**Quaternionen**

**Voorkennis complexe getallen**

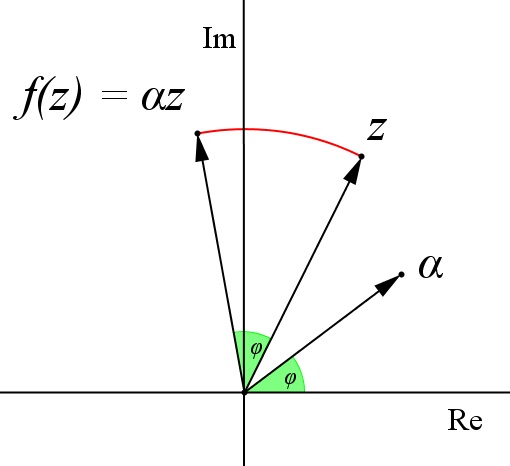
Een complex getal is een getal van de vorm *α* = *a* + *b*i met *a* en *b* reële getallen en i2 = -1.

Norm van *α*: 

argument van *α* de hoek die de plaatsvector van *α* maakt met de positieve reële as.

Geconjugeerde van *α*: 



Complexe getallen kun je grafisch weergeven in het Gaussvlak.

Optellen van complexe getallen komt dan overeen met de vectoroptelling.

Voor de vermenigvuldiging *αβ* geldt:   
|*αβ*| = |*α*||*β*| en arg(*αβ*) = arg(*α*) + arg(*β*).

In het bijzonder is dus  met |*α*| = 1 een rotatie om 0 over arg(*α*)

**Voorkennis vectormeetkunde in R3**

*Inproduct*

*Eigenschappen*







*Uitproduct*

*Eigenschappen*











Er geldt:

**Quaternionen**

Een *quaternion* is een getal van de vorm   
met **i**2 = **j**2 = **k**2 = **ijk** = – 1 en met  reële getallen.

1. ** heet het *reële* deel en  heet het *imaginaire* deel
2. De *geconjugeerde*  van  is 
3. De *norm* van *q* is: 

*Rekenregels voor quaternionen*

 en 

optellen: 

aftrekken: 

vermenigvuldigen 



**Belangrijk:**  de vermenigvuldiging is niet commutatief!

Dus niet voor alle  en  geldt .

*Stellingen*

1. 
2. 
3. 
4. 

Hamilton ziet een quaternion als de som van een *scalar* en een *vector*: , waarin .

**Vanaf hier vatten we het imaginaire deel van een quaternion dus op als een vector in een ijk-assenstelsel**

Gevolgen voor de definities, rekenregels en stellingen in deze imaginaire vectorruimte.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Quaternion** | **vector *α*** |
| definitie |  |  |
| geconjugeerde |  |  |
| norm |  |  |
| vermenigvuldigen |  |  |

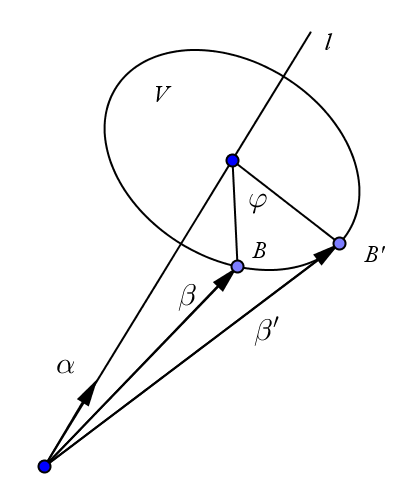
**Opmerkingen**

1 Omdat , volgt uit :   
in het bijzonder:

als |*α*| = 1, dan is *α*2 = –1



2 De vermenigvuldiging *αβ* is ook als volgt te schrijven  
  
Het product van twee vectoren is dus geen vector!

**Rotatie in 3 om een lijn *l***

*l* is een lijn door de oorsprong met richtingsvector *α*, |*α*| = 1.

