

# vol van natuurkunde

Bloemlezing uit het werk van Henk Mulder



Samenstelling:  
D. van Genderen  
Th. J. M. Smits  
P. J. Wippoo

**W  
N  
D**

Werkgroep  
Natuurkunde  
Didaktiek

**VOL VAN NATUURKUNDE**

# **VOL VAN NATUURKUNDE**

## **BLOEMLEZING UIT HET WERK VAN HENK MULDER**

samengesteld door

D. van Genderen, Th. J.M. Smits en P.J. Wippoo

Werkgroep Natuurkunde-Didactiek

Utrecht, 1996

## **Colofon**

|                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| <b>Titel</b>                        | Vol van natuurkunde: Bloemlezing uit het werk van Henk Mulder   |
| <b>Samenstelling &amp; redactie</b> | D. van Genderen, Th.J.M. Smits, P.J. Wippoo   |
| <b>Typewerk &amp; layout</b>        | Jenny Andriese  |
| <b>Omslagontwerp</b>                | Th.J.M. Smits   |
| <b>Foto omslag</b>                  | P.J. Wippoo   |
| <b>Uitgave</b>                      | Werkgroep Natuurkunde-Didactiek, Utrecht 1996   |
| <br><b>Bestelwijze</b>              | <br>Deze bundel kan besteld worden door f 25,-- over te maken op giro 554757<br>t.n.v. Werkgroep Natuurkunde-Didactiek te Utrecht of via de NVON-ledenservice |

# Inhoud

|   |    |
|---|----|
| Woord vooraf  | 7  |
| Over Henk Mulder, <i>door Pietjan Wippoo</i>          | 9  |
| Enkele biografische gegevens                          | 10 |
| <b>WOUDSCHOTEN</b> , inleiding                        | 11 |
| Thema's van de Woudschotenconferenties natuurkunde    | 11 |
| Omgaan met natuurkunde                                | 13 |
| Motivatie   | 17 |
| Dankwoord na uitreiking Minnaertprijs                 | 20 |
| <b>FARADAY</b> , inleiding                            | 21 |
| De man die nooit slaapt, <i>door Hubert Biezeveld</i> | 22 |
| Brug van Wheatstone voor water                        | 23 |
| Continu experiment                                    | 25 |
| Voorbeeld uit de leergang Continu Experiment          | 27 |
| Figuren van Lissajous                                 | 30 |
| 15 ideeën voor het natuurkunde-lokaal                 | 33 |
| Valkoord  | 34 |
| De exacte slingerformule                              | 35 |
| De kroon van koning Hiëro                             | 36 |
| Boyle en de K.L.M.                                    | 38 |
| Natuurkunde onder de douche                           | 39 |
| Slinger van Foucault                                  | 40 |
| Een analoge werkwijze                                 | 42 |
| 'g' met 8 decimalen                                   | 46 |
| Van 0 tot 100, een lange weg                          | 50 |
| Natuurkunde in blik                                   | 51 |
| Centripetaal  | 57 |
| Centripetaal? ... Wij doen het zo!                    | 60 |
| Motivatie   | 63 |
| Labiël evenwicht                                      | 64 |
| Breking in een bol                                    | 65 |
| Druk, Boyle, Gay-Lussac, zonder kwik                  | 69 |
| Vloeistofrenteller                                    | 72 |
| Wat willen ze eigenlijk weten?                        | 74 |
| Luchtdruk   | 75 |
| De helling af   | 80 |
| Draaien + schuiven = rollen                           | 82 |
| De golflengte van licht meten ... met een schuifmaat  | 85 |
| Wrijvingscoëfficiënt                                  | 88 |
| Slingertijd bij veranderlijke g                       | 88 |
| De vergeetachtige zandloper                           | 90 |
| De platbolle lens                                     | 92 |
| Langs het hellend vlak                                | 94 |
| De helling af II                                      | 95 |

|   |     |
|---|-----|
| Nederland, land van Jan Modaal                              | 97  |
| De zweefmolen   | 98  |
| Hoe schuin?   | 100 |
| Kleurverschuiving bij Jupiter                               | 101 |
| Straalaandrijving   | 103 |
| De lange veer   | 104 |
| Een luik opentrekken  | 108 |
| De 100 meter-lopers   | 109 |
| Ontwerp voor een nieuw type zonnespiegel (met H. Biezeveld) | 111 |
| Kogelstoten onder ... $42^\circ$                            | 116 |
| De perfecte parabool  | 118 |
| <b>NVON-MAANDBLAD, inleiding</b>                            | 121 |
| De periode 1985-1993, door <i>Pietjan Wippoo</i>            | 122 |
| De bascule, een combinatie van hefboomen                    | 123 |
| Een balans zonder armen                                     | 125 |
| Drijvende blokken   | 127 |
| Drijvende blokken (B.A. Wilking)                            | 130 |
| Drijvende cilinders   | 133 |
| Waar grijpt de opwaartse kracht aan?                        | 135 |
| Een proef op straat   | 136 |
| Zolderluik  | 137 |
| Dobber in fles  | 138 |
| Satellietbanen, rekenen en tekenen                          | 139 |
| Planetaire reizen: retourtje Mars                           | 143 |
| Wachttijd op Mars   | 144 |
| Periodiek of eenmalig: een kwestie van plus of min          | 146 |
| Superelastische botsing                                     | 148 |
| Roterende kwikspiegel                                       | 149 |
| Kepler uit Newton   | 151 |
| Val-tril-experiment   | 153 |
| Analyse van een schop                                       | 154 |
| De stenenklem   | 155 |
| Cycloïde, kromme voor rollen, slingeren en vallen           | 156 |
| Fermat, Bernoulli en de cycloïde                            | 159 |
| Natuurkunde, geen recreatie                                 | 160 |
| Goed gericht ... altijd raak (met P.J. Wippoo)              | 161 |
| De intelligente veer  | 163 |
| Versnelde spoed   | 165 |
| De geheimzinnige garenklos                                  | 168 |
| Zweefvliegen (met R. Ducastel)                              | 169 |
| Richting horen  | 171 |
| Drijvende krachten  | 172 |
| Experiment 117  | 173 |
| Alles gelijk kapot  | 174 |
| Botafumeiro   | 175 |
| Botafumeiro (2)   | 175 |
| <b>BIBLIOGRAFIE, inleiding</b>                              | 177 |
| Artikelen in Faraday  | 179 |
| Artikelen in het NVON-maandblad                             | 181 |
| Artikelen in Archimedes                                     | 182 |

# Woord vooraf

Henk Mulder werd op de Woudschotenconferentie in 1987 om zijn grote verdiensten voor het natuurkundeonderwijs onderscheiden met de Minnaertprijs van de Werkgroep Natuurkunde-didactiek. Hij was de eerste die deze prijs ontving. Over zijn persoon en zijn werk schreef de voordrachtscommissie:

*"Een bevlogen figuur. Als leraar zeer intensief met z'n vak bezig. Inspiratie puttend uit proeven en probleemstellingen uit de schoolnatuurkunde en de alledaagse wereld. Iemand met vraagtekens achter zijn ogen. Ook in de VUT fris gebleven.*

*Naar aanleiding van een vraag die aan Henk Mulder werd gesteld na afloop van de lezing die hij in 1981 op de Woudschotenconferentie heeft gehouden zegt hij over zichzelf het volgende: "Ik ben een oude padvinder ... Ik zou het erg missen als ik niet met mijn handen bezig zou kunnen zijn.. Ik vind het belangrijk ... dat je als mens totaal bezig bent. Je kunt wel allerlei dingen mooi verzinnen, maar je moet ze aan je handen doorvertellen".*

*Zolang Henk Mulder met onderwijs bezig is geweest is dit waarschijnlijk de rode draad die door al zijn activiteiten heen loopt. Rond 1972 startte Faraday een serie artikelen onder de titel OQ en vroeg daarbij aan docenten of ze op school materiaal hadden dat de moeite van het publiceren waard was. Een van de weinige reacties was van Mulder. Hij schreef geen artikel maar een brief met de mededeling dat wat hij had teveel was voor een artikel en als er belangstelling was dan was men welkom op school. Op dat moment had Mulder al een naam door zijn vele publicaties in Archimedes, DJO (tegenwoordig Aarde en Kosmos/DJO), Faraday, het NVON-blad. Allerlei kleine puzzels, elegante benaderingen en uitdagingen voor geïnteresseerde leerlingen staan op zijn naam. Van leeglopende conservenblikken tot de analyse van een schop. Problemen die kwalitatief geanalyseerd en kwantitatief uitgewerkt kunnen worden. Zijn ingenieursafkomst verraden door probleemkeuze en praktische benadering.*

*De grootste bekendheid kreeg Mulder ongetwijfeld door zijn jarenlange televisie-optreden in het KRO-programma "Daar vraag je me wat" waarin hij vaak aan de hand van levensgrote modellen uitleg gaf. Daarin werd hij door velen kritisch gevolgd. Hij was één van de weinigen, die gedurende een lange reeks van jaren het lef had moeilijke vragen te vereenvoudigen en zo de natuurkunde voor een breder publiek inzichtelijk te maken. De bijdragen van Mulder aan de ontwikkeling van nieuwe leerstofgebieden en vakdidactische methoden, aan het uitdragen van vernieuwende ideeën en aan het enthousiasmeren van niet alleen natuurkundeleraren maar van grote delen van het Nederlandse volk zijn talrijk geweest en er zullen zeker nog vele volgen. In de kring van Woudschotengangers kregen zijn grote bijdragen in 1981 en 1984 grote bijval."*

Henk Mulder bleef publiceren tot in zijn laatste levensjaar (hij overleed in 1993). Zijn didactische nalatenschap omvat onder meer:

- een leergang 'Continu Experiment' voor de Middelbare Meisjesschool (zeven deeltjes, ca 1960),
- ruim 100 artikelen in tijdschriften voor leraren: Faraday (1957-1983), het NVON-maandblad (1985-1993) en Euclides (1979-1993),
- omstreeks 1000 artikelen in tijdschriften voor jongeren: Pythagoras (1962-1993), Archimedes (1964-1993) en De Jonge Onderzoeker (1974-1985).
- enkele voordrachten (1981, 1984) en kleinere bijdragen op Woudschotenconferenties.

Verrassend veel daarvan is nog steeds de moeite van het lezen waard, als interessante natuurkunde, als bron van aardige en nuttige ideeën voor de lespraktijk, bijvoorbeeld voor open onderzoek, en als stimulans voor creatief omgaan met het vak. Met deze bundel willen we voorkomen dat het werk van Henk Mulder in vergetelheid raakt en bij jongere collega's onbekend blijft.

We hebben ons in deze bloemlezing vrijwel geheel beperkt tot artikelen die voor natuurkundeleraren geschreven zijn, voornamelijk ontleend aan Faraday en het NVON-maandblad. De artikelen voor leerlingen, of voor een nog breder publiek, zouden een aparte bundel verdienen in een voor jongeren aantrekkelijke vorm. Daar zou dan wel een professionele uitgever aan te pas moeten komen.

Binnen de gekozen categorie hebben we een verdere selectie gemaakt. Vooral in zijn oudere Faraday-artikelen was Henk Mulder soms wel erg op de theoretische toer: veel formulewerk met niet echt verrassende resultaten. Later is hij veel meer met experimenten en praktijksituaties bezig. Daarin is hij met de ontwikkelingen in het natuurkundeonderwijs meegegaan - ontwikkelingen die hij ook mee beïnvloed heeft: zie bijvoorbeeld in deze bundel zijn Woudschotenlezing "omgaan met natuurkunde".

De artikelen uit Faraday en het NVON-maandblad zijn overgenomen in hun oorspronkelijke vorm. Enig knip- en plakwerk was soms nodig om bladzijden zo evenwichtig mogelijk te vullen; om diezelfde reden is soms van de chronologische volgorde afgeweken. De bijdragen aan Woudschotenconferenties hebben we vooraan geplaatst, omdat hierin de persoon van Henk Mulder en zijn ideeën over natuurkundeonderwijs zo duidelijk tot uitdrukking komen.

Rest ons het bestuur van de Werkgroep Natuurkunde-didactiek te danken voor de ondersteuning van ons plan, en Jenny Andriese voor het werk en de zorg die zij heeft besteed aan de vormgeving van deze bundel.

Dik van Genderen, Theo Smits, Pietjan Wippoo



# Over Henk Mulder

Het is gek om uit te leggen wie Henk Mulder was. Het is nog maar drie jaar geleden dat hij overleed en tegelijk is het al weer lang geleden. In 1993 schreef ik in het NVON-maandblad: "Voor ons zal Henk doorleven. Bij verschillende redacties liggen nog stukjes. Oude stukjes inspireren anderen tot reacties."

Van Theo Smits komt het idee om de artikelen van Henk te bundelen. Zelfs als je zelf de oude jaargangen hebt, is het handig om alle artikelen bij elkaar te hebben. Alle artikelen? Zonder te tellen, wisten we al dat het onmogelijk was. Er is gekozen voor de artikelen voor natuurkunde-leraren in Faraday en het NVON-maandblad. Er is veel meer. Alleen al voor Archimedes schreef hij meer dan 500 stukjes. Van die titels is een lijst gemaakt.

Iemand met de productiviteit van Henk Mulder is zeldzaam. Toch was hij gewoon een natuurkundeleraar, die met volle inzet met zijn vak bezig was. Hij hoort tot de categorie 'fietsenmakers': praktisch ingesteld, met een scherp oog voor inventieve constructies en een ontembare lust om alles begrijpelijk te maken. Hij kreeg landelijke bekendheid als medewerker van het KRO-televisie-programma 'Daar vraag je me wat' in de jaren '70. Voor al zijn activiteiten kreeg hij in 1987 als eerste de Minnaertprijs voor Natuurkunde Didactiek.

Na zijn studie in Delft kwam ir. H.M. Mulder e.i. (zijn auteursnaam op boekjes uit de periode 1955-65) 'bij toeval' in het onderwijs terecht. De werkloze elektrotechnisch ingenieur kon invallen als leraar op een school in Den Haag. De rector wilde het wel met hem proberen, al was het met enige reserve: 'een jonge leraar is een bron van onrust in de school'. Henk heeft dat gezien als een aansporing om jong te blijven. Na een korte tijd in Den Haag volgde een lange tijd in Breda, waar hij aan meer scholen tegelijk wiskunde en natuurkunde gaf. Voor de meisjes schreef hij eigen lesmateriaal. Onder de titel 'Continu Experiment' verschenen 7 boekjes met steeds 10 praktische lessen met proeven, opdrachten, leerfeitjes, wetenswaardigheden en huiswerkopgaven geïntegreerd. Ze zaten vol met bekende en onbekende didactische hulpmiddeltjes. Henk was vooral een verspreider van goede ideeën. Bij elke nieuw ontdekte toepassing, schreef hij een stukje, soms in meerdere versies voor verschillende doelgroepen. Veel van de onderwerpen, die hij in Faraday en het NVON-maandblad aansneed, waren bekend van Archimedes of De Jonge Onderzoeker, of omgekeerd. Voor hem waren wiskunde en natuurkunde elkaar aanvullende vakken, dus verschenen natuurkundige voorbeelden ook in Pythagoras en Euclides. Toch was geen stukje hetzelfde: voor elke doelgroep was er een aangepaste versie van het verhaal! Eind jaren '60 heeft hij Breda een paar jaar verlaten, om les te geven op Aruba en te genieten van alle inspiratiebronnen in de tropen. Wij hebben ervan mee kunnen genieten via zijn publicaties. Hij had een hart voor het buitenleven, en hield van verre reizen met een

eenvoudige uitrusting. Hij zag het ingenieuze van allerlei constructies en vond het het leukst om zijn publiek eerst een opgave te geven, voor hij de oplossing gaf. De rubriek 'Natuurkunde als recreatie' was zijn rubriek.

Naast dit alles was hij ook nog echtgenoot, vader, opa, leider van jeugdgroepen, houtsnijder en boerderijbezitter. Bij mijn laatste bezoek aan Ulvenhout was hij net terug van een cursus midwinterhoorn maken. Zijn leven bestond zeker niet alleen uit natuurkunde en wiskunde.

Hij had graag mensen om zich heen, en kon boeiend vertellen.

Wij missen hem nog steeds.

Pietjan Wippoo



Henk Mulder, met vrouw en kinderen (en collega's) na de uitreiking van de Minnaertprijs op de Woudschotenconferentie van 1987.

# WOUDSCHOTEN

## Inleiding

Jaarlijks tussen sinterklaas en kerst nemen honderden natuurkundeleraren deel aan de tweedaagse conferentie van de Werkgroep Natuurkunde-Didactiek: een beproefde combinatie van lezingen, werkgroepen, markt en informele contacten. De benaming 'Woudschoten' is ontleend aan de locatie, in Zeist, waar de conferenties aanvankelijk (1966-1975) werden gehouden, totdat de capaciteit te klein werd - het aantal deelnemers is in dertig jaar gegroeid van krap 100 tot ruim 500.

Henk Mulder is pas laat in zijn loopbaan, in de periode 1980-1990, een regelmatige deelnemer geworden van de 'Woudschoten'conferenties, en in die periode heeft hij een aantal markante bijdragen geleverd. In zijn lezingen op de conferenties van 1981 en 1984, en in zijn dankwoord na de uitreiking van de Minnaertprijs in 1987, sprak hij met aanstekelijk enthousiasme over zijn eigen ervaringen met leerlingen en over zijn ideeën en idealen voor het natuurkundeonderwijs.

Ook in de wandelgangen droeg hij het zijne bij. Bij de uitreiking van de Minnaertprijs gaf de toenmalige voorzitter van de Werkgroep, Theo Wubbels, een sprekend voorbeeld: "Gisteravond om kwart voor twaalf; alle werkgroepen waren uiteraard allang afgelopen. In de gang zag ik Henk Mulder met enkele collega's en studenten van een lerarenopleiding. De reden van die extra wandelgangwerkgroep: Henk Mulder had weer een verbazingwekkend, simpel, fascinerend proefje meegenomen. Onderwerp van gesprek was hoe je dat nu toch moest verklaren. Met een verbluffend eenvoudig middel bracht Henk velen tot creatieve verklaringen."

