Eindverslag

van

Werkgroep Afstemming Wiskunde-Natuurkunde

aan

Vernieuwingscommissies
Wiskunde cTWO
en
Natuurkunde NiNa

2007

Carel van de Giessen
Ton Hengeveld
Henk van der Kooij (adviseur)
Kees Rijke
Wim Sonneveld

Colofon

uitgave: commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, Utrecht
Commissie Vernieuwing Natuurkundeonderwijs, Amsterdam

juni 2008

Inhoud

Inhoud 3
1 Inleiding 5
1.1 Instelling en opdracht van de werkgroep 5
1.2 Werkwijze 6
1.3 Thema's 6
1.4 Resonansgroep 6
2. Afstemming en samenhang 7
2.1 Verleden en heden 7
2.1.1 Aanbevelingen van SONaTe 8
2.2 Visiedocumenten vernieuwingscommissies 9
2.3 Leerboeken 11
2.4 School en docent 13
2.5 Curricula 14
3. Thema's 17
3.1 Thema algebraïsche vaardigheden 17
Inleiding 17
3.1.1 Gecijferdheid 18
3.1.2 Het rekenen met getallen 20
3.1.3 Expressies (vormen) die letters bevatten 22
3.1.4 Manipuleren van expressies 23
3.1.5 Functies 24
3.2 Thema evenredigheid 25
3.2.1 Begrip, omschrijving en definitie 25
3.2.2 Evenredig op school 26
3.3 Thema vectoren 29
3.3.1 Situatie bij wiskunde 29
3.3.2 Begrip, omschrijving en definitie 30
Aandachts- en discussiepunten 33
3.4 Thema grafieken/diagrammen 34
Inleiding 34
3.4.1 Diagrammen bij natuurkunde 35
3.4.2 Diagrammen/grafieken bij natuurkunde op school 37
3.5 Thema afgeleide 39
Inleiding 39
3.5.1 Differenties 40
3.5.2 Mate van verandering 40
3.5.3 Differentiëren 41
3.5.4 Raaklijnen 42
3.5.5 Integralen 42
3.6 Thema modelleren 44
3.6.1 Omschrijving 44
3.6.2 Nieuwe ontwikkelingen 44
3.6.3 Visies 45

4. Overzicht van de aanbevelingen 47
Algemeen 47
4.1. Thema algebraïsche vaardigheden 48
4.2 Thema evenredigheid 49
4.3 Thema vectoren 49
4.4 Thema grafieken/diagrammen 50
4.5 Thema afgeleide 51
4.6 Thema modelleren 51
Bronnen, literatuur en websites 53
Overzicht van de bijlagen 55

1 Inleiding

1.1 Instelling en opdracht van de werkgroep

De werkgroep afstemming wiskunde-natuurkunde, hierna kortweg de werkgroep, is in maart 2006 ingesteld op initiatief van de twee vernieuwingscommissies wiskunde cTWO en natuurkunde NiNa. De aanleiding hiertoe blijkt uit het volgende citaat uit de taakopdracht:

> *Het beheersen van een aantal elementaire wiskundige inzichten en vaardigheden is voor leerlingen in het vo een essentiële voorwaarde voor het succesvol volgen van de N-profielen in het vo en voor een goede aansluiting met de vervolgstudies. De constatering is dat huidige wiskunde- en natuurkundeprogramma's op havo en vwo hiervoor een onvoldoende basis bieden.*

De opdracht van de werkgroep is om een advies uit te brengen over een gezamenlijke aanpak van dit probleem. Het volgende wordt aan de werkgroep gevraagd:

1. Het beschrijven van noodzakelijke wiskundige basisinzichten en -vaardigheden die bij natuurkunde een rol spelen.
2. Het beschrijven van een traject dat leidt tot deze vaardigheden en inzichten.
3. Het schetsmatige ontwerp van een basismodule die bij dat traject kan worden gebruikt.

Al tijdens de eerste besprekingen binnen de werkgroep bleek de taakopdracht zo omvangrijk dat een beperking noodzakelijk was, zeker gezien de tijd. Immers begin 2007 zullen de vernieuwingscommissies met hun diverse programma's en syllabi komen. De werkgroep heeft de taakopdracht als volgt geïnterpreteerd.

De beschrijving:

Dit punt wordt allereerst opgevat als een inventarisatie van de noodzakelijk geachte basisvaardigheden. Daarbij is ook een aandachtspunt het verantwoord kiezen van en omgaan in de wiskunde met natuurkundige contexten.

Het traject: De invulling van een traject kan zeer veelomvattend zijn met het risico van uitgebreide didactische beschouwingen. Het voorstel is om een traject beknopt en in vrij algemene termen te omschrijven. Aandachtspunten kunnen zijn: mogelijkheden om met een begrip om te gaan, het onderscheiden van fasen in de ontwikkeling van dat begrip, hoe afstemming aangaande dat begrip gerealiseerd kan worden.

De basismodule: Dit punt wordt niet geïnterpreteerd als het ontwerpen van lesmateriaal, daar dit te veelomvattend is. Wel zal er aandacht moeten zijn voor aspecten waar bij het ontwerpen van lesmateriaal, zowel in wiskunde als natuurkunde, rekening mee gehouden moet worden. Te denken valt aan zaken als begripsomschrijving, nomenclatuur, notatie, fasering en attitude bij wiskunde èn natuurkunde.

Wel zal gewezen worden op materiaal dat heel goed als voorbeeld kan dienen, zoals materiaal uit het SaLVO!-project.

1.2 Werkwijze

De werkgroep heeft in de loop van haar bestaan een aantal onderwerpen uitgebreid besproken. Als uitgangspunt diende veelal een of meer door de leden opgestelde inventariserende notities of bestaande artikelen. De notities en artikelen vormen de inventarisdocumentatie. Vervolgens is per onderwerp een samenvatting gemaakt met aanbevelingen om de afstemming tussen wiskunde en natuurkunde te verbeteren. De onderwerpen zijn evenredigheden, grafieken, vectoren en goniometrie, afgeleide en onderwerpen uit het thema algebra resp. algebraïsche vaardigheden. Daarnaast is uiteraard in algemene zin gesproken over de problematiek rond de afstemming tussen het wiskunde- en natuurkundeonderwijs. Ook dat heeft geleid tot enkele aanbevelingen.
De beschrijvingen en aanbevelingen van de behandelde thema's staan in hoofdstuk 3.

1.3 Thema's

De werkgroep heeft voor een zestal thema's de afstemmingsproblematiek concreet gemaakt. Vanwege de beperkte beschikbare tijd kon de werkgroep niet alles behandelen waarin wiskunde- en natuurkundeonderwijs kunnen worden afgestemd. Er is bijvoorbeeld geen thema over exponentiële groei. Of een thema over redeneren en bewijzen.
De werkgroep heeft thema's gezocht waarbij de natuurkunde duidelijk behoefte heeft aan de wiskunde, zoals evenredigheid, vectoren en differentiëren. En thema's waarbij deze vakken elk op hun eigen manier gebruik maken van dezelfde hulpmiddelen, zoals algebraïsche vaardigheden, diagrammen en grafieken, en modelleren.

1.4 Resonansgroep

Naast de werkgroep bestond er een resonansgroep. De leden van de resonansgroep ontvingen agenda, verslag en de notities voor zover digitaal beschikbaar. Enkele resonansleden bezochten een werkgroepvergadering. Daarnaast waren er incidentele contacten tussen leden van de werkgroep en de resonansgroep.

2. Afstemming en samenhang

Afstemming en samenhang zijn twee begrippen die met elkaar in verband staan maar niet hetzelfde aangeven. Zowel afstemming als samenhang zijn op verschillende niveaus zoals school, leerboek, curriculum te onderscheiden. Hier wordt samenhang als een intentie beschouwd die verder gaat dan afstemming. Samenhang impliceert afstemming, afstemming garandeert nog geen samenhang.

- Bij afstemming gaat het onder meer om concrete aspecten zoals gebruik van formules, taal en begrippen, en hoe deze aspecten in leerboeken, curricula en leerlijnen (volgtijdelijkheid) vastgelegd zijn.
- Bij samenhang gaat het om samenhang tussen de vakinhouden, en ook om de samenhang in de manier waarop het leerproces wordt georganiseerd. Samenhang tussen twee vakken als wiskunde en natuurkunde betekent onder meer dat onderwerpen die in beide vakken aan de orde komen in de leerlijnen op elkaar afgestemd moeten zijn, en dat voor natuurkunde noodzakelijke wiskundige vaardigheden en kennis op het juiste moment zijn verworven. Bij samenhang komt meer het onderwijskundige aspect naar voren. Samenhang zal op schoolniveau geconcretiseerd moeten worden.

Voor verdere beschouwingen verwijzen we naar enkele publicaties. In de publicatie “Een basis voor SONaTe” staat onderzoek naar inhoudelijk samenhangend onderwijs in natuur en techniek centraal. In de publicatie “SONaTe in het studiehuis” staan voorbeelden van samenhangend bètaonderwijs. Met de SLO is een ‘good practice’ onderzoek uitgevoerd met de bedoeling bestaande vormen van samenhangend onderwijs te analyseren met het oog op bruikbaarheid voor andere scholen.

2.1 Verleden en heden

Samenhang, liever gezegd de moeilijkheid van samenhang tussen wiskunde en natuurkunde, is een probleem dat al langer bestaat. In 1975 werd een Wiskunde Natuurkunde Conferentie gehouden te Noordwijkerhout onder voorzitterschap van Freudenthal. In de conferentiebundel worden als redenen voor deze conferentie genoemd

> *“… aansluitingsproblemen betreffende de wiskundekennis, nodig voor het volgen van de natuurkundelessen*”, en *“.. de hokjesgeest. Bij de natuurkundeles weten de leerlingen weinig meer van de kennis opgedaan bij wiskunde en omgekeerd*”. Een derde belangrijke reden was “*het nieuwe leerplan wiskunde en de nieuwe didactieken bij zowel wiskunde als natuurkunde*”.

De voorbereidingscommissie kwam tot de conclusie dat

> *“.. alleen gecoördineerde herschrijving van de leerplannen, in samenspraak met andere gebruikers van wiskunde, een werkelijke oplossing van de problemen zou betekenen*”.

L’histoire se repète.

Door Roorda en Van Streun is onderzoek gedaan naar afstemming en samenhang in het onderwijs. Het volgende citaat stamt uit de recente bundel ”3 Criteria voor samenhangend (wiskunde) onderwijs. Een oriënterend onderzoek naar aanwijzingen voor samenhangend onderwijs” (2002).

> *“Eén van de doelen van de Tweede Fase havo-vwo is dat er meer samenhang moet komen tussen vakken. Leerlingen kiezen een profiel waarin een aantal vakken zitten die met elkaar te maken hebben. Ondanks de doelstellingen op papier is de verzuchting van veel leraren natuurwetenschappen: “Wiskunde blijft een in hoge mate opzichzelfstaand vak”."*

Momenteel zijn op het gebied van samenhangend onderwijs enkele activiteiten gaande of onlangs afgerond.

2.1.1 Aanbevelingen van SONaTe

Het SONaTe-project (Samenhangend Onderwijs in Natuur en Techniek) onder leiding van prof. dr. Harrie Eijkelhof (CD-β) beoogde grenzen tussen disciplines in contexten te overbruggen en zo ononderbroken leerlijnen te bevorderen. Met de invoering van de tweede fase is het in principe mogelijk geworden meer samenhang aan te brengen tussen de bètavakken omdat deze in de natuurprofielen gecombineerd gegeven kunnen worden. In de praktijk blijken de mogelijkheden om met name inhoudelijke samenhang aan te brengen echter nog niet optimaal benut te worden. Het SONaTe-project was een project van het Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen (CD-β) van de Universiteit Utrecht in opdracht van de Stichting Axis. De stichting Axis en het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen ondersteunden het project. Het project voor havo en vwo is in september 2001 van start gegaan en geëindigd in september 2004.
In de publicaties van SONaTe staan vele aanbevelingen op het gebied van afstemming en samenhang die door de werkgroep worden onderschreven.

2.2 Visiedocumenten vernieuwingscommissies

Uit de visiedocumenten van de vernieuwingscommissies natuurkunde en wiskunde blijkt dat samenhang en afstemming uiterst serieus worden genomen. Onderstaande citaten geven daar een beeld van.

Voor het vak natuurkunde speelt wiskunde een essentiële rol.

> *Het is een wezenlijk kenmerk van de natuurkunde dat de belangrijkste grondbeginselen een wiskundige vorm hebben - formules zijn in de natuurkunde niet allereerst rekenvoorschriften, al worden ze in de schoolpraktijk vaak wel zo gehanteerd, maar een taal waarin concepten en theorieën geformuleerd en begrepen kunnen worden. De kracht van de wiskunde in de natuurkunde is dat abstracte redeneringen en principes, zoals symmetrie, kunnen leiden tot diepe inzichten met grote reikwijdte. Dit is een van de fascinerende kenmerken van de natuurkunde. De rol van de wiskunde in de natuurkunde moet dus zeker niet vernauwd worden tot een discussie over wiskundige basisvaardigheden, hoewel ook die noodzakelijk zijn. Wiskundige basisvaardigheden zijn nodig als het gaat om het analyseren en representeren van gegevens, het modelleren van verschijnselen en het berekenen van constructies. Op dit niveau is de wiskunde een hulpmiddel voor de natuurkunde zoals voor de andere bètavakken.*
> (Natuurkunde leeft, pag. 77)

Hierbij sluit standpunt 14 van het wiskunde visiedocument aan.

> *In de ontwikkeling van de vernieuwde vakken van de Tweede Fase moet de samenhang tussen de verschillende wiskundevakken en andere vakken worden verbeterd, evenals de onderlinge afstemming. Het gaat daarbij niet uitsluitend om de exacte vakken, maar ook bijvoorbeeld om economie en aardrijkskunde.*
> (Rijk aan betekenis, pag. 25)

Beide vakgebieden onderkennen dat leerlingen moeite hebben om de verbanden tussen beide vakken te zien en dat het cultuurverschil alleen maar is toegenomen.

> *Veel leerlingen hebben moeite om concepten en formules in verband te brengen met de waarneembare wereld en zien formules als rekenvoorschriften. Het gevolg is dat een deel van de leerlingen de natuurkundelessen moeilijk vindt, en soms ook het nut ervan niet inziet. Toch is het geen oplossing om de natuurkunde te ontdoen van wiskundige inhoud, al was het maar vanwege het feit dat onderwerpen die vaak de interesse van leerlingen wekken, zoals kosmologie en deeltjesfysica, juist het meest wiskundig van aard zijn.*
> (Natuurkunde leeft, pag. 78)

In de huidige situatie komen wiskundige concepten veelal in andere vakken terug zonder dat leerlingen het verband zien. Omgekeerd komen in de wiskundeles contexten uit andere vakken aan de orde, met vaak afwijkende notatie en terminologie, eveneens zonder door leerlingen als zodanig herkend te worden. Beide situaties zijn verwarrend voor de leerlingen, en schetsen een verkeerd beeld van de samenhang tussen kennisgebieden terwijl goede toepassingen van wiskunde onbenut blijven.
Dit probleem is hardnekkig. Het cultuurverschil tussen bijvoorbeeld het wiskunde- en het natuurkundeonderwijs is de laatste decennia sterk toegenomen. Ook leraren hebben er moeite mee de verbanden nog te zien.
(Rijk aan betekenis, pag. 25)

Bij het leren in het algemeen en bij afstemming in het bijzonder zijn heldere leerlijnen van essentiële betekenis.