Vector *β* wordt geroteerd om *l* over een hoek *ϕ*.

Is *B* het eindpunt van *β*, dan komt de rotatie meetkundig op het volgende neer: je brengt een vlak *V* aan door *B* loodrecht *l*. Dat snijdt *l* in *S* en je roteert vervolgens in *V* punt *B* om *S* over een hoek *ϕ*.

Beeld is een punt , eindpunt van een vector .

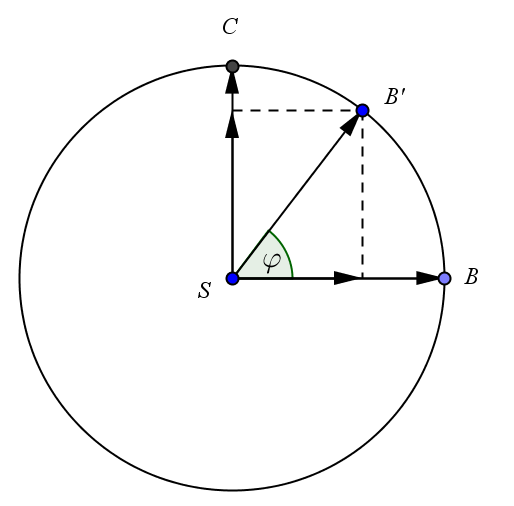
Ons doel is een verband te vinden tussen  en *β*.

**Stap 1**

Je kunt *β* schrijven als som van twee vectoren:

**, met *β*1 // *α* en *β*2 ⊥ *α*.

Bij de rotatie blijft  op zijn plaats en roteert .



**Stap 2**

Bekijk de rotatie in vlak *V*.  
In dat vlak tekenen we de naast vector  een vector loodrecht op en even lang als . We kiezen *C* zo, dat .

Dat kan omdat

*  loodrecht staat op zowel *α* als *β*2 ((immers: )
* 

**Stap 3**

Er geldt dan:



Omdat *α*  *β*2 geldt  (opmerking 3)

Dus 

Voorlopig resultaat: 

**Stap 4**

We gaan *β*1 en *β*2 uitdrukken in *α* en *β*.

Daartoe bekijken we de producten

 en 

Voor de termen in het tweede product geldt:

 en 

Omdat *β*1 // *α* is . Dus is    
(het inproduct is commutatief)

Omdat *β*2  *α* is . Dus is 

Dus 

We hebben nu:

 en 

Daaruit volgt:  en 

Pas op je mag niet zomaar door *α* delen!

In plaats daarvan vermenigvuldigen we beide uitdrukkingen aan weerskanten met *α*:

 geeft 



Omdat  (opmerking 1) volgt hieruit: . Dus

Op soort gelijke manier volgt uit :



Onze voorlopige formule wordt:



en daarmee hebben we  uitgedrukt in *α* en *β*.

Maar erg handzaam ziet de formule er niet uit.

We gaan naar de laatste truuk.

**Stap 5**

We gebruiken de verdubbelingsformules uit de goniometrie:

 in de vorm: 

 in de vorm 

 in de vorm 















Noemen we , dan staat er:



Merk op |*γ* | = 1

Een rotatie om een lijn *l* door 0 met richtingsvector *α* om een hoek *ϕ* is dus op bovenstaande manier te beschrijven als een vermenigvuldiging van quaternionen.

Andersom is elke vermenigvuldiging van de vorm  met |*q*| = 1 op te vatten als een rotatie om de lijn *l* door de oorsprong met richtingsvector het imaginaire deel van *q* over een hoek *ϕ* waarvoor geldt .