## **Thema's van de Woudschotenconferenties natuurkunde**

- 1966 Eindexamen natuurkunde bij het voortgezet onderwijs
- 1967 Natuurkunde voor het HAVO
- 1968 Werkvormen in het natuurkundeonderwijs
- 1969 Het interimrapport van de CMLN
- 1970 Natuurkunde en projecten (Project Physics)
- 1971 Leraren en leerplanontwikkeling I (Nuffield projecten)
- 1972 Leraren en leerplanontwikkeling II (PLON)
- 1973 Werkvormen
- 1974 Evaluatie
- 1975 Differentiatie binnen klasseverband (DBK)
- 1976 Vernieuwingsactiviteiten in het Nederlandse natuurkundeonderwijs voor HAVO en VWO
- 1977 Het eindexamen natuurkunde voor VWO en HAVO; schoolonderzoek en CSE
- 1978 Zelfstandigheid en verantwoordelijkheid in de natuurkundeles
- 1979 Ontwikkelingen in het natuurkundeonderwijs
- 1980 Onderbouwonderwijs in de natuurkunde
- 1981 Zoeklicht op de mechanica
- 1982 Hoe leren leerlingen natuurkunde?
- 1983 Van quark tot tipvane
- 1984 Hoe betrek ik mijn leerlingen beter bij de natuurkundeles?
- 1985 Zicht op licht
- 1986 WENsdromen (WEN: Werkgroep Examenprogramma's Natuurkunde)
- 1987 Gesnapt? (Begrijpen van natuurkunde)
- 1988 Basisvorming
- 1989 Computers in het natuurkundeonderwijs
- 1990 1965-1990-2015 in het natuurkundeonderwijs (25 jaar terug en vooruit)
- 1991 Werken met de WEN
- 1992 Verschil moet er zijn
- 1993 Natuurkunde uit de kunst
- 1994 Practica
- 1995 Natuurkunde en sport
- 1996 Natuurkunde-didactiek in het studiehuis

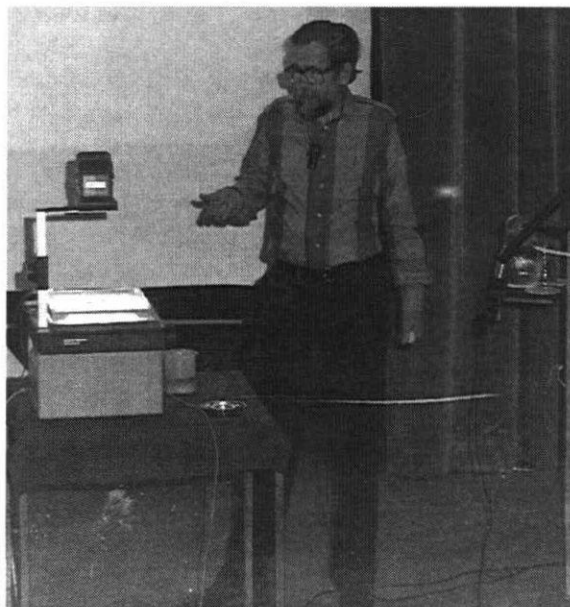
# Omgaan met natuurkunde

*Ir. H.M. Mulder*

De eigenlijke voordracht had gisteravond plaats, toen U ons kwam opzoeken op de markt. Wij namen toen onze elektromagnetische hoed voor U af. Nu sta ik hier in mijn ééntje, wat verlaten, Immers wat is een natuurkundeleraar zonder spullen? Het is daarbij als bij een voetbalmatch: wat is een reporter zonder voetbalwedstrijd? Toch presteren wij dat nog al eens: verhalen afsteken zonder contact met de realiteit, want een natuurkundeles zonder experimenten is inderdaad een wedstrijdreportage zonder spelers.

De eerste leermeesters in het natuurkundelokaal zijn de moleculen zelf. De leraar fungeert alleen als een hopelijk ervaren gids. Het experiment bezit meer overtuigingskracht dan de leraar. In mijn schoolperiode was de natuurkundeproef een beloning voor goed gedrag tijdens de les. Er is in de loop van de tijd veel ten goede gekeerd. Wat methoden als DBK en PLON aan werkmateriaal afleveren verdient ons respect. Het valt hierbij vooral op dat het materiaal zich kenmerkt door eenvoud. De paperclip, het elastiekje, de kurk hebben een opvallende functie. Het appelleert aan dingen van alle dag; het nodigt ook uit om zelf aan de slag te gaan.

Natuurkundig huiswerk zou zich vaker in de keuken, de fietsenkelder, de werkplaats moeten afspelen. Ouders van mijn leerlingen roepen 's avonds nog al eens naar hun kinderen: 'Jan, zou je niet eens aan je huiswerk beginnen?' Jan roept dan: 'Daar ben ik juist mee bezig'. Hij is namelijk derde klasser en stond bij de stoppenkast het aantal omwentelingen van de kilowatturenmeter te tellen om het vermogen van het televisietoestel te meten. En hier kom ik dan aan een punt waar ik graag in dit gezelschap een pleidooi voor wil houden. Ik noem dat de vierde weg in het natuurkunde-onderwijs. De eerste weg is de demonstratieproef, de tweede het theoretisch betoog van de docent, de derde het leerlingenpracticum en de vierde ..... de praktische huiswerkopdracht.



In dit laatste geval moeten leerlingen voor hun huiswerk niet leren (een woord dat mij met de dag onsympathieker klinkt), maar verrichten ze metingen en moeten daartoe ook nog vaak de benodigde apparatuur zelf maken. Kunnen is interessanter dan kennen. U heeft daar op de tentoonstelling de nodige voorbeelden van kunnen vinden. Er lag een zelfgemaakte tijdtikker, die aangesloten was op een beltransformator en waarmee een aantal voortreffelijke metingen te doen is, (startversnelling van een fiets, de gravitatie).

Als leraar ervaar je bij dit soort activiteiten evenveel illusies als desillusies. Wat vindt U van een leerling die de elektriciteitsmeter niet kon aflezen omdat er een kist aardappelen voor stond? Het voornaamste probleem is echter de onhandigheid van de mensen. Dit is waarschijnlijk een gevolg van technische hoogconjunctuur, want bij zogenaamde primitieve volken is dat duidelijk heel anders. Deze mensen kunnen heel veel dingen zelf maken en gebruiken daarbij alleen een mes. Het zou beter zijn als we het geld dat we thuis investeren in een pompeuze badkamer zouden besteden aan een bescheiden werkplaatsje.

U moet eens kijken wie bij U op school, behalve de amanuensis, met een hamertje uit een paperclip een recht draadje kan tikken. Nu hebben we tegenwoordig zelfs het vak handvaardigheid, maar stelt U zich daar niet teveel van voor. Zij zoeken het meestal in het artistieke en niet in het ambachtelijke. Als je leerlingen op het idee brengt stoom te sturen door een holle traproede om de uitzetting van ijzer te meten (ze hebben een compleet stencil ter beschikking), krijg je de volgende morgen van de moeder een briefje onder ogen waarop staat: 'Marietje noch ik konden het experiment klaar krijgen'.

Bij tweede en derde klassers lukt dit soort werk nog het best. Zij zijn nog redelijk fanatiek. In die klassen wordt

vaak een huiswerktaak opgegeven die vele weken in beslag neemt. Sommigen werken er graag nog zondagen en vakantiedagen aan. Tweede klassers maken een eenvoudige type brievenweger van karton, die als krachtmeter geijkt wordt (massa van 1 cent 2 gram!). Met dat zelfgemaakte apparaat worden dan wegingen gedaan, opwaartse krachten gemeten en indirect ook dichtheden van bepaalde stoffen. Van sommigen krijg je een dik verslag. Ik weet nu zelfs de opwaartse kracht van een augurk in azijn. De amanuensis beoordeelt de werkstukken, de leraar de verslagen. Voor de besten is er als beloning een excursie naar een weegwerktuigenfabriek georganiseerd. Later in dat jaar volgt nog een onderzoek naar ladingen. Met behulp van twee zelfgemaakte elektroskopen en wat simpele spulletjes wordt het hele ladingsgebied kwalitatief onderzocht. In het volgend jaar volgen weer twee van dergelijke taken, één gewijd aan stroommeting en één aan lenzen.

Zijn wij op deze manier niet bezig in de stijl van de oude onderzoekers? Moesten mannen als Faraday, Galilei, Newton niet eerst hun eigen spulletjes maken, voordat ze aan enig onderzoek konden beginnen?

Mijn derde klassers stropen alle opticiens van de stad af op zoek naar geschikte brillenglazen (bolle lenzen). Daarmee experimenteren ze een lange periode thuis, ze bepalen de brandpuntsafstand, meten de vergroting en controleren de lenzenformule. Als eindstunt proberen ze een camera te maken, waarmee zelfs foto's geproduceerd worden en ze maken met kartonnen rollen een microscoop, een telescoop of een toneelkijkertje.

Het tweede werkstuk in zo'n derde klas is het maken van een bruikbare stroommeter. Draad wordt afgewikkeld van een oude spoel of transformator en gewikkeld op de huls van een lucifersdoosje. Als de meter klaar is, wordt die in een vrij uur geijkt met een echte meter van de school. Ze kunnen kiezen uit vier typen, waarvan ze een bouwtekening meekrijgen. De leerlingen onderzoeken met die meter begrippen als gelijkstroom, wisselstroom, lineaire schaal, weerstand e.d. zelf. Oudleerlingen, die inmiddels de universiteit gepasseerd zijn, vertellen trots dat ze hun stroommeter nog steeds hebben. De voornaamste gedachte bij dit alles is: alles wat je zelf klaar krijgt, heeft meer betekenis. Er zit een stuk uitdaging in, wat bij kant en klare spullen niet het geval is.

Daarmee kom ik vanzelf op een volgende gedachte inzake instrumentarium. Vorige week heb ik bij vijfde klassers de snelheid van elektronen gemeten. Uitkomst: 9000 km/s. Ik was daar zelf redelijk geëmotioneerd van en meende dat er vandaag in de school moeilijk nog wat indrukwekkenders te beleven zou zijn! Zelf keken ze redelijk apathisch toe. De verklaring lijkt eenvoudig. Als we zien hoe alleen de technisch-onderwijs-assistent nog weet, hoe alle verbindingen gemaakt moeten worden, dan vraag ik me af in hoeverre die vijfde klassers nog met

lijf en geest contact met het gebeuren kunnen hebben. Neen, dan hadden ze een trotser gevoel toen ze een paar jaar geleden 100 eigen gemaakte stroommeters in de vitrines zagen staan. Sommigen waren zelfs met zilverpapier beplakt, om het heel voornaam te maken en sommigen hadden de grote mensen al geïmiteerd door er een kast om te bouwen, zodat je het meeste niet meer kon zien.

Zo meen ik dat de gravitatie meten met een stemvork en een vallende roetplaat interessanter is dan met een millisecondeklok gekoppeld aan twee fotocellen. U kunt al tijdmeters krijgen met 5 cijfers achter de komma. Vindingrijkheid bij het zoeken naar meetmethoden moeten we hoger aanslaan dan de nauwkeurigheid van de uitkomst. Er lijkt in het onderwijs een grote behoefte aan simpele doorzichtige apparatuur te bestaan waarbij de onderdelen zichtbaar aanwezig zijn.

Het meten van de haardikte met een micrometer, de luchtweging, de bepaling van de luchtdruk (in bakstenen per cm<sup>2</sup>, een normale brabantse drukeenheid) en dergelijke zijn voor tweedeklassers zeer opzienbarende gebeurtenissen. Deze ervaringen zijn voor hen waardevoller dan het aanhoren van de afstand tussen aarde en zon. Het is voor een leerling verrassend te ervaren dat hij niet sterk genoeg is om de lucht in het lokaal te dragen terwijl 1 liter lucht toch maar een massa van 1 gram heeft. Hij had ook nooit verwacht dat het lokaal een volume heeft dat een paar duizend keer groter is dan dat van zijn eigen lichaam. De industrie zal gelukkig maar ten dele de ons dienstige apparatuur kunnen leveren en de creativiteit van amanuensis en leraar staat aan de basis van fysisch onderzoek op school.

Volgens mij heeft een tijdschrift als Archimedes daarin ook een speciale opdracht: ideeën aandragen voor oplossingen van klassieke problemen en .... nieuwe bedenken. Een collega die zojuist vertrokken is naar Afrika schreef mij: 'de natuurkunde hier is sterk mathematisch, verbaal, theoretisch, een papieren vak. Gelukkig heb ik een flink partijtje hollands tijdschriften meegenomen en daar hoop ik dan voldoende inspiratie uit te putten'.

Lang heeft men ook gedacht dat practicum in de examenklassen alleen mogelijk zou zijn als men over een voldoende budget beschikt om geavanceerde apparaten aan te kunnen schaffen. Ik wil niet zeggen dat leerlingen niet moeten leren daarmee om te gaan en ik denk daarbij aan een oscilloscoop of een toestel van Franck en Hertz. Maar volwaardige fysieke arbeid kan ook al verricht worden met polshorloge en liniaal zoals Galilei ons al heeft laten zien. Leerlingen van 6-atheneum hebben vaak onderzoeken gedaan met weinig hulpmiddelen. Een voorbeeld: laat een waterstraal in de gootsteen spuiten. In de bak ontstaat een cirkel. Waarvan hangt de straal af? Dat is weer weken werk.

Leerlingen werken graag aan puzzelachtige opgaven; gevallen met diverse mogelijkheden, onderzoeken hoe de zaak werkelijk in elkaar steekt, meten en kiezen.

Hiervoor is een black-box uitstekend geschikt en U heeft er dan ook een paar op de tentoonstelling kunnen zien. De filosofie hierbij is: het komt in het leven vaak voor dat je iets moet onderzoeken, terwijl je een bepaald systeem niet open mag maken. Je moet dan door uitwendige metingen zien te achterhalen hoe de zaak van binnen in elkaar zit.

Artsen verrichten meestal zo hun onderzoek (U vindt het toch ook niet leuk als ze U bij een onderzoek meteen opensnijden?) en juristen ook.

Graag wil ik nog het een en ander opmerken over het natuurkundelokaal zelf. In school vind je altijd lokalen met een uitgesproken karakter en ook gezichtsloze ruimten, fietsenstallingen voor mensen. Van vaklokalen mag toch in ieder geval verwacht worden dat ze een eigen gezicht vertonen. Het is alleen jammer dat het vaak niet meer is dan de architect erin geïnvesteerd heeft, de gas-kranen, de elektriciteitskast, het krijtbakje.

Het zal U bekend zijn dat een hond die een park ingaat alle bomen merkt met zijn aanwezigheid. Zouden we van zo'n hond iets kunnen leren?

Veel natuurkundelokalen hebben vitrines die permanent leeg staan, als opslagruimte benut worden of .... een collectie aardige dingen herbergen, die er inmiddels al zo lang staan, dat niemand ze meer opmerkt.

Monteer eens aan de buitenkant van een vitrine een schakelaar. Wachtende leerlingen kunnen de knop indrukken en .... dan moet er wat gebeuren. Er kan bijvoorbeeld een meter uitslaan, bijvoorbeeld die magnetische hoed, maar er kunnen ook veel spannender dingen gebeuren. Zo vindt A.H. ook zijn klanten, via de etalage. Als het enigszins kan moet het verrassend zijn, zodat leerlingen al discussiëren voordat de leraar er is en de les begonnen is. Bij ons zorgt een relais ervoor dat na een tiental seconden de stroom weer uitvalt. Is het niet mogelijk in de vitrines wisselende tentoonstellingen te zetten, die wel een duidelijk verband met ons vak hebben? Ideeën? Laat Uw leerlingen thuis aan tafel eens kijken hoe gram wordt geschreven op verpakkingen van etenswaren. Dat gebeurt op wel 15 manieren. Maak van die spullen een tentoonstelling. Zo verzorgde een juwelier voor ons een tentoonstelling van kristallen en edelstenen.

En dan komen we bij het lokaal zelf uit. In een natuurkundelokaal zouden blikvangers moeten zijn, waarvan leerlingen zeggen: 'Meneer, wat is dat?'

Zo zijn wij een beetje trots op een lange veer, waarbij 300 windingen aan 300 schroefoogies over de totale lengte van 11 meter aan het plafond hangen. De amanuensis heeft aan één eind een golfopwekker, zowel transversaal als longitudinaal aangebracht met een regelbare frequentie. De klas kan zien hoe een stoot in 4 seconden van het ene eind via het andere weer terugkeert en zo kunnen ze eindelijk eens direct de voortplantingssnelheid van golven meten. De beide golfformules zijn met dit apparaat prima te testen. De proef is bepaald spectaculair.

Ook de beide typen staande golven zijn prima stationair in te stellen. Een dergelijke proef fascineert en versiert tegelijk.

Laten we fraaie dingen die achter gesloten schuifpanelen staan in het zicht halen. Stel bepaalde proeven permanent bedrijfsklaar op.

De titel van mijn verhaal is 'Omgaan met Natuurkunde'. Ik kom nu tot een voor mij vrij belangrijke gedachte. Het onderscheid tussen leerlingen en leraren is gradueel, niet essentieel. Ik bedoel, dat we van leerlingen niet mogen verlangen dat ze zich van harte met wetenschap bezig houden, als wij daar zelf ook geen sporen van vertonen. Dat laatste zou op vele manieren kunnen.

Sommigen zijn geabonneerd op vaktijdschriften, anderen bereiden schooluitgaven voor, anderen prepareren in teamverband nieuwe onderwijstechnieken. Wie zijn oor te luisteren legt bij wat leerlingen zeggen en vragen, wie dieper ingaat op de leerstof van alledag, ziet zichzelf geconfronteerd met onvermoede problemen. Dingen die tientallen jaren als vanzelfsprekend ervaren werden kunnen als nieuw tevoorschijn komen, Eén vraag van een leerling kan plotseling iets al zijn vanzelfsprekends ont-nemen. En dat betekent ook voor de leraar: studeren. De meeste artikelen die ik in de loop van jaren in de tijdschriften (Pythagoras, Archimedes, De Jonge Onderzoeker) heb geschreven vonden zo hun geboorte in het klaslokaal.

Het lijkt mij essentieel voor eerlijke beoefening van wetenschap, dat ouderen en jongeren in gelijke mate worstelen met de geheimen die ons omringen. Leraren dienen in hun klas uiting te geven aan dat wat ze niet weten, maar ook bereid te zijn zelf of samen met de leerlingen naar antwoorden te zoeken. Zo zijn bij ons vele zaken onderzocht met leerlingen individueel of met groepen. Zo ontstonden opgaven voor schoolonderzoeken. Vrijwel altijd waren het zaken die aansluiten bij de ervaring van alledag.

Waarom snoert een waterstraal in? Welke is de vergelijking voor de vorm van een ei? Kan iets rollen zonder wrijving? Waarom hebben we in Nederland een munt van 25 cent en niet van 50 cent. enz.

Vorige maand vond een tweedeklasser een variant op de stelling van Pythagoras die bij niemand op school bekend was.

Er gebeurt in een klaslokaal zoveel en zoveel nieuw! Vooral bij de jongeren is de ontdekkingsdrang en de zin om te willen weten groot. Zegt U dat het een kunst is leerlingen te motiveren? Nee, de klus is om ze gemotiveerd te houden en dat valt inderdaad niet mee.

Om de tweede klassers hierbij te helpen zijn ze allemaal geabonneerd op het tijdschrift 'De Jonge Onderzoeker'. Reeds jong worden ze op het spoor van de wetenschap gezet, want wetenschap zal steeds meer vrijetijdsbesteding gaan worden. Wetenschap als hobby!

Het exemplaar dat we hen vlak voor de herfstvakantie

uitreikten bevatte tekeningen van boemerangs. Zoiets is de moeite van het maken waard en het is leuk ermee te experimenteren.

Bij zulk soort werk oefenen ze een grote stimulans op elkaar uit. Er is weinig afstand tussen spel en wetenschap. In een maatschappij die uit is op consumptie appelleert het tijdschrift aan de creativiteit van de leerlingen.

Een moeilijke vraag in het onderwijs is: wat interesseert leerlingen? In het begin lijken ze zich voor alles te interesseren. Tweede klassers dringen nog om binnen te komen. 'Meneer, gaan we nog wat doen vandaag?' vroeg er laatst één. Ik schrok van die vraag. Hij verwacht kennelijk iets van je.

Ons natuurkundeonderwijs is sterk traditioneel bepaald en geheel door mannen geconstrueerd. Als we die beide zaken eens zouden doorlichten, waar zouden we dan uitkomen? Waarom onderzoeken we wel de verschuiving in een vlakke glasplaat maar niet het verschijnsel van de regenboog? Waarom praten we over een puntmassa die een éénparige cirkelbeweging doorloopt en niet over een fietser die een bocht maakt?

Uit het hele land krijgen we voor het televisieprogramma 'Daar vraag je me wat' per uitzending 300 vragen binnen. Voor mij is het interessant om te zien wat mensen nu eigenlijk willen weten. Wel, over die regenboog natuurlijk; hoe komen foto's van de Voyager op aarde?; waarom kun je door glas heen kijken en door ijzer niet?; waarom gaat de zon rood onder?; waarom knipperen de sterren?; waarom kun je de wind wel horen, maar niet zien?; waarom wordt gekreukt wasgoed door strijken glad? Van dit alles vinden we vrijwel niets in onze schoolboeken. Staan we dan zover van de werkelijkheid af of blijven we volhouden dat wat wij behandelen zo belangrijk is en dat de rest (waar we zelf ook niets van weten) wel vanzelf komt.

