

Integralen in de getaltheorie

Frits Beukers

NWD 2014

Noordwijkerhout, 1 februari 2014

Een integraal

De Riemann zeta functie:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots$$

Belangrijk voor de studie van de priemgetallen, want

$$\zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1} \cdots \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdots$$

Integraal van Riemann:

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(t^{s/2-1} + t^{(1-s)/2-1}\right) \Theta(t) dt$$

waarin $\Theta(t) = \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t}$.

Cirkelmethode

Aantal manieren om een getal n te schrijven als som van k priemgetallen:

$$\int_0^1 \left(\sum_{p \text{ priem} < n} e^{2\pi i p t} \right)^k e^{-2\pi i n t} dt.$$

Vermoeden van Goldbach

Elk even getal ≥ 4 is te schrijven als som van twee priemgetallen.

Stelling (Vinogradov (1930's), Helfgott (2013))

Elk oneven getal ≥ 7 is te schrijven als som van drie priemgetallen.

Doelstelling vandaag

Stelling (Lambert, 1761)

- 1 Voor alle gehele getallen $a \neq 0$ geldt dat e^a irrationaal is.
- 2 Het getal π is irrationaal.

Een VWO-integraal

Kies een geheel getal $n \geq 0$ en bekijk

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx = -[e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1}$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = -[x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1}$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -[x^2 e^{-x}]_0^1 + 2 \int_0^1 x e^{-x} dx = 2 - 5e^{-1}$$

$$\int_0^1 x^3 e^{-x} dx = -[x^3 e^{-x}]_0^1 + 3 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = 6 - 16e^{-1}$$

Eerste resultaat

Waarden van

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

$$I_3 = 6 - 16e^{-1}$$

$$I_4 = 24 - 65e^{-1}$$

$$I_5 = 120 - 326e^{-1}$$

$$I_6 = 720 - 1957e^{-1}$$

$$I_7 = 5040 - 13700e^{-1}$$

$$\vdots \quad \quad \vdots$$

$$I_n = n! - a_n e^{-1}$$

met a_n geheel en $a_n = na_{n-1} + 1$.

Irrationaliteit van e

Er geldt voor alle n :

- ① $I_n > 0$
- ② $I_n = n! - a_n e^{-1}$ met a_n geheel
- ③ $I_n < 1/n$.

Bewijs van (3):

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Irrationaliteit van e (en e^{-1}). Stel dat e^{-1} rationaal is, $e^{-1} = p/q$.

- Uit (1) en (2) volgt $1/q \leq I_n$.
- Samen met (3),

$$\frac{1}{q} \leq I_n < \frac{1}{n}$$

- Tegenspraak als $n > q$. Dus e^{-1} irrationaal.

Irrationaliteit van e^2 ?

Bekijk nu:

$$I_n = \int_0^2 x^n e^{-x} dx.$$

Eigenschappen:

- $I_n > 0$
- $I_n = n! - a_n e^{-2}$ met a_n geheel.
- $I_n < 2^n/n$

Werkt dus niet...maar kijk even naar I_{30} :

$$2^{26}(3952575621190533915703125 - 29205803000242518049708411e^{-2}).$$

Vermoeden

Er zijn oneindig veel n zó dat $n!$ en a_n door 2^{n-1} deelbaar zijn.
Bijvoorbeeld $n = 2^r$.

Eerste alternatief voor e^2

Opgave (=te doen)

Bewijs de irrationaliteit van e^2 met behulp van de integralen

$$\int_0^2 (x-1)^n e^{-x} dx.$$

Tweede alternatief voor e^2

Bekijk:

$$J_n = \int_0^2 x^n (2-x)^n e^x dx.$$

We verwachten $J_n = c_n - d_n e^2$ met c_n, d_n geheel.

Een paar waarden:

$$J_1 = 4$$

$$J_2 = 8(-7 + e^2)$$

$$J_3 = -48(-37 + 5e^2)$$

$$J_4 = 768(-133 + 18e^2)$$

$$J_5 = -3840(-2431 + 329e^2)$$

$$J_6 = 46080(-27007 + 3655e^2)$$

$$J_7 = -1290240(-176761 + 23922e^2)$$

De eerste kettingbreukbenaderingen van e^2 :

$$7, \frac{15}{2}, \frac{22}{3}, \frac{37}{5}, \frac{133}{18}, \frac{2431}{329}, \frac{12288}{1663}, \frac{14719}{1992}, \frac{27007}{3655}, \frac{176761}{23922}, \dots$$

Eigenschappen van J_n

Bekijk:

$$\frac{J_n}{n!} = \frac{1}{n!} \int_0^2 x^n (2-x)^n e^x dx.$$

Een paar waarden:

$$J_1/1! = 4$$

$$J_2/2! = 4(-7 + e^2)$$

$$J_3/3! = -8(-37 + 5e^2)$$

$$J_4/4! = 32(-133 + 18e^2)$$

$$J_5/5! = -32(-2431 + 329e^2)$$

Bewering

$$\frac{1}{n!} \int_0^2 x^n (2-x)^n e^x dx = r_n - s_n e^2$$

met r_n, s_n geheel.

Algemene a

Kies a positief geheel en bekijk voor elke n ,

$$I_n(a) = \frac{1}{n!} \int_0^a x^n (a-x)^n e^x dx.$$

Eigenschappen:

- ① $I_n(a) > 0$
- ② $I_n(a) = r_n - s_n e^a$ met r_n, s_n geheel.
- ③

$$I_n(a) < \frac{1}{n!} e^a a^{2n+1}.$$

Bewijs van (3):

$$I_n(a) = \frac{1}{n!} \int_0^a x^n (a-x)^n e^x dx < \frac{e^a}{n!} a \times a^{2n}.$$

Laatste volgt uit $x(a-x) \leq a^2$.