**Voorbeelden**

**1** *R*1:  *Rotatie van het punt B om de z-as over 90°:   
α* = **k**, *ϕ* = 90°; =    


**2** *R*2:*Rotatie om de y-as over 90°* : 

**3** *R*1 gevolgd door *R*2.  
   
 om de lijn met richtingsvector  **Hamilton’s weg naar de ontdekking van de quaternionen**

In 1829 wordt Hamilton door zijn studiegenoot John Graves gewezen op in 1828 verschenen boek van de Britse wiskundige John Warren (1796 – 1852): *On geometrical representation of the Squareroots of Negative Quantities*, waarin een meetkundige interpretatie van de complexe getallen wordt gegeven. Rotaties in het platte vlak kunnen worden weergegeven door een vermenigvuldiging met een complex getal. Bij de publicatie in 1833 van zijn *On a* *Theory of Algebraic Couples or Conjugate Function*, waarin hij complexe getallen opvat als paren reële getallen (die zo dus niets imaginairs meer hebben), schrijft Hamilton dat hij een theorie van triplets hoopt te publiceren die de theorie van paren omvat. Met als duidelijk doel die te gebruiken om rotaties in de ruimte te beschrijven. De komende 10 jaar is hij bij tussenpozen met dat probleem bezig. In oktober 1843 pakt hij de draad weer op.

Naar analogie van de complexe getallen maakt hij een getal *a* + *b***i** + *c***j**. Meetkundig door hem geïnterpreteerd als een vector – dat begrip gebruikt hij overigens pas later – in een orthogonaal assenstelsel, waarin 1, **i** en **j** de eenheden op de drie assen zijn. Dan probeert hij een product zo te definiëren dat de uitkomst weer eenzelfde triplet of vector oplevert. Daarbij stel hij de eis dat het mogelijk moet zijn om – zoals in de gewone algebra – term voor term te vermenigvuldigen en dat – wat het later noemt – aan de wet van de moduli voldaan wordt. Dat wil zeggen dat moet gelden

|(*a* + *b***i** + *c***j**)(*x* + *y***i** +*z***j**)| = |(*a* + *b***i** + *c***j**)||(*x* + *y***i** +*z***j**)|.

De eerste eis geeft:

(*a* + *b***i** + *c***j**)(*x* + *y***i** +*z***j**) = *ax* + (*ay* + *bx*)**i** + (*az* + *cx*)**j** + *by***ii** + *cz***jj** + *bz***ij** + *cy***ji**

De tweede eis geeft voor complexe getallen (*c* = *z* = 0)   
|*ax* + *cy***ii** + (*ay* + *bx*)**i**|2 = (*a*2 + *b*2)(*x*2 + *y*2). Daaraan wordt voldaan door **ii** = –1 te nemen.

Voor getallen van de vorm *a* + *c***j** is aan die eis voldaan door **jj** = – 1 te nemen

Maar wat doe je met **ij** en **ji**?

*Eerste poging*: stel **ij** = **ji**.

Dan volgt : (*a* + *b***i** + *c***j**)(*x* + *y***i** +*z***j**) = (*ax* – *by* – *cz*) + (*ay* + *bx*)**i** + (*az* + *cx*)**j** + (*bz* + *cy*)**ij**

Omdat moet gelden |**ij**| = |**i**||**j**| moet (**ij**)2 = **i**2**j**2 = –1 ⋅ –1 = 1, dus **ij** = 1 of **ij** = –1

Maar bij uitwerken blijkt de wet van de moduli niet te kloppen.

*Tweede poging*

Hij bekijkt wat er gebeurt als je een triplet met zichzelf vermenigvuldigt: *x* = *a*, *y* = *b* en *z* = *c*:

(*a* + *b***i** + *c***j**)2 = (*a*2 – *b*2 – *c*2) + 2*ab***i** + 2*ac***j** + 2*b*c**ij**

Stel je nu **ij** = 0, dan is in dit geval aan de wet van de moduli voldaan, maar hij blijft onzeker.

*Derde poging*

Hij veronderstelt dat **ji** = –**ij** (al een enorme denkstap: voor het eerst durft iemand te veronderstellen dat een product niet commutatief is!). Verder stelt hij **ij** = *k*, waarbij hij in het midden laatof *k* al dan niet 0 is.