Natuurkunde is niets dan een spel dat je binnen en buiten het klaslokaal kunt bedrijven. Wij waren ermee bezig op sterrenkundige werkweken en tijdens onze bergkampen in Tirol.

Je kunt er toevallig ook nog je boterham mee verdienen. Je kunt er zelfs mensen mee vormen, al moeten we het natuurkundelokaal niet gebruiken als een politieke tribune. Je kunt met natuurkunde humor bedrijven. Zelfs kan het tot meditatie stemmen.

Op de Amsterdamse effectenbeurs maakte ik een foto van allemaal mannetjes die met hun neus naar hetzelfde stuk effectenpapier gericht waren. Ze gedroegen zich precies als spijkertjes in een magnetisch veld.

Jarenlang heeft die foto in het lokaal gehangen met als onderschrift:

EEN MAGNEET RICHT SPIKERTJES,  
GELD RICHT MENSEN

Zo kun je van moleculen nog wat leren. Moleculen en mensen verschillen minder dan we vaak vermoeden.

Om U dat te verduidelijken heb ik nog een experiment voor U meegebracht. Lord Kelvin demonstreerde dit voor

zijn studenten om hen het schillenmodel van het atoom te verduidelijken. Zelf heb ik deze proef eens gebruikt als een dagopening. Ik zei: 'Dit is geen natuurkunde, dit is een overdenking'. Het leven is grotendeels een spel van evenwichten. Een krachtenspel, aantrekking en afstoting. Noemt een Fransman een magneet niet 'un aimant' en wat betekent dat? Beminner of aantrekker? Ik heb hier een bak met water en daar kunt U het ellebogenwerk van magneten observeren.

Mijn verhaal ging over: 'Leven met Natuurkunde'.

Vroeger zeiden we tegen onze leerlingen dat ze hun land ermee van dienst konden zijn en dat ze er een stukje van hun eigen toekomst mee konden realiseren. Veel van dat alles is weggefallen. Wat is gebleven: onderzoek is een boeiende wijze van menselijk bezig zijn.

Voor de jongelui waarmee we dagelijks werken, moet natuurkunde overkomen als een spel dat de moeite waard is om mee te spelen. Het doet een beroep op hun eigen activiteiten. Wetenschap wordt in deze tijd, waarin we steeds meer vrije tijd krijgen een vorm van ontspanning. Het bevat een uitdaging die een maatschappij van verzadiging dagelijks minder kan geven. Het voert de strijd tegen de saaiheid en houdt er de spanning een beetje in.

Sommigen noemen dat: *gelukkig leven*.



# Motivatie

*Henk Mulder*



Met enige schroom, wilde ik U, dames en heren, enkele gedachten toevertrouwen rond het toverwoord motivatie. Wat motiveert een eekhoorn om denneappels te zoeken, een hert om over een hek te springen, een leraar om naar een Woudschotenconferentie te komen, een leerling om de wet van Ohm uit het hoofd te leren?

Motiveren betekent: in beweging zetten. Mobiel is beweeglijk. Nog mooier automobiel: ik zet mezelf in beweging! Velerlei zaken zijn hierbij van invloed.

Voor een leerling kan het de atmosfeer in het klaslokaal zijn, zijn lichamelijke conditie, de toestand thuis ..... maar ongetwijfeld, in overwegende mate, de leraar. Van ons hangt het af!

Als we zelf met een balengevoel, zo van: "laat Deetman maar les geven" het lokaal betreden, zal de oogst verwaarloosbaar zijn. Geen boer betreedt met zo'n gevoel zijn akker.

We hoeven niet bepaald vindingrijk te zijn om manieren te bedenken om in ons werk tekort te schieten. Misschien is het in onze werkruimte doorgaans een danige wanorde met een recht randje, wellicht vindt U zichzelf bepaald onhandig, een slecht ding voor een experimenterende fysicus, of zijn Uw proefwerken zo onduidelijk dat zelfs Uw collega er moeite mee heeft, verzin maar, of misschien (en in deze zaal komt dat natuurlijk niet voor) zijn onze lessen ongelooflijk saai.

Volgens mij is dit laatste voor jonge leerlingen, die bovendien per dag tot zes uur zitten veroordeeld zijn, het meest funest. Er worden nogal wat slaapverwekkende lessen gegeven. Een enkele blik door de ruit van een lokaal is voldoende om te zien hoe gefascineerd de jongelui lijfelijk aanwezig zijn.

Wie ontwikkelt een saaiheidsmeter en definieert een eenheid, want zolang we die dingen nog niet hebben, is er voor ons natuurkundigen nog geen greep op dit merk-

waardige natuurverschijnsel. Maar in alle ernst, een leerling heeft hier maar één antwoord op: ongeïnteresseerdheid!

Het minste wat ze van ons kunnen verwachten is dat we de zaken die we presenteren zelf voldoende de moeite waard vinden, ja zelfs spannend. En dat moet dan tot uiting komen in ons omgaan met natuurkunde. Het moet blijken uit ons gebaar, onze dynamiek.

Lessen moeten niet alleen spannend zijn, maar ook ontspannend. Een pittig kruid daarbij is de humor, maar dat is wel iets anders dan cynisme.

Speelt een leraar niet vaak de rol van de hofnar? Je kunt de waarheid zeggen, mits de koning, in dit geval de leerling, lacht. Daarbij ontstaat een werkklimaat, waarin effectief communiceren mogelijk is. Goede humor is even belangrijk als scherpzinnige grafieken.

Een andere weg tot motivatie is jongelui serieus nemen, speciaal in het wetenschappelijke vlak. We moeten niet over hen spreken als kinderen; het is beter ze als volwassenen te behandelen en daarmee ook als verantwoordelijk. Vergeet U niet: vele streven ons in enkele jaren in kennis en vaardigheid voorbij. In elk lokaal zitten wel leerlingen met meer talent dan we zelf hebben. We zouden, zeker in de hogere klassen, het accent moeten leggen op collegialiteit. Als ze het gevoel hebben mede betrokken te zijn in het wereldwijde net van onderzoekers schuift het probleem van motivatie op de achtergrond. Maar, daar hebben we het weer, voelen we onszelf wel als dusdanig? Tussen leraren en leerlingen is geen essentieel verschil, slechts een gradueel. Zij zijn toevallig wat later geboren dan wij!

Het lijkt het beste dit aan een voorbeeld toe te lichten. Een gymleraar, belangrijk volk in de school, ontdekt in een brugklas een knulletje dat hem een geheim toevertrouwt: hij wil sterrekundige worden. De leraar spreekt er mij over aan in de koffiepauze. Ik maak met de jongen

een afspraak: woensdag half vier in het natuurkundelokaal. Glunderend staat hij al voor de deur. Hoe was het ook al weer: het probleem is niet hoe ze te motiveren maar hoe ze gemotiveerd te houden. Of zeggen dat we geen tijd hebben. Ons gesprek toen duurde tien minuten. Hij zegt dat hij een sterrekijker wil bouwen. Heb je lenzen? Nee! Ik adviseer hem zijn familie en de stad af te stropen op zoek naar lenzen.

Volgende week, zelfde plaats, zelfde tijd. Nu komt hij binnen met een zak vol glaswerk. Er is zelfs een scherf bij van een oude carbiedlantaarn. Ik vertel hem dat bolle lenzen in het midden dik zijn en holle juist dun. Hij neemt alles weer mee en gaat thuis catalogiseren. Volgende week: twee dozen. één met bolle en één met holle lenzen. Ik zeg: laat die holle maar thuis, daar doe je niks mee. Maar nu moet je eens opletten. Ik zet een kaarsvlammetje achter in het lokaal en laat hem het beeldpunt zien (vergeet niet: hij is een brugklasser). Grote verrassing op zijn snuit. Het spel is begonnen. Meetlat erbij en brandpuntsafstand opmeten. Hij weer naar huis met de opdracht: meet al je bolle lenzen op.

Maar de volgende week kwam voor mij de grote verrassing! Elk bol glas steekt keurig in een aparte enveloppe en daar staat op  $f=7$ ,  $f=20$  en zo verder.

Wat betekent die  $f$  vraag ik hem. Wel brandpuntsafstand, Waar heb je dat vandaan? Wel uit een boek. Deze vent heeft blijkbaar na drie bijlessen van elk tien minuten mij althans niet meer nodig. Hoe lang nog voor hij mij voorbij gestreefd is?

Toen hebben we de zwakste en de sterkste lens achter elkaar gezet op een afstand gelijk aan de som van de beide brandpuntsafstanden, keken erdoor naar een schoorsteen boven de huizen aan de overkant en zagen zowaar een vergroot beeld. Dat is nou een sterrekijker.

Toen is hij weken weggebleven. Hij knikte naar mij op het schoolterrein alsof we oude kennissen waren. Op zekere dag was de kijker klaar.

Toen hoorde ik drie jaar niets meer van hem tot ik hem als grote knul in de vijfde klas kreeg. Hij knikte vaak als hij vond dat ik iets in de les goed uitlegde en als ik het niet helemaal vertrouwde keek ik naar hem om te weten of mijn verhaal niet al te vermetel was.

Maar als het over de dampkring van Venus ging, kreeg hij het woord en luisterde ik alleen of hij geen aperte onzin verkocht. Hij was mij duidelijk voorbij.

Als ik met enige emotie collega's dergelijke verhalen vertel, zeggen ze: ik heb zulke lui nooit in de klas. Dat kan toch niet waar zijn. U zult zeggen: aan zulke lui heb je een makkie. Maar vergis U niet: ze kunnen knap lastig zijn. Gebruik ze in de klas als het zout in de pap. Ik had er één die assisteerde tijdens het practicum samen met de amanuensis. Wellicht is het U bekend, maar dit soort leerlingen zijn de meest verwaarloosde in de schoolbevolking. Ons onderwijs richt zich op de gemiddelden: de zwakke vallen af en de sterke zoeken het maar uit, die komen er toch wel zeggen we. Bij de rapportbespreking slaan we ze gewoon over!

Worden sterk gemotiveerde leerlingen als dusdanig geboren of kan men ze ook opkweken?

U heeft vast wel het eerste nummer van deze jaargang van het tijdschrift Archimedes gelezen. Waarom zet U dit blad toch niet gewoon op de boekenlijst voor hen die natuurkunde in hun pakket gekozen hebben? Hebt U daar ook het verhaal over de specht gelezen?

Ik loop in het bos en hoor de specht tegen de boom rammen. Mijn fysische afwijking komt boven en ik vraag me af: hoe lang duurt een roffel en hoeveel tikken zitten daarin? Die vraag achtervolgt me vele dagen. Ik vertel erover in de klas. Mijn collega's zeggen: zo kom je met de stof niet klaar. Ik zoek twee jongelui uit en daag ze uit aan een onderzoek te beginnen. Ik probeer mijn waar aan de man te brengen door te zeggen dat het onderzoek in de plaats kan komen van drie standaardproeven die voor het komend schoolonderzoek vereist worden. Ik waarschuw overigens dat de arbeidstijd vast wel het vijfvoudige wordt van die drie standaardproefjes. Ze hebben er hun complete herfstvakantie ingestoken. Sindsdien zijn die beide jongelui fysisch volwassen geworden. Ze gaan met grafieken en formules om als met normaal gereedschap, We groeten elkaar als collega's,

U wilt weten in hoeverre deze voorbeelden maatgevend zijn voor de massa's waaraan we dagelijks lesgeven? Dat is een moeilijk punt: ik kan alleen individuen motiveren en geen massa's. Hoewel: massa's bestaan uit individuen. Je moet jongelui daarvoor aan kunnen kijken. Persoonlijke gesprekken, vaak buiten het klaslokaal, zijn mijn beste momenten uit de onderwijspraktijk.

Erg belangrijk voor jonge mensen is de uitdaging, het element spel. In datzelfde bekende blad vond U het verhaal van de kabelbaan over de rivier de Ourthe in de Ardennen. Op onze bergkampen hebben we altijd een technische dag. Werken met katrollen, een schoepenrad-dynamo in de beek. Waarom bedrijven we niet meer fysica buiten het klaslokaal in de vrije natuur?

In Brescia wordt elk jaar een natuurwetenschappelijk kamp gehouden voor jongelui uit heel Europa. Waarom hebben we zoiets in Nederland niet?

Ideeën genoeg: foto's maken en ter plaatse ontwikkelen, geluidssnelheid meten, afstanden bepalen, chemisch onderzoek aan lucht en water. En als de avond valt is het de tijd voor de amateurastronomen. Wellicht zien ze voor het eerst de ring van Saturnus.

Er zijn in het land nogal wat clubs voor jonge onderzoekers. Waar zijn de scholen waar zoiets in de vrije tijd gebeurt? Motivatie zal alleen lukken bij jongeren als er ouderen in hun omgeving zijn die er zelf in geloven.

Telkens wordt er weer beroep gedaan op onze creativiteit en initiatief.

De technisch-onderwijs-assistent is daarbij een centrale figuur. Beter één zwakke leraar in een team van vijf dan één ongemotiveerde amanuensis in de school. Wie het met zijn leraar niet getroffen heeft, krijgt volgend jaar wel weer een andere, maar de invloed van een slecht bezette

amanuensispost werkt door in heel de school, jaar in jaar uit.

Voor jongelui blijft het enthousiasme van de ouderen altijd van meer belang dan de zogenaamde vakbekwaamheid, geconcretiseerd in diploma's en salarisverhogingen.

Ondanks veel goede bedoelingen, tenslotte, hebben we altijd te maken met een belangrijk natuurverschijnsel, resonantie.

Elke leerling is een stemvork met zijn eigen frequentie. Zingt niet elk vogeltje zoals dat gebekt is? En zou dat dan ook niet voor de leraar mogen gelden? Ook hij heeft een eigen frequentie en geeft les op zijn golflengte. En als de eigen frequenties sterk verschillen zal er van resonantie weinig terecht komen. De leerling verdient volgend jaar dan een andere leraar. Het mooiste zou zijn als hij daarbij zelf mocht kiezen. Misschien wordt dit ooit wel eens als een elementair recht in het onderwijs erkend.



Demonstratie door Henk Mulder met een "valkoord"  
(vgl. het Faraday artikel pag. 34)

# Dankwoord

na de uitreiking van de Minnaertprijs,  
12 december 1987

*H. Mulder*

Vandaag, dames en heren, voel ik mij dubbel beloond. Vooreerst heeft de natuurkundige arbeid ten dienst van jonge mensen mij bijna veertig jaar gefascineerd en ontspannen, en vervolgens wordt dat genoeg nog met een prijs gehonoreerd.

Dat deze prijs ook nog de naam van de voortreffelijke fysicus Minnaert draagt, spreekt mij extra aan. Hij publiceerde zijn bekende boek "natuurkunde in leerlingenproeven" waarin hij van een set brilleglazen een microscoop maakte en een soepbord promoveerde tot optische schijf. Hij toonde een grote gevoeligheid voor de raadsels waartussen we ons bewegen en een onuitblusbaar genoeg in de analyse ervan.

Toevalligerwijze kwam ik in het onderwijs terecht. Op een avond stond ik op het winderig station Hollands Spoor in Den Haag, toen iemand me erop attendeerde dat er, ik was nog student, een vacature midden in het jaar was ontstaan op de school waar ik zelf eens leerling was. De volgende dag meldde ik mij bij de rector, die mij ontving met de opmerking: een jonge leraar is een bron van onrust in de school. Advies: doe alsof u al drie jaar voor de klas staat. Einde stagebegeleiding. En zo begon het avontuur. Ik ontdekte dat een leslokaal voor jonge mensen een vrijheid berovend onnatuurlijk milieu is. Hun reacties liegen daar niet om.

Je zou bijna zeggen: als je onderwijs naar de knoppen wilt helpen, moet je scholen bouwen. Ik ben altijd jaloers geweest op de indianen die nog leven in het oerwoud. Ik was drie keer in hun gezelschap. Hun kinderen leren alles uit dagelijkse ervaring, door doen. Zo kennen ze de regel van de breking omdat ze weten dat als je schuin in het water van de rivier met pijl en boog op een vis richt, je nooit raakt. Want waar je de vis ziet, zit die zeker niet. Daarom richten ze onder een gecorrigeerde hoek, dan heb je een kans.

Hoe simpel ook, laat iets gebeuren; er moet iets te zien zijn.



En klaagt u niet over onvoldoende beschikbaarheid van een amanuensis of over gebrekkige subsidie van Deetman: u kunt de halve mechanica demonstreren met als apparaat een krijtje, een bordwisser en een bordliniaal.

Terugblikkend op een lange onderwijstijd verbaas ik me erover hoe het mogelijk geweest is, binnen het beperkte raam van de middelbare schoolstof, steeds weer facetten te ontmoeten die raadsels verhullen, die doen verbazen, uitnodigen tot onderzoek. Zulke zaken werden vaak spontaan de klas ingebracht. De meer begaafde leerlingen hebben daarvoor veel vrije tijd ingeleverd. Als we hen aan het werk weten te zetten .... kunnen zij ons weer motiveren.

En daar gaat het toch om: dat wij zelf plezier houden in ons werk. Dat is toch de volgorde! Maar dat betekent dat we ook steeds bezig moeten zijn en dan bedoel ik niet slavelijk, proefwerken nakijken en zo, maar creatief. Om te overleven, natuurkunde als revalidatie, als recreatie.

Tussen ons en de leerlingen is geen essentieel verschil, slechts een gradueel. We zijn toevallig eerder geboren, een kwestie van faseverschuiving. Een goede cabaretier voert zijn show op alsof elke voorstelling de eerste was. De jongelui moeten aan ons gedrag zien dat we er zelf in geloven. En dat betekent ook voor ons: huiswerk, wat we wel zelf moeten kiezen. Maar dat laatste is niet moeilijk: het leven zelf reikt het ons aan, op de straat, in de trein, in de klas.

De meeste artikelen die ik schreef vonden zo hun ontstaan, vaak uit vragen en suggesties van leerlingen. Zij houden ons wakker, zij dagen ons uit.

Mijn tijd is om: mag me nog één ding van het hart: een onbevoegde leraar voor de klas is nog niet zo'n ramp, een saaie is erger.

# FARADAY

## **Inleiding**

Het tijdschrift Faraday is opgericht in 1931 als orgaan van Velines, de Vereniging van Leraren in Natuur- en Scheikunde. Toen Velines in 1975 door fusie met de vereniging van biologie leraren opging in de NVON, de Nederlandse Vereniging voor Onderwijs in de Natuurwetenschappen, bleef Faraday nog geruime tijd voortbestaan. In 1984 werd het blad opgenomen in het NVON-maandblad en aan het eind van dat jaar werd het opgeheven.

Henk Mulder publiceerde vanaf 1957 tot 1983 in Faraday, in totaal 74 bijdragen, variërend van een grondige analyse van een verschijnsel of een proef tot kleine probleempjes onder het motto "natuurkunde als recreatie". In de bibliografie achterin deze bundel zijn alle bijdragen chronologisch vermeld. In deze bloemlezing hebben we ongeveer 60% opgenomen, vooral uit de jaren na 1970, waarbij we soms kleine verschuivingen in de volgorde hebben aangebracht terwille van een inhoudelijke aansluiting of een aansluiting tussen onvolledig gevulde bladzijden.

Op één plaats hebben we iets tussengevoegd uit ander werk van Henk Mulder, namelijk uit zijn leergang "Continu Experiment", als voorbeeld bij zijn Faraday-artikel met diezelfde titel.