Leerlijnen hebben niet alleen een longitudinale maar ook een transversale component: de relatie met andere exacte vakken. We nemen daarom deel aan een regulier overleg tussen de vakken natuurkunde, biologie, scheikunde, wiskunde en het nieuwe vak NLT. Dit overleg dient niet alleen om op de hoogte te blijven van elkaars werk en ervaringen uit te wisselen, maar ook om afspraken te maken over een gemeenschappelijke aanpak van het onderwijs in de natuurprofielen.
(Natuurkunde leeft, pag. 78)

Een accentwijziging in klas 1, 2 en 3 bestaat eruit dat de begrippen snelheid, verandering en snelheidsgrafiek al informeel geïntroduceerd worden – opdat in klas 4 het begrip afgeleide vlotter kan worden ingevoerd. Voor de Tweede Fase is een accentverschuiving dat differentiëren en de bijbehorende calculus reeds in klas 4 worden ingevoerd en integreren in klas 5 (voor de N-profielen van het vwo). Het programma wiskunde B wordt hierdoor beter afgestemd op het natuurkundeprogramma.
(Rijk aan betekenis, pag. 13)

2.3 Leerboeken

Samenhang en afstemming tussen wiskunde en natuurkunde zou expliciet in het onderwijs en daarmee ook in de leerboeken tot uitdrukking moeten komen. Uit een recente (2005) korte inventarisatie van de wiskundige inhoud van een natuurkundeboek vanuit schoolwiskundig oogpunt blijkt dat er in het natuurkundeboek erg los en soms slordig wordt geformuleerd. Er gebeurt in heel korte tijd heel erg veel. Voor wiskunde ondenkbaar veel en veel te snel. De benadering bij natuurkunde is voornamelijk kwalitatief. Samenhang en afstemming met wiskunde is er niet.

De werkgroep heeft bij een korte inventarisatie opgemerkt dat er tussen wiskunde- en natuurkundeboeken op het gebied van gebruik van concepten, eenheden, grafieken en tabellen, conventies van notaties etc. grote diversiteit bestaat.

In “Een basis voor SONaTe” (pag. 64, 65) wordt de onduidelijkheid op dit punt ook geconstateerd.

> *“Wanneer docenten dat niet van elkaar weten en daarover niet communiceren worden de leerlingen opgezadeld met een probleem…. ”*

Bij de discussies binnen de werkgroep kwam steeds duidelijker naar voren dat er behoefte bestaat aan een document waarin omschrijvingen van begrippen uit de exacte domeinen, het gebruik van concepten, eenheden, letters, grafieken en tabellen, conventies van notaties etc. worden vastgelegd.

Samenhang is erg moeilijk te realiseren omdat in een school vaak natuurkundeboek x van uitgever y en wiskundeboek a van uitgever b worden gebruikt.

Afstemming lijkt in zekere mate makkelijker te realiseren. Om een indruk te krijgen van de kijk van uitgevers op samenhang en afstemming in wiskunde en natuurkunde boeken is een gesprek gevoerd met twee uitgevers wiskunde van een uitgeverij van zowel wiskunde- als natuurkundeboeken. Samengevat is het standpunt van de uitgevers dat ze aandacht aan samenhang en afstemming zullen geven als dat van overheidswege wordt voorgeschreven. Eigen initiatief is vooralsnog niet te verwachten.

Samenhang betekent dat boeken tegelijkertijd ontwikkeld moeten worden. Vanuit het oogpunt van concurrentie zou het voor uitgevers aantrekkelijk zijn een samenhangend pakket te kunnen presenteren. Het idee is echter niet erg realistisch. Tot op heden gaat het over losstaande vakken met eigen auteursteams en ontwikkeltrajecten. Een nieuwe generatie boeken ontwikkelen kost op zijn minst twee jaar, ervan uitgaand dat de vakinhouden tevoren al bekend zijn. Naast een programma met eindtermen zijn leerlijnen nodig om zich op te richten. Worden die niet aangereikt dan zouden die intern ontwikkeld moeten worden.

Afstemming lijkt in principe meer realistisch en wellicht ook haalbaar. Maar ook afstemming zou strikt voorgeschreven dienen te zijn. Dat zou bijvoorbeeld kunnen in een afstemmingsdocument waarin aandacht is voor overkoepelende nomenclatuur, gebruik van symbolen, schrijfinstructies, significantie en voor eisen die aan (het tekenen van) een grafiek gesteld moeten worden. Liefst voor alle exacte vakken, er bestaat immers ook een BINAS-boekje voor de leerlingen. Gezien ervaringen uit het verleden zijn uitgevers nogal sceptisch, met name omdat wiskunde vaak een wat eigenzinnige positie inneemt.

Er zijn echter ook op ander gebied inspirerende initiatieven. In het SaLVO!-project (Samenhangend Leren Voorgezet Onderwijs) wordt voorbeeldlesmateriaal ontwikkeld waarbij de samenhang tussen wiskunde en natuurkunde centraal staat.

2.4 School en docent

Lang geleden gingen de studies wiskunde en natuurkunde meestal samen. Docenten gaven vaak beide vakken, althans waren in beide vakken deskundig. Dat behoort tot het verleden, en dat heeft er mede toe bijgedragen dat de vakken wiskunde en natuurkunde steeds meer los van elkaar zijn komen te staan.

Momenteel weet een wiskundedocent weinig of niets van natuurkunde en wat er zich in de natuurkundelessen afspeelt en omgekeerd. Opmerkingen als “dat heb je bij wiskunde gehad” zijn niet onbekend. Leerlingen schieten daar niets mee op en het beeld van de exacte vakken ondervindt er alleen maar schade van. Samenhang en afstemming komen niet vanzelf en opleggen werkt niet. De school is echter wel de plek waar samenhang uiteindelijk gestalte moet krijgen en concreet gemaakt moet worden. De school zal een professionele visie op samenhangend onderwijs moeten hebben c.q. ontwikkelen, die onder meer in het PTA tot uitdrukking komt. Binnen en tussen secties onderling moet de communicatie plaats vinden die leidt tot concretisering van samenhangend onderwijs.

Docenten hebben hun professionele verantwoordelijkheid en moeten op beide vakgebieden een zekere deskundigheid hebben/verwerven en van de vakinhouden op de hoogte zijn. De nieuwe vakken NLT en wiskunde D lenen zich uitstekend voor een samenwerking die ook de vakgerichte professionalisering van de docent kan bevorderen. Daarnaast zullen er nascholingsprogramma’s ontwikkeld moeten worden met nadrukkelijk aandacht voor de samenhang tussen natuur- en wiskunde.

Het is gemakkelijk gezegd dat beide vakken binnen school samen moeten werken en dat docenten samenhangend onderwijs moeten geven. Voor dit alles moeten voorwaarden aanwezig zijn binnen school maar ook daarbuiten, liefst ondersteund door voorbeelden van ‘good practice’.

Een aantal voorwaarden waar aan te denken valt is: heldere curricula waarin de leerlijnen van beide vakken afgestemd zijn, een duidelijke nomenclatuur voor de gezamenlijke exacte vakken, en leerboeken of lesmateriaal waarin begrippen en taalgebruik zijn afgestemd. Wat het laatste betreft zijn in hoofdstuk 3 van dit rapport leerthema’s behandeld en staan daarbij passende aanbevelingen voor afstemming en samenhang.

2.5 Curricula

Om tot samenhang en afstemming te komen zou idealiter, zoals al in 1975 werd aangegeven, de ontwikkeling van de curricula in samenhang moeten plaats vinden. Omdat beide vakken nu aan een nieuw curriculum werken, lijkt de gelegenheid daartoe aanwezig. De werkgroep vindt het dan ook zeer gewenst dat wiskundedocenten kennisnemen van het natuurkunde-examenprogramma plus de bijbehorende syllabus en omgekeerd. Het gaat hierbij niet alleen om wiskunde B maar ook om wiskunde A.

Bekend is dat een bètabreed samengestelde groep zich bezig houdt met een *Exercitie bètabrede eindtermen domein vaardigheden*. Een citaat uit de notitie (20 oktober 2006) van deze groep: “Op het N-profielniveau is afstemming nodig over een aantal voor wiskunde en natuurwetenschappen gemeenschappelijke vaardigheden. Op dit niveau ligt wellicht de belangrijkste afstemmingstaak voor bèta5nieuw. Ook al zijn deze eindtermen gelijkluidend, in de uitwerking worden ze gekoppeld aan vakinhoudelijke eindtermen uit de examenprogramma’s biologie, natuurkunde, scheikunde, wiskunde en NLT”.

Het is uiteraard essentieel dat vaardigheden zijn afgestemd. Wiskundige vaardigheden worden echter operationeel in natuurkundedomeinen zodat er ook aandacht nodig is voor de afstemming tussen wiskunde- en natuurkundedomeinen. Een bekend traditioneel voorbeeld is het leren van de beginselen van de differentiaalrekening bij wiskunde en het toepassen daarvan bij natuurkunde. Eind 2006 is in de vernieuwingscommissie natuurkunde al uitgebreid gesproken over de inhoud van de domeinen en gaat er gewerkt worden aan de syllabi. Bij de vernieuwingscommissie wiskunde zijn programmacommissies van start gegaan die voorstellen voor de domeinen zullen doen.

In de werkgroep afstemming wiskunde-natuurkunde is zorg ontstaan over het geconstateerde faseverschil in de ontwikkelingen bij enerzijds natuurkunde (NiNa) en anderzijds wiskunde (cTWO) en de daadwerkelijke totstandkoming van de afstemming tussen wiskunde en natuurkunde.

De werkgroep zou het met het oog op de gewenste en noodzakelijke afstemming en samenhang verstandig vinden indien op een of andere wijze wiskunde betrokken zou kunnen worden bij de beschrijving van de syllabi van natuurkunde en omgekeerd natuurkunde bij de syllabi van wiskunde.

Aanbevelingen

1. bèta-afstemmings-document
Het vakjargon moet op elkaar worden afgestemd. Denk aan begrippen, notaties, synoniemen. Een nomenclatuur is zeer wenselijk.
De werkgroep beveelt aan dat een bèta-afstemmings-document wordt ontworpen dat als uitgangspunt zal dienen voor lesmateriaal, gebruik in de klas en bij examens vanaf 2010. De werkgroep stelt voor dit document te doen ontwerpen door een nomenclatuurcommissie van wiskundigen en natuurkundigen in te stellen op gezamenlijk initiatief van NVvW en NVON.

2. syllabuscommissies
De curricula voor wiskunde en natuurkunde moeten op elkaar worden afgestemd en samenhang moet worden aangebracht.
Met het oog op de gewenste en noodzakelijke afstemming beveelt de werkgroep aan om wiskunde te betrekken bij de beschrijving van de syllabi van natuurkunde en omgekeerd natuurkunde bij de syllabi van wiskunde. Dat zou bijvoorbeeld kunnen door een waarnemer van de kant van cTWO/NiNa of door advisering door (leden uit) de werkgroep afstemming wiskunde-natuurkunde.

3. profielcommissie
De werkgroep ondersteunt het in het recente 'Ontwerpadvies' van de profielcommissie NT & NG opgenomen advies om een permanente landelijke profielgroep te installeren. De opdracht van deze profielgroep is de samenhang te stimuleren en te bewaken. Daarvoor dient deze profielgroep passende bevoegdheden te krijgen.

4. nascholing
Er moeten nascholingsprogramma's ontwikkeld worden waarmee docenten deskundigheid gaan verwerven in het andere vak. Het is sterk aan te bevelen dat wiskunde- en natuurkundedocenten, liefst van dezelfde school en liefst gezamenlijk deze nascholing volgen. In die programma's moet de nadruk liggen op de samenhang tussen de vakken natuur- en wiskunde.

3. Thema's

3.1 Thema algebraïsche vaardigheden

Inleiding

Als we spreken over algebra en algebraïsche vaardigheden, waar gaat het dan over? Een antwoord op die vraag is niet zomaar in een waterdichte omschrijving te vangen.

Je kunt denken aan de inhoud van allerlei boekjes (van vroeger en nu) met "algebra" in de titel. En dan maakt het verschil of je het hebt over schoolboekjes of over de "hogere algebra" uit de vroegere lerarenopleidingen of over een universitaire discipline. De laatste tijd is er in de wiskundetijdschriften en op conferenties steeds meer aandacht voor algebraïsche vaardigheden. En dat is een goede zaak.

Je kunt, zo denkt de werkgroep, het beste praktisch te werk gaan en door middel van voorbeelden aangeven waar je het over hebt.

We onderscheiden de volgende aandachtsgebieden:

- gecijferdheid
- het rekenen met getallen
- expressies (vormen) die letters bevatten
- manipuleren van expressies
- functies

3.1.1 Gecijferdheid

Een van de problemen waarmee leerlingen worstelen die in de exacte vakken verder willen, is de noodzaak van "gecijferdheid". Ze worden daarbij beïnvloed door de maatschappij die tot in de kleinste hoekjes afhankelijk is van getallen en verbanden, maar waarin inzicht in getallen en rekenvaardigheid een lage status heeft. In onze maatschappij hebben veel mensen een afkeer van of zelfs angst voor rekenen en wiskunde.

In aansluiting op de profielcommissies hanteert de werkgroep de volgende omschrijving van gecijferdheid: *het kunnen uitvoeren van rekenkundige bewerkingen op basis van kennis en inzicht in hoe rekenen met getallen en eenheden werkt en hoe uitkomsten kunnen worden gepresenteerd in getalsvorm, grafieken, tabellen of andere statistieken.*

Veel leerlingen tonen zich ongecijferd. Dat betekent dan bijvoorbeeld dat ze de basisbegrippen van het rekenen niet beheersen en geen vaardigheid tonen in elementaire rekenoperaties. Mogelijk om die reden tonen ze een afkeer van de getalsmatige structuren in de wereld om hen heen. Het boek van J.A. Paulos, *Ongecijferdheid* (1989), is geheel gewijd aan de beschrijving van dit verschijnsel.

Voorbeelden in de persoonlijke sfeer die alleen door gecijferde mensen kunnen worden begrepen en waarbij ongecijferde mensen zich ongemakkelijk voelen, zijn:

- kassabonnen
- de jaarlijkse nota voor de levering van energie
- de renteberekeningen in een spaarregeling of bij het afsluiten van een hypotheek
- het loonstrookje en de belastingaangifte
- kredietregelingen
- kansen (bijvoorbeeld de kans op een verkeersongeluk of de kans van slagen bij een riskante operatie)

De werkgroep denkt dat het voor veel mensen net zo moeilijk is om gecijferd te worden als om een vreemde taal vloeiend te leren beheersen.