*Vierde poging*

Hamilton bekijkt een algemener geval: *y* = *b* en *z* = *c* en krijgt:

(*a* + *b***i** + *c***j**)(*x* + *b***i** +*c***j**) = (*ax* – *b*2 – *c*2) + (*a* + *x*)*b***i** + (*a* + *x*)*c***j** + (*bc* – *bc*)*k*

Nu verdwijnt de term met *k* en meetkundig krijg je een draaiing in een vlak opgespannen door de getallen 0, 1 en *b***i** + *c***j** (ofwel de vectoren (1, 0, 0) en (0, *b*, *c*), waarbij de wet van de moduli blijft gelden. Hij ziet daar in de bevestiging van zijn aanname dat **ji** = –**ij** maar het geeft geen informatie over *k*.

*De sprong naar de vierde dimensie*

Hamilton bekijkt nu het algemene geval:

(*a* + *b***i** + *c***j**)(*x* + *y***i** +*z***j**) = (*ax* – *by* – *cz*) + (*ay* + *bx*)**i** + (*az* + *cx*)**j** + (*bz* + *cy*)*k*

Hij merkt op dat als *k* = 0 de wet van de moduli niet geldt:

Links krijg je: 

rechts: 

Er valt een heleboel tegen elkaar weg, maar je houdt over 

Kortom, de vergelijking klopt als je rechts  toevoegt.

Opdat moment schiet door zijn hoofd de gedachte: op één of ander manier moeten we een vierde dimensie toelaten: een derde onafhankelijke imaginair **k**.

In zijn notitieboekje noteert hij als **ij** = **k**, dan is waarschijnlijk **ik** = **iij** = – **j**

en **kj** = **ijj** = – **i**. en omdat **ji** = – **ij** zal ook **kj** = – **jk** en **ik** = – **ki**.

Om aan de wet van de moduli te voldoen zal ook moeten gelden **k**2 = –1.

Hij checkt of nu inderdaad aan de wet van de moduli is voldaan. En dat klopt.

De cirkel is rond.

*Deze paragraaf is gebaseerd op het artikel van Prof. B.L. van der Waerden uit 1974: Hamilton’s Entdeckung der Quaternionen.*

*Noot*

Helaas was Hamilton niet op de hoogte van de getaltheorie. Want ook in zijn tijd was bekend dat het product van twee getallen die te schrijven zijn als som van drie kwadraten niet altijd een getal oplevert dat te schrijven is als som van drie kwadraten. Een eenvoudig voorbeeld is 3 ⋅ 5 = 15. Voor 3 (= 12 + 12 + 12) en 5 (= 22 + 12 + 02) kun je met drie kwadraten volstaan, voor 15 heb je er vier nodig: 32 + 22 + 12 + 12.

Je kunt triplets dus nooit zo vermenigvuldigen dat aan de wet van de moduli is voldaan..

**Korte biografie van Sir William Rowan Hamilton.**

William werd geboren in 1805 in Dublin om precies middernacht tussen 3 en 4 augustus. Hij vierde zijn verjaardag op de 3e totdat 30 jaar later zijn tweede zoon op 4 augustus werd geboren.

Vader Archibald was als juridisch adviseur veel van huis. Moeder Sarah zag al snel dat haar zoon een bijzonder kind was: hij liep nog voor hij een jaar oud was en gaf toen al blijk van zo’n opmerkelijke intelligentie, dat zijn ouders besloten hem naar zijn oom James en tante Sydney te sturen voor zijn verdere opvoeding. Oom James was een geleerde en predikant in Trim, een klein plaatsje niet ver van Dublin. Op driejarige leeftijd kan William goed Engels lezen. Zo leest hij voor uit de bijbel in het klasje van zijn oom en kan hij aardig rekenen. Op zijn vierde is hij bedreven in topografie. Op zijn vijfde leest en vertaalt hij Latijn, Grieks en Hebreeuws en vindt hij het leuk naast Milton ook Homerus te citeren. Op zijn achtste beheerst hij Frans en Italiaans en kan hij zijn gevoelens in het Latijn uitdrukken en op zijn tiende studeert hij Sanskriet, Arabisch en Perzisch en kent hij de grondbeginselen van het Syrisch, het Chaldees, het Hindostaans en wil beginnen aan het Chinees, maar daar zijn moeilijk boeken voor te krijgen. Intussen heeft hij ook de eerste helft van de Elementen van Euclides doorgenomen. Op twaalfjarige leeftijd schrijft hij een Syrische grammatica, op z’n dertiende gevolgd door een grammatica van het Sanskriet en een kort uittreksel over Algebra.