In september 1964, bij het ingaan van de vierendertigste jaargang, werd Henk Mulder lid van de redactie, naast Van Vianen (hoofdredacteur), Lignac en Wijn Nobel. Wegens zijn vertrek naar Aruba trad hij na een jaar af, en de jaren 1966-1969 vormen een hiaat in zijn lijst van bijdragen, maar vanaf 1970 was hij weer regelmatig in Faraday aanwezig.

Op de volgende bladzijde vertelt Hubert Biezeveld, van 1975 tot 1982 hoofdredacteur van Faraday, iets over zijn ervaringen met Henk Mulder.

## **De man die nooit slaapt**

Bij mijn kinderen was Henk Mulder bekend als 'De man die nooit slaapt'. Dat kwam doordat hij een van de zeer weinigen was van wie ik het in mijn Faraday-tijd nam als hij me 's avonds tegen elf uur nog belde over een natuurkundig probleem. Gelukkig is het er zelfs een keer van gekomen dat hij Hoorn bezocht om mijn slinger van Foucault te bekijken en dat hij daarna mee naar huis ging om te eten. Ik heb zelden een gast meegemaakt bij wie de kinderen zo aan de lippen hingen als bij hem.

Lang voordat woorden als leefwereld en context hun intree deden in het didactisch jargon liet Henk al zien dat natuurkunde over echte dingen gaat en tot het einde van zijn leven bleef hij het jongetje dat met verbazing en nieuwsgierigheid in de wereld om zich heen keek. Aanstekelijk was daarbij zijn enthousiasme om anderen in zijn verwondering te laten delen. Ik herinner me een avond op de Woudschotenconferentie waarop hij met wat studenten om zich heen speelgoed zat te analyseren. Uit zijn dankwoord bij de Minnaert prijs citeer ik: 'Een goede cabaretier voert zijn show op alsof elke voorstelling de eerste was. De jongelui moeten aan ons gedrag zien dat we er zelf in geloven. En dat betekent voor ons: huiswerk, wat we zelf moeten kiezen. Maar dat laatste is niet moeilijk: het leven reikt het ons aan, op de straat, in de trein, in de klas.'

Later op die avond kwam ik met hem in gesprek en zei zoets tegen hem als: 'Het is eigenlijk wonderlijk met jou, je bent altijd met speelgoed en reële dingen bezig, maar je schrijft voor Faraday en andere tijdschriften meestal stukjes waarin ook veel wiskunde te pas komt.' 'Ja', zei hij, 'het begint altijd met verbazing, maar daarna wil ik ook weten hoe het echt zit en dan heb je wiskunde nodig.' Wat dat betreft was hij dus een echte leerling van Galilei, volgens wie het boek van de natuur in wiskundige taal geschreven is.

Voor mij als redacteur van Faraday was Henk een ideale auteur. Zijn artikelen waren goed verzorgd en voorzien van duidelijke figuren, maar het plezierigste was het gemak waarmee hij suggesties voor veranderingen aannam. Ook was opvallend dat zijn bijdragen vaak een vervolgstukje van anderen opleverden, zoals bij de drijvende blokken. Ik ben erg blij met het initiatief dat veel van zijn artikelen in één band bij elkaar brengt.

**Hubert Biezeveld**

## BRUG VAN WHEATSTONE VOOR WATER

DOOR IR. H. M. MULDER e.i.

Het is een bekend feit, dat waterstromen en elektrische stromen bepaalde overeenkomstige eigenschappen hebben.

Hoogteverschillen enerzijds als oorzaak der waterbeweging, potentiaalverschillen anderzijds als oorzaak der elektronenbeweging.

De vraag doet zich nu voor of de relatie van Wheatstone ook geldigheid bezit van de hydrodynamika.

Het is mogelijk de brugschakeling als volgt te verwezenlijken: 5 slangen (liefst doorzichtig) worden via 4 glazen T stukken tot een vierhoek met

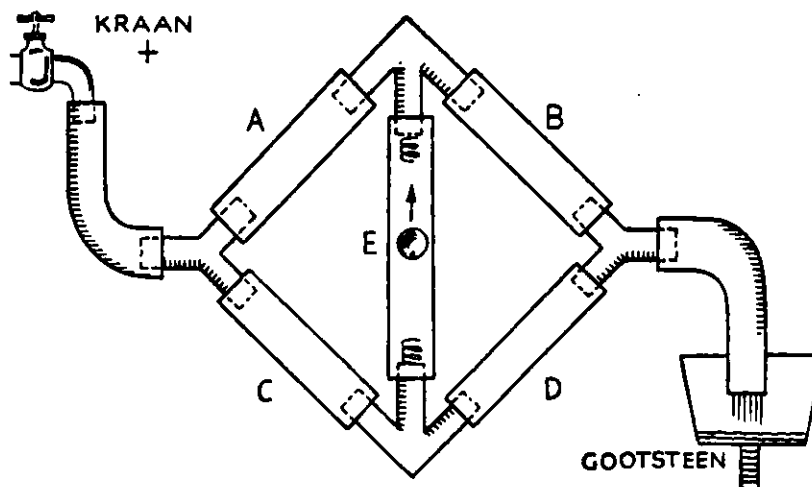


Fig. 1. Brug van Wheatstone van water.

diagonaal gekoppeld. In de brugtak wordt in het elektrisch schema een Ammeter of telefoon geplaatst. In dit geval zou een waterstroommeter moeten komen.

Eigenlijk gaat het alleen om de „nulinstelling” ofwel de vaststelling van het omkeermoment van de stroomrichting.

Daartoe wordt als brugtak een glazen buis genomen, waarin een vierpitbolletje vrij hangt. De richting van de waterstroom wordt aangegeven door de beweging van het bolletje. Om te beletten dat dit wegspoelt, komen er bij begin en eind van de brugtak messing spiraaltjes klem in de buis.

Nu kan „de schakeling” worden aangesloten op kraan en gootsteen, die hiermee de + en - rol spelen uit het elektrische geval.

Ook hier geldt een relatie tussen de 4 overstaande weerstanden.

Knijpt men bijvoorbeeld buis A dicht, dan is de stroom in E omhoog (evenzo bij dichtknijpen van D).

Maakt men de weerstand in B of C oneindig groot, dan is de stroom in E omlaag. Dat de produkten der overstaande weerstanden ook hier gelijk moeten zijn is enigmatische te testen door slangen van verschillende lengten te gebruiken. Indien bijvoorbeeld slang A, B, C en D resp. 15, 30, 20 en 40 cm worden gekozen wordt de stroomsterkte in E nul. Dit moet het geval zijn, hoever men de kraan ook opendraait (de relatie van  $W$  is onafhankelijk van de spanning op de brugschakeling!). Dit klopt in een niet te groot gebied. Bij zeer hoge waterdrukken ontstaan ingewikkelde wervelverschijnselen. Gemakkelijker is te werken met willekeurige of gelijke lengten van slangen en door knijpen in een der vier (weerstandverandering door diktevariatie) de nulinstelling te verwezenlijken. Het gehele buizensysteem kan op een plankje met beugels worden gemonteerd. Eigenlijk zouden de T stukken dikker moeten zijn dan de slangen omdat in de brugschakeling altijd de weerstanden van de „toevoerdraden” verwaarloosd worden.

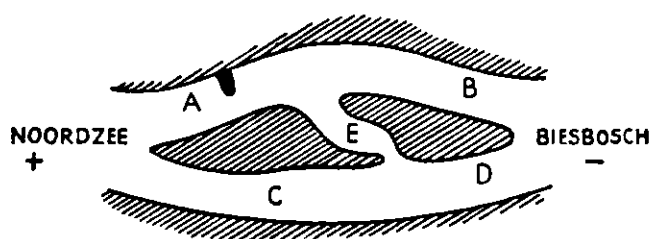


Fig. 2.

Deze waterbrug heeft zelfs betekenis voor bepaalde Deltawerken. Stel men heeft een stel waterstromen volgens bovenstaand schema. Het dichtens van zegaten kost vooral grote moeite bij de sluiting, tengevolge van de krachtige getijstromen.

De eigenschap der brugschakeling biedt althans enig uitzicht voor het dichtens van gat E. Indien de stroom gaat via A over E naar D dan kan het bouwen van een stuk dijk in A (weerstand A groter) bewerken dat op zeker moment de stroom in E nul wordt. Dan moet men ophouden met dit projekt en kan begonnen worden met het dichtens van E. De stroom blijft daar nu nul. Het kost wel moeite om konkreet aan te wijzen waar in het Nederlandse Deltaplan, deze bijzonderheid is toe te passen. Het stroomstuk „Mastgat” kan enigermate als brugtak fungeren, omdat het Noordzeewater zowel neiging vertoont na Oosterschelde en Volkerak de Biesbos in te stromen als via Grevelingen naar de zak der Oosterschelde bij Bergen op Zoom.

Als men de elektrische taal handhaaft kan men zo'n schema uitvoeriger uitwerken. Vooreerst is het getijdenverschijnsel een typisch wisselstroom-effect van zeer lage frequentie. Hier bestaan ook behalve „Ohmse” weerstanden, in- en uitschakelverschijnselen (zelfinductie) zowel als capacatieve werking (zak der Oosterschelde reageert als een enorme condensatorplaat die „opgeladen” wordt).

Als men het zo beziet, wordt het vervangingsschema benoorden de lijn Walcheren-Zuid Beveland als in fig. 3. Aan de mannen van Waterstaat is het uit te maken in hoeverre verworvenheden uit de leer der impedanties en wisselstromen bruikbaar zijn voor de huidige Deltawerken. De bedoeling van dit artikel was enkel te wijzen op een mogelijke betekenis daarvan.

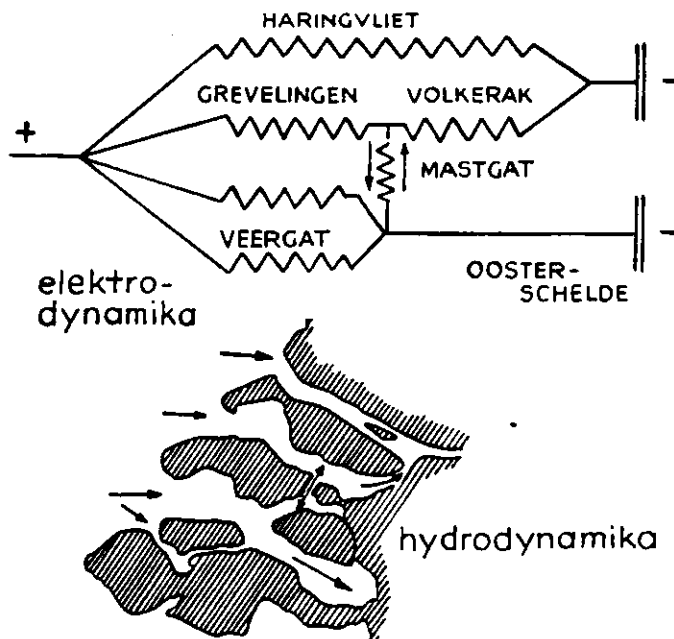


Fig. 3.



## CONTINU EXPERIMENT

DOOR IR. H. M. MULDER e.i.

Het middelbaar onderwijs voor meisjes is nog in vele opzichten een copie van het onderwijs voor jongens.

Speciaal in de natuurkunde geeft dit aanleiding tot desillusies. Men zou de vraag kunnen stellen, of men op de M.M.S., waar de vrijheid, om geschikte wegen te kiezen, groot is, hier ook niet meer gebruik van zou moeten maken.

Het is mogelijk een accent te verschuiven.

In maart j.l. bezocht ik een school in Duitsland en hoorde hoe een meisje tot opdracht had een studie te maken van de geschiedenis der elektriciteitsleer. Zij bleek wel te weten, dat Ohm leraar was in Keulen en George Simon heette, maar het weerstandsbegrip was haar onbekend!

Natuurlijk kan men aandacht besteden aan de historische achtergronden (en dit menselijke aspect der natuurwetenschap ontbreekt veelal geheel), maar tenslotte kan men van de natuurkundeles geen geschiedenisles maken. De natuurkunde is een vak van het heden en onze taak is het, onze leerlingen de structuur van de hen omringende stoffelijke werkelijkheid te doen kennen. Zodra men echter ophoudt met verhaaltjes te vertellen en overgaat tot een nuchtere analyse der verschijnselen, verglijdt ook snel de aandacht. Er zijn natuurlijk middelen om deze aandacht te stimuleren. Daar is vooreerst de demonstratie. Toch is deze vaak onvoldoende in staat hen tot bewustwording van de werkelijkheid te voeren. Soms blijkt van een voorwerp enkel opgevallen te zijn dat het klein of geel is, niet dat het cilindrisch is; de fluorescentie van de vloeistof leidt de gedachten volledig af van het brekingsverschijnsel.

Misschien zou het maken van vraagstukken het onderwijs kunnen concretiseren? Een onvoldoende wiskundig inzicht vernietigt hier de kansen (dat  $\frac{1}{5} = 0,2$  of  $1 : 0,6 = \frac{5}{3}$  behoeft in dergelijke klassen ruime toelichting).

Een volgende poging was de leerlingen te dwingen thuis eenvoudige onderzoekingen te doen, bij wijze van huiswerk.

Ze kregen tot opdracht thuis het meetbereik van een koortsthermometer na te kijken; in de kamer de temperatuur bij vloer en plafond te bepalen; een kurk, zwevend in water te maken door er steeds meer spijkertjes in te steken enz.

Ook de ouders bleken moeite te hebben met de gedachte, dat huiswerk maken nog iets anders kon zijn, dan je armen onder je hoofd zetten en „studerende” maar ook kon bestaan in het meten en in grafiek brengen van slingerperiodes.

Het werd duidelijk, dat het noodzakelijk was de leerlingen te helpen hun handigheid op te voeren en hen in staat te stellen regelmatig in de klas met instrumenten om te gaan.

Uit deze gedachten is de methode „continu experiment” ontstaan. Les en proef zijn hier geheel in elkaar overgegaan.

De leerlingen bouwen hun kennis op door een „voortdurend onderzoek”, waarbij kwalitatieve en kwantitatieve metingen elkaar afwisselen. Door telkens nieuwe ervaringen, opgetekend in een werkschrift, dat de stof in kleine gedetailleerde opdrachten aanbiedt, wordt een onderwerp afgetast.

De methode geeft bovendien voordelen, als men slechts één uur natuurkunde per week heeft, hetgeen bij uitvallen tijdslacunes van 14 dagen veroorzaakt. Daarom wordt er naar gestreefd, elke les een duidelijk eindpunt te bereiken; ofwel elke les behandelt een afzonderlijk verschijnsel, waar een volgende les zoveel mogelijk van ontkoppeld is. Er is dus een wijziging van volgorde mogelijk en het uitvallen van een les door ziekte of om andere reden geeft weinig moeilijkheden.

Hoe lost men de technische problemen op?

Een jaar natuurkunde bestaat hier uit  $3 \times 10$  proeven genummerd van 1 tot 30; voor het volgende jaar weer 30 proeven van 1 tot 30. Zodoende is het nummer van de proef in een bepaalde week voor alle parallelklassen en ook voor oecide leerjaren gelijk. Dit geeft mogelijkheden tot automatisering. In het rooster zijn parallelklassen zoveel mogelijk achter elkaar geplaatst.

Achter in de klas staat een bord (zoals op het perron) met het proefnummer van de week. Drie meisjes, daartoe gevraagd, komen in de pauze of vóór de lessen het lokaal binnen, lezen het proefnummer en pakken een grote kaart, waarop de benodigdheden staan aangegeven (in deze stijl: Staafmagneet 3-2-07 . . . hetgeen betekent: 3e kast, 2e plank, artikel 07; op de plank staat weer het betreffende nummer bij het artikel).

Ze zetten de artikelen in 12-voud in bakken op de lange werktafel langs de muur. De 2 leergangen zijn onderscheiden door een andere kleur bakken. Als de leerlingen de klas binnenkomen, neemt er één van elke bank een bak mee.

Na een zeer korte inleiding (probleemstelling als: heeft een elektrische stroom ook magnetische eigenschappen? en enige interesseopwekking als: waarom valt de toren van Pisa niet om?) begint het onderzoek.

De leraar stuurt de les en regelt het werktempo; de amanuensis assisteert plaatselijk.

Achter elke proef komt een huiswerkdeel, dat de proef completeert (grafieken tekenen, berekening afmaken) en waarbij nog eenmaal van diverse handelingen rekenschap wordt gevraagd (waarom werd de buis door stoom verwarmd en niet met een vlam?) terwijl dit ook de plaats is om toepassingen te vermelden van het gevondene (mijnlamp van Davy).

Ook het proefwerk is in deze stijl:

1. hoe kun je met een negatief voorwerp koper + laden?
2. men paste vroeger stoomverwarming toe; hoe werkt dit?
3. beschrijf 3 voorwerpen in stabiele toestand.

De beschreven werkwijze heeft voordelen.

De handigheid wordt na enige lessen zichtbaar groter. De concentratie wordt geprikkeld. Wanneer de leerling in gedachten afwezig is, blijkt dit, in tegenstelling tot vroeger, direkt. Er wordt immers niet meer gehandeld. Teamgeest en gevoel voor orde worden bevorderd. Er wordt hen geleerd op te houden met te fantaseren of onbegrensd te geloven, wat anderen beweren.

Zij leren de natuur kleine vragen te stellen en hun zintuigen te trainen een antwoord op te vangen. Het voortdurend luisteren wordt vervangen door voortdurend doen. Het eerste doel blijft daarbij te kennen, het tweede te begrijpen.

De vraag „waarom” kan niet aan de orde komen, als de vraag „hoe” nog niet is beantwoord.

Verwondering om de dingen speelt hierbij een belangrijke rol.

Tenslotte volgt hier als voorbeeld het program van 10 proeven van het 2e trimester 1e leergang.

Algemene titel: kracht en warmte.

onderwerpen:

11. luchtdruk 12. veerkracht 13. hefboom 14. zwaartepunt 15. warmtebronnen 16. uitzetting 17. soortelijke verlenging 18. uitzetting van lucht 19. geleiding-stroming 20. straling.

In proef 17 wordt één grotere meting gedaan, namelijk de verlenging in mm van 1 m staaf bij 1 graad verhitting. In proef 14 echter worden wel 20 kleinere onderzoeken gedaan.

In deze opzet wordt de les dus geheel aanschouwelijk gegeven, waarbij les en practicum volledig één zijn. Luisteren en handelen wisselen elkaar voortdurend af. Het werkschrift is tevens leerboek; verslagen worden niet gemaakt.

De meisjes gaan bijzonder voorzichtig om met het materiaal, terwijl klaar zetten en opruimen natuurlijkerwijze met animo geschieden.

De methode, die nu enkele jaren op de MMS te Breda wordt toegepast is geïnspireerd door het werk „leerlingenproeven van prof. Minnaert” (1924!) en sluit aan op het practicum materiaal onder de namen „Lubana-sets” en Optri-set (Luctor-Baarn) in de handel gebracht.

## proef 2

### samengestelde trillingen (lokaal verduisterd)

**nodig:** lamp, trillingstoestel met spiegeltje, slingertoestel met zandstrooier, fijn zand, (oscilloscoop, toongenerator).

soms is een voorwerp onderworpen aan twee trillingen tegelijk. welke beweging ontstaat dan?