En voor leerlingen in het voortgezet onderwijs komt daar nog bij dat de taal van de wiskunde formeel en abstract is, en daar hebben veel mensen moeite mee. Om de overbrugging te maken tussen de abstracte wiskunde en de concrete voorbeelden (zoals boven genoemd) is contextrijke wiskunde uitgevonden. Dat is didactisch gezien zeker een uitstekende aanpak, maar we moeten beseffen dat veel leerlingen de stap vanuit de context naar het abstracte model van de wiskunde niet kunnen maken. Daarom moet er in de huidige examencultuur ook bij wiskunde B zeer voorzichtig worden omgegaan met het presenteren van alleen maar opgaven voorzien van contexten. In de nieuwe examenprogramma’s komen er weer (meer) opgaven waarin geen context aanwezig is en een groot (groter) beroep gedaan gaat worden op de gecijferdheid en de algebraïsche vaardigheid van de leerling.

De ontwikkeling van gecijferdheid en wiskundige vaardigheid begint al op heel jonge leeftijd. Omgaan met getallen en meetkunde moet al vanaf zeer jonge leeftijd worden geoefend. Logisch redeneren, getallen en verbanden daartussen, het begint allemaal "op moeders schoot" en in de kleuterklassen. Rekenvaardigheid, het oplossen van raadsels en puzzels, inzicht in het metrieke stelsel, het moet allemaal goed worden geoefend in de basisschool. Anders ontstaat er in het voortgezet onderwijs een tegenzin tegen de abstracte(re) wiskunde of zelfs hulpeloosheid bij of angst voor dit vak.

En dit alles moet goed onderhouden worden en regelmatig opgefrist in de onderbouw van het vo. Juist in de onderbouw zie je de prestaties van leerlingen bij de exacte vakken teruglopen omdat er steeds meer een beroep gedaan wordt op hun gecijferdheid.

Aanbevelingen

5. De visiedocumenten voor wiskunde en natuurkunde zoeken de start van lange leerlijnen voor algebraïsche en rekenkundige vaardigheden in de onderbouw van het vo. Gecijferdheid begint echter in de kleuterklassen van het po (of liever: nog eerder). Kinderen moeten van het begin af aan in het onderwijs gevormd worden met een grotere mate van gecijferdheid.
6. Een cruciale rol spelen de pabo’s en de nascholingen voor leraren in het po (zoals verzorgd door het Freudenthal Instituut). Het is zeer gewenst om te streven naar een hoger niveau van gecijferdheid bij (aanstaande) leraren. Tot de middelen daartoe behoren de rekentoetsen op de pabo’s. De gecijferdheids-lat zou daarbij hoger gelegd moeten worden.
7. Zoek mogelijkheden in de media (Teleac, …), het volwassenenonderwijs, de volksuniversiteiten, enz. om de gecijferdheid in Nederland te vergroten.
   Alfabetisering wordt in Nederland sterk gestimuleerd en gesubsidieerd; dat zou ook moeten gebeuren met de bestrijding van ongecijferdheid.

3.1.2 Het rekenen met getallen

Daarin bestaan notatie- en interpretatieconventies die logischerwijs voorafgaan aan letterrekenen. Daaronder valt het 10-tallige positiestelsel, maar ook de gebruikelijke manieren om bewerkingen te noteren. Ook het soms weglaten van het optel- en het vermenigvuldigingsteken valt daaronder, zoals in 3½ en 2π.

Door het gebruik van de grafische rekenmachine is het getalbegrip en het onderscheid tussen de getalverzamelingen te veel buiten beeld geraakt. Doordat alle getallen decimaal worden geschreven ziet men geen onderscheid meer tussen natuurlijke, gehele, rationale en reële getallen.

Bewerkingen	**Notaties**
Gebruik van haakjes	(..), [..], {..}
Machtsverheffen, worteltrekken	2^3, 2^3, exp 3, E3; √5, $\sqrt{12345}$, $5^{½}$
Vermenigvuldigen, delen	2π, 2·3, 2∗3, 2×3; $\frac{2}{3}$, 2/3, 2:3
Optellen, aftrekken	3½, 2 + 3, Σ; 8 - 3, Δ
Omzettingen	Breuken – verhoudingen – procenten

Er zijn voorrangsregels die het bovenstaande schema volgen. Daar zijn nog kleine verschillen in te ontdekken bij boekenschrijvers en bij (grafische) rekenmachines. De regels zijn samen te vatten in een schema. Bewerkingen die in onderstaande tabel even hoog staan hebben geen voorrang op elkaar. Ze worden uitgevoerd in de volgorde waarin ze voorkomen.

Haakjes	
Machtsverheffen	Worteltrekken
Vermenigvuldigen	Delen
Optellen	Aftrekken

Aparte aandacht hierbij is gewenst voor het onderwerp *significantie*. Dat is voor de natuurkunde heel belangrijk maar komt bij de wiskunde niet aan bod. Je kunt je afvragen waar de vaak afwerende houding van de wiskundigen vandaan komt. Docenten willen bij examens altijd weten hoe “nauwkeurig” antwoorden moeten zijn. Maar regels in de leerstof waarin omschreven wordt wat daarbij een verstandige keus is, komen er niet in.

Zo is er ook vaak in contexten in wiskundeboeken sprake van meetresultaten. Maar er moet mee gemanipuleerd worden alsof ze exact zijn. Er is in wiskundeboeken geen verschil tussen drieduizend, 3000, $3\cdot10^3$, $3{,}000\cdot10^3$, etc. En dat past ook niet in de traditie van het wiskundeonderwijs.

Het wordt tijd dat de wiskunde werk maakt van significantie, en dan ook aandacht besteedt aan het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van meetresultaten.

Aanbevelingen

8. In de nieuwe wiskunde- en natuurkundeprogramma's moet significantie een duidelijke plaats krijgen, al vanaf de onderbouw van het vo. Het gaat dan over het omgaan met nauwkeurigheid van getallen, meetfouten, aantal significante cijfers en tolerantie.
9. Naast examenprogramma's moeten in syllabi eenduidige afspraken gemaakt worden over de notatie van bewerkingen en de voorrangsregels. En die moeten nadrukkelijker onderwezen worden vanaf het basisonderwijs.
10. Leerlingen en leraren moeten de juiste benamingen leren gebruiken voor de bewerkingen. Wij denken (behalve aan de in het bovenstaande genoemde bewerkingen) ook aan: plus (niet: "en" of "erbij"), min (niet: "eraf"), maal (niet: "keer"), gedeeld door, tot de macht. En ook aan: term, som, verschil, factor, product, quotiënt, macht, grondtal, exponent.
11. Meer inzicht in het gebruik en de betekenis van het 10-tallig stelsel is zeer gewenst. Dit ook in verband gezien met het metrieke stelsel. Daarin is het rekenen met machten van 10 zeer belangrijk (denk aan milli-, deci-, kilo-…).
12. De werkgroep beveelt aan om meer eenheid te brengen in de schrijfwijze van getallen en het gebruik van bewerkingstekens.

3.1.3 Expressies (vormen) die letters bevatten

Soort expressie	Voorbeelden
Vrije vormen	$e^x + 3y$, a^b, $3a + 2b + (a + b)^2$,
Vergelijkingen	$3x + 7 = 10$, $5^x = 7$, $4x + 7y = 13$
Ongelijkheden	$P + Q > 3$, $2^{3x - 5} \leq 100$, $LOG(x) \neq 2$
Formules	$y = 2x + 3$, $F = m \cdot a$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$
Identiteiten	$a + a = 2a$, $4(3x - 5) - 2x = 10x - 20$

De overgang van getallen naar letters is voor leerlingen lastig omdat letters allerlei interpretaties toestaan, afhankelijk van de context.

a. Letters kunnen een vaste waarde hebben. Denk aan a=1, b=2,…,z=26. Of aan e=2,71828… en π=3,14159…
b. Letters kunnen meerdere waarden hebben. Bijvoorbeeld $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
c. Letters kunnen een object voorstellen. In $A = l \cdot b$ stelt A een oppervlakte voor, l staat voor lengte, b voor breedte. De letters hebben dan vaak een dimensie.
d. Letters kunnen een veranderlijke grootheid voorstellen. Dan gaat het om verbanden tussen variabelen of objecten. Zoals in $y = 3x$ of in $\rho = \frac{m}{V}$.

Zie bijvoorbeeld: “Hoe studeren leerlingen algebra?” door Joelle Vlassis en Isabelle Demonty (2002).

Aanbevelingen

13. Er moet meer aandacht komen in het (wiskunde-)onderwijs voor de betekenis en het gebruik van letters in expressies. Ook moet er een helder onderscheid gemaakt worden tussen de verschillende soorten van expressies. Het gaat om het vergroten van de *symbol sense*.

3.1.4 Manipuleren van expressies

Activiteit	Voorbeelden
Herleiden, vereenvoudigen, omvormen	Vereenvoudig $3\cdot(x-2) + 5\cdot(4-x) = \ldots..$ Herleid $3\cdot e^{x-2} - 5\cdot e^{x}$ tot $\ldots\cdot e^{x}$
Oplossen	Los op $1{,}3 = \frac{m}{3}$, $0{,}95^{t} = 0{,}5$
Bewijzen	Voor alle waarden van a en b is $(2a + b)^2 – 8ab = (2a – b)^2$

Bij manipulaties is de betekenis van het is-gelijk-teken van belang.

a. Het is-gelijk-teken als aankondiging van een antwoord. Bereken 5 + 12 = … Deze betekenis is de oorzaak van berekeningen als $5\cdot12 = 60 + 7 = 67$.
b. Het is-gelijk-teken als uitdrukking van gelijkwaardigheid van 2 expressies. $p\cdot(a + b) = p\cdot a + p\cdot b$.
c. Het is-gelijk-teken als zoekopdracht. Los op: $5x - 2 = 13$.
d. Het is-gelijk-teken in de definitie van een functie of in een verband tussen grootheden. $y = 3^{x}$, $F = m\cdot a$.

Aanbevelingen

14. De werkgroep beveelt aan om gestructureerd meer aandacht in de onderbouw te besteden aan het vereenvoudigen, herleiden, omvormen van expressies. Een goede mogelijkheid daarvoor biedt het bewijzen in een algebraïsche context.
15. Het is zeer gewenst om meer nadruk te leggen op de betekenis van het is-gelijk-teken, zodat omvormen, oplossen van vergelijkingen en het bewijzen van identiteiten beter onderscheiden worden. Daarbij moet ook aandacht zijn voor het juiste gebruik van implicaties en equivalenties.

3.1.5 Functies

Functies spelen in de wiskunde en de natuurkunde een centrale rol. Zowel uitdrukkelijk als afbeelding geschreven in de vorm f(x), s(t), enz. als in de vorm van een formule geschreven zoals y = ax, s = vt, enz.

Functies kunnen op verschillende manieren worden weergegeven. Gebruikelijk is onderstaande indeling. Belangrijke leerdoelen zijn de omzettingen in weergave, zoals uit een grafiek een passende formule bepalen of een formule in woorden kunnen weergeven.

Weergave	**Voorbeelden**
In woorden	Op $t = 0$ is $s = 3$ m en elke seconde komt daar 2 m bij
In tabellen	Rijtje van 5 meetgegevens van bijv. slingerlengte en slingertijd
In grafieken	Een rechte lijn, een exponentiële kromme, gebruik LOG-papier
In formules	$y = x^3$, $y = {}^2\log(x)$, $b = \frac{10v}{v - 10}$, alle standaardfuncties

Een voor de natuurkunde belangrijk onderwerp hierbij zijn de evenredige verbanden. Niet alleen het recht evenredig en omgekeerd evenredig verband, maar ook het kwadratisch evenredig en het omgekeerd kwadratisch evenredig verband en ook de machtsverbanden met andere exponenten. Daarbij zijn de exponenten die in de natuurkunde voorkomen veelvouden van 0,5. Het SaLVO!-materiaal schenkt hier uitvoerig aandacht aan. Zie hiervoor ook het thema grafieken/diagrammen.

3.2 Thema evenredigheid

3.2.1 Begrip, omschrijving en definitie

Het begrip *Evenredigheid* wordt (voor het eerst) uitgelegd door Simon Stevin in zijn *Singconst*. De woorden *Even* en *Reden* worden uitgelegd in zijn *Bewysconst*.

Stevin definieert *Even* als getalsmatige gelijkheid, bijv. 5 mensen zijn even aan 5 stoelen. Maar 5 mensen zijn niet gelijk aan 5 stoelen, want *Gelijk* betekent bij hem fysische gelijkheid.

Het woord *Reden* (Latijn: ratio) geeft een (verhoudings-)getal aan waarmee vermenigvuldigd wordt. Je treft het aan bij een meetkundige rij: de reden is het getal waarmee elke voorgaande term vermenigvuldigd wordt om de volgende te krijgen.

In een evenredigheid kunnen daarom dus verschillende grootheden vergeleken worden op hun getalsmatige aspecten. Dat kan op verschillende manieren.

1 Even – Redig: getalsmatig wordt er met dezelfde factor vermenigvuldigd.

2 Even – Redig: een verband tussen twee grootheden/variabelen dat te schrijven is als een verhouding met een constante waarde. Het getal dat de verhouding aangeeft heet evenredigheidsconstante.

Toelichting:
Noem de twee grootheden/variabelen A en B en de constante c.

A en B zijn recht evenredig als $A = c \cdot B$ of $\frac{A}{B} = c$

De grafische weergave is een lijn door de oorsprong.

A en B zijn kwadratisch evenredig als $A = c \cdot B^2$ of $\frac{A}{B^2} = c$

De grafische weergave is een (halve) parabool met top in de oorsprong.

A en B zijn omgekeerd evenredig als $\frac{A}{\left(\frac{1}{B}\right)} = c$ of $A = c \cdot \frac{1}{B}$ of $A = \frac{c}{B}$ of

$A \cdot B = c$

De grafische weergave is een (halve) hyperbool op de assen.

Algemeen:

A en B zijn evenredig als $A = c \cdot B^n$ of $\frac{A}{B^n} = c$ (n een getal ongelijk aan 0)

Het benoemen van evenredigheden als verbanden houdt een zeker didactisch risico in zich namelijk dat bijvoorbeeld de implicatie *als recht evenredig dan lineair verband* omgedraaid gaat worden.

Schoolboeken hanteren verschillende omschrijvingen/definities van evenredigheid. Ze kunnen niet alle de toets der kritiek doorstaan. Een goede definitie staat bijvoorbeeld in het SaLVO!–materiaal deel IX:

Twee grootheden die met elkaar samenhangen volgens het principe: Als de ene grootheid met een getal wordt vermenigvuldigd dan wordt de andere grootheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd *heten recht evenredig.*

3.2.2 Evenredig op school

Evenredigheden spelen een belangrijke rol bij het vinden en vastleggen van verbanden in de natuurwetenschappen. Vormen die voorkomen zijn niet alleen recht evenredig maar ook omgekeerde, kwadratische, reciproke en andere machts-evenredigheden. Op school speelt in de natuurkunde het thema evenredigheid een nadrukkelijke rol, veel meer dan in de wiskunde het geval is.