Irrationaliteit van e^a

Kies a positief geheel en bekijk voor elke n ,

$$I_n(a) = \frac{1}{n!} \int_0^a x^n (a-x)^n e^x dx.$$

Eigenschappen:

- ① $I_n(a) > 0$
- ② $I_n(a) = r_n - s_n e^a$ met r_n, s_n geheel.
- ③

$$I_n(a) < \frac{1}{n!} e^a a^{2n+1}.$$

Stel e^a is rationaal, $e^a = p/q$. Uit (1) en (2) volgt $\frac{1}{q} \leq I_n(a)$. Samen met (3),

$$\frac{1}{q} \leq I_n(a) < \frac{1}{n!} e^a a^{2n+1}.$$

Hieruit: $n! < q e^a a^{2n+1}$.

Tegenspraak als $n \rightarrow \infty$. Dus e^a is irrationaal.

Een recursie

Van vorige slides:

$$I_n(a) = \frac{1}{n!} \int_0^a x^n (a-x)^n e^x dx.$$

Opgave (moeilijk!)

Voor elke $n \geq 2$ geldt

$$I_n(a) = -2(2n-1)I_{n-1}(a) + a^2 I_{n-2}(a).$$

NB: $I_0(a) = e^a - 1$, $I_1(a) = a + 2 - (a-2)e^a$.

Bewering

$$\frac{1}{n!} \int_0^a x^n (a-x)^n e^x dx = r_n - s_n e^2$$

met r_n, s_n geheel.

Stap 1

Bewijs dat $I_n(a) = r_n - s_n e^a$ met r_n, s_n geheel.

Bewering

Voor elke polynoom $Q(x)$ met gehele coëfficiënten zijn de coëfficiënten van $\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} Q(x)$ weer geheel.

Bewijs: Voor elke k geldt

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} x^k = \frac{k(k-1) \cdots (k-n+1)}{n!} x^{k-n+1} = \binom{k}{n} x^{k-n+1}.$$

Stap 2

$$\begin{aligned} I_n(a) &= \frac{1}{n!} \int_0^a x^n (a-x)^n e^x dx \\ &= \frac{1}{n!} [x^n (a-x)^n e^x]_0^a - \frac{1}{n!} \int_0^a \frac{d}{dx} (x^n (a-x)^n) e^x dx \\ &= -\frac{1}{n!} \int_0^a \frac{d}{dx} (x^n (a-x)^n) e^a dx \\ &= -\frac{1}{n!} \left[\frac{d}{dx} (x^n (a-x)^n) e^x \right]_0^a + \frac{1}{n!} \int_0^a \frac{d^2}{dx^2} (x^n (a-x)^n) e^x dx \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^a \frac{d^2}{dx^2} (x^n (a-x)^n) e^x dx \\ &\vdots \\ &= (-1)^n \int_0^a \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n (a-x)^n) e^x dx \end{aligned}$$

Dus

$$I_n(a) = r_n - s_n e^a \text{ met } r_n, s_n \text{ geheel.}$$

Transcendentie

Definitie

Een getal α heet *transcendent* als er geen enkel polynoom met gehele coëfficiënten is die α als nulpunt heeft.

Het getal $\sqrt{2}$ is irrationaal maar niet transcendent want nulpunt van $x^2 - 2$.

Stelling (Hermite, 1853)

Het getal e is transcendent.

Voor een bewijs zie:

<http://www.math.sc.edu/~filaseta/gradcourses/Math785/Math785Notes6.pdf>

Hoe zit het met π ?

Kettingbreukbenaderingen van π :

$$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \dots$$

$$\pi - \frac{22}{7} \approx -0.00126, \quad \pi - \frac{355}{113} \approx -0.000000266$$

Bewijs dat $\pi \neq 22/7$:

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = \frac{22}{7} - \pi$$

Een integraal ivm π

Bekijk

$$S_n = \frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (\pi - x)^n \sin(x) \, dx.$$

Een paar waarden:

$$S_1 = 4$$

$$S_2 = 24 - 2\pi^2$$

$$S_3 = 240 - 24\pi^2$$

$$S_4 = 3360 - 360\pi^2 + 2\pi^4$$

$$S_5 = 60480 - 6720\pi^2 + 60\pi^4$$

$$S_6 = 1330560 - 151200\pi^2 + 1680\pi^4 - 112\pi^6$$

Irrationaliteit van π

Eigenschappen van

$$S_n = \frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (\pi - x)^n \sin(x) \, dx.$$

- ❶ $S_n > 0$
- ❷ S_n is een polynoom van graad $\leq n$ in π en met gehele coëfficiënten.
- ❸ $S_n < \frac{1}{n!} \pi^{2n+1}$

Stel $\pi = p/q$ rationaal.

Uit (2): S_n is een breuk met noemer die q^n deelt. Samen met (1): $\frac{1}{q^n} \leq S_n$. Samen met (3):

$$\frac{1}{q^n} \leq S_n < \frac{1}{n!} \pi^{2n+1}.$$

Dus $n! < q^n \pi^{2n+1}$. Leidt tot tegenspraak als $n \rightarrow \infty$. Conclusie: π is irrationaal.

Transcendentie van π

Stelling (Lindemann, 1882)

Het getal π is transecendent.

Gevolg

De kwadratuur van de cirkel met passer en liniaal is onmogelijk.