#### inleiding:

Op een spiegeltje wordt een lichtstraal gericht, die weerkaatst op de muur. Het spiegeltje kan zo trillen,

dat de lichtvlek op de muur een **horizontale trilling** maakt

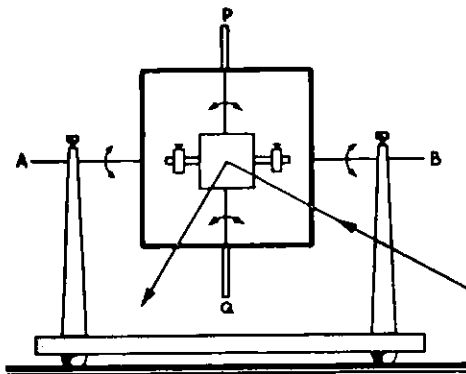
en zo dat de lichtvlek op de muur een **vertikale trilling** maakt.

Wanneer het spiegeltje in beide richtingen in trilling wordt gebracht, beschrijft de lichtvlek op de muur een interessante figuur.

Naar de Fransman, die ze onderzocht, noemen we ze **figuren van Lissajous (1850)**.

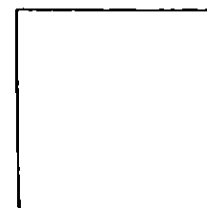
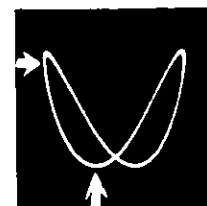
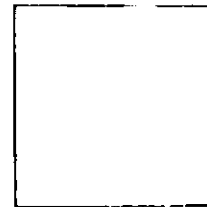
#### onderzoek

1. De lamp wordt op het spiegeltje gericht (evenwijdige bundel). Op de muur verschijnt een lichtvlek.
2. Het spiegeltje wordt in twee richtingen tegelijk in trilling gebracht en we zien de eerste „lissajousfiguur”. Eén type is aangegeven; teken zelf nog twee andere vormen die je op de muur ziet.
3. Hoe ontstaat deze figuur?



We laten het spiegeltje trillen om een verticale as PQ. Dit gelukt doordat het spiegeltje met verticale staaldraadjes aan een raampje is bevestigd. De lichtvlek beschrijft nu een ..... trilling. De staaldraadjes worden hierbij getordeerd (gewrongen).

Het raampje zelf is weer met horizontale torsiedraadjes aan het statief bevestigd, zodat het spiegeltje ook om een horizontale as kan trillen. De lichtvlek beschrijft dan een ..... trilling.



4. Onderzoek dat de frequentie van de horizontale trilling niet gelijk is aan de frequentie van de verticale trilling. De frequentie van de ..... trilling is het grootst.
5. Onderzoek de frequentieverhouding bij de „achtvormige” figuren. Doorloop de figuur horizontaal, uiterst links (zie pijl) beginnend. Om de figuur eenmaal heen en terug te doorlopen, gaan we eenmaal naar rechts en terug naar links (één trilling). Nu vertikaal; begin ergens onderaan (zie pijl); doorloop de figuur: omhoog, omlaag, omhoog, omlaag (twee trillingen). Dus in dezelfde tijd dat één trilling horizontaal volbracht wordt, worden er twee trillingen vertikaal beschreven.

De frequentieverhouding bij de „achtvormige” figuren is dus horizontaal: vertikaal = : .

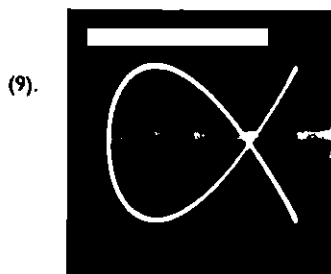
6. We nemen nu de getekende gewichtjes van de armpjes aan het spiegeltje af. De trilling om de verticale as krijgt hierdoor een ..... frequentie (zie proef 1-10).  
 Het is nu zo geregeld, dat de frequenties gelijk zijn geworden.  
 De figuren, die verschijnen, zijn ..... en .....  
 Ga na, op de wijze als in opgave 5 beschreven, dat hier de frequentieverhouding 1 : 1 is.

- (7). Op het scherm van een oscilloscoop (een toestel dat trillingen in beeld brengt) wordt horizontaal een trilling met frequentie 50 Hz gezet (wisselspanning van het stadsnet) en vertikaal 100 Hz (van een toongenerator). We zien de „achtvormige serie" nog een keer.  
 Produceert de toongenerator ook 50 Hz, dan zien we weer de „ellips serie".



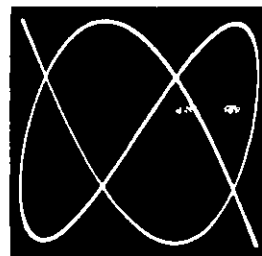
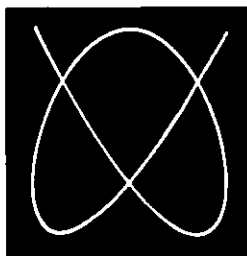
Er worden gewichtjes op de armpjes geplaatst zodat een „S" vormige figuur ontstaat. Bepaal de frequentieverhouding ( ..... : ..... ) (begin links onder).

Het beeld van een „a" figuur wordt gedemonstreerd. Doorloop de figuur eenmaal, te beginnen rechts onder, en noteer hoeveel trillingen in horizontale richting ( ..... ) samengaan met hoeveel in verticale richting ( ..... ). De frequentieverhouding is hier dus ..... : .....



(10).

Doe hetzelfde bij de volgende figuren.

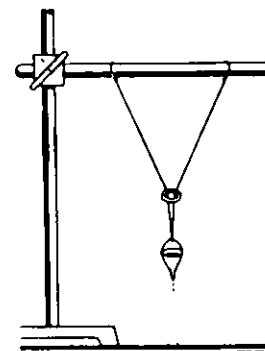


11. De beelden op de muur werden na verloop van tijd kleiner, zowel in de breedte als in de hoogte. Dit komt omdat de ..... van zowel de horizontale als verticale trilling

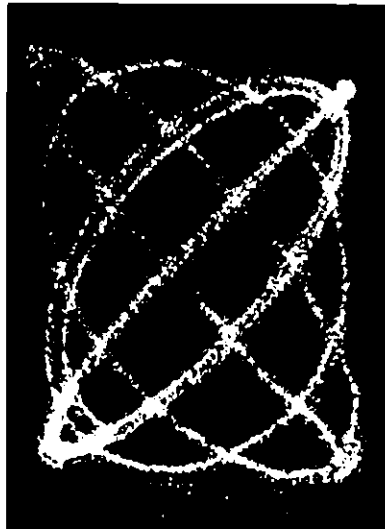
12. Stel, dat om een lissajousfiguur een vierkant met twee horizontale en twee verticale zijden kan worden beschreven, dan is de amplitude van de horizontale component gelijk aan de .....

13. Als de frequenties geen eenvoudige verhouding hebben, ontstaan ook zeer ingewikkelde figuren. Ze worden nog gedemonstreerd met een zandstrooier, die in twee richtingen kan slingeren. Hoe wordt ervoor gezorgd, dat de slingertijden, dus de frequenties verschillen?

Hoe kan de frequentieverhouding veranderd worden?

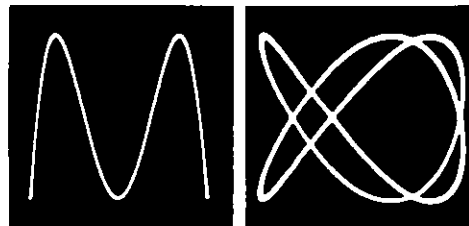


(14).



Er wordt een zandfiguur beschreven.

Kijk goed wanneer een volledige figuur is beschreven. (Zoek in de foto begin- en eindpunt van de beweging; schat de tijdsduur van de figuur bijv.  $T$ ,  $2T$ ,  $\frac{1}{2}T$  ..... ; hoe is de demping te zien; probeer de frequentieverhouding uit te tellen .....).



thuis

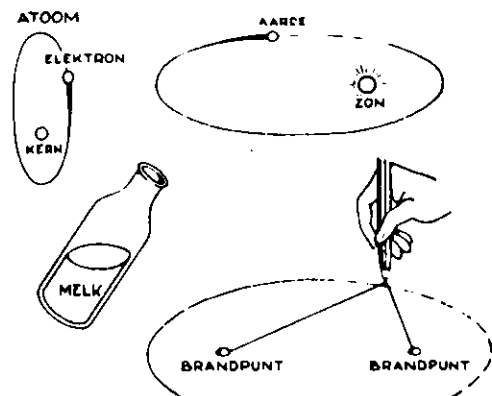
15. Een cirkelfiguur kan alleen ontstaan als  
 a. de frequenties .....  
 b. de amplituden .....

(zie opgave 6)  
 (zie opgave 12).

- (16). De ellips komt in de natuur veel voor. Probeer zelf eens zo'n figuur te construeren. Sla in een plankje twee spijkertjes op 8 cm afstand van elkaar. Aan de spijkertjes knoop je de einden van een draad met 10 cm overblijvende lengte. Trek met een potlood de draad strak en ga rond over het plankje, waarbij je zorgt dat de draad gespannen blijft. Je krijgt zo een ellips met aslengten ..... en ..... cm.

- (17). Zo maakt de tuinman een elliptisch bloemperk. De plaatsen van de spijkertjes heten de brandpunten van de ellips.

18. Zo staat de zon in het brandpunt van de ellips die de aarde om de zon gedurende beschrijft. Zo beschrijft een elektron een elliptische baan om een atoomkern.



19. Bovenaan deze bladzijde staan nog enkele figuren. Schrijf de frequentieverhouding eronder.
- (20). Welke frequenties moet men vertikaal nemen als men de diverse figuren wil maken en telkens horizontaal 50 Hz neemt. (in opgave 8 ..... Hz; in opgave 9 ..... Hz; in opgave 19 ..... Hz en ..... Hz.)

Opvallend bij deze proef waren de fraaie composities, gebonden aan strakke natuurwetten. Natura artis magistra = de natuur is de leermeesteres van de kunst.

## FIGUREN VAN LISSAJOUS

door Ir. H. M. MULDER e.i.

Het zal ons altijd fascineren, wanneer wij een licht- of elektronenstraal een trillingsfiguur zien beschrijven.

Sommige leerlingen zijn geneigd deze figuren zuiver artistiek te zien, hetgeen tot gevolg heeft dat de analyse ervan op de achtergrond geraakt.

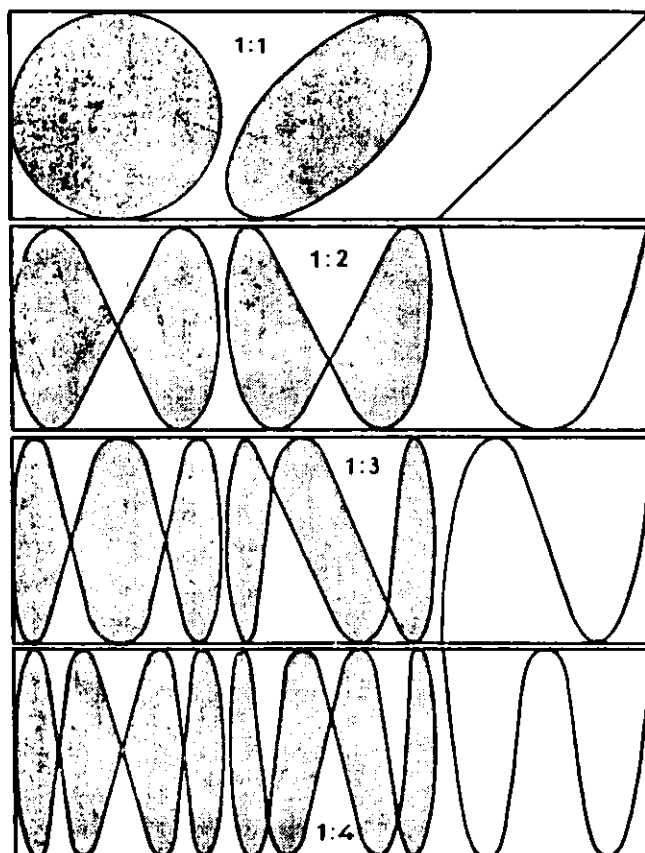
Enkele vragen, die zich hierbij voordoen, worden nu aan de orde gesteld.

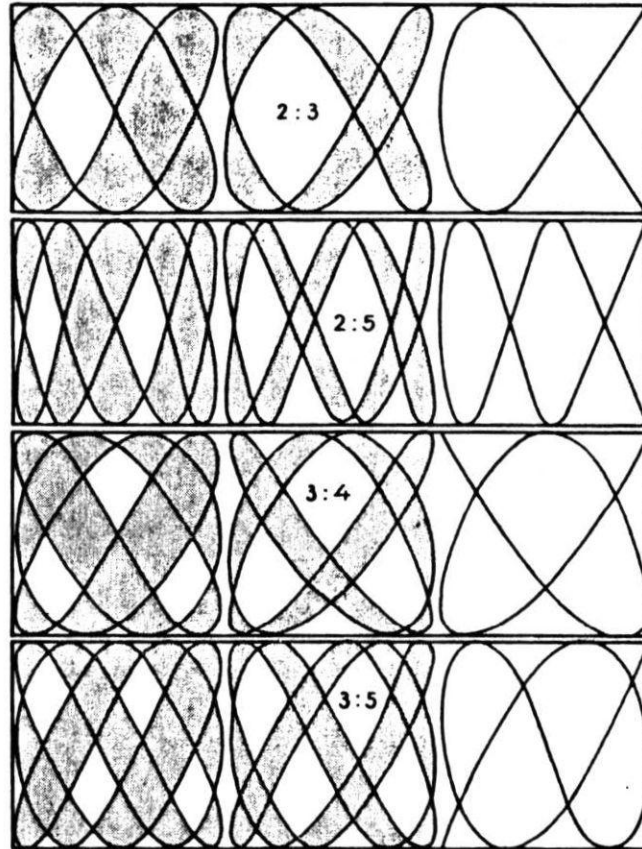
Allereerst wordt een overzicht gegeven van 8 figuursoorten, behorend bij de eenvoudigste frequentieverhoudingen. Indien de amplitudines gelijk zijn, wordt de „lijst” om de figuur een vierkant, anders een rechthoek.

Bij een bepaalde verhouding zijn telkens nog variëteiten mogelijk, afhankelijk van het faseverschil bij de start. Van elke soort zijn 3 variaties getekend. Bij de eerste en derde is het „oppervlak binnen de figuur” maximaal resp. minimaal (nul). De tussenfiguur geeft telkens een overgang bij de betreffende soort aan.

Het bedoelde oppervlak (gerasterd) krimpt daarbij in.

De figuur met minimaal oppervlak (minimum-figuur) ontstaat als beide trillingen starten met een uitwijking gelijk aan de amplitudo. Een dergelijke startwijze zal wel normaal zijn bij het bekende experiment met spiegel en lichtstraal.





Deze minimum-figuren hebben steeds twee omkeerpunten (snelheid van trillende massa nul). Als de niet te vereenvoudigen verhouding der trillingstijden bij de componenten  $m : n$  is, de trillingstijden zelf  $mT$  en  $nT$ , zodat de trillingstijd voor de lissajous-figuur  $mnT$  wordt, dan treden deze omkeermomenten op met een tijdsverschil  $\frac{1}{2}mnT$ . Tevens wordt hierbij in de tweede helft van de trilling een identieke baan terug doorlopen.

Er zijn daarbij nog twee mogelijkheden: genoemde omkeerpunten kunnen samenvallen met de eindpunten van een diagonaal van de rechthoek (zoals bij  $1 : 1$  en  $1 : 3$  en  $3 : 5$ ) of met de eindpunten van een zijde.

De omkeerpunten blijken *diametraal* te liggen als de som (of het verschil) van  $m$  en  $n$  even is; *eenzijdig* als deze uitkomst oneven is.

Dit kenmerk schijnt zeer geëigend om alle soorten in twee grote categorieën onder te brengen.

De „diametrale soort” heeft rotatiesymmetrie; de „eenzijdige soort” één symmetrie-as.

Alle maximum-figuren hebben rotatiesymmetrie en twee symmetrie-assen; bovendien gaat bij de eenzijdige soort de maximum-figuur door het centrum van de rechthoek.

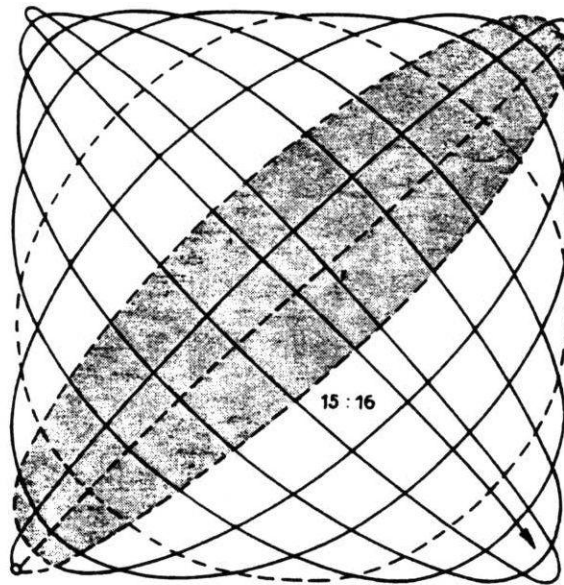
De getallen  $m$  en  $n$  geven de aantallen raakpunten van de figuur met de rechthoek aan. Hieruit volgen de aantallen knooppunten en wel  $m(n-1) + n(m-1)$  ofwel  $2mn - (m+n)$  stuks. Bij de minimum-figuren zien we raakpunten twee aan twee samenvallen, terwijl knooppunten verdwijnen of zich verenigen uit groepen van vier tot één.

Tenslotte nog een praktische vraag. Als we in de klas lissajous-figuren zichtbaar maken, zien we een bepaalde soort, die we menen te herkennen, vaak de diverse variaties doorlopen (bijvoorbeeld van cirkel via ellips naar lijnstuk en terug).

Waardoor ontstaat deze wisseling? Hoe groot is de tijdsduur van een dergelijke cyclus?

Het verschijnsel wordt wel verklaard door te wijzen op verloop van fasen of frequenties.

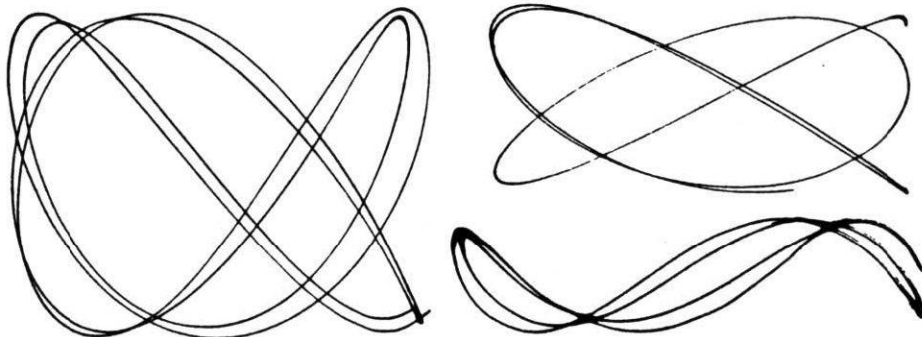
Stel: we willen de ellipsvorm demonstreren. In werkelijkheid kunnen we de exacte verhouding  $1 : 1$  niet verwezenlijken. Als we dit proberen, stellen we bijvoorbeeld  $15 : 16$  in. Het resultaat is hierbij getekend.



De figuur begint links onder. Eén helft ervan is slechts aangegeven; de lijn met de pijl geeft de start voor de tweede helft.

Merk op, hoe de figuur vrijwel (!) volgens de diagonaal begint, overgaat via een ellipsachtige figuur in een quasi-cirkel, en deze weer evenzo in een op een rechte gelijkende lijn, om weer terug te gaan via een cirkel naar de aanvankelijke diagonaal (genoemde tussenvormen zijn gestippeld). Bij verhouding  $15T : 16T$  is de duur van de cyclus  $240T$ . Bij een betere benadering van de verhouding  $1 : 1$  wordt de wisseling trager. Het is interessant te zien, hoe de aanlooplijn enigszins in S-vorm om de diagonaal slingert als aanloop voor de ellipsen.