Een evenredigheidsconstante is een factor die ook bij andere dan recht evenredige verbanden veel wordt gebruikt in de natuurkunde. Bij wiskunde is dat niet het geval, daar wordt bij het woord evenredigheidsconstante meteen aan lineaire verbanden gedacht. Daarnaast heeft de evenredigheidsconstante ook vaak specifieke namen die van de context afhangen. Bij wiskunde bijvoorbeeld de richtingscoëfficiënt, helling(sgetal), steilheid. Bij natuurkunde de constante van Boyle etc. Ook speelt mee dat dimensies bij wiskunde geen beduidende rol spelen.

Bij dynamische modellen komt de evenredigheid met meerdere grootheden aan bod. Vaak wordt dan gesteld dat de grootheid evenredig is met het product van de afzonderlijke factoren, zonder dit op een of andere manier aannemelijk te maken of de condities aan te geven waaronder dit is toegestaan.

In de meetkunde komt de evenredigheidsfactor aan de orde bij gelijkvormigheid en heet dan vergrotings- of verkleiningsfactor. Het visuele aspect van de gelijkvormigheid kan het concept evenredigheid goed ondersteunen. Bovendien komen bij oppervlakten en inhouden de kwadratische en kubische evenredigheid op natuurlijke wijze naar voren.

Een veel gebruikt hulpmiddel bij het herkennen en toepassen van evenredigheden is de verhoudingstabel. De vorm en de manier waarin de verhoudingstabel in schoolboeken wordt gepresenteerd verschilt nogal per vak. Zo houdt wiskunde nauwelijks rekening met wat boven en onder staat, wat bij natuurkunde heel wezenlijk kan zijn. Voor het gebruik van dimensies geldt hetzelfde.

In een aantal artikelen gaan o.a. Wijers, Van der Valk en Broekman in op het fenomeen verhoudingstabel. Zie de literatuurlijst. Ze geven aanbevelingen die we graag overnemen.

In de natuurkunde op school speelt het thema evenredigheid een nadrukkelijke rol, veel meer dan in de wiskunde het geval is.

In de schoolwiskunde wordt evenredigheid stiefmoederlijk bedeeld, slechts recht evenredig en omgekeerd evenredig komen ter sprake, en dan vaak nog plichtmatig. Zo wordt bijvoorbeeld in de methode Moderne Wiskunde het begrip bij lineaire functies genoemd als kenmerk van de lineaire tabel. Het begrip evenredigheid in algemene zin krijgt geen aandacht. Kwadratische evenredigheid bijvoorbeeld komt niet aan de orde. Overigens zou aandacht nuttig zijn in verband met modelleeractiviteiten en herkennen van relaties tussen getallen.

De huidige fasering, als daar al sprake van zou zijn, volgens de methode Moderne Wiskunde is:

klas 1	verhoudingstabel; verbanden
klas 2	begrip evenredig via lineaire formules; tevens omgekeerd evenredig in formule, tabel, grafiek; omgekeerd evenredig in drie formules
klas 3 ev	weinig gebruikt

Het vóórkomen van evenredigheid bij meetkundige gelijkvormigheid als vergrotings-resp. verkleiningsfactor wordt als zodanig niet aangegeven.

Evenredigheid wordt in het Nomenclatuurrapport wiskunde onder Analyse Algebra genoemd. Bij de eindtermen wiskunde wordt evenredigheid niet genoemd, wel "verhouding".

Bij wiskunde is evenredigheid een marginaal thema bij het domein verbanden. Evenredigheid wordt alleen in de zin van recht evenredig en omgekeerd evenredig gebruikt en daardoor ook als zodanig opgevat. Bij natuurkunde is een ruimer gebruik van evenredigheid. Het nuttig toepassen van evenredigheid in verhoudingstabellen komt voor bij wiskunde maar in mindere mate bij natuurkunde.

Aanbevelingen

16. De werkgroep beveelt aan om bij wiskunde uitgebreider aandacht aan het begrip evenredigheid te besteden en de introductie en definitie van evenredigheid bij wiskunde en natuurkunde te laten sporen. Daartoe moeten diverse vormen van evenredigheid bij wiskunde opgenomen zijn in natuurkundige contexten en moet het begrip in hogere jaren regelmatig en functioneel terugkomen.
17. De verhoudingstabel is een belangrijk didactisch middel. De werkgroep beveelt aan om te komen tot een uniform gebruik bij diverse bètavakken. Belangrijke aandachtspunten daarbij zijn:
    - eenheden omrekenen in een verhoudingstabel
    - niet afronden in een verhoudingstabel
    - correspondentie tussen *boven en onder* in de tabel en *boven en onder* in de formule
    - labeling met eenheden en zichtbaar maken van de verhoudingsgrootheid

Voorbeeld van een fasering

klas	onderwerp
1	verhoudingstabel; verbanden; type verbanden; recht en omgekeerd evenredig; betekenisvolle contextrelaties
2	lineaire grafiek en recht evenredig; andersoortige evenredigheden; betekenisvolle contextrelaties; algemeen begrip
3	aandacht voor dimensie; onderhoud
4,5	herkennen in betekenisvolle formules; toepassen in modelleersituaties

3.3 Thema vectoren

3.3.1 Situatie bij wiskunde

Bij wiskunde zijn vectoren al geruime tijd uit het zicht verdwenen. In wiskundeboeken, waarin behalve bij Moderne Wiskunde nauwelijks natuurwetenschappelijke contexten voorkomen, is de vector tegenwoordig niet aan te treffen. Het thema is echter op verschillende niveau's toegankelijk, bijvoorbeeld bij plaatsbepaling in de onderbouw of baankrommen in de bovenbouw. Ooit was er een boekje voor de derde klas "Vlieg er eens in" waarin het onderwerp vectoren werd behandeld aan de hand van de context van vliegen. In de bovenbouw is het onderwerp baankrommen zeer geschikt voor zowel wiskunde als natuurkunde. Parametervoorstellingen waarbij $(x(t), y(t))$ een gegeven kromme doorloopt zijn zeer natuurlijke toepassingen van (snelheids)vectoren.

Vectoren is bij natuurkunde een vanzelfsprekend onderwerp waaraan veel wiskunde is te koppelen.

Met anderen is de werkgroep van mening dat vectoren weer een domein bij wiskunde moet worden.

3.3.2 Begrip, omschrijving en definitie

Introductie

Bij een vector spelen richting, grootte, aangrijpingspunt en werklijn een rol. Vier verschillende soorten kunnen onderscheiden worden: vrije vector (richting en grootte), gebonden vector (richting, grootte en aangrijpingspunt), vaste vector (richting, grootte en vast aangrijpingspunt), glijdende vector (richting, grootte, werklijn). Bij natuurkunde zijn verschillende soorten geen probleem, de vector die het beste past wordt gebruikt. In de wiskunde ligt dat wat gevoeliger.

Het begrip vector

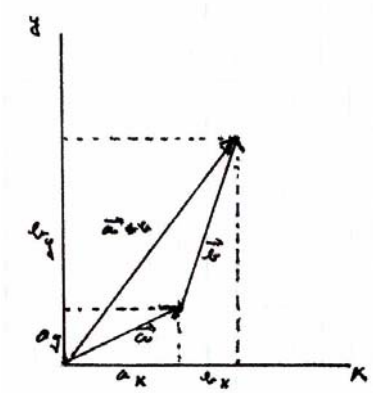
Een vector $\vec{a}$ is een *kolom* getallen: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ met als *optelregel*:

$$p\vec{a} + q\vec{b} = p\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa_x + qb_x \\ pa_y + qb_y \end{pmatrix}$$

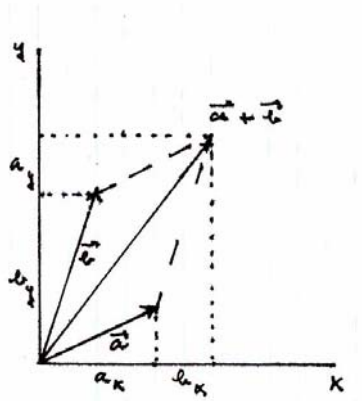
Meetkundige betekenis

Optelling $\vec{a} + \vec{b}$ in een orthonormaal assenstelsel:

Kop-staart



Parallellogram



Lengte of euclidische norm $|\vec{a}|$ van de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Vectoren en goniometrie
In driehoeken: *"soscastoa"*

Voorbeeld: Twee manieren om positie laag vliegend vliegtuig t.o.v. Schiphol vast te leggen:

1 Afstand naar noorden en naar westen

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2 Radarafstand *r* en *draaihoek* γ (kompashoek)

Verband tussen beide manieren

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos\gamma$$
$$y = r\sin\gamma$$

Radiaal
Bij dezelfde middelpuntshoek is de verhouding van boog en straal niet afhankelijk van de grootte van de cirkel. Deze verhouding levert een goede maat voor de hoek: de *radiaal.*

$$\text{radiaal} = \frac{\text{boog}}{\text{straal}}$$

Gevolg : $\text{boog} = \text{straal} \cdot \text{hoek} \ \ (\text{in radialen})$

In letters: $s = r \cdot \gamma$

Inwendig product

Definitie: Als $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ dan is het inwendig product van deze vectoren het getal $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$

Merk op $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

Eigenschap: Als α de draaihoek is van $\vec{a}$ en β de draaihoek is van $\vec{b}$ en $\gamma = \beta - \alpha$ dan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma$$

Meetkundige betekenis: Als $\vec{b} = \vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}$ dan

$$b_{\parallel} = |\vec{b}|\cos\gamma \quad \text{en} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| b_{\parallel}$$

Vanwege de *arbeid* is het inwendig product in de natuurkunde belangrijk. Wiskundig zijn er veel meetkundige toepassingen.

Uitwendig product
Het uitwendig product is natuurkundig van belang in verband met de Lorentz-kracht van een magnetisch veld op een bewegend geladen deeltje. Verdere natuurkundige toepassingen zijn bij de draai-impuls en het moment van een kracht. Ook voor ruimtemeetkunde is dit product zinvol.

Toepassingsmogelijkheden van vectoren
Snelheid en versnelling bij bewegingen in een vlak (parameterkrommen)
Algemeen:
Positie op tijdstip *t*

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Snelheid op tijdstip *t*

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{s}(t)}{\mathrm{d}t}$$

dus $\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ dus $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ en $v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$

Versnelling op tijdstip *t*

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}$$

dus $\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$ dus $a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t}$ en $a_y(t) = \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}$

Verdere voorbeelden:
- eenparige bewegingen
- schootsafstand bij schuine helling
- cirkelbeweging

Notaties
Verschillende notaties van vectoren komen voor. Het spreekt voor zich dat een gelijkluidende notatie bij wiskunde en natuurkunde gebruikt gaat worden. Om didactische redenen is de werkgroep een voorstander van de notatie van een vector met een pijltje, om het karakter van een vector te benadrukken. En van het gebruik van de kolomnotatie met kentallen zonder indices.

Aandachts- en discussiepunten

Bij wiskunde zijn de ervaringen met het onderwerp vectoren in de klas weggezakt dan wel afwezig.

Twee artikelen wil de werkgroep noemen. Ten eerste de voordracht van Joop van Dormolen “Vectoren in de wiskunde en in de natuurkunde” gehouden op de wiskunde-natuurkunde-conferentie (oktober 1975), die nog niet aan betekenis heeft ingeboet (zie bijlage 2). Ten tweede een artikel uit “Shaping the future”, chapter 12: Maps and Models- Approaches to vectors, waar enkele relevante discussiepunten worden opgevoerd.

Defining vectors simply as quantities that have magnitude and direction is unhelpful. The key thing is knowing how they are added.
Beginning with displacements that can be added ‘tip to tail’ builds on students’ intuition and makes vector addition straightforward.
The displacement vector is too directly descriptive a starting point. It is quite different from other vectors such as force.

Aanbevelingen

18. Vectoren zijn uit het zicht van wiskunde geraakt maar horen daar weer terug te komen. Rond het thema vectoren moeten nog beslissingen over de opname in domeinen genomen worden. Het lijkt zeer verstandig dat in samenspraak met natuurkunde te doen, evenals het aanbrengen van een fasering in de leerlijn bij beide vakken.
    De werkgroep beveelt aan voor de notatie een letter met pijl erboven te gebruiken en geen indices in de kentallen. Het uitproduct lijkt de werkgroep voor wiskunde B te veel gevraagd, mogelijk is dit wel bij wiskunde D in te voeren.

3.4 Thema grafieken/diagrammen

Inleiding

In kerndoel 25 voor wiskunde in de (vernieuwde) basisvorming staat het volgende:

> *De leerling leert informele notaties, schematische voorstellingen, tabellen, grafieken en formules te gebruiken om greep te krijgen op verbanden tussen grootheden en variabelen.*

Concreet betekent dit o.a. dat leerlingen in de onderbouw leren omgaan met de samenhang tussen tabellen en grafieken. Ze kunnen werken met verschillende standaardverbanden, bijvoorbeeld: lineaire, kwadratische en exponentiële verbanden.

Van belang hierbij is dat niet alleen verbanden tussen variabelen maar ook tussen grootheden worden genoemd. Dat schept verwachtingen. Grootheden komen in diverse natuurwetenschappelijke contexten voor en hebben hun eigen aanpak.

In de huidige generatie wiskundeboeken wordt er in natuurwetenschappelijke contexten nogal eens slordig met grootheden en verbanden omgesprongen. Kortom, het is nadrukkelijk van belang dat de wiskunde bij gebruik van natuurwetenschappelijke contexten de vigerende afspraken bij het maken van diagrammen/grafieken kent en zich daaraan conformeert.

3.4.1 Diagrammen bij natuurkunde

Bij natuurkunde in de onderbouw maar vooral in de tweede fase is het gebruik van diagrammen belangrijk. Er wordt een (experimenteel) onderzoek gedaan. De leerlingen hebben hun meetresultaten in een tabel gezet en willen graag het verband tussen bepaalde (gemeten) grootheden weten. Een tabel kan wel overzichtelijk zijn, maar meestal wordt een diagram gebruikt. Het voordeel daarvan is dat je in één oogopslag een groot aantal afzonderlijke meetwaarden kunt overzien en dat je (na enige oefening) het verband tussen de grootheden (her)kent (zie overzicht in bijlage 3).

In de natuurkunde ligt dus vooral de nadruk op de grafiek als een *representatievorm* van een verband tussen twee grootheden.

In de syllabus CE bij het programma natuurkunde voor vwo (vanaf aug. 2007) staat bij de specificatie van de globale eindtermen in het subdomein A2 'Reken-/wiskundige vaardigheden' onder 'nr 2.3 wiskundige technieken toepassen' o.a.:

- de grafiek tekenen met behulp van een functievoorschrift;
- interpoleren en extrapoleren in grafieken, tabellen en diagrammen;
- de grafiek tekenen en het functievoorschrift opstellen bij recht evenredige verbanden;
- raaklijn tekenen aan een kromme en de richtingscoëfficiënt bepalen;
- de oppervlakte onder een grafiek schatten, benaderen of door integreren bepalen;
- relaties van de vorm $y = ax^2$, $y = ax^{-1}$, $y = ax^{-2}$, $y = ax^{½}$ door coördinatentransformatie weergeven als grafieken met een rechte lijn.

