $abcd$ uit het artikel van Arthur Kempe.

a) Bewijs dat $\angle abc = \angle cda$. We noemen deze hoek in het vervolg α .

Hint: Bewijs dat $\triangle abc \cong \triangle cda$. Gebruik hierbij één van de congruentiegevallen op de bijlage.

Aan de linkage $abcd$ worden twee staven toegevoegd zodat we linkage $abcdef$ krijgen van figuur 2. Verder is van deze nieuwe linkage nog gegeven: $|bf| = |ae| = 1$ en $|ef| = |ab| = 2$.

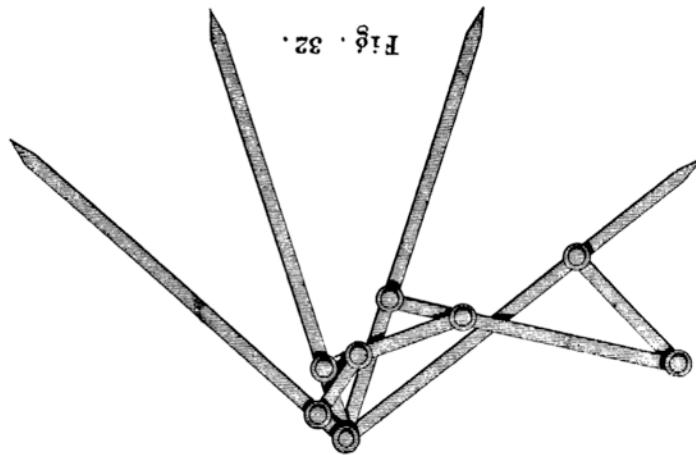


Figuur 2: De linkage $abcd$ wordt uitgebreid met twee stangen tot de linkage $abcdef$.
Het punt e is NIET het snijpunt van bc en ad , dit lijkt alleen zo in de tekening.

b) Bewijs dat $\triangle aeb \sim \triangle cdb$, maak hierbij gebruik van het gelijkvormigheidsgeval (**zhz**).

Hiermee kun je aantonen dat de linkages $abcd$ en $fbae$ gelijkvormig zijn met schalingsfactor 2. Daarom geldt ook $\angle abf = \alpha$. Door de punten c en f te scharnieren rond punt b krijg je op deze manier een **bissectrice**: de lijn ab verdeelt $\angle fbc$ in twee gelijke hoeken.

- c) Construeer in de bijlage met passer en liniaal de bissectrice van $\angle fbc$ en controleer dat de linkage hiermee overeenkomt.



Figuur 3: De trisectrice uit het artikel van Kempe.

In figuur 3 is de linkage $abcdef$ van figuur 2 op zijn beurt uitgebreid met twee stangen, zodanig dat er drie gelijkvormige linkages zijn. In het onderste punt b ontstaan nu *drie* gelijke hoeken. Het resultaat is een **trisectrice** (driedeler) van $\angle b$.

- d) Kun je met passer en liniaal de trisectrice van $\angle b$ construeren om te controleren of deze samenvalt met die van de linkage? Motiveer je antwoord.
- e) Hoe zou je met meccano een hoekenvierdeler kunnen maken? En een vijfdeeler?

Bijlage bij opgave a en b

Congruente (gelijke) driehoeken $\cong$

Twee driehoeken zijn congruent als ze gelijk hebben:

- **(HZH)** een zijde en twee aanliggende hoeken.
- **(ZHH)** een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek.
- **(ZHZ)** twee zijden en de ingesloten hoek.
- **(ZZZ)** alle zijden.
- **(ZZR)** twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden

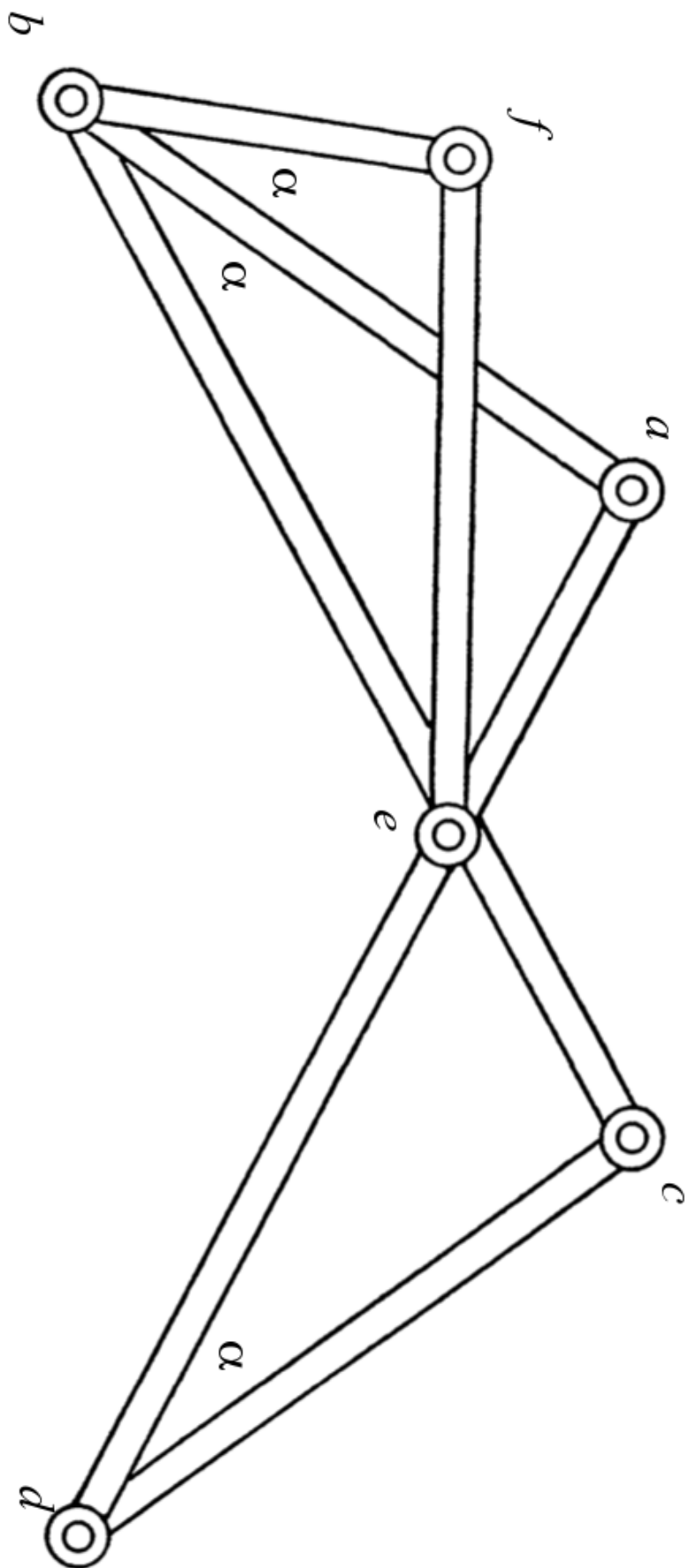
Gelijkvormige driehoeken $\sim$

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben:

- **(hh)** twee hoeken.
- **(zhz)** een hoek en de verhouding van de omliggende zijden.
- **(zzz)** de verhouding van de zijden.
- **(zzr)** een rechte hoek en de verhouding van twee niet-omliggende zijden.

NAAM:

Bijlage bij opgave c



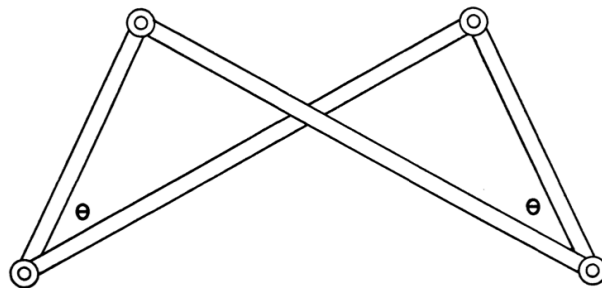
Werkblad 3b: driedeling van een hoek met meccano (praktijkgedeelte)

Er bestaat geen wiskunde literatuur over constructies met meccano, maar wel over aanverwante technieken. Al in de negentiende eeuw werden constructies gemaakt met zogenaamde *koppelingen* (Engels: linkages). Deze bestonden uit metalen staven die aan de uiteinden waren verbonden via een scharnier en waren bijvoorbeeld nodig voor stoomlocomotieven om de rechte beweging van de zuiger om te zetten in de cirkelbeweging van de wielen.