Op die leeftijd verliest hij zijn moeder.

Op zijn twaalfde ontmoet hij het dan 13 jarige Amerikaanse rekenwonder Zerah Colburn, die met zijn vader door Engeland reist om zijn kunsten te vertonen. Zerah berekende uit zijn hoofd dat het zesde Fermat getal, 232 + 1 niet priem was, maar deelbaar door 641. Toen Zerah twee jaar later in Ierland was, ontmoetten de twee elkaar nogmaals. Vanaf dat moment raakt Hamilton geïnteresseerd in wiskunde. Nadat hij door een telescoop de manen van Jupiter en de ringen van Saturnus heeft gezien, groeit ook zijn belangstelling voor de astronomie en wel speciaal de eclipsen. Er waren dat jaar twee maaneclipsen en één zonne-eclips.

In 1819 overlijdt ook zijn vader.

Op zijn 15e noteert hij dat hij begint aan Newton’s Principia en op zijn 16e begint hij te dichten om zijn gevoelens kwijt te kunnen en raakt hij ook geïnteresseerd in theologie.

Op zijn 16e bestudeert hij de differentiaalrekening en leest hij de Mécanique Celeste van Laplace. Daarbij ontdekt hij een fout in het krachtenparallellogram. Dat is het begin van zijn roem als wiskundige. Op 26 augustus 1822 (net 17) schrijft hij aan zijn tante dat hij definitief bekeerd is tot de wiskunde.

“I have been continuing my Classics, as usual, with my uncle. But I fear I shall never be so fond of them as of the Mathematics that I am now reading.”

Binnen korte tijd bestudeert hij alle wiskundeboeken die hij te pakken kan krijgen, waaronder natuurlijk Euclides, waar hij verrast wordt door wat we nu de gulden snede noemen, maar ook Lloyd’s Analytic Geometry. In dat jaar doet hij zijn eerste wiskundige ontdekkingen. Hij schrijft artikelen over oscillerende cirkels en parabolen. Met die artikelen stapt hij naar Dr. Brinkley, op dat moment de directeur van het observatorium van Dublin in Dunsink, die diep onder de indruk is en hem min of meer onder zijn hoede neemt. In mei 1823 schrijft hij aan Arthur Hamilton, een neef van zijn vader, dat hij een heel curieuze ontdekking in de optica heeft gedaan. Die opmerking slaat op zijn karakteristieke functie, een functie *V* die moet voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking  , waarin *μ* de brekingsindex van het medium is.

Hij is inmiddels bijna 18 en maakt zijn entree in het Trinitycollege in Dublin, waar de beste is van 100 kandidaten met een ‘premium’, omdat hij bij een examen in het Hebreeuws antwoordt. In zijn eerste jaar ontving hij na zijn examens alle te winnen prijzen.

Op dinsdag 17 augustus 1824 bezoekt hij de familie Disney in Summerhill en wordt verliefd op de dochter Catherine. Die verliefdheid zou zijn hele verdere leven beïnvloeden. Natuurlijk schrijft hij gedichten over zijn liefde. Inmiddels noemt Brinkley hem een tweede Newton. In datzelfde jaar stuurt hij een publicatie ‘On Caustics’ naar de Royal Irish Academy. Die gaat over de omhullende van stralenbundels na breking of terugkaatsing op een zeker oppervlak. Het jaar daarop brengt twee teleurstellingen met zich mee. De academie vindt het artikel te algemeen en abstract en publiceert het niet. Maar dieper treft hem dat hij hoort, dat zijn grote liefde gaat trouwen.