Voor het CE natuurkunde havo staat vrijwel hetzelfde in de syllabus, maar ontbreekt bij het een na laatst genoemde punt de opmerking over 'integreren' en het laatstgenoemde punt ontbreekt geheel.

In de (concept-)handreiking voor het schoolexamen natuurkunde voor havo/vwo (SLO-publicatie VO/3080/D/05-143, aug. 2005) wordt in § 6.3 enige aandacht gegeven aan de afstemming tussen natuurkunde en wiskunde:

> *'Voor het juist verwerken van meetresultaten in grafieken … is wiskundige basiskennis nodig. Naarmate een kwantitatieve aanpak belangrijker is, zal ook de vertaling van meetresultaten via grafieken naar formules meer aandacht krijgen. Met de grafische rekenmachine zijn dergelijke berekeningen geautomatiseerd. Meerdere computerprogramma's bieden mogelijkheden om meetresultaten te analyseren en verwerken'.*

Ten slotte nog een citaat uit de algemene docentenhandleiding van SaLVO!:

> *'Het redeneren over verbanden en het omgaan met de verschillende representaties is in alle (natuur)wetenschappelijke vakken van belang en wiskundige vaardigheden spelen hierbij een essentiële rol. In de praktijk blijken de afstemming en samenhang tussen de verschillende vakken echter niet te voldoen.*
> *De lesmethodes van de verschillende vakken zijn niet op elkaar afgestemd. Bij natuurkunde moet daardoor soms gebruikt worden wat bij wiskunde nog niet geleerd is. Begrippen zijn bij de verschillende vakken soms bekend onder andere namen (een coördinatentransformatie bij natuurkunde is wat wiskundigen een substitutie noemen)'.*

In deze stukken wordt de belangrijke relatie gelegd tussen verschillende representaties van verbanden. Verschillende wiskundige basisvaardigheden dienen daarbij als handvatten om gegevens te ***representeren***, te ***verwerken*** èn te ***analyseren***. Die vaardigheden moeten als zodanig dus beheerst worden. Maar het ***interpreteren*** van de uitkomsten van de verschillende technieken is natuurlijk ook van wezenlijk belang in de natuurkunde.

Voorbeeld 1
Een leerling moet bij natuurkunde niet alleen de vaardigheid hebben een *s*-*t*-diagram te tekenen, maar moet die ook kunnen aflezen en aan de hand van de vorm kunnen bepalen wat het verband tussen *s* en *t* is.

Ook zal een leerling in een *s*-*t*-diagram een raaklijn moeten kunnen tekenen op een zeker tijdstip, maar hij zal ook moeten weten en begrijpen dat de betekenis van de *steilheid* van die raaklijn de snelheid op dat tijdstip is.

Voorbeeld 2
Een leerling doet bij natuurkunde een onderzoek aan een radioactieve bron. Hij meet de activiteit van de bron op een aantal opeenvolgende tijdstippen. Hij moet niet alleen de vaardigheid hebben om de activiteit *A* uit te zetten tegen de tijd *t*, maar moet ook uit het gemaakte diagram de halveringstijd kunnen bepalen. Uit het *A*-*t*-diagram (ook wel vervalkromme genoemd) moet de leerling dan ook kunnen afleiden of hij te maken heeft met een meer of minder instabiele radioactieve stof.

3.4.2 Diagrammen/grafieken bij natuurkunde op school

Bij natuurkunde wordt niet veel gebruik gemaakt van staafdiagrammen, cirkeldiagrammen, enz. Deze diagrammen leveren meestal ook geen problemen op. Ze worden gebruikt zoals het bij de wiskunde is aangeleerd. De nadruk bij de natuurkunde ligt op het gebruik van diagrammen/grafieken waarin het verband tussen twee gemeten grootheden wordt weergegeven.

Afspraken daarbij die in de natuurkunde gebruikelijk zijn:

- Gebruik millimeterpapier, 5 mm-ruitjes of schrijfruitjes om in een diagram de meetresultaten nauwkeurig weer te geven.
- Het diagram mag niet te klein zijn. Aslengte ongeveer 10 cm. De schaalverdeling kies je zo dat het meetgebied langs beide assen ongeveer even lang is.
- Kies de schaalverdeling handig. Laat daartoe 1 cm langs een as overeenkomen met 1, 2 of 5 eenheden van de gemeten grootheid.
- Langs de assen staan de (symbolen van de) grootheden (*cursief*) met de bijbehorende eenheden. De (symbolen van de) eenheden staan achter de grootheden tussen haakjes ( ) of voorafgegaan door het woordje ‘in ‘.
- Langs de horizontale as staat de onafhankelijke grootheid.
- *Meet*punten geef je bij voorkeur weer door plusjes. Kruisjes, bolletjes of vierkantjes kan ook. Zeker niet met stippen zoals bij functies in de wiskunde.
- Het toepassen van een scheurlijn is ongebruikelijk. De (meet)waarde 0 is vaak belangrijk.

Is er eenmaal een diagram getekend, dan is het van belang dat de leerling in staat is om het verband te bepalen tussen de grootheden. Voor de havo alleen als dat verband evenredig is. Van vwo-leerlingen wordt meer verwacht: zij moeten alle verbanden die in bijlage 3 worden genoemd kennen met behulp van verschillende methoden (functiefit en tabelmethode m.b.v. de grafische rekenmachine en coördinatentransformatie). Hierbij wordt verwezen naar het SaLVO!-materiaal, met name de blokken IX en X. Zie ook het overzicht in bijlage 3.

Aanbevelingen

19. De werkgroep beveelt aan dat bij alle bètavakken in het algemeen en natuurkunde en wiskunde in het bijzonder op eenzelfde manier met grafieken wordt omgegaan. Daartoe is volgens de werkgroep in ieder geval nodig:
    - Het over en weer kennen van het taalgebruik.
    - Nadrukkelijke aandacht bij wiskunde voor de verwerking van *meetresultaten* in grafieken. Daarbij dient rekening te worden gehouden met de afspraken die bij de natuurkunde gelden.
    - Nadrukkelijke en afgestemde aandacht in beide vakken voor het analyseren en interpreteren van grafieken.
    - Het leren van verschillende standaardverbanden, zoals weergegeven in bijlage 3.

Mogelijke fasering bij wiskunde en natuurkunde:

klas	grafieken/diagrammen bij verbanden
1	Alleen eenvoudige grafieken
2	Lineair en recht evenredig
3	Kwadratisch evenredig, omgekeerd evenredig, exponentieel
4, 5	Herhalen van bovenstaande + omgekeerd kwadratisch evenredig, wortel evenredig, goniometrisch

3.5 Thema afgeleide

Inleiding

Als er één thema is waarbij je kunt merken of in een school afstemming en samenhang tussen de vakken wiskunde en natuurkunde zijn gerealiseerd, dan is het wel het thema afgeleide.

De natuurkundedocent verwacht van de leerlingen dat ze concepten als differentiequotiënt, afgeleide, raaklijn, enz. moeiteloos kunnen toepassen in de natuurkundelessen.

De wiskunde B docent en de wiskundemethode gebruiken contexten zoals afgelegde *weg-tijd*-functies, vrije val, snelheid, versnelling, enz. Bijlage 1 geeft een beeld van de problematiek. Leerlingen krijgen te maken met een oerwoud van begrippen en notaties.

Er wordt een flinke winst geboekt als in een school docenten de curricula van wiskunde en natuurkunde op elkaar afstemmen. Dat wil zeggen: de behandeling van de basisprincipes vindt ongeveer tegelijk plaats en leerlingen wordt uitdrukkelijk gewezen op de verbanden tussen de vakken.

Terzijde merken we op dat bij de huidige en toekomstige keuzemogelijkheden de populaties van de wiskunde B- en natuurkundeleerlingen niet zullen samenvallen. Die keuzevrijheid maakt ook afstemming en samenhang noodzakelijk voor de combinaties economie-wiskunde B en natuurkunde-wiskunde A. De wiskunde komt daarbij helaas in een spagaat terecht.

De werkgroep pleit niet alleen voor afstemming, maar ook voor samenhang tussen de vakken. Er zal dan heel wat moeten veranderen, want er zijn voldoende voorbeelden van slechte samenhang.

Een van de belangrijkste zaken die de werkgroep wil adviseren, is dat in de scholen de wis- en natuurkundedocenten inhoudelijk met elkaar over de leerstof gaan praten. De natuurkundedocent moet weten hoe het differentiëren bij wiskunde wordt aangeleerd, met welke contexten daar wordt gewerkt en welke notaties worden gebruikt. De wiskundedocent moet leren begrijpen dat de natuurkunde een experimentele wetenschap is en welke verwachtingen men daar heeft van de wiskundige voorkennis.

De werkgroep beveelt ook aan om een helder begrippenapparaat vast te leggen in de syllabi bij de examenprogramma's. Zie aanbeveling 1. Methodeschrijvers zullen zich moeten richten naar een nomenclatuur die voor de vakken wiskunde en natuurkunde gezamenlijk wordt vastgesteld. Verder vindt de werkgroep het zinvol om bij beide vakken het onderwerp zo vroeg als mogelijk en verantwoord is, een plaats te geven in klas 4.

We gaan een aantal onderdelen langs om onze bedoeling helder te maken.

3.5.1 Differenties

Differenties zijn verschillen tussen waarden van variabelen of grootheden. Je kunt ze ook toenames noemen. De notatie gebruikt de letter Δ zoals in Δx, Δs, Δt, enz.

Een differentiequotiënt geeft bij wiskunde de steilheid of helling aan van een lijn door twee punten en de uitkomst is dimensieloos. Hier moet zorgvuldig omgegaan worden met het begrip “gemiddelde” want dat heeft in de wiskunde ook de betekenis: de som van een aantal getallen of waarden gedeeld door het aantal.

Een differentiequotiënt geeft bij natuurkunde ook de steilheid of helling aan van een lijn door twee punten, maar dan is het de gemiddelde toename van een grootheid ten opzichte van een andere grootheid (meestal de tijd) en de uitkomst is niet dimensieloos.

In allerlei teksten wordt gesproken over functies of zelfs grafieken die veranderen. De werkgroep vindt dit verkeerd taalgebruik. Ook raadt de werkgroep sterk af om differenties te noteren met dx, ds of dt want hiermee worden differentialen aangegeven. De werkgroep is ook niet gelukkig met de notatie van de grafische rekenmachine (TI) die voor een benadering van de steilheid van een grafiek de notatie dy/dx gebruikt, terwijl in feite een differentiequotiënt wordt uitgerekend.

3.5.2 Mate van verandering

De mate van verandering is bij wiskunde de afgeleide die via een limietproces wordt bepaald uit het differentiequotiënt. De grafische interpretatie hiervan is de steilheid of helling van de raaklijn aan de grafiek.

De natuurkundige spreekt in een *s*-*t*-diagram over momentane snelheid, in een *v*-*t*-diagram over momentane versnelling, enz. De benaming is in de natuurkunde altijd een grootheid met de daarbij passende eenheid.

De wiskunde zal de nadruk willen leggen op het rekenwerk, uitgaande van een functievoorschrift $f(x)$. Het resultaat wordt gepresenteerd als $f'(x)$.

De natuurkunde zal de nadruk willen leggen op de grafische voorstelling en heeft vaak een voorkeur voor meten. Het resultaat presenteert de natuurkundige liever als ds/dt. Omdat er gemeten wordt “langs de raaklijn” spreekt men over differentialen.

In leerboeken en allerlei publicaties is sprake van de uitdrukking “snelheid van verandering”. Zo ook in het rapport “Rijk aan betekenis” van de cTWO. De werkgroep vindt het gewenst deze uitdrukking te wijzigen in “mate van verandering” omdat het begrip snelheid in de natuurkunde al een vaste betekenis heeft.

Aanbevelingen

20. De werkgroep beveelt aan om het aantal vaktermen zo klein mogelijk te houden.
    Zo kunnen bijvoorbeeld aan het begin van het onderwijs in de differentiaalrekening de begrippen differentiaal en differentiaalquotiënt worden gemist. Wiskundig gezien zijn differentialen immers geen eenvoudige begrippen. In de natuurkunde moet dan wel een helder onderscheid gemaakt worden tussen “toenames volgens de grafiek” en “toenames volgens de raaklijn”.
21. Het limietbegrip speelt een belangrijke rol bij het bepalen van de afgeleide. De werkgroep bepleit niet het herinvoeren van een uitgebreide limiet-cultuur, maar wel aandacht voor het onmisbare concept dat gebruikt wordt bij de analytische aanpak ($h \to 0$ of $\Delta t \to 0$) en in wezen ook bij de grafische aanpak (snijlijn wordt raaklijn).

3.5.3 Differentiëren

In het wiskundecurriculum wordt op een gegeven moment een techniek ontwikkeld waarbij leerlingen door middel van regels (in klas 4 alleen de eenvoudige regels) de afgeleide functie kunnen bepalen. Die techniek kan worden toegepast in de natuurkunde om bijvoorbeeld de formule voor de versnelling te kunnen bepalen uit de formule voor de snelheid.

In de natuurkunde heeft men in het begin genoeg aan regels voor de machtsfuncties en de polynoomfuncties. Later zijn ook de regels voor de goniometrische en de exponentiële functies nuttig.

Het is aan te bevelen om bij wiskunde regelmatig situaties te presenteren die niet met de regels voor het differentiëren aangepakt kunnen worden, om zo de theoretische achtergrond die voor de natuurkunde juist zo belangrijk is, niet te laten wegzakken.

Aanbevelingen

22. De werkgroep beveelt aan om ook bij natuurkunde weer gebruik te maken van de regels voor het differentiëren. Het zal de samenhang tussen de vakken versterken.

3.5.4 Raaklijnen

In de wiskunde is het definiëren en berekenen van de steilheid in een punt van de grafiek belangrijk om daarmee het stijgen of dalen van een functie te onderzoeken. Het daarmee opstellen van een raaklijnvergelijking is eigenlijk een bijproduct, een doel op zich.

De natuurkunde is meer geïnteresseerd in een lokale benadering van de functie. Met een raaklijn wordt gewerkt als een primitief concept dat dient om de steilheid te bepalen. Het tekenen van een raaklijn wordt gedaan om via meten de momentane mate van verandering te kunnen vaststellen. Het is gebruikelijk om de toenames die “langs de raaklijn” gemeten worden differentialen te noemen. Zie voor een gedetailleerde bespreking de publicaties van Doorman.

Aanbevelingen

23. Het begrip richtingscoëfficiënt is een typisch wiskundig begrip. Het is alleen goed hanteerbaar in “dimensieloze” grafieken met gelijke schaalverdelingen op de assen. De werkgroep beveelt aan te spreken over steilheid van de raaklijn of van de grafiek in een bepaald punt.