Het feit dus, dat we eenvoudige verhoudingen slechts kunnen benaderen, veroorzaakt de wisseling in de figuur, die zo boeiend is.



(de foto's zijn gemaakt met behulp van een slingerende lamp door Gerard van Esch, leerling van het Bredase Lyceum.)



## 15 IDEEËN VOOR HET NATUURKUNDE-LOKAAL

door Ir. H. M. MULDER

Om u aan wellicht één bruikbaar idee te helpen, worden er u hierbij 15 (geheel vrijblijvend!) aangeboden:

1. Onderscheid de lange en korte snoeren bij het leerlingen-practicum door een verschil in kleur van snoeren of stekkers.

2. Doe eens de historische proef van Archimedes (iets voor klas Va!), waarmee hij vaststelde, dat er zilver in goud was gemengd bij het vervaardigen van een kroon. Wij imiteren deze proef met een kroon van messing, waarnaast een koperen en een zinken cilinder worden gebruikt, alle drie van gelijk gewicht. Doel van de proef: door vergelijkende inhoudsbepalingen het kopergehalte van de kroon bepalen.

3. Maak een klein weerstation (barometer, vochtigheidsmeter, max-min thermometer) en laat enkele leerlingen een en ander enige tijd grafisch volgen.

4. Bevestig een haak aan het plafond van het lokaal en bepaal met stopklok en slingerformule de hoogte van het lokaal (of van de hal of van het schooldak!).

5. Houd alleen brander, gaas en driepoot in de kastjes van de practicum-tafels en berg het overige centraal op.

6. Hang in het lokaal enkele historische prenten (te verwisselen) van de valproeven van Galilei, de trekproef met de Maagdenburger halve ballen, de proef van Oerstedt over het magnetische veld van de stroom.

7. Laat bordjes maken op de leerlingentafels bij de klemmen met de — aanduiding. Plaats op elk bordje tevens de naam van een natuurkundige met zijn nationaliteit, hiermee aangevende, dat de natuurwetenschap een internationale bezigheid is.

Hier volgt een dergelijke selectie:

|                    |                    |                       |
|--------------------|--------------------|-----------------------|
| Balmer — Zwitser   | Watt — Schot       | Galilei — Italiaan    |
| Bohr — Deen        | Röntgen — Duitser  | Ampère — Fransman     |
| Celsius — Zweed    | Mendelejeff — Rus  | Newton — Engelsman    |
| Archimedes — Griek | Edison — Amerikaan | Huygens — Nederlander |

8. Leg op een leesplankje in het lokaal enige bijzondere actuele lektuur (ruimtevaart, Deltawerken). Speciaal leerlingen, die vroegtijdig met een proefwerk klaar zijn, kunnen hiervan gebruik maken.

9. Sleep niet met de vacuum-pomp. Zet deze onder de demonstratietafel en laat twee pijpjes (zoals voor de gasaansluiting) uit de tafel komen. Schakelaar omzetten en we kunnen direct „zuigen“ of „persen“.

10. Zorg, dat de leerlingen tijdens het elektrisch practicum duidelijk weten of er spanning op de klemmen staat. Misschien door middel van een rode lamp of met een grote voltmeter.

11. Probeer modellen en doorsneden van de industrie te betrekken (kabel-model, doorsnede van accu, relais).

12. Hang een bijzondere prestatie van een leerling ten toon in het lokaal (constructie van de 11 beelden bij een hoekspiegel van 30°, zelfgemaakte foto's van lissajous-figuren).

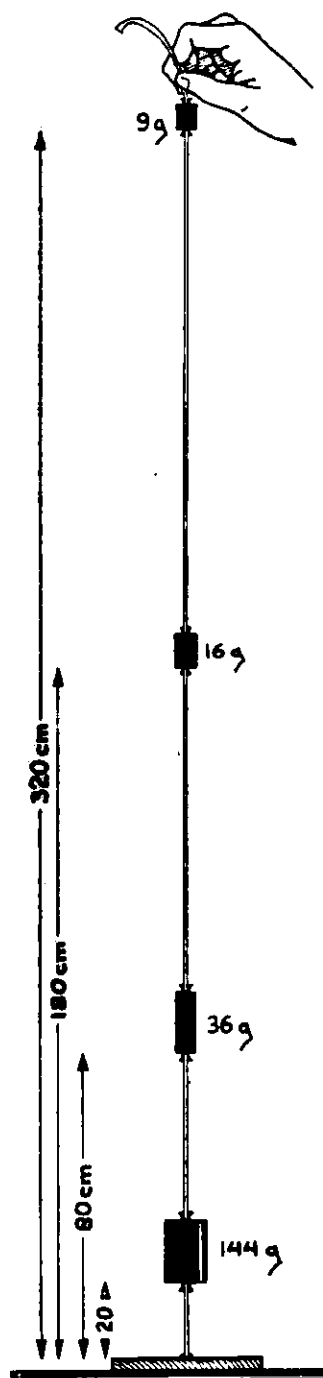
13. Maak een „kroonlijst“ van leerlingen die in de diverse jaren voor hun eindexamen 8 of meer verwierven.

14. Voorzie een moderne foto van een natuurkundig onderschrift. (mensen, die zich verdringen om effecten op de beurs — krachtveld; Johnson, kogelstotend bij de Olympische spelen te Rome 1960 — kracht = massa  $\times$  versnelling; een vloer vol dansparen — waterstofgas).

15. Maak alle elektrische verbindingen rigoureu uniform, te weten: bussen + banaanstekkers (en alle oogjes, staafjes, pinnetjes en mannetjes opruimen!).

## VALKOORD

door IR. H. M. MULDER e.i.



Bij het verrichten van valproeven moet men beschikken over grote hoogten (Galilèi-toren van Pisa – 56 m) of over tijdmeters met grote nauwkeurigheid (centiseconden). Het lijkt moeilijk om met eenvoudige hulpmiddelen de valwetten te controleren. Misschien levert de volgende proef een bijdrage.

In een dun touw worden enkele gewichten geknoopt. Als we zo'n touw vertikaal boven de grond houden en daarna loslaten, horen we de gewichten op de grond botsen.

Als nu de afstanden tussen de gewichten gelijk zijn, zullen de tikken elkaar in versneld tempo opvolgen, tengevolge het versnelde karakter van de valbeweging. We willen nu uitgaande van de valformule de afstanden zo kiezen, dat dit tikken eenparig wordt. Dit is namelijk met het oor goed te verifëren.

Aan een plankje is een touw geknoopt. Aan het eind ervan komt op 320 cm boven het plankje een messinggewicht. De valtijd hiervoor is 0,8 sec. De drie andere gewichten komen op 180, 80 en 20 cm zodat de valtijden daarvoor 0,6; 0,4 en 0,2 sec. bedragen.

De totale lengte is zo gekozen dat men, op een tafeltje staande, het geheel vertikaal boven de grond kan houden (het plankje op de grond); het is ook mogelijk aan het eind van het touw een lusje te maken en dit van het eind van een stok (haak van een raamstok) te laten glijden.

Het enige ongemak is nu nog dat de tikken niet even sterk geluid produceren door het verschil in potentiële energie van de gewichten in de ruststand. Dit kunnen we verbeteren door de massa's ervan omgekeerd evenredig met de hoogte boven de grond te maken. De waarden 9 g, 16 g, 36 g en 144 g moeten daarom, althans in deze verhouding, worden gehandhaafd.

Het tikken van de vier gewichten verloopt dan zeer constant en vooral als we de proef een paar maal herhalen, is het effect zeer bevredigend."

## DE EXACTE SLINGERFORMULE

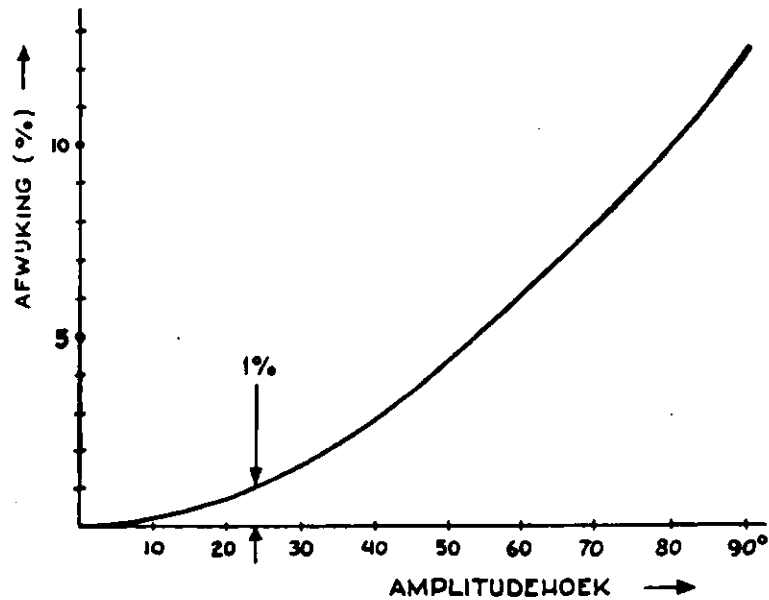
door IR. H. M. MULDER e.i.

Het is ons bekend dat de slingerformule  $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  alleen geldt bij kleine amplitudehoek  $\alpha$ . Verder zou de slingertijd dientengevolge van deze hoek afhankelijk zijn in tegenstelling tot de wet van het isochronisme volgens Galilei. Als men de differentiaalvergelijking voor de slingerende puntmassa opschrijft, krijgt men:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Prof. S. C. van Veen geeft in „handboek der wiskunde“ de volgende oplossing:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right\}$$



In bijgevoegde grafiek is aangegeven hoeveel procent fout ontstaat door de term  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  als men deze term en volgende zou weglaten.

Deze fout kan tot maximaal  $12\frac{1}{2}$  % oplopen (bij  $\alpha = 90^\circ$ ).

Blijft men onder een amplitudehoek  $24^\circ$  dan blijft genoemde fout onder 1 %.

Bij onderzoek blijkt de volgende term  $\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$  pas een afwijking van 0,9 % te geven bij  $\alpha = 90^\circ$ . De wet dat de slingertijd onafhankelijk van de amplitudehoek zou zijn, is dus onjuist.

Anderzijds mogen we zeggen dat de bekende eenvoudige formule een nauwkeurigheid geeft, die door onze meetnauwkeurigheid niet wordt overtroffen, bij kleine amplitudehoeken, waarbij we de slingering nog duidelijk kunnen waarnemen. Dit alles geldt voor slingeren in vacuo.

Bij proefnemingen in lucht bleek dat de fout in de buurt van  $\alpha = 60^\circ$  wel tweemaal zo hoog is als in de grafiek is aangegeven (natuurlijk bij een bepaalde slinger).

Op het Mencia de Mendozalyceum te Breda krijgen de leerlingen onderstaand stencil, waarin ze geconfronteerd worden met een letterlijk verslag van een historische proef. Daarna wordt een analoge proef gedaan en vullen ze zelf de meetresultaten in.  
Ir. H. M. MULDER e.i.

## DE KROON VAN KONING HIËRO

Verslag en reproductie van een wetenschappelijke research in de oudheid. (in het jaar —250).

Opdracht: de koning van Syracuse roept de hulp in van de natuurkundige Archimedes in een rechtzaak. Het betreft een vermoeden van goudverduistering bij de fabricage van een kroon.

Na het beleg van Syracuse kwam Archimedes om door het zwaard van een Romeins soldaat. Livius geeft een beschrijving van dit beleg. De Romeinse *geschiedschrijver Vitruvius* (in het jaar +125) geeft het volgende verslag:

Hoewel er van Archimedes vele bewonderenswaardige uitvindingen zijn en op verschillend gebied, schijnt van alles dit wat ik ga uiteenzetten, van een wel onbegrensde schranderheid te getuigen.

Immers toen Hiëro, te Syracuse bekleed met de koninklijke macht na een gelukkig gevoerde oorlog, besloten had dat er in een bepaalde tempel voor de onsterfelijke goden een gouden votiefkroon geplaatst moest worden, besteedde hij het maken tegen een maakloon ervan aan en liet voor de aannemer het goud precies afwegen.

Deze leverde op de bepaalde tijd volkomen tot tevredenheid van de koning het handwerk af en scheen het gewicht van de kroon precies weer afgeleverd te hebben.

Nadat er aanwijzingen waren gekomen, dat er goud was gestolen en er evenveel zilver in deze kroon bijgemengd was, vroeg Hiëro, verontwaardigd over de hem aangedane smaad en daar hij niet kon vinden, hoe hij deze diefstal zou bewijzen, aan Archimedes, om hierover na te denken.

Terwijl deze zich toen hiermee bezig hield, kwam hij toevallig in een badhuis en terwijl hij daar zich neerliet in een badkuip, merkte hij op dat zoveel als er van zijn lichaam in kwam te zitten, er ook zoveel water over de badkuip heenstroomde. En daar dit hem de methode om achter die zaak te komen gewezen had, talmde hij niet, maar sprong van vreugde uit de badkuip en naakt naar huis lopend, schreeuwde hij luid, dat hij gevonden had wat hij zocht. Want hardlopend schreeuwde hij het telkens opnieuw in het Grieks. Toen heeft hij, naar men zegt, uitgaande van dit begin van zijn ontdekking twee klompen gemaakt van gelijk gewicht, als waarvan ook de kroon geweest was, een van goud, de ander van zilver. Toen hij zo gedaan had, vulde hij een ruime vaas tot aan de bovenste rand met water en liet daarin de klomp zilver neer. Zoveel als er aan omvang hiervan in de vaas werd neergelaten, zoveel water stroomde eruit. Nadat hij nu de klomp eruit gehaald had, goot hij, zoveel minder als het geworden was, er weer in, na het met een pint gemeten te hebben zodat het op dezelfde wijze, als het vroeger geweest was, gelijk gemaakt werd met de rand. Op die manier vond hij dientengevolge, hoeveel gewicht aan zilver beantwoordde aan een bepaalde maat water.

Toen hij dit onderzocht had, liet hij op gelijke wijze een klomp goud in een volle vaas neer en na er die uitgehaald te hebben vond hij, na op dezelfde wijze gemeten te hebben, dat er niet zoveel water ontbrak maar minder, naarmate een klomp goud met hetzelfde gewicht van minder groot volume was dan een klomp zilver.

Daarna nu liet hij, na de vaas opnieuw gevuld te hebben de kroon zelf in het zelfde water neer en vond dat er meer water uitgestroomd was bij de kroon dan bij de gouden klomp van hetzelfde gewicht en zo vanuit het feit, dat er meer water ontbrak bij de kroon dan bij de klomp, verder redenerend, ontdekte hij het mengen van zilver bij het goud en onweerlegbaar de diefstal van de aannemer.

Wij zullen het experiment nu herhalen. Een kroon van messing bevat delen koper en zink. Twee blokken zink en koper zijn even zwaar als de kroon. Bepaal de inhoud van de 3 voorwerpen door onderdompeling. Hier volgt het meet- en reken-resultaat aan de bij ons bestaande modellen.

| metaal | gewicht in lucht | gewicht onder water | inhoud             | $s_g$ |
|--------|------------------|---------------------|--------------------|-------|
| koper  | 565 g            | 501 g               | 64 cm <sup>3</sup> | 8,83  |
| zink   | 565 g            | 486 g               | 79 cm <sup>3</sup> | 7,15  |
| kroon  | 565 g            | 497 g               | 68 cm <sup>3</sup> | 8,31  |

Stel de kroon bevat  $x$  cm<sup>3</sup> zink. Nu geldt de volgende vergelijking

$$565 = 7,15 x + (68 - x) \cdot 8,83$$

$$565 = 7,15 x + 600,4 - 8,83 x$$

$$1,68 x = 20,8$$

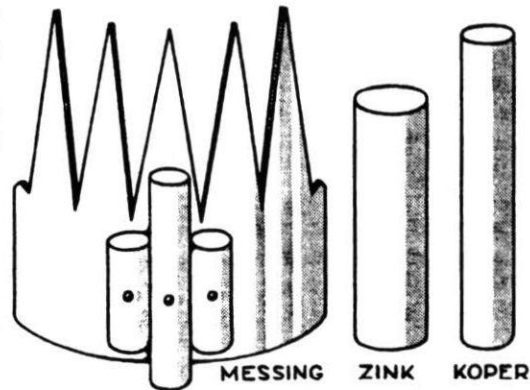
$$\text{dus } x = 20,8 \text{ cm}^3$$

De kroon bevat dus

149 g zink ofwel

$$\frac{149}{565} \times 100\% = 26,4\% \text{ zink}$$

en 73,6% koper



# Boyle en de K.L.M.

IR. H. M. MULDER (ARUBA)

Vanuit Aruba vertrekt verschillende weekends een natuurkundeleraar naar St. Maarten om een groep van 10 cursisten te trainen in experimenteren. Dat is een afstand van 1000 km, wellicht binnen het koninkrijk een maximum van huis tot school! De bagage bestaat telkenmale uit wel 30 kg instrumenten.

Daarbij was de laatste keer de buis van Boyle, het populaire instrument ten dienste van het leerlingenpracticum. Er waren er 5 mee om de cursisten twee aan twee te laten meten.

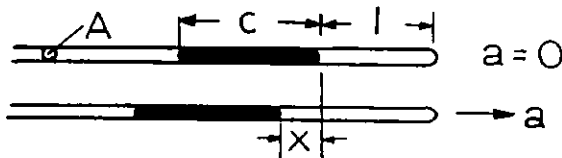
Om de garantie te hebben dat ze de afstand zouden overleven lagen ze, keurig samengebonden naast mij in de vliegrichting.

Toen het vliegtuig startte ging het kwik zich naar achteren verplaatsen en in plaats van controleapparaat te spelen voor de wet van Boyle, gedroegen de buizen zich als versnellingsmeters. Gedurende de 2½ uur vliegen met tussenlanding op Puerto Rico was er ruimschoots gelegenheid tot experimenteren en rekenen.

Hier volgt een kort verslag.

Een nauwe buis is aan een zijde open en aan de andere gesloten. Daar bevindt zich een afgesloten luchtkolom met lengte  $l$  en daarvoor een kwikdraad met lengte  $c$  en doorsnede  $A$ .

Dit zijn de gegevens als de buis horizontaal en in rust of eenparige beweging is.



Het vliegtuig start nu met versnelling  $a$  (de gesloten zijde van de buis naar voren).

De kwikdraad verschuift nu over een lengte  $x$  naar achteren. Als de buitenluchtdruk  $b$  is, wordt de binnendruk nu verlaagd tot

$$\frac{l}{l+x} \cdot b \dots$$

Het drukverschil wordt dan  $\frac{x}{l+x} \cdot b$

Dit drukverschil veroorzaakt de versnelling  $a$  voor de kwikkolom volgens de vergelijking

$$F = m \cdot a \text{ ofwel } \frac{x}{l+x} \cdot b \cdot A = c \cdot A \cdot s_m \cdot a$$

$$\text{dus } a = \frac{bx}{c \cdot s_m (l+x)} \quad (1)$$

Indien men de buis bij de start met de open zijde naar voren houdt is de versnelling te bepalen uit:

$$a = \frac{bx}{c \cdot s_m (l-x)} \quad (2)$$

De meting van  $a$  is dan minder gevoelig, omdat dan bij dezelfde waarde van  $a$  de gemeten waarde van  $x$  kleiner zal zijn, hetgeen gemakkelijk uit (1) en (2) is af te leiden.

Andere methoden om de gevoeligheid te vergroten zijn:  $c$  groot,  $l$  groot,  $s_m$  groot.