Zijn gebroken hart zorgt ervoor dat hij in een depressie belandt en ook lichamelijk zwak is. Niettemin neemt hij de kritiek van de academie ter harte en blijft doorwerken aan zijn theorie en de voorbereidingen voor zijn examens. Opnieuw slaagt hij met de hoogste cijfers en wordt langzamerhand een beroemdheid in de intellectuele kringen van Dublin.

In 1827 stuurt hij zijn uitgewerkte artikel onder de titel *Theory of System of Rays* naar de academie. In dat werk gebruikt hij analytische meetkunde, differentiaal en integraalrekening en variatierekening. Centraal staat zijn *karakteristieke functie*. Nu wordt het werk wel gepubliceerd. Dat is het begin van zijn roem als wiskundige.

1827 is een keerpunt in het leven van Hamilton. Hij wordt, hoewel nog niet afgestudeerd, gekozen tot Hoogleraar Astronomie aan de universiteit van Dublin en Koninklijke astronoom van Ierland als opvolger van Dr. Brinkley. Hij verhuist met zijn drie zusters Grace, Eliza en Sydney naar het Observatorium in Dunsink. In dat jaar ontmoet hij ook de dichter Wordsworth (1770 – 1850) waarmee hij zijn leven lang een warme vriendschap zal onderhouden. In 1828 wordt hij lid van de Astronomical Society en wordt uitgenodigd voor de jaarlijkse bijeenkomsten van de British Association. Op die bijeenkomsten ontmoet hij ook wiskundigen als Poisson (1781 – 1840), Bessel (1784 – 1846) en Cauchy (1789 – 1857) (56). Ampére (1775 – 1836), Gay Lussac (1778 -1850) en Quetelet (1796 – 1874)..

Overigens hadden de werkzaamheden op de sterrenwacht een slechte invloed op zijn gezondheid. Hij had voortdurend last van kou in z’n hoofd en op z’n borst.

In 1829 bezoekt Wordsworth Ierland en gaat eerst naar de sterrenwacht. Hij overtuigd William ervan dat zijn talenten meer op het terrein van de wetenschap liggen als op dat van de poëzie. Zijn studiegenoot John Graves (1806 – 1870) laat hem kennismaken met het werk van Warren (1796 – 1852): *On the representation of squareroots of negative quantities* (1828). Dat is het begin van zijn interesse in complexe getallen. Inmiddels trekt hij volle zalen met zijn colleges, niet alleen studenten, maar ook professoren en Fellows en, voor die tijd nieuw, ook dames. In juli 1832 krijgt hij bericht dat hij is gekozen tot Fellow van de American Academy of Arts and Science. Eeuwige roem verwerft hij als zijn langs theoretische weg afgeleide *conical refraction* (een lichtstraal in een biaxiaal kristal breekt in bepaalde gevallen in een kegel van stralen) in het laboratorium bevestigd wordt.

In maart 1833 trouwt hij met Helen Bayly. Helaas bleek ze voor hem geen goede partner te zijn. Zij is vaak weg om haar moeder te verzorgen of ze is ziek. Hij voelt zich eenzaam in de sterrenwacht.

Op 4 november 1833 presenteerde Hamilton zijn notitie *On a Theory of Algebraic Couples or Conjugate Functions*, waarin hij complexe getallen beschouwd als paren reële getallen. Daarin is bijvoorbeeld 1 = (1, 0) en i = (0, 1). Hij zegt daarbij dat hij hierna een theorie van triplets hoopt te publiceren die de theorie van paren insluit.