3.5.5 Integralen

Het is niet gebruikelijk maar toch heel goed haalbaar om al in het begin van het analyse-onderwijs leerlingen te laten kennismaken met integralen, met als enige toepassing het berekenen van oppervlakten. En daarbij hoort een eenvoudige redenering dat de afgeleide van een oppervlaktefunctie precies de gegeven functie is.

De natuurkundedocent zal er blij mee zijn. In de natuurkundelessen wordt onderwezen dat in een *v*-*t*-diagram door hokjes tellen Δs (bij benadering) bepaald kan worden. En in een *a*-*t*-diagram Δv. In de natuurkunde moet nadruk gelegd worden op de eenheden. In een *a*-*t*-diagram wordt m/s^2 vermenigvuldigd met seconden en het antwoord stelt dus een snelheid in m/s voor. Met de wiskundekennis erbij kan ook het verband tussen de bijbehorende formules beter inzichtelijk worden gemaakt. De werkgroep wil dit graag op de volgende manier verduidelijken.

Het gaat om een eenvoudige aanloop naar de integraalrekening. En dan zo dat dat aansluit bij de natuurkunde. De natuurkunde werkt met oppervlaktefuncties. In een *v*-*t*-diagram bijvoorbeeld wordt door middel van hokjes tellen Δs bepaald. Of, indien *v* een lineaire functie van t is, door middel van de formule voor de oppervlakte van een trapezium. In de wiskunde kun je op dezelfde manier beginnen. Laat eerst maar eens oppervlakten berekenen onder de grafiek van een lineaire functie. Of onder die van een kwadratische of een wortelfunctie. Werk in deze laatste

voorbeelden met smalle verticale strookjes die benaderd worden door rechthoeken.

Omdat er een grafische rekenmachine beschikbaar is, kun je met lijsten werken die gesommeerd kunnen worden tot 1000 termen toe. Leerlingen komen zelf vaak op het idee van verfijningen. Vervolgens kun je oppervlaktefuncties bestuderen. Bijvoorbeeld onder de grafiek van $f(x) = 0,5x + 2$. Daarbij kies je een startwaarde. Bijvoorbeeld $x = 0$. Dan kun je op diverse manieren $Opp_0(x) = 0,25x^2 + 2x$ beredeneren. En dan kun je daarna een redenering presenteren waaruit blijkt dat $Opp_0'(x) = f(x)$.

Verder staat je in de grafische rekenmachine een functie ter beschikking voor het nauwkeurig benaderen van integralen. Na het doorrekenen van een paar eenvoudige situaties kan dan worden toegewerkt naar een meer algemene regel. De formele notatie met het integraalteken kan zo vermeden worden.

Aanbevelingen

24. De werkgroep beveelt aan om al in klas 4 de beginselen van de integraalrekening te onderwijzen.
    Het is op dat moment niet nodig het wiskundige notatiesysteem voor integralen te gebruiken. Wat de achtergrond van het integraalteken is en van de differentiaal (en dan nog wel een differentiaal in z'n eentje) kan later in het wiskunde-onderwijs worden besproken.
    In het rapport "Rijk aan betekenis" van de cTWO (pag. 14) wordt geadviseerd het onderwijs in de integraalrekening te starten in klas 5 vwo. Gezien het bovenstaande stelt de werkgroep voor de eerste beginselen hiervan al in de leerstof voor klas 4 vwo op te nemen.

3.6 Thema modelleren

3.6.1 Omschrijving

Een vrij gangbare omschrijving van het begrip “wiskundig modelleren” is het vertalen van een realistisch probleem in wiskundige termen. Met het opgestelde model volgt dan een verdere analyse van het probleem met als doel informatie over het probleem te verkrijgen. Met name het vertalen van realiteit naar wiskunde is een moeilijk maar uitdagend en creatief proces. Modelleren en dus ook het vertaalaspect van het modelleren wordt bij de schoolwiskunde niet behandeld. Geen onderdeel van de traditie, geen ervaring, te moeilijk, geen wiskunde zijn (subjectieve) argumenten die daar oorzaak van zijn.

Uit een eerste korte boek-inventarisatie bleek dat bij natuurkunde een (computer)model vaak als black box gehanteerd wordt en dat bij wiskunde een model nogal eens een ander woord voor formule is.

3.6.2 Nieuwe ontwikkelingen

Omdat modelleren een bètabrede vaardigheid is en de exacte vakken inclusief NLT het belang hiervan onderkennen, is er overleg tussen vertegenwoordigers van bovengenoemde vakken geweest om tot afstemming te komen bij de ontwikkelingen in een vernieuwde tweede fase. Vooral eensluidende afspraken rond begrippen en jargon zijn een noodzakelijke voorwaarde om het onderwerp modelleren bètabreed te doen slagen.

Door een werkgroep Dynamische Modellen van cTWO, bestaande uit twee wiskundigen uit cTWO en twee natuurkundigen uit het Cdbèta project, is gewerkt aan een module Modelleren die voor alle vakken een uitgangspunt zou kunnen zijn. Op grond van de perspectieven die deze ontwikkelingen boden, is besloten de ontwikkelingen van bovengenoemde werkgroep te volgen. Na verloop van tijd bleken echter binnen cTWO de standpunten ten aanzien van het thema modelleren niet eensluidend. Op dit moment (eind 2006) is de stand van zaken onduidelijk.

3.6.3 Visies

Bij natuurkunde is aandacht voor modelleren een duidelijke en vanzelfsprekende zaak. In het visiedocument “Natuurkunde leeft” wordt op pag. 38 modelleren genoemd als een van de activiteiten die centraal staan in de natuurkunde en als vaardigheid opgenomen moet worden in het nieuwe examenprogramma. Voorts staat op pag. 75 e.v. een paragraaf over modelleren. Daaruit het volgende citaat:

> *Bij een geschikte didactiek biedt zelf modelleren echter 1) toegang tot interessantere problemen, 2) een realistischer beeld van de wetenschappelijke en technische praktijk, en is 3) van belang voor het begrijpen van maatschappelijke discussies waarin modelvoorspellingen een rol spelen.*

In het visiedocument “Rijk aan betekenis” wordt in standpunt 4 modelleren een centrale denkactiviteit genoemd:

> *Kernconcepten in het wiskundeonderwijs van havo en vwo zijn getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval. Centrale denkactiviteiten zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Deze kernconcepten, denkactiviteiten en de bijbehorende vaardigheden moeten als lange leerlijnen door het gehele programma van havo-vwo lopen.*

Modelleren is een overkoepelend thema dat wiskunde niet alleen uitdrukkelijk betrekt bij de bètavakken, maar waarin wiskunde de centrale plaats in dient te nemen. De samenhang tussen wiskunde en bètavakken in het algemeen en natuurkunde in het bijzonder wordt door modelleren versterkt. Aandacht voor modelleren bij wiskunde is noodzakelijk opdat in het onderwijsproces van de andere bètavakken het gebruik van modellen niet tot een black box activiteit verwordt.

Aanbeveling

25. Modelleren moet bij wiskunde, in samenwerking met andere exacte vakken, expliciet aandacht krijgen. Kernthema’s zijn het representeren van processen of situaties door schema’s en/of formules, het op eigen initiatief kiezen van passende variabelen, het redeneren aan de hand van formules en schema’s.

4. Overzicht van de aanbevelingen

Algemeen

1. bèta-afstemmings-document

Het vakjargon moet op elkaar worden afgestemd. Denk aan begrippen, notaties, synoniemen. Een nomenclatuur is zeer wenselijk.

De werkgroep beveelt aan dat een bèta-afstemmings-document wordt ontworpen dat als uitgangspunt zal dienen voor lesmateriaal, gebruik in de klas en bij examens vanaf 2010. De werkgroep stelt voor dit document te doen ontwerpen door een nomenclatuurcommissie van wiskundigen en natuurkundigen in te stellen op gezamenlijk initiatief van NVvW en NVON.

2. syllabuscommissies

De curricula voor wiskunde en natuurkunde moeten op elkaar worden afgestemd en samenhang moet worden aangebracht.

Met het oog op de gewenste en noodzakelijke afstemming beveelt de werkgroep aan om wiskunde te betrekken bij de beschrijving van de syllabi van natuurkunde en omgekeerd natuurkunde bij de syllabi van wiskunde. Dat zou bijvoorbeeld kunnen door een waarnemer van de kant van cTWO/NiNa of door advisering door (leden uit) de werkgroep afstemming wiskunde-natuurkunde.

3. profielcommissie

De werkgroep ondersteunt het in het recente ‘Ontwerpadvies’ van de profielcommissie NT & NG opgenomen advies om een permanente landelijke profielgroep te installeren. De opdracht van deze profielgroep is de samenhang te stimuleren en te bewaken. Daartoe dient deze profielgroep passende bevoegdheden te krijgen.

4. nascholing

Er moeten nascholingsprogramma’s ontwikkeld worden waarmee docenten deskundigheid gaan verwerven in het andere vak. Het is sterk aan te bevelen dat wiskunde- en natuurkundedocenten, liefst van dezelfde school en liefst gezamenlijk deze nascholing volgen. In die programma’s moet de nadruk liggen op de samenhang tussen de vakken.

4.1. Thema algebraïsche vaardigheden

5. De visiedocumenten voor wiskunde en natuurkunde zoeken de start van lange leerlijnen voor algebraïsche en rekenkundige vaardigheden in de onderbouw van het vo. Gecijferdheid begint echter in de kleuterklassen van het po (of liever: nog eerder). Kinderen moeten van het begin af aan in het onderwijs gevormd worden met een grotere mate van gecijferdheid.
6. Een cruciale rol spelen de pabo's en de nascholingen voor leraren in het po (zoals verzorgd door het Freudenthal Instituut). Het is zeer gewenst om te streven naar een hoger niveau van gecijferdheid bij (aanstaande) leraren. Tot de middelen daartoe behoren de rekentoetsen op de pabo's. De gecijferdheids-lat zou daarbij hoger gelegd moeten worden.
7. Zoek mogelijkheden in de media (Teleac, …), het volwassenenonderwijs, de volksuniversiteiten, enz. om de gecijferdheid in Nederland te vergroten.
   Alfabetisering wordt in Nederland sterk gestimuleerd en gesubsidieerd; dat zou ook moeten gebeuren met de bestrijding van ongecijferdheid.
8. In de nieuwe wiskunde- en natuurkundeprogramma's moet significantie een duidelijke plaats krijgen, al vanaf de onderbouw van het vo. Het gaat dan over het omgaan met nauwkeurigheid van getallen, meetfouten, aantal significante cijfers en tolerantie.
9. Naast examenprogramma's moeten in syllabi eenduidige afspraken gemaakt worden over de notatie van bewerkingen en de voorrangsregels. En die moeten nadrukkelijker onderwezen worden vanaf het basisonderwijs.
10. Leerlingen en leraren moeten de juiste benamingen leren gebruiken voor de bewerkingen. Wij denken (behalve aan de in het bovenstaande genoemde bewerkingen) ook aan: plus (niet: "en" of "erbij"), min (niet: "eraf"), maal (niet: "keer"), gedeeld door, tot de macht. En ook aan: term, som, verschil, factor, product, quotiënt, macht, grondtal, exponent.
11. Meer inzicht in het gebruik en de betekenis van het 10-tallig stelsel is zeer gewenst. Dit ook in verband gezien met het metrieke stelsel. Daarin is het rekenen met machten van 10 zeer belangrijk (denk aan milli-, deci-, kilo-…).
12. De werkgroep beveelt aan om meer eenheid te brengen in de schrijfwijze van getallen en het gebruik van bewerkingstekens.
13. Er moet meer aandacht komen in het (wiskunde-)onderwijs voor de betekenis en het gebruik van letters in expressies. Ook moet er een helder onderscheid gemaakt worden tussen de verschillende soorten van expressies. Het gaat om het vergroten van de *symbol sense*.
14. De werkgroep beveelt aan om gestructureerd meer aandacht in de onderbouw te besteden aan het vereenvoudigen, herleiden, omvormen van expressies. Een goede mogelijkheid daarvoor biedt het bewijzen in een algebraïsche context.

15. Het is zeer gewenst om meer nadruk te leggen op de betekenis van het is-gelijk-teken, zodat omvormen, oplossen van vergelijkingen en het bewijzen van identiteiten beter onderscheiden worden. Daarbij moet ook aandacht zijn voor het juiste gebruik van implicaties en equivalenties.

4.2 Thema evenredigheid

16. De werkgroep beveelt aan om bij wiskunde uitgebreider aandacht aan het begrip evenredigheid te besteden en de introductie en definitie van evenredigheid bij wiskunde en natuurkunde te laten sporen. Daartoe moeten diverse vormen van evenredigheid bij wiskunde opgenomen zijn in natuurkundige contexten en moet het begrip in hogere jaren regelmatig en functioneel terugkomen.
17. De verhoudingstabel is een belangrijk didactisch middel. De werkgroep beveelt aan om te komen tot een uniform gebruik bij diverse bètavakken. Belangrijke aandachtspunten daarbij zijn:
    - eenheden omrekenen in een verhoudingstabel
    - niet afronden in een verhoudingstabel
    - correspondentie tussen *boven en onder* in de tabel en *boven en onder* in de formule
    - labeling met eenheden en zichtbaar maken van de verhoudingsgrootheid

4.3 Thema vectoren

18. Vectoren zijn uit het zicht van wiskunde geraakt maar horen daar weer terug te komen. Rond het thema vectoren moeten nog beslissingen over de opname in domeinen genomen worden. Het lijkt zeer verstandig dat in samenspraak met natuurkunde te doen evenals het aanbrengen van een fasering in de leerlijn bij beide vakken.
    De werkgroep beveelt aan voor de notatie een letter met pijl erboven te gebruiken en geen indices in de kentallen. Het uitproduct lijkt de werkgroep voor wiskunde B te veel gevraagd, mogelijk is dit wel bij wiskunde D in te voeren

4.4 Thema grafieken/diagrammen

19. De werkgroep beveelt aan dat bij alle bètavakken in het algemeen en bij natuurkunde en wiskunde in het bijzonder op eenzelfde manier met grafieken wordt omgegaan. Daartoe is volgens de werkgroep in ieder geval nodig:
    - Het over en weer kennen van het taalgebruik.
    - Nadrukkelijke aandacht bij wiskunde voor de verwerking van *meetresultaten* in grafieken. Daarbij dient rekening te worden gehouden met de afspraken die bij de natuurkunde gelden.
    - Nadrukkelijke en afgestemde aandacht in beide vakken voor het analyseren en interpreteren van grafieken.
    - Het leren van verschillende standaardverbanden, zoals weergegeven in bijlage 3.