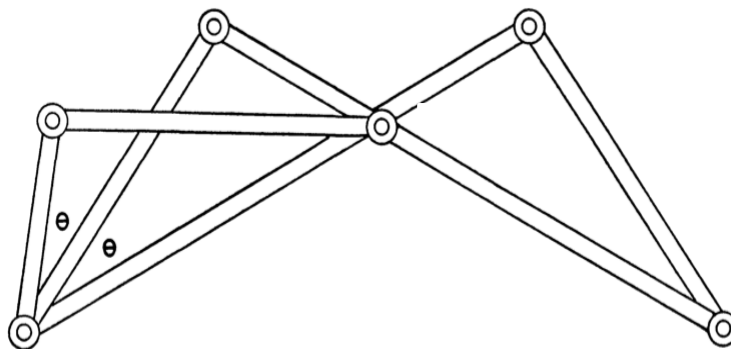
Je kunt vaak handig gebruik maken van de flexibiliteit van meccano, bijvoorbeeld om een hoek in gelijke hoeken op te delen. De nu volgende fantastische constructie is van Alfred Kempe (1877).

Opgave

- Bouw de constructie van figuur 1 na en laat zien dat de constructie flexibel is.
- Waarom noemen we dit type vierhoek ook wel een "gekruist parallellogram"?
- In figuur 2 worden twee gelijkvormige gekruiste parallellogrammen aan elkaar gekoppeld, zodat twee van de hoeken gelijk zijn. Gebruik dit om zelf een bissectrice van meccano te maken (zie ook het voorbeeld op tafel).
- Bedenk hoe je een trisectrice kunt bouwen met meccano door een extra gekruist parallellogram aan deze constructie te bevestigen. Gebruik gelijkvormige gekruiste parallellogrammen met als korte zijde respectievelijk 2, 4, 8.
- Kun je deze constructie uitbreiden naar een vierdeler? Vijfdeler? Enzovoorts?



FIGUUR 1. Een gekruist parallellogram

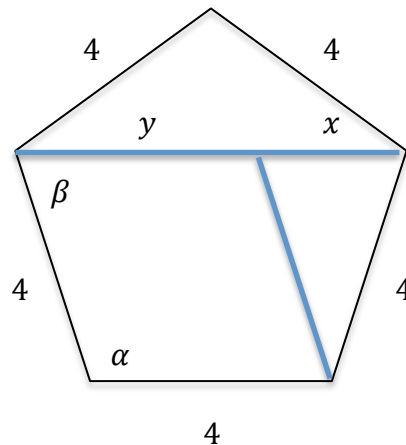


FIGUUR 2. Een bissectrice van meccano

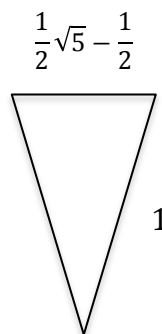
Werkblad 4a: regelmatige vijfhoek met meccano (theoriegedeelte)

In één van de huiswerkopgaven heb je bekeken hoe een regelmatige tienhoek en regelmatige vijfhoek geconstrueerd kunnen worden met passer en liniaal. Deze opdracht gaat over het construeren van zo'n vijfhoek met meccano. Hiervoor moeten alle hoeken gelijk zijn en de constructie moet star (onbeweeglijk) worden gemaakt.

1. Bekijk de regelmatige vijfhoek hieronder. Bewijs dat $\angle\alpha = 108^\circ$ en dat $\angle\beta = 72^\circ$.



Je kunt nu alle hoeken vinden in bovenstaande figuur. Je vindt dan een gelijkbenige driehoek zoals in de onderstaande figuur. In inleveropgave 19 heb je over deze speciale gelijkbenige driehoek met basishoek 72° bewezen: als de lengte van de benen gelijk is aan 1, dan is de basis gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$.



2. Leg uit: als de zijde van de regelmatige vijfhoek gelijk is aan 4, dan geldt $x = 2\sqrt{5} - 2$.
3. Kijk nog eens terug naar alle hoeken in de bovenste figuur en bewijs dat $y = 4$.

Leg uit aan de doeners dat $x = 2\sqrt{5} - 2$ en $y = 4$ en kijk hoe zij dat in de praktijk hebben gebracht.