Op 10 mei 1834 wordt zijn eerste kind: William geboren. Via Coleridge raakt hij geïnteresseerd in de filosofie van Kant (1724 – 1804). Zo leest hij de Kritik des reinen Vernunft (critique of the pure reason), waarin Kant zijn visie geeft over Ruimte en Tijd.

Dat beïnvloedt hem naar eigen zeggen zeer. In een brief aan John Graves geeft hij zijn visie dat meetkunde als wetenschap gebaseerd is op de intuïtie van ruimte zoals Algebra als wetenschap is gebaseerd op de intuïtie van tijd en in 1835 verschijnt zijn essay *Algebra as the science of Pure Time*. In dat jaar wordt hij geridderd en mag voortaan Sir voor zijn naam zetten en ontvangt hij (samen met Faraday) de Royal Medal voor zijn ontdekkingen in de exacte wetenschappen.

Op 4 augustus 1835 1.00 uur wordt zijn tweede zoon Archibald geboren.

In 1837 overlijdt prof. (Bartholomew) Lloyd, de president van de RIA en wordt Hamilton tot zijn opvolger gekozen. In datzelfde jaar kiest de Academie van St. Petersburg hem tot Corresponderend lid.

In 1841 vraagt De Morgan hem of er nog iets gebeurd is met de theorie van drietallen waarop hij in 1829 zinspeelde. Hij antwoordt dat hij er niet in geslaagd is een behoorlijk algebraïsch systeem te vinden, maar dat hij er van overtuigd is dat er zelfs een systeem van veeltallen mogelijk moet zijn. Dan meldt de jonge Eisenstein (1823-1852) zich bij Hamilton. Die inspireert hem tot verder wiskundig onderzoek. Op de bijeenkomst van de British Association presenteert hij artikelen betreffende de differentierekening, de waarschijnlijkheidsrekening en vijfdegraadsvergelijkingen. Teruggekomen neemt hij het oude probleem van de triplets weer ter hand. In de maand oktober vragen zijn kinderen ieder ochtend aan het ontbijt: “en pappa, kun je al triplets vermenigvuldigen?”, waarop hij zijn hoofd schudt en zegt dat hij ze alleen kan optellen en aftrekken. Tot hij op die maandagmorgen 16 oktober met zijn vrouw langs het Royal Canal loopt op weg naar een zitting van de Academie en de oplossing door zijn hoofd schiet: de stap van drietallen naar viertallen, de quaternionen.(435).

Aangekomen op de Academie, vraagt hij toestemming om op de volgende bijeenkomst een notitie over quaternionen te mogen inbrengen. En zo geschiedt op 13 november. Dezelfde avond nog schrijft hij zijn vondst uit en stuurt de volgende dag een kopie aan zijn vriend John Graves waarin hij schrijft dat zijn vondst moest voldoen aan (1) de wet van de moduli, (2) de stelling van de ruimtedriehoek en (3) de rotatieregels.

En later: de theorie van triplets moet (1) algebraïsch voldoen aan de normale regels voor optellen en vermenigvuldigen, meetkundig eenvoudig construeerbaar en (3) een deling toelaten. Z’n hele verdere leven is Hamilton voornamelijk bezig geweest met zijn quaternionen.

In 1846 raakt hij door persoonlijke problemen aan de drank en in maart doet hij afstand van zijn presidentschap van de RIA om meer tijd te kunnen besteden aan zijn wiskundige onderzoekingen. In december presenteert Hamilton de hodograaf (snelheidsdiagram).

Hamilton wordt ook bij praktische problemen ingeschakeld. Zo komen civiel ingenieurs bij hem met een probleem dat te maken had met scheve bruggen. De volgende dag heeft hij het probleem opgelost met behulp van zijn quaternionen. In 1853 verschijnen zijn *Lectures on Quaternions*: een bundeling van zijn colleges over quaternions. Hij is daar niet helemaal tevreden over en stelt zich ten doel om een standaardwerk over quaternionen en hun toepassingen te schrijven. Dat boek, *Elements of Quaternions*, zal vlak na zijn dood pas verschijnen.