4.5 Thema afgeleide

20. De werkgroep beveelt aan om het aantal vaktermen zo klein mogelijk te houden. Zo kunnen bijvoorbeeld aan het begin van het onderwijs in de differentiaalrekening de begrippen differentiaal en differentiaalquotiënt worden gemist. Wiskundig gezien zijn differentialen immers geen eenvoudige begrippen. In de natuurkunde moet dan wel een helder onderscheid gemaakt worden tussen “toenames volgens de grafiek” en “toenames volgens de raaklijn”.
21. Het limietbegrip speelt een belangrijke rol bij het bepalen van de afgeleide. De werkgroep bepleit niet het herinvoeren van een uitgebreide limiet-cultuur, maar wel aandacht voor het onmisbare concept dat gebruikt wordt bij de analytische aanpak ($h \to 0$ of $\Delta t \to 0$) en in wezen ook bij de grafische aanpak (snijlijn wordt raaklijn).
22. De werkgroep beveelt aan om ook bij natuurkunde weer gebruik te maken van de regels voor het differentiëren. Het zal de samenhang tussen de vakken versterken.
23. Het begrip richtingscoëfficiënt is een typisch wiskundig begrip. Het is alleen goed hanteerbaar in “dimensieloze” grafieken met gelijke schaalverdelingen op de assen. De werkgroep beveelt aan te spreken over steilheid van de raaklijn of van de grafiek in een bepaald punt.
24. De werkgroep beveelt aan om al in klas 4 de beginselen van de integraalrekening te onderwijzen.
    Het is op dat moment niet nodig het wiskundige notatiesysteem voor integralen te gebruiken. Wat de achtergrond van het integraalteken is en van de differentiaal (en dan nog wel een differentiaal in z’n eentje) kan later in het wiskunde-onderwijs worden besproken.
    In het rapport “Rijk aan betekenis” van de cTWO (pag. 14) wordt geadviseerd het onderwijs in de integraalrekening te starten in klas 5 vwo. Gezien het bovenstaande stelt de werkgroep voor de eerste beginselen hiervan al in de leerstof voor klas 4 vwo op te nemen.

4.6 Thema modelleren

25. Modelleren moet bij wiskunde, in samenwerking met andere exacte vakken, expliciet aandacht krijgen. Kernthema’s zijn het representeren van processen of situaties door schema’s en/of formules, het op eigen initiatief kiezen van passende variabelen, het redeneren aan de hand van formules en schema’s.

Bronnen, literatuur en websites

Biddeloo, A. (2001). Ongecijferdheid Over wiskundig analfabetisme, *Wiskunde en Onderwijs, 107*, 2001.

Bock, D. de, Dooren, W. van, Janssens, D. & Verschaffel, L. (2003), Waarom lineariteit de leerlingen soms parten speelt. *Nieuwe Wiskrant 22* (4), 4-10.

Broekman, H.& Hengeveld, T. Correspondentie tussen de vakken wiskunde en natuurkunde in het huidige vwo-programma. In: Kortland, J., J. Hellemans & F. Budding (Red) (2003), *Natuurkunde uitlijnen – Verslag Woudschotenconferentie 2002.* Utrecht: Werkgroep Natuurkunde-Didactiek.

Carson,S (Red) (1999), *Shaping the Future 2 Physics in Mathematical Mood.* Institute of Physics post-16 Initiative, Londen.

Commissie Vernieuwing Natuurkundeonderwijs havo/vwo (2006). *Natuurkunde leeft, visie op het vak natuurkunde in havo vwo.* Amsterdam: Nederlandse Natuurkundige Vereniging.

cTWO (2007). *Rijk aan betekenis, visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO.

Doorman, L.M. (2005). *Modelling Motion: from trace graphs to instantaneous change.* Utrecht: CD-β Press.

Doorman, L.M. (2003). Inzicht in snelheid en afgelegde weg via grafieken, *Tijdschrift voor Didactiek der β-wetenschappen 20* (1), 1-25.

Doorman, L.M. (2002). Een opbouw in grafieken, *Nieuwe Wiskrant 21* (3), 32-37.

Dormolen, J. van (1975). *Vectoren in de wiskunde en in de natuurkunde*. In: Bundel Natuurkunde Wiskunde Conferentie 1975 te Noordwijkerhout (bijlage 2).

Frederik , I., Valk, T. van der & Wijers, M. (2001) Verhoudingstabellen, ja of nee? *NVOX, 5,* 368-371.

Paulos, J. (1989). *Ongecijferdheid.* Amsterdam: Bert Bakker.

Profielcommissies Natuur en Techniek/Natuur en Gezondheid en Economie en Maatschappij/Cultuur en Maatschappij (2006). *Bruggen tussen Natuur en Maatschappij* (Ontwerpadvies). Den Haag: Deltahage.

Sinnema, S. & Streun, A. van. (1984) Samen beginnen met de differentiaalrekening en de mechanica? *NVON-Faraday*, *53*.

Roorda, G. & Streun, A. van (2002). Criteria voor samenhangend (wiskunde)onderwijs. In: Deinum, J.F.; Maanen, J. van; Streun, A. van & Tolboom, J. (Red.). *Werken aan de kwaliteit van het onderwijs in de bètavakken.* Rijksuniversiteit Groningen: FWN/UCLO.

Valk, T. van der, Wijers, M. & Broekman, H. (2001) Achtergronden van verhoudingstabellen in wiskunde en natuurwetenschappen, *Nieuwe Wiskrant 20* (3), 44-49.

Vlassis, J, Demont, I. (2002). Hoe studeren leerlingen algebra? *Wiskunde en Onderwijs 112*, 2002.

Wijers, M. & Valk, T. van der (2001). Aandachtspunten bij het gebruik van verhoudingstabellen in de natuurwetenschappen. *Nieuwe Wiskrant, 20* (4), 23-27.

Zegers, G.E., Boersma, K.Th., Wijers, M., Pilot, A. & Eijkelhof, H.M.C. (2002). *SONaTe in het studiehuis. Onderzoek naar good practice op het gebied van samenhangend onderwijs in natuur en techniek in de tweede fase.* Delft: Stichting Axis.

Zegers, G.E., Boersma, K.Th., Genseberger, R.J., Jambroes-Willebrand, A.G., van der Kooij, H., Mooldijk, A.H., Wijers, M. & Eijkelhof, H.M.C. (2003). *Een basis voor SONaTe. Voorbeelden van inhoudelijke samenhang tussen de natuurwetenschappelijke vakken en wiskunde in de tweede fase havo/vwo.* Delft: Stichting Axis.

Websites

www.ctwo.nl	Website van de vernieuwingscommissie wiskunde met onder andere concept-examenprogramma's en experimenteel lesmateriaal.
www.gecijferdheid.nl	Website van Kees Hoogland over gecijferdheid.
www.nieuwenatuurkunde.nl	Website van de vernieuwingscommissie natuurkunde met onder andere concept-examenprogramma's en experimenteel lesmateriaal.
www.iop.org	Website van Institute of Physics. http://www.iop.org/activity/education/Making_a_Difference/Policy/file_5536.pdf

Overzicht van de bijlagen

Bijlage 1	Beginselen van de differentiaalrekening in klas 4 vwo
Bijlage 2	Vectoren in de wiskunde en natuurkunde
Bijlage 3	Overzicht standaard verbanden met diagrammen en formules
Bijlage 4	Taakopdracht werkgroep
Bijlage 5	Samenstelling werkgroep en resonansgroep
Bijlage 6	Criteria voor samenhangend (wiskunde) onderwijs, Een oriënterend onderzoek naar aanwijzingen voor samenhangend onderwijs
Bijlage 7	Citaten uit visiedocumenten NiNa en Ctwo
Bijlage 8	Afstemming Wiskunde en andere exacte vakken
Bijlage 9	Werk van MathAdore
Bijlage 10	Evenredigheden bij grootheden en bij gelijkvormigheid
Bijlage 11	Een poging tot wiskundig onderzoek naar het gebruik van het begrip evenredig in de natuurkunde
Bijlage 12	Beschouwingen over evenredigheden bij wiskunde en natuurkunde
Bijlage 13	Evenredigheden bij de wet van Boyle (klas 3 of klas 4)
Bijlage 14	Natuurkundig verlanglijstje voor vectoren bij de wiskunde
Bijlage 15	Uit: Shaping the future. Physics in Mathematical Mood
Bijlage 16	Over modelleren bij natuurkunde en wiskunde
Bijlage 17	Over de introductie van de afgeleide
Bijlage 18	Raaklijn en oppervlak bij natuurkundige grafieken in klas 4
Bijlage 19	Bijlage bij het thema afgeleide

De eerste drie bijlagen maken deel uit van deze publicatie.

Alle bijlagen bij dit Eindverslag zijn te vinden op de volgende websites:

www.ctwo.nl onder publicaties
www.nieuwenatuurkunde.nl onder Documentatie>Visiedocumenten Nederland

Bijlage 1
Beginselen van de differentiaalrekening in klas 4 vwo.
Auteur: Kees Rijke (2006)

Een inventarisatie van twee boeken voor klas 4 vwo levert het volgende overzicht op :
(Mod. Wisk. 8e ed B1 dl 2 Hst 4 en Newton Inf. boek 1A klas 4 Hst 6 en 8)

Wiskunde		Natuurkunde	
Begrip	Notatie	Begrip	Notatie
Variabele	x, y	Tijd, plaats, snelheid, versnelling	t, s, v, a
Interval	[x,x+ Δx]	Tijdsduur	
Functie, Formule, Verband	y = f(x)	Plaats, snelheid, versnelling	s(t), s(t) = v·t , v = s/t , v = ts, v(t) = a·t
Grafiek		Diagram	
Verandering, Toename	Δx, Δf(x), Δy	Verplaatsing	Δs
Gemiddelde verandering, Gemiddelde helling, Gemiddelde toename	*x)x(f*ΔΔ, *xy*ΔΔ, *xf*ΔΔ, *QR*ΔΔ, dy/dx (GR), nDeriv(Y_1,X,X) (GR)	Gemiddelde snelheid, gemiddelde versnelling	<v>, s = <v>·t, <v> = s/t a = tvΔΔ, a = Δv/Δt
Afgeleide, Afgeleide functie, Mate van verandering, Hellingfunctie	*dxdy*, f', *dxdf*, f'(x),	Snelheid, Versnelling	s'(t), *dtds*, v'(t), *dtdv*

Begrippen, uitdrukkingen, formules,… die je verder nog tegenkomt :

Wiskunde	Natuurkunde
Helling Hellingsgetal Richtingscoëfficiënt Hellinggrafiek Differentiequotiënt Differentiaalquotiënt Differentiëren Raaklijn Vergelijking van de raaklijn Limiet (het woord niet maar het begrip wel) Even steil $f(x+\Delta x)$ Steilheid	Versnellen Tijd-weg-grafiek Tijd-afstand-formule Eenparige beweging Eenparig versnelde of vertraagde beweging Steilheid afgelegde weg (s,t)-diagram (v,t)-diagram relatieve snelheid (v_b,s)-diagram oppervlaktemethode raaklijnmethode kwadratisch evenredig verband omgekeerd evenredig verband $tvva_{be}-=$of $tvva_{eb}-=$ $a = v_e/t$ $s = {}_{21}\cdot a\cdot t_2 = {}_{21}\cdot a\cdot(v_b/a)_2 = {}_{21}\cdot v_{b2}/a$

De samenvatting in Moderne Wiskunde zegt :
Dit hoofdstuk gaat over de snelheid waarmee een functie of formule verandert.
Daarbij moet je goed letten op het verschil tussen de verandering over een bepaald interval en de mate van verandering op een bepaald moment.
Opm 1 : eh ??, verandert de functie ?? En dan oo nog met een bepaalde snelheid ??
Opm 2 : waarom in het ene geval “verandering” en in het andere geval “mate van verandering” ?
Het MW-hoofdstuk is voor leerlingen een brei van begrippen. Sommige zijn natuurkundig van aard. Maar in Newton, het natuurkundeboek, staat het allemaal anders. En ook daar is het een veelheid aan begrippen die over de leerling wordt uitgestort.
In Moderne Wiskunde vind je uiteraard de (eenvoudige) rekenregels voor het differentiëren. In het natuurkundeboek vind je zulke regels niet. Verwijzingen naar wiskundeleerstof ook niet.

Bijlage 2
Vectoren in de wiskunde en natuurkunde
Auteur: Joop van Dormolen (1975)

VECTOREN IN DE WISKUNDE EN IN DE NATUURKUNDE
Samenvatting van de voordracht van Joop van Dormolen.

Er zijn vier vragen te beantwoorden:
1. Waartoe dienen vectoren?
2. Hoe gebruik je ze?
3. Wat is een vector?
4. Wat doen we op school?

Antwoord op vraag 1

In de wiskunde worden hulpmiddelen bedacht om informatie, die vaak chaotisch op ons af komt, te ordenen. Voorbeelden van zulk soort informatie zijn:
- oppervlakte
- lengte
- massa
- kostprijs
- hoekgrootte
- temperatuur
- wedstrijduitslagen
- tijdsduur

Hierbij gaat het om informatie die door één getal, of (eventueel meetkundig) door één lijnstuk kan worden weergegeven, eventueel na keuze van een eenheid. Hiermee kunnen gegevens met elkaar vergeleken en geordend worden.

Er is ook informatie die niet door één getal vastgelegd kan worden. Voorbeelden:
- Winkelvoorraad:
  Van elk artikel moet de hoeveelheid afzonderlijk vermeld worden. Er ontstaat dan dus een rij getallen. (Als er n artikelen zijn dan is hier sprake van een vector in een n-dimensionale ruimte.)
- Kracht:
  De grootte van de kracht kan aangegeven worden door een getal, maar daarnaast is nog een gegeven nodig om de richting aan te geven. Bij keuze van een coördinatenstelsel kan de kracht, eventueel ook door twee (of drie, dat hangt van de dimensie van de ruimte af waarin we werken) getallen vastgelegd worden.

- Beschrijving van de ruimte:
  De plaats van een punt in een n-dimensionale ruimte moet door n getallen worden vastgelegd, of door een (n-dimensionale) pijl die van de oorsprong naar het punt wijst.
- Verschuiving:
  Een translatie kan worden vastgelegd door de afstand en de richting ervan te geven. Dit kan ook weer door een pijl, die we vector noemen, of door een paar getallen die de coördinaten aangeven van het beeldpunt van de oorsprong van het coördinatenstelsel.
- Ploegenwedstrijd met individuele uitslagen:
  Elke deelnemer krijgt punten voor de uitslag van zijn wedstrijd. De uitslag van de ploeg bestaat dan uit een rij getallen. Er is sprake van een vector, in een ruimte waarvan de dimensie gelijk is aan het aantal deelnemers per ploeg. (Ook hier zou men een meetkundige voorstelling in de vorm van een pijl kunnen maken.)
- Rotatie:
  Er zijn weer twee gegevens nodig, n.l. de draaihoek en de as waarom gedraaid wordt. Dit kan aangegeven worden door een vector, waarvan de lengte overeenkomt met de draaihoek; de richting geeft de draairichting aan; de werklijn van de vector geeft de rotatieas aan.

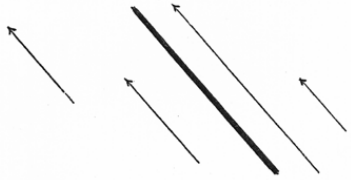
Op soortgelijke manier kan men door de vector aangeven:
- Oplossing van een vergelijking met meer dan één onbekende.
- Snelheid.
- Impulsmoment
- enz. enz.