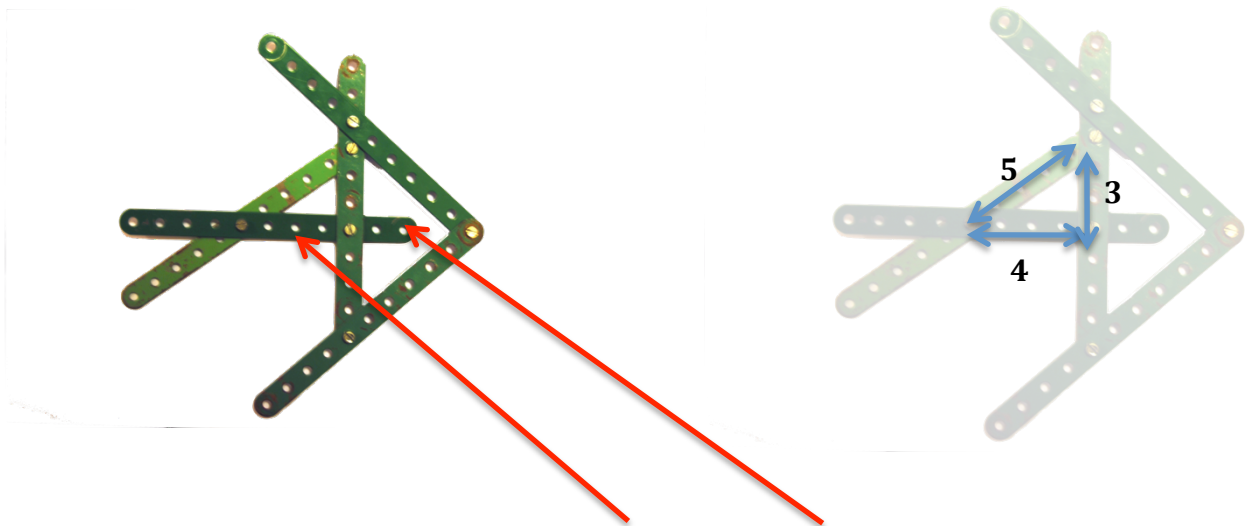
Werkblad 4b: regelmatige vijfhoek met meccano (praktijkgedeelte)

In één van de huiswerkopgaven heb je bekeken hoe een regelmatige tienhoek en regelmatige vijfhoek geconstrueerd kunnen worden met passer en liniaal. Deze opdracht gaat over het construeren van zo'n vijfhoek met meccano. Hiervoor moeten alle hoeken gelijk zijn en de constructie moet star (onbeweeglijk) worden gemaakt.

Maak lengte $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

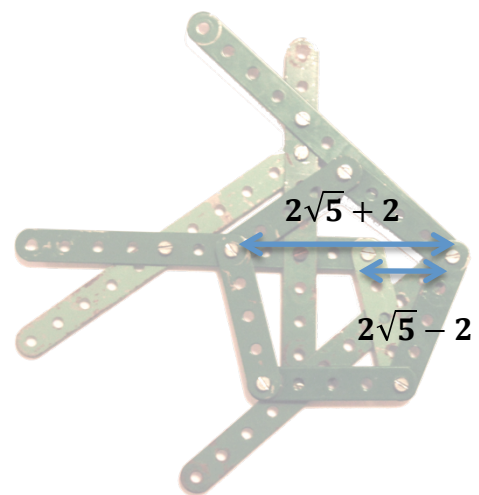
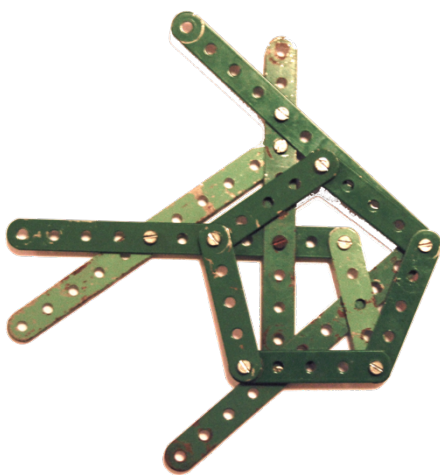


Maak via een 3-4-5-driehoek een staaf vast loodrecht op de verticale staaf.
Zorg ervoor dat er twee gaatjes uitsteken binnen de pijl.



Later heb je de gaatjes nodig met afstanden $2\sqrt{5} + 2$ en $2\sqrt{5} - 2$ vanaf het meest rechtse gaatje.

Maak een gelijkzijdige vijfhoek van Meccano vast aan de eerdere constructie. Let daarbij goed op de gaatjes die je moet gebruiken.



Je hebt nu een regelmatige vijfhoek!

Twee hoekpunten zijn verbonden door een staaf die deels virtueel is.

Een derde hoekpunt is ook verbonden met deze virtuele staaf via een staafje met als lengte 4, hetzelfde als de zijden v/d regelmatige vijfhoek.