In onze buizen was hier aardig aan voldaan met:

$$l = 0,2 \text{ m} \quad c = 0,25 \text{ m} \quad \text{en} \quad s_m = 13600 \text{ kg/m}^3$$

Als maximale verplaatsing werd bij een start afgezien  $x = 2 \text{ cm}$  of  $0,02 \text{ m}$ .

$$\text{Dan volgt } a = \frac{10^5 \cdot 0,02}{0,25 \cdot 13600 \cdot 0,22} = \dots$$

$$= 2,68 \text{ m/s}^2 = 0,37 \text{ g}$$

Het was overigens interessant hoe reeds geringe snelheidsveranderingen bij het kwik te zien waren. De totale rembeweging bij de landing op San Juan duurde wel een half uur.

|                  |                         |                    |
|------------------|-------------------------|--------------------|
| $t = 0$          | kwik verplaatst zich    | 2 mm               |
| $t = 12$ minuten | 'fasten your seatbelts' | $x = 5 \text{ mm}$ |
| $t = 17$ minuten | kleppen uit             | $x = 5 \text{ mm}$ |
| $t = 28$ minuten | landing                 | $x = 8 \text{ mm}$ |

Ook de centripetale versnelling in de bochten was goed te zien door een buis loodrecht op de andere te zetten en weer te letten op de verplaatsing van het kwik.

Een bijzonder probleem bleek: hoe garanderen we een horizontale stand voor de buis voortdurend tijdens de vlucht?

In ons geval bereikte het vliegtuig tijdens de vlucht geen hogere versnelling of vertraging dan ongeveer  $1/3 \text{ g}$ . Voor een versnelling  $g$  moest het kwik zich  $10 \text{ cm}$  verplaatsen.

# Natuurkunde onder de douche

IR. H. M. MULDER (Aruba)

Het is vaak mogelijk met weinig ingewikkelde middelen, aan een schijnbaar eenvoudige problematiek, volwaardig natuurkundig onderzoek te verrichten.

Uit de muur van een douchecel komt een dunne koperen pijp naar buiten, aan het eind omgebogen en uitlopend in de sproeier.

Opgemerkt wordt dat, bij het openzetten van de kraan, de pijp enigzins omhooggedrukt wordt door de reactiekracht van het uitstromende water en wel des te meer naarmate de stroomsterkte groter is.

Het verschijnsel nodigt uit tot een geschikt stuk meetwerk voor onze leerlingen.

## Theorie:

De grootheden die hier een belangrijke rol spelen, zijn:

de stuwkracht  $F$  (in N)  
 de uitstroomsnelheid  $v$  (in m/sec)  
 de stroomsterkte  $I$  (in kg/sec)  
 verder de doorsnede van de waterstraal  $A$  (in  $m^2$ ) en de soortelijke massa van de vloeistof  $s$  (in  $kg/m^3$ )

Uitgangspunt is de wet van Newton:

$$F \cdot \Delta t = v \cdot \Delta m$$

ofwel  $F = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v$  en in ons geval  $F = I \cdot v$  (a)

Het doorgestroomde volume per sec is  $A \cdot v$ ; dus de doorgestroomde massa per sec of de stroomsterkte is  $A \cdot v \cdot s$  dus  $I = A \cdot v \cdot s$  (b)

Uit combinatie van (a) en (b) volgen nog:

$$F = A \cdot v^2 \cdot s \quad (c)$$

en

$$F = \frac{I^2}{A \cdot s} \quad (d)$$

samenvattend:  $I$  is evenredig met  $v$   
 $F$  is evenredig met  $v^2$   
 $F$  is evenredig met  $I^2$

Formule (c) lijkt de meest belangwekkende.

Het doel van de meting wordt nu speciaal de formules (c) en (d) te testen.

## Uitvoering:

We laten eerst uit de pijp, die aan de kraanzijde ingeklemd zit en aan het andere eind voorzien is van een kort uitstroompijpje, langzaam water lopen. We sluiten dan de kraan en de pijp blijft vol water staan. Deze stand van de pijp geldt als nulstand voor de meting.

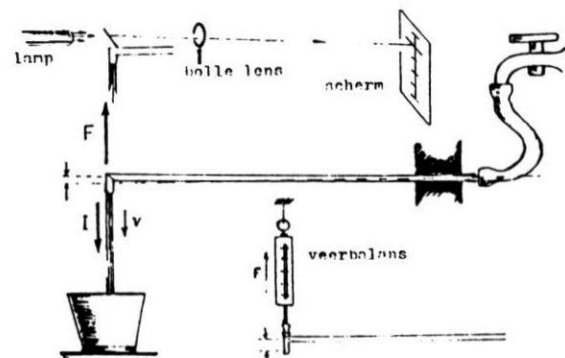
Bij het uitstroomgat wordt een veerbalans aangehaakt en een schaalverdeling aangebracht (de uitwijking omhoog, als functie van de kracht).

Het is hierbij raadzaam een vergrote schaal te maken door projectie.

Daartoe is aan het pijpeind een horizontaal draadje gesoldeerd dat door een lamp beschenen wordt.

De schaduw van het draadje dient als voorwerp voor een bolle lens, die een vergroot beeld op een scherm geeft.

Op dit scherm werd de krachtschaal aangebracht. Bovendien komt men tijdens de meting zo niet in aanraking met de pijp.



Inmiddels is een emmer geijkt op 1 liter, 2 liter . . . . De kraan wordt geopend en de waterstroom ingesteld op een bepaalde stuwkracht. Dan gaat de emmer eronder en wordt gemeten in hoeveel tijd een bepaalde hoeveelheid water in de emmer loopt.

**Meetresultaten:**

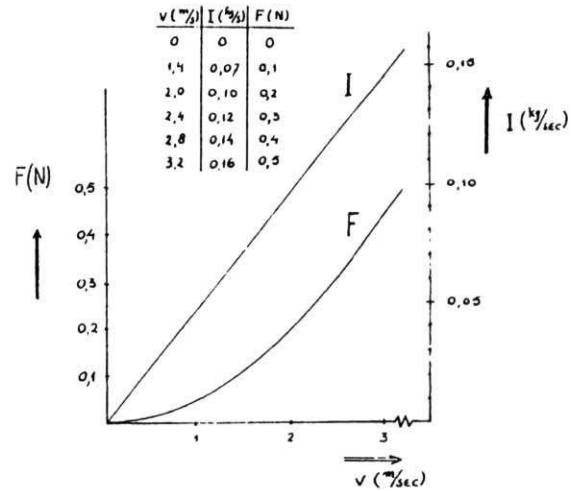
Pijplengte 1,2 m; pijpdiameter 8 mm, dus doorsnede van uitstroomopening  $5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ ; verder  $s = 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

- 1) stuwkracht 10 gf of 0,1 N  
in 57 sec loopt 4 kg water in de emmer
- 2) stuwkracht 40 gf of 0,4 N  
in 28 sec loopt 4 kg water in de emmer

Testen van de formules:

$$1) I_1 = \frac{4}{57} = 0,07 \text{ kg/sec dus } F = \frac{I^2}{A \cdot s} = \frac{0,07^2}{5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3} = 0,1 \text{ N}$$

$$2) I_2 = \frac{4}{28} = 0,14 \text{ kg/sec dus } F = \frac{I^2}{A \cdot s} = \frac{0,14^2}{5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3} = 0,4 \text{ N}$$



**Eindconclusie:** I tweemaal zo groot → F viermaal zo groot.

Speciaal de formule  $F = I \cdot v$  toegepast op straalvliegtuigen leert dat bij hetzelfde gasverbruik grotere voortstuwing kan ontstaan door de snelheid op te voeren, waarlijk een belangwekkend slot van een ogenschijnlijk simpel experiment.

De proef leent zich ook uitstekend als demonstratie van de wet van Newton tijdens de mechanicales.

## Slinger van Foucault

IR. H. M. MULDER

Jean Foucault, directeur van de Parijse sterrewacht, toonde in 1851 zijn beroemde slingerproef onder de hoge koepel van het Pantheon.

Hij bewees hiermee de rotatie van de aarde.

Als men de hal van het UNO-gebouw in New York betreedt, wordt men gefascineerd door een vergulde bol, die vanaf het plafond slingert binnen een ring. Het is de slingerproef van Foucault.

Het blijkt een Nederlands geschenk te zijn, met als tekst: 'it is a privilege to live to-day and

to-morrow'

JULIANA

Wij zijn toch een paar uur later nog eens teruggegaan om te zien of het slingervlak wel echt gedraaid was en dat bleek het geval.

New-York ligt op 41° breedte en het slingervlak draait er eenmaal rond in 36 h.

Wat ons meer bezig hield, was de vraag hoe de slinger eigenlijk in beweging werd gehouden.

De daartoe benodigde voorzieningen waren volledig onzichtbaar gehouden.

In het 'palais de la découverte' te Parijs staat



een exemplaar met het antwoord op deze vraag.

Het model is eenvoudig en geschikt om op school door de amanuensis te laten maken en dan een permanente plaats te geven.

Er zijn twee problemen op te lossen: vooreerst, hoe houden we de slinger blijvend in beweging; vervolgens, hoe beletten we dat de slinger ellipsen gaat maken.

De tekening (fig. 1) wijst de oplossing. De slinger bestaat uit een dunne staaldraad met onderaan een ijzeren massa. Het eind hiervan is konisch afgewerkt. Globale maten: lengte  $1\frac{1}{2}$  m; amplitude 4 cm. Bij het slingeren maakt de staaldraad telkens contact met een ringetje, onder het

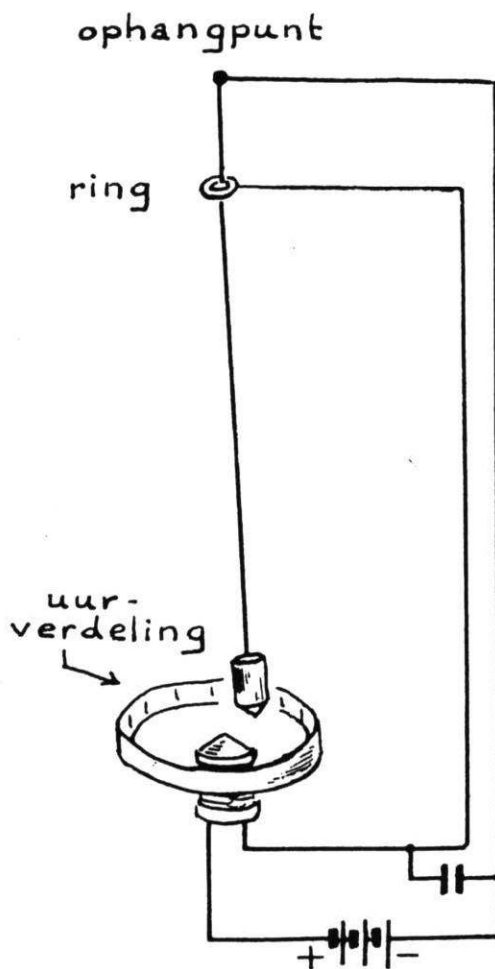
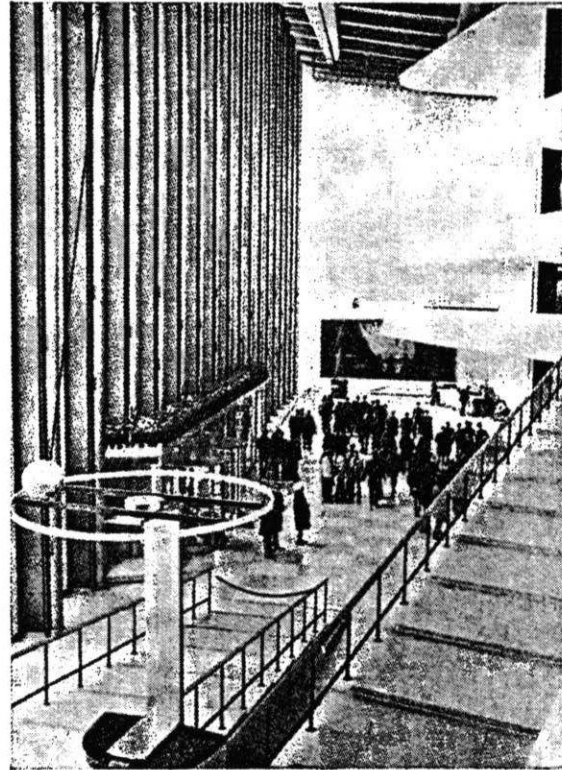


Fig. 1. Slinger van Foucault.



Hal UNO-gebouw

ophangpunt, waardoor een elektrisch circuit wordt gesloten en een elektromagneet korte tijd bekrachtigd wordt.

De ijzeren kern van deze magneet is ook puntig uitlopend.

Een condensator zorgt voor bescherming van de contactplaats bij de ring.

De wrijvingskracht langs de rand van het ringetje remt de ellipsvorming bij de slinger af.

Door het zelfinductieverschijnsel bij de spoel zal bij verbreken van het contact de stroom nog even aanblijven en bij maken van het contact nog even aarzelen, hetgeen de beweging gunstig beïnvloedt.

Bij de slinger in Parijs ( $49^\circ$  breedte) duurt de rotatie 31 h en 53 min.

In het algemeen geldt voor een willekeurige plaats op aarde als uitkomst voor de rotatietijd

$$T = \frac{24 \text{ h}}{\sin \alpha} \text{ waarin } \alpha \text{ de geografische breedte is.}$$

In ons land zal men in Delfzijl op 53° 20' een rotatietijd van 30 h vinden;  
in Vaals op 50° 50' een rotatietijd van 31 h.

Op een cilindrische band, geplaatst rond de

slingerende massa, kan men nog een uurverdeling aanbrenge.

Tijdens een lesuur van 50 min. draait het slingervlak bij ons dan ongeveer 10° en wel rechtsom.

## Een analoge werkwijze

H. M. MULDER

Sinds men, jaren geleden, in het elektrowarmtelaboratorium van de P.L.E.M. de analogie tussen thermische en elektrische geleiding in praktijk bracht, worden in toenemende mate thermische overgangverschijnselen met behulp van elektrische ekwivalenten bestudeerd.

In het bedrijfsgebouw van de P.L.E.M. te Maastricht is een geheel automatisch werkende zonwering ontworpen aan de hand van elektrische circuits.

Op eenvoudiger niveau wordt in de tuinbouwtechniek bij de warmtegeleiding van pijpen en wanden, gemeten vanuit de vergelijkbare elektrische situatie. Immers: elektrische schakelingen zijn eenvoudig te realiseren en de rekenregels zijn genoegzaam bekend. Daarom lijkt het belangrijk ook onze leerlingen kennis te laten maken met dergelijke werkmethoden.

Bij een vlakke wand met een dikte  $d$ , een oppervlakte  $O$  en wandtemperaturen  $T_1$  en  $T_2$ , waarbij  $T_1 > T_2$ , treedt gedurende een tijd  $t$  een warmteverplaatsing op, die evenredig is met  $T_1 - T_2$ , met  $O$  en met  $t$  en omgekeerd evenredig met  $d$ .

In formule (hierin stelt  $\lambda$  een constante voor):

$$Q = \lambda \cdot \frac{(T_1 - T_2) \cdot O \cdot t}{d}$$

of

$$\frac{Q}{O \cdot t} = \frac{\lambda}{d} \cdot (T_1 - T_2)$$

Het linkerlid is de warmtestroomdichtheid (de energiestroom per tijdseenheid per oppervlakte-

eenheid). Samenvattend:

de warmtestroomdichtheid is evenredig met het temperatuurverschil. Als eenheden gebruiken we hierbij: J, K, m,  $m^2$  en s.

Vergelijken we dit met de bekende wet van Ohm:

$$I = \frac{1}{R} \cdot (U_1 - U_2)$$

of

$$\frac{q}{t} = \frac{1}{R} \cdot (U_1 - U_2) \text{ waarbij } R = \rho \cdot \frac{d}{O}$$

of

$$\frac{q}{O \cdot t} = \frac{1}{\rho \cdot d} (U_1 - U_2) \text{ of } \frac{q}{O \cdot t} = \frac{\gamma}{d} \cdot (U_1 - U_2)$$

$\gamma$  is hierbij de elektrische geleidingscoëfficiënt.

In analogie definiëren we  $\lambda$  als de warmtegeleidingscoëfficiënt.

De eenheid daarvan wordt:  $\frac{J}{m \cdot s \cdot K}$  of  $\frac{W}{m \cdot K}$

Voorbeeld:

een bakstenen muur met geleidingscoëfficiënt  $0,872 \frac{W}{m \cdot K}$  heeft een dikte 11 cm, terwijl aan weerszijden een temperatuurverschil heerst van 10 °C of 10 K. Bepaal de warmtestroomdichtheid.

$$\frac{Q}{O \cdot t} = \frac{\lambda}{d} \cdot (T_1 - T_2) = \frac{0,872}{0,11} \cdot 10 = 79 \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \text{ of } 79 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Men noemt  $\frac{d}{\lambda}$  de warmteweerstand per oppervlakte-eenheid van de wand.

Zo geldt voor een bakstenen muur van 11 cm dikte:

$$\frac{d}{\lambda} = 0,126 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{K}}{\text{W}}$$

Voor een bakstenen muur van 22 cm dikte dus: 0,252. De omgekeerde waarde heet de warmte-doorgangscoefficiënt.

In fig. 1 is de warmtedoorgang en de daarbij horende temperatuursprongen bij een 11 cm dikke muur aangegeven.

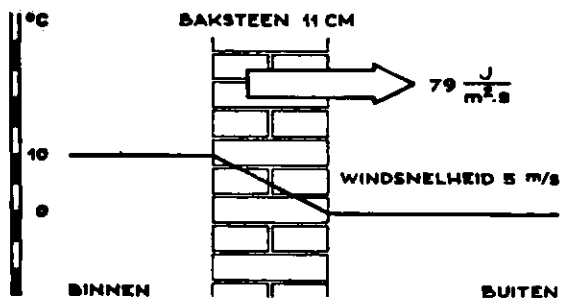


Fig. 1. Warmtestroom bij bakstenen muur (vereenvoudigd)

Nu is deze voorstelling van zaken nog wel te eenvoudig.

Het blijkt dat direct aan de buitenzijde van de muur al een temperatuursprong optreedt en evenzo aan de binnenzijde.

De werkelijke situatie staat in fig. 2.

Van het totale temperatuurverval, dat bij de bouw van verwarmde kassen voor de tuinbouw op 30 K wordt gesteld (binnen +20 °C, buiten -10 °C), blijkt slechts 44% zich binnen de muur af te spelen. Het overige verval treedt op in de dunne luchtlagen direct grenzend aan de steen.

We kennen deze lagen dus ook een weerstand toe, een soort overgangswaerstand.

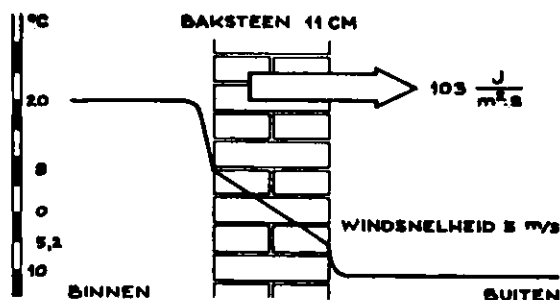


Fig. 2. Warmtestroom bij bakstenen muur

Als er geen luchtstroming is, kan deze gesteld worden op 0,123.

Bij luchtstroming langs de wand is de weerstand van de laag afhankelijk van de stroomsnelheid.

Verhoging van de luchtsnelheid verlaagt de warmteweerstand.

Bij 18 km/h of 5 m/s is de weerstand van een dergelijke laag 0,043.

De totale warmteweerstand per m<sup>2</sup> wand voor de serie luchtlaag binnen + baksteen (11 cm) + + luchtlaag buiten wordt dus: 0,123 + 0,126 + + 0,043 = 0,292. Omdat:

$$\text{warmtestroomdichtheid} = \frac{\text{temperatuurverschil}}{\text{warmteweerstand}}$$

volgt:

$$\frac{Q}{O \cdot t} = \frac{30}{0,292} = 103 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Men kan kwesties als temperatuurverloop, warmteverlies e.d. gemakkelijk bepalen mits men beschikt over een tabel met weerstandswaarden.

We ontlene deze gegevens aan de centrale school voor tuinbouwtechniek te Ede.

Hieruit blijkt dat kurk geweldig goed isoleert. Verder lijkt het warmteverlies vrijwel evenredig te zijn met de stroomsnelheid van de lucht.

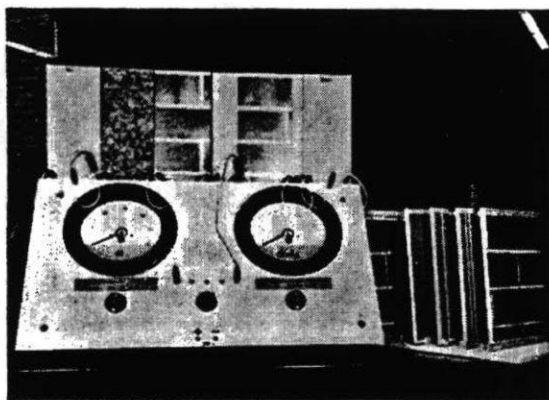
Men heeft metingen gedaan aan muren met diverse waarden voor de spouw.

Hierbij bleek de warmte-isolatie maximaal bij een spouw 5 cm.

| <i>materiaal</i>                | <i>afkorting</i> | <i>warmteweerstand</i><br>per $m^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right)$ |                         |
|---------------------------------|------------------|--|-------------------------|
| lucht binnen                    | bi               | 0,123  |                         |
| lucht buiten ( 5 m/s)           | bu 5             | 0,043  |                         |
| lucht buiten (10 m/s)           | bu 10            | 0,021  |                         |
| spouw 5 cm                      | sp 5             | 0,180  |                         |
| baksteen 11 cm                  | bk 11            | 0,126  |                         |
| baksteen 22 cm                  | bk 22            | 0,252  |                         |
| kurk 5 cm                       | kk 5             | 1,34   | $\frac{m^2 \cdot K}{W}$ |
| kurk 10 cm                      | kk 10            | 2,68   |                         |
| pleister 2 cm                   | pl 2             | 0,021  |                         |
| glas 3 mm                       | gl 3             | 0,0037   |                         |
| glas 6 mm                       | gl 6             | 0,0074   |                         |
| dubbelglas 3 mm,<br>spouw 10 mm | dgl 3-10         | 0,145  |                         |

Uit de getallen kan men verder gemakkelijk berekenen dat de warmte-isolatie bij dubbelglas van 3 mm met 10 mm spouw, waarbij men dan natuurlijk altijd nog de begrenzendende luchtlagen moet meetellen, wel tweemaal zo goed is als bij 6 mm glasruit.

De zin van dubbele ramen (betere isolatie bij gelijk materiaalverbruik) is hiermee uit het oogpunt van energiebesparing kwantitatief aangegeven.



*Meetpaneel voor temperatuur en stroomdichtheid*

Op de foto staat een meetopstelling waarbij men een wand heeft opgebouwd uit diverse elementen.

Aldus is een serieschakeling tot stand gebracht van:

bi + kk 10 + bk 11 + sp 5 + bk 11 + pl 2 + bu 5  
totaal 7 elementen.

De totale warmteweerstand per  $m^2$  wordt, aldus (zie tabel):

$0,123 + 2,68 + 0,126 + 0,180 + 0,126 + 0,021 + 0,043$  ofwel

$$3,3 \frac{m^2 \cdot K}{W}$$

De warmtestroomdichtheid door de wand:

$$\frac{30}{3,3} = 9,1 \frac{W}{m^2}$$

De rechter meter wijst dit bedrag aan.

In fig. 3 is het schakelschema verder toegelicht. De temperatuurmeter bij schakelaar in stand 4, meet het temperatuurverschil tussen een punt in de kas en het punt op het eind van de spouw.

Bij een totaal temperatuurverschil van 30 K blijkt het verschil tussen deze punten 28,3 K te zijn. Men kan de schakelaar ook in stand 1 zetten. Dan meet men de temperatuursprong in de dunne luchtlag bij de kurkwand. Deze blijkt 1,1 K te zijn. In fig. 4 is het schema van de temperatuursprongen op schaal uitgezet.

Door nog meer verbindingen te maken kan men tevens andere temperatuurverschillen aflezen bij andere standen van de betreffende schakelaar.

Hoe moet men nu de schakeling elektrisch realiseren? We zouden wel eens een kijkje achter de schermen . . . achter het paneel willen nemen.

Wel:

de 'K-meter is in werkelijkheid een voltmeter, terwijl de ' $J/m^2 \cdot s$ -meter' in werkelijkheid een milli-ampèremeter is.

De V-meter heeft meetbereiken 0,3 V en 3V overeenkomend met 3K en 30 K.

De mA-meter heeft meetbereiken 5 mA - 50 mA - 500 mA overeenkomend met

$$5 \frac{W}{m^2} - 50 \frac{W}{m^2} - 500 \frac{W}{m^2}$$

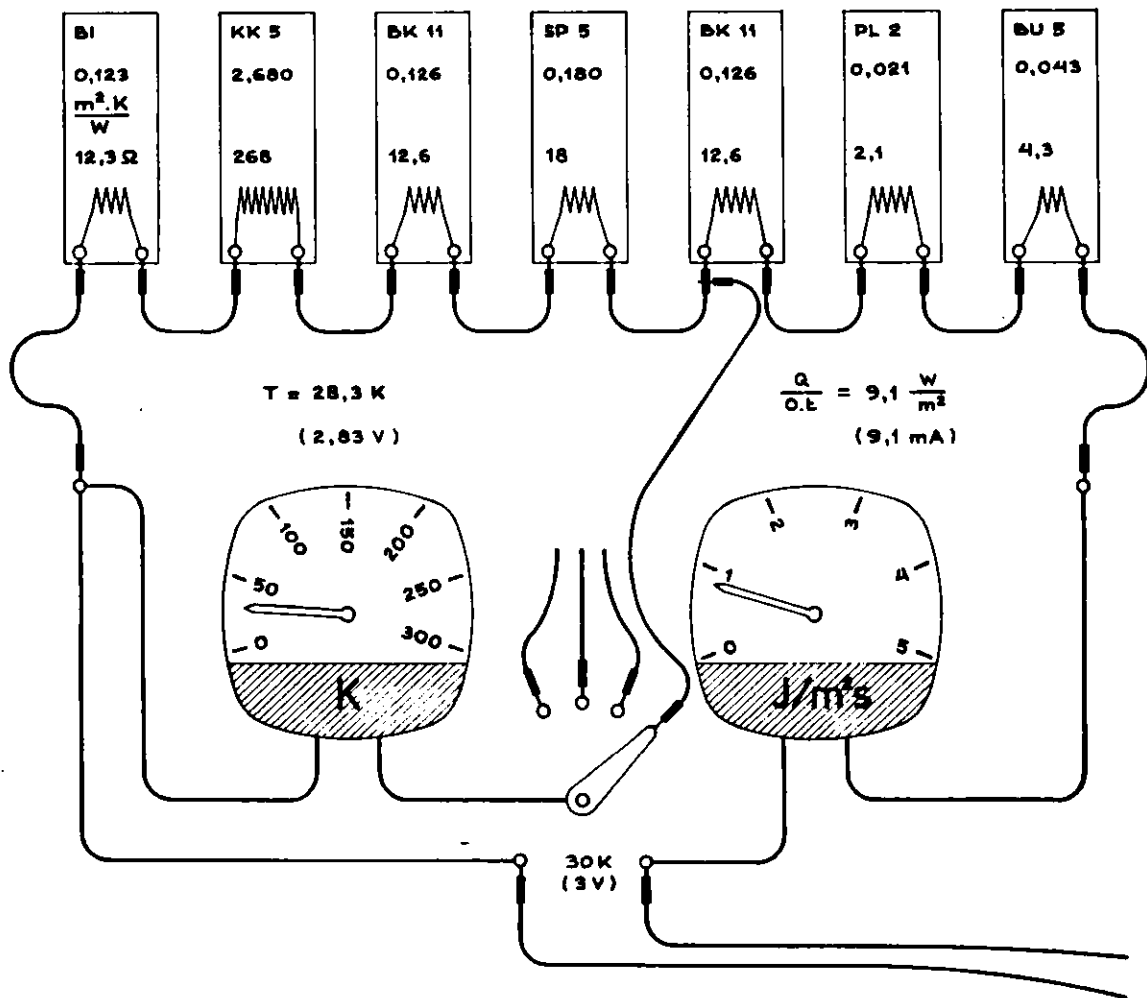


Fig. 3. Schema meetpaneel

Hieruit volgt dat een warmteweerstand per  $m^2$  ter grootte  $l \frac{m^2 \cdot K}{W}$  overeen moet komen met 100 Ohm. De 'warmte-isolatie-elementen' zijn dus gewoon elektrische weerstanden.

Zo is bk 11 een weerstand 12,6 Ohm, gl 3 is 0,37 Ohm enz.

Het eerste werk is deze weerstandswaarden secuur af te meten, vervolgens meters met passende bereiken te vinden.

Dan zal het niet moeilijk zijn de opstelling te realiseren, zodat ook leerlingen ermee kunnen werken.

Suggesties voor enkele opdrachten:

1. bouw de serieschakeling: bi, gl 3, bu 5. Stel in:  $\Delta T = 30 K$ . Lees de stroomdichtheid af.
2. bouw: bi, gl 6, bu 5. Lees weer de meters af. Waarom is de stroomdichtheid nu niet de helft? De warmteweerstand van het glas is toch dubbel.
3. men bouwt een bakstenen muur van 11 cm en daar direkt tegenaan een tweede met gelijke stenen. Het was ook mogelijk geweest een spouw 5 cm aan te houden. Hoeveel maal groter zou dan het isolerend vermogen geweest zijn?
4. bouw: bi, kk5, bk 11, sp 5, bk 11, bu 10.

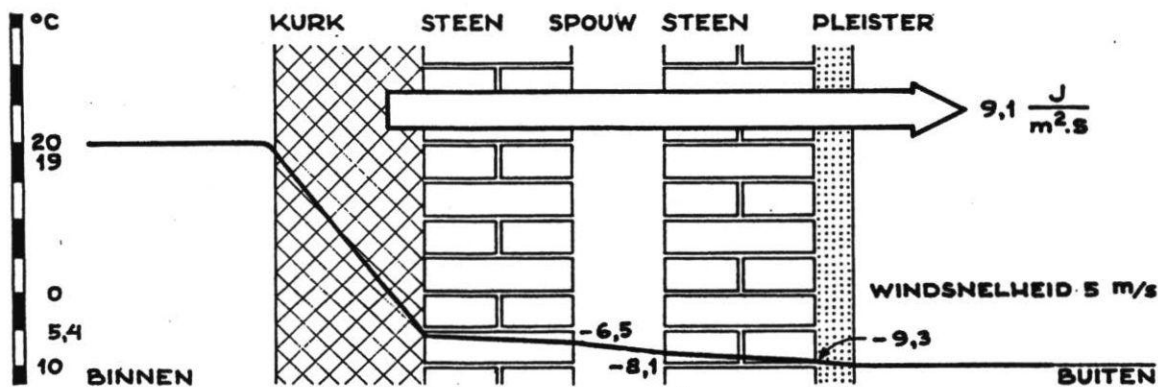


Fig. 4. Warmtestroom bij geïsoleerde spouwmuur

- Zet bij:  $\Delta T = 30 \text{ K}$ , na meting, op mm-papier het gehele temperatuurverloop door de wand uit.
- hoeveel J energie gaat per uur door  $3 \text{ m}^2$  glaswand van 6 mm dikte als de temperatuur binnen  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  is en buiten  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ ?
  - hoe stel je in verband met warmtegeleiding het verschil voor tussen twee even grote en even dikke glasplaten in serie en dezelfde

parallel? Hoe is dan de verhouding der warmteweerstand?

- Men noemt  $T/d$  de temperatuurgradiënt en drukt deze uit in  $\text{K/m}$ .  
In welk deel van de wand in opgave 4 is de waarde ervan maximaal?  
Bepaal daar die waarde.  
Welke elektrische grootte is met de temperatuurgradiënt analoog?

## 'g' met 8 decimalen

H. M. MULDER, leraar natuurkunde te Breda

In Sèvres bij Parijs ligt het 'bureau des poids et des mesures', waar o.a. de standaardkilogram bewaard wordt.

Vaak is in onze fantasie dit bureau een soort museum, waar een eenzaam man namens ons de wacht houdt bij het blok platina-irridium.

Een bezoek aan dit instituut geeft een heel andere indruk.

Gelegen op de weg naar Versailles in het 'parc St. Cloud' is het een laboratorium en conferentiecentrum. Het instituut heeft tot doel:

- de grondeenheden vast te leggen en te bewaren
- vaststelling van constanten (zoals  $g$ ,  $h$ , ...)



coördinering van het meetwerk in de 40 aangesloten landen, met het doel op de tweejaarlijkse conferenties tot aanbevelingen te komen.

Eigenlijk ligt er, materieel gesproken, alleen de eenheid van massa. De eenheid van tijd berust bij de Sorbonne. De standaardmeter in de vorm van de platinastaaf is inmiddels museum geworden sinds volgens resolutie 6 van de elfde conferentie in 1960 de meter is bepaald als 1.650.763,73 golflengten in vacuo van krypton 86 van de oranje lijn behorend bij energieovergang van niveau  $2p_{10}$  naar  $5d_5$ .

Inmiddels lijkt ook de definitie van de ampère met de stroombalans alweer te verdwijnen.

De sfeer in het laboratorium is zeer apart.

Normaal gesproken doet men een meting om een grootheid te bepalen; hier gaat het voortdurend om grootheden die al bepaald zijn.

De sport is enkel de meetnauwkeurigheid op te voeren. Om een indruk te geven: g-bepaling.

Deze grootheid speelt een overheersende rol in tal van mechanische en elektrische problemen.

Zie hier een resultaat:

$$g = 9,80925949 \pm 5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2$$

De wiskundigen onder ons zullen wellicht hun neus ophalen en zeggen dat zij  $\pi$  wel eens hebben zien staan als

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 . . . . .

totaal met 3089 decimalen.

Hier ervaart men toch wel het verschil tussen wiskunde en natuurwetenschap.

Eén decimaal meer in  $\pi$  betekent: nog even verder doorrekenen; één decimaal meer in  $g$  betekent: een geheel nieuwe werkmethode.

In tegenstelling tot de mening dat  $g$  nauwkeurig wordt bepaald met een slingerproef, wordt hier  $g$  weer bepaald met een worpbeweging.

Een lichaam wordt in vacuüm geworpen in een paraboolbaan (fig. 1). De baan is vrijwel een verticale worp. Daarbij snijdt de kromme twee-

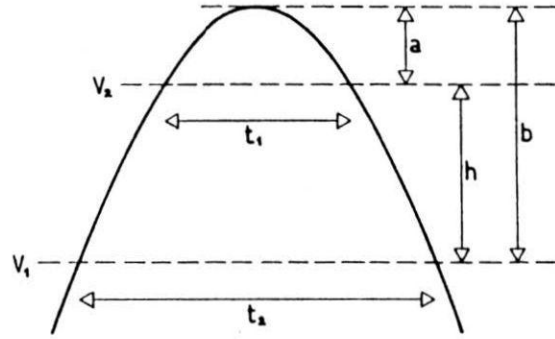


Fig. 1.  $g = \frac{8h}{t_2^2 - t_1^2}$

maal twee horizontale vlakken  $V_1$  en  $V_2$  met onderlinge afstand  $h$ .

Men meet het hoogteverschil en de twee tijdsverschillen.

$$\text{Uit } h = \frac{1}{2}g[(\frac{1}{2}t_2)^2 - (\frac{1}{2}t_1)^2] \text{ volgt } g = \frac{8h}{t_2^2 - t_1^2}$$

Bij de in Sèvres gebruikte meetopstelling zijn deze waarden:

|       |                      |
|-------|----------------------|
| $h$   | in de orde van 0,4 m |
| $t_1$ | 0,2 s                |
| $t_2$ | 0,6 s                |

met een relatieve fout van enkele keren  $10^{-10}$ ! De bovengenoemde waarde van  $g$  geldt voor een plaats aangeduid als Sèvres-A, welke in het laboratorium gemerkt is met een metalen plaat in de vloer. Op het ogenblik meet men een paar meter verderop en de uitkomsten daar zijn al weer merkbaar anders en geeft men aan met Sèvres-A2.

De praktische uitvoering is verder aldus:

Het afgeschoten lichaam bestaat uit een samenstel van 3 vlakke onderling loodrecht op elkaar staande spiegels, waarvan het zwaartepunt samenvalt met de top T ervan.

Een dergelijke kubus-hoekspiegel heeft de eigenschap dat een lichtstraal die erop valt steeds in dezelfde richting wordt teruggekaatst, welke

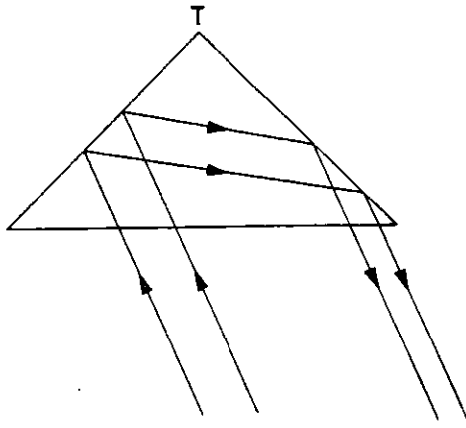


Fig. 2a. vlakke hoekspiegel

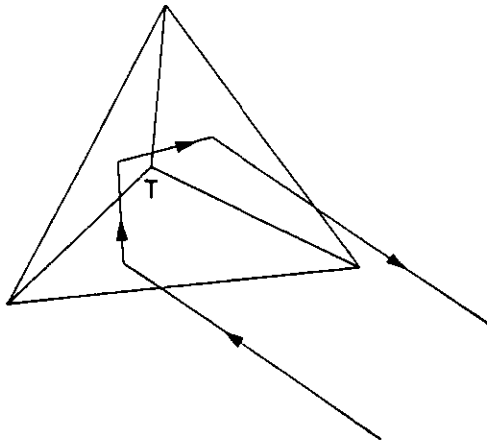


Fig. 2b. kubus-hoekspiegel

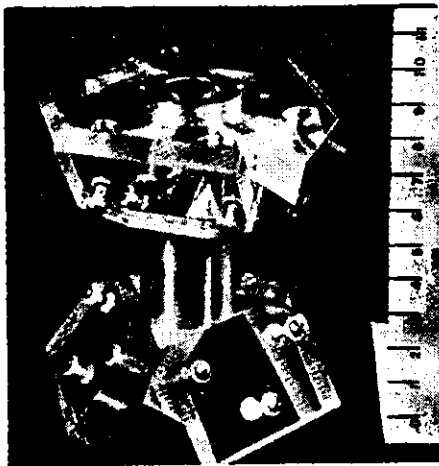


Fig. 2c. kubus-hoekspiegel (430 g)

ook de stand van het lichaam is. In fig. 2a is dit te zien voor een vlakke situatie, in fig. 2b voor de ruimtelijke. Tevens blijven de weglengten en daarmee