Opmerking:
Er zijn ook situaties waarbij de informatie niet door een rij getallen aangegeven kan worden (vector) maar door een schema: matrix. Voorbeelden hiervan zijn: De totale voorraad van een aantal filialen van een grootwinkelbedrijf en een tabel met twee ingangen.

Antwoord op vraag 2

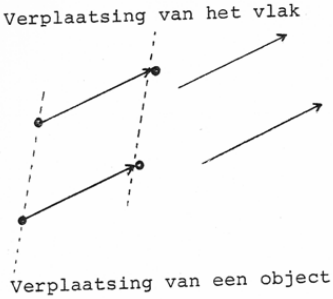
Hierbij treden moeilijkheden op doordat er blijkbaar verschillende soorten vectoren bestaan.

a. Richting van een lijn



- van belang is hier alleen de richting van de vector.
De grootte en de plaats van de vector zijn in deze situatie overbodige informatie.

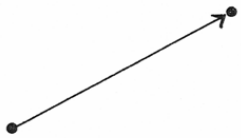
b. Verplaatsing van het vlak



- de vector die deze verplaatsing aangeeft wordt vastgelegd door richting en grootte.
De plaats van de vector is overbodige informatie.

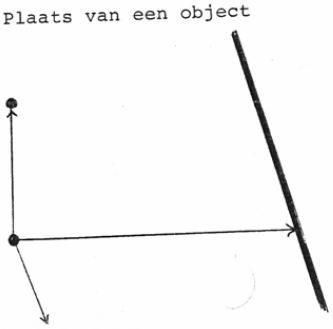
Zowel bij a. als bij b. spreken we van een VRIJE VECTOR.

c. Verplaatsing van een object



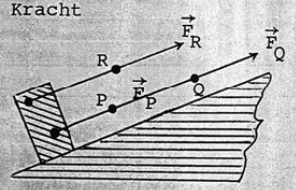
- bijvoorbeeld een punt.
De vector die deze informatie vast moet leggen, wordt gegeven door richting, grootte en aangrijpingspunt.
Door het geven van het aangrijpingspunt is de plaats van de vector ook vastgelegd.
We spreken hier van een GEBONDEN VECTOR.

d. Plaats van een object



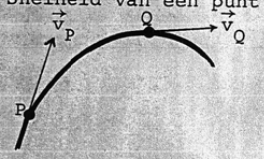
- bijvoorbeeld een punt.
Een vector die de plaats van een punt vastlegd, wordt vastgelegd door richting, grootte en een vast aangrijpingspunt, dat voor alle vectoren hetzelfde is: een VASTE VECTOR.
De plaats van een lijn moet zelfs door twee vectoren worden vastgelegd:
- een plaatsvector (die een punt van de lijn aflegd) en
- een richtingsvector (zie voorbeeld a.)

e. Kracht



- deze wordt vastgelegd door een vector, aangegeven door <u>richting</u>, <u>grootte</u> en <u>werklijn</u>.
  Hier spreken we van een GLIJDENDE VECTOR.

f. Snelheid van een punt



- wordt vastgelegd door <u>richting</u>, <u>grootte</u> en <u>aangrijpingspunt</u>.
  Net als bij voorbeeld c. hebben we hier een GEBONDEN VECTOR.

Samenvatting:

Er zijn blijkbaar vier verschillende soorten vectoren:

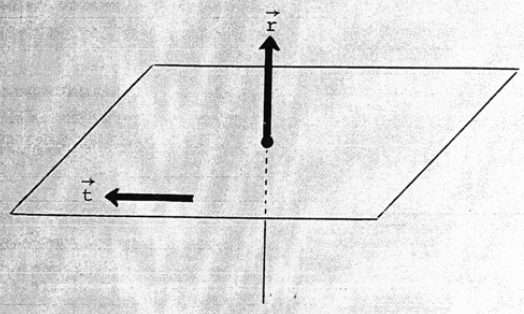
I Vrije vectoren (richting, grootte);

II Gebonden vectoren (richting, grootte, aangrijpingspunt);

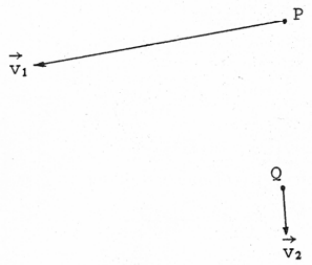
III Vastevectoren (richting, grootte en een vast aangrijpingspunt);

IV Glijdende vectoren (richting, grootte, werklijn).

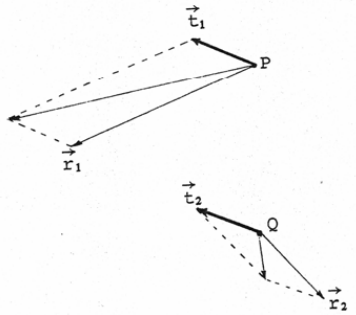
Er werd nog een voorbeeld gegeven van een situatie, waarbij verschillende soorten vectoren door elkaar gebruikt worden, n.l. de beweging van een lichaam. Deze wordt op elk moment vastgelegd door een vrije vector $\vec{t}$ (translatie) en een glijdende vector $\vec{r}$ (rotatie).



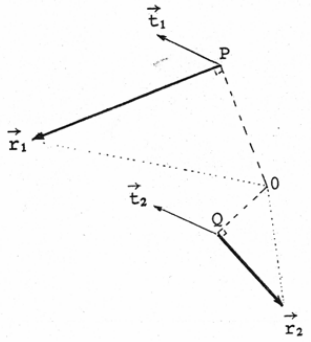
Dit wordt verduidelijkt als volgt:



De punten P en Q van het vlak bewegen zich volgens de aangegeven snelheden $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$.
Het vlak beweegt mee.
Hoe beweegt het vlak?



Beide snelheden kunnen ontbonden worden in twee componenten $\vec{t}_1$, $\vec{r}_1$ resp. $\vec{t}_2$, $\vec{r}_2$ zodanig dat $\vec{t}_1$ en $\vec{t}_2$ evenlang en gelijk gericht zijn.
Deze vectoren zorgen voor een translatie van het vlak.



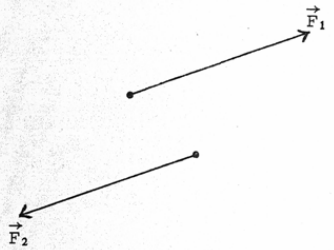
Bij de vectoren $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ bestaat een punt 0, zodanig dat:
$\frac{|\vec{r}_1|}{0P} = \frac{|\vec{r}_2|}{0Q}$ en $\vec{r}_1$ loodrecht op 0P en $\vec{r}_2$ loodrecht op 0Q.
Deze vectoren zorgen voor een rotatie van het vlak om 0.

In alle gevallen kunnen (eventueel na een kunstgreep) twee gelijksoortige (!) vectoren meetkundig opgeteld worden door hetzij "kop-aan-staart leggen", hetzij door de parallelogramconstructie.

Antwoord op vraag 3

Voor de natuurkundeleraar zijn verschillende soorten vectoren geen probleem. Hij gebruikt die vector die voor hem op dat moment een goed instrument is.
De wiskundige is niet tevreden. Deze zoekt orde in de vectorenchaos te brengen, door middel van één overkoepelende structuur. Deze structuur heet vectorruimte. (Een vectorruimte is een verzameling, waarvan de objecten aan bepaalde voorgeschreven rekenregels voldoen.)

Het blijkt dat bijvoorbeeld glijdende vectoren niet aan al die regels voldoen. (Twee even grootte en tegengesteld gerichte krachten langs evenwijdige werklijnen kunnen niet tot een kracht worden opgeteld: koppel).



Door enige kunstgrepen ziet de wiskundige wel kans om alle types verschillende vectoren in een vectorruimte samen te brengen. (Zie bijv.: P.G.J. Vredenduin, Vectoren, Euclides 1969-1970, pag. 377 - 384.) Dit gaat echter voor de schoolwiskunde te ver.

Antwoord op vraag 4

In sommige wiskundeleergangen worden zowel vrije als vaste vectoren gebruikt. Voor leerlingen kan alleen dit al moeilijkheden geven, laat staan dat ze bij de natuurkunde nog twee andere dingen ontmoeten, die ook allebei vector genoemd worden. (Overigens noemen niet alle leergangen een vrije vector ook inderdaad vector. Men spreekt dan bijvoorbeeld van een gericht lijnstuk, of een pijl, juist om verwarring te proberen te voorkomen.)
Het is dus zaak, zorgvuldige onderwijskundige maatregelen te nemen om te voorkomen, dat de leerlingen hopeloos in de war raken (klontering, zie voordracht over systeemscheiding en transfer).
Een van die maatregelen zou kunnen zijn, duidelijk te laten merken in welke kontekst er gewerkt wordt. In elk geval is ook hier weer overleg tussen de natuurkunde- en de wiskundesectie geboden.

Vragen, opmerkingen en suggesties na afloop

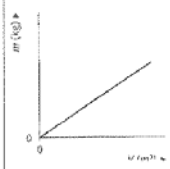
1. Coördinatie tussen boekenschrijvers, respectievelijk de beide CML's blijkt ook hier weer dringend geboden.
2. Niet alleen de natuurkundeleraar moet oppassen dat zijn leerlingen goed weten, over welk soort vectoren het gaat, de wiskundeleraar zal ook rekening met dit probleem moeten houden.
3. Jammer dat nu pas over de coördinatie gesproken wordt, en niet bij de invoering van het nieuwe leerplan wiskunde.
4. Informatie, zoals die in deze conferentie naar voren komt, moet verder komen, bijvoorbeeld, door een gemeenschappelijke publikatie in Euclides en Faraday of op een andere manier.
5. Vraag: Bij alle soorten vectoren komen zowel grootte als richting voor. Het verschil zit hem in de plaats die al dan niet vast ligt. Waarom geven deze twee eigenschappen niet het algemeen vectorbegrip aan?
   Antwoord: Voor een goede bruikbare structuur (vectorruimte) is het nodig dat er een vast aangrijpingspunt gekozen wordt. Dus de vaste vectoren kunnen deze structuur leveren.

Vragen, opmerkingen en suggesties na afloop

1. Coördinatie tussen boekenschrijvers, respectievelijk de beide CML's blijkt ook hier weer dringend geboden.
2. Niet alleen de natuurkundeleraar moet oppassen dat zijn leerlingen goed weten, over welk soort vectoren het gaat, de wiskundeleraar zal ook rekening met dit probleem moeten houden.
3. Jammer dat nu pas over de coördinatie gesproken wordt, en niet bij de invoering van het nieuwe leerplan wiskunde.
4. Informatie, zoals die in deze conferentie naar voren komt, moet verder komen, bijvoorbeeld, door een gemeenschappelijke publikatie in Euclides en Faraday of op een andere manier.
5. Vraag: Bij alle soorten vectoren komen zowel grootte als richting voor. Het verschil zit hem in de plaats die al dan niet vast ligt. Waarom geven deze twee eigenschappen niet het algemeen vectorbegrip aan?
   Antwoord: Voor een goede bruikbare structuur (vectorruimte) is het nodig dat er een vast aangrijpingspunt gekozen wordt. Dus de vaste vectoren kunnen deze structuur leveren.

Bijlage 3
Overzicht standaard verbanden met diagrammen en formules
Auteur: Wim Sonneveld (2006)

Recht evenredig verband



De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.
De formule:

$$y = c \cdot x$$

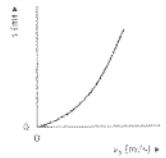
Bij deze grafiek:

$$m = constante \cdot V$$

Omgeschreven wordt dat:

$$\frac{m}{V} = constante$$

Kwadratisch evenredig verband



De grafiek is een (halve) parabool, met de top in de oorspong.
De formule:

$$y = c \cdot x^2$$

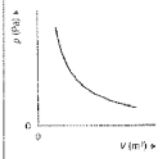
Bij deze grafiek:

$$s = constante \cdot v_b^{\,2}$$

Omgeschreven wordt dat:

$$\frac{s}{v_b^{\,2}} = constante$$

Omgekeerd evenredig verband



De grafiek loopt naar de assen toe, en is symmetrisch, een hyperbool.

De formule: $y = c \cdot \frac{1}{x}$

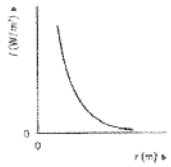
Bij deze grafiek:

$$p = constante \cdot \frac{1}{V}$$

Omgeschreven wordt dat:

$$p \cdot V = constante$$

Omgekeerd kwadratisch evenredig verband



De grafiek lijkt op die van het omgekeerd evenredig verband, is niet symmetrisch.

De formule: $y = c \cdot \frac{1}{x^2}$

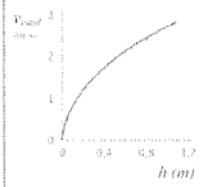
Bij deze grafiek:

$$I = constante \cdot \frac{1}{r^2}$$

Omgeschreven wordt dat:

$$I \cdot r^2 = constante$$

Wortel evenredig verband



Met de top in de oorsprong.
De formule:

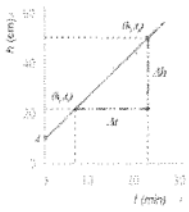
$$y = c \cdot \sqrt{x}$$

Bij deze grafiek:

$$v_{eind} = constante \cdot \sqrt{h}$$

$$\frac{v_{eind}}{\sqrt{h}} = constante$$

Lineair verband



De grafiek is wel een rechte lijn
maar niet door de oorsprong.
De formule:

$$y = c \cdot x + d$$

Bij deze grafiek:

$$h = c \cdot t + d$$

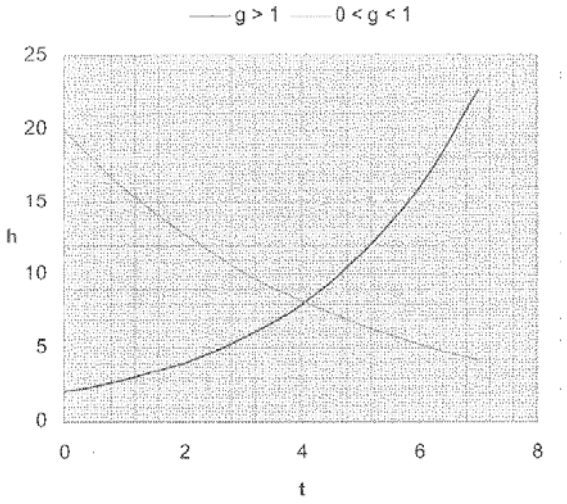
De tabelmethode werkt niet maar:

$$c = \frac{(h_2 - h_1)}{(t_2 - t_1)} = \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

d kun je aflezen bij de verticale as

Exponentieel verband: $h = b \times g^t$

In deze formule is
h de *hoeveelheid* (ook vaak gebruikt: ***A*** = *aantal*),
b is de *beginhoeveelheid* op $t = 0$,
g heet de *groeifactor* per tijdseenheid en
t de *tijdsduur* (in tijdseenheden)

Voor $g > 1$ hoort hierbij een (toenemend) stijgende grafiek.
Voor $0 < g < 1$ is de grafiek (afnemend) dalend.

grafieken van exponentiële verbanden