Hoewel hij de meeste tijd besteed aan het schrijven van zijn standaardwerk, is hij ook productief op andere terreinen. Hij vindt een nieuw getallensysteem uit: Icosian Calculus, waarmee hij een spel ontwerpt: The Icosian Game. Aan dat spel hebben we het Hamiltonpad uit de grafentheorie te danken. Z’n eerste ontdekking waarvoor wat betaald wordt (25 pond). Via z’n vriend John Graves komt hij tot het lezen van de *Disquitiones Arithmetica* van Gauss en wordt zo ingewijd in de getaltheorie. Zo ziet hij dat alle gehele getallen in niet priem zijn, Immers elk getal is te schrijven als som van vier kwadraten (Euler) en in is de som van vier kwadraten te ontbinden : .

Verder toont hij zich een voorstander van invoering van een decimaal muntstelsel. Hij schrijft een verhandeling over anharmonische coördinaten en houdt zich bezig met de constructie van de regelmatige zevenhoek. In 1865 bereikt hem het bericht dat hij als eerste gekozen is als buitenlands lid van de Academy of Science van de Verenigde Staten. Hij overlijdt op 2 september 1865 op 60-jarige leeftijd aan een aanval van jicht. Zijn boek wordt dan afgemaakt door zijn zoon William en uitgegeven in 1866.

**Bronnen**

Op internet is veel te vinden over leven en werk van Hamilton. Bron is bijna altijd de driedelige biografie van zijn vriend Robert Perceval Graves (jongere broer van John) die vrij beschikbaar is op internet, maar ook in boekvorm te verkrijgen.

R.P. Graves: Life of Sir William Rowan Hamilton, deel 1, 2 en 3 (1882 – 1889)

<https://archive.org/details/lifeofsirwilliam01gravuoft>

<https://archive.org/details/lifeofsirwilliam02gravuoft>

<https://archive.org/details/lifeofsirwilliam03gravuoft>

Andere bronnen:

Bijna elk boek over de geschiedenis van de wiskunde.

*Belangrijkste link naar het werk van Hamilton:*<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/>

Over de weg naar de ontdekking van de quaternionen de Engelse versie van het artikel van Van der Waerden op internet: [*http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload\_library/22/Allendoerfer/0025570x.di021097.02p0154a.pdf*](http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Allendoerfer/0025570x.di021097.02p0154a.pdf)

Over de geschiedenis van de vectormeetkunde die het gevolg is van het werk van Hamilton:

M.J. Crowe: A history of vector analysis, Lezing in 2002 te vinden op internet.

<https://www.math.ucdavis.edu/~temple/MAT21D/SUPPLEMENTARY-ARTICLES/Crowe_History-of-Vectors.pdf>

*Over Engelse wiskundigen in de 19e eeuw:*

Alexander MacFarlane: Lectures on Ten British Mathematicans met korte biografieën over Peacock, De Morgan, Hamilton, Boole, Cayley, Clifford, H.J.S. Smith, Sylvester, Kirkman en Todhunter (1898, internet). <http://www.gutenberg.org/ebooks/9942> (gratis)

*Studieboeken*

J.B. Kuipers, Quaternions and Rotation sequences, Princeton University Press, 2002,

ISBN 978-0-691-05872-5 (aanbevolen).

Een boek dat geen voorkennis van complexe getallen veronderstelt, maar bij nul begint. Het behandelt ook de matrixrekening in verband met rotaties en vergelijkt deze met de behandeling met quaternionen. Toepassingen o.a. op het terrein van luchtvaart en computer graphics.

Conway en Smith: On quaternions and octonians, CRC Press, 2003

ISBN: 978-1-56881-134-5

Zuiver wiskundig, groeptheoretisch werk. Besteedt ook aandacht aan getaltheoretische aspecten, zoals de Hurwitz gehele quaternionen (vergelijk: Gauss gehele complexe getallen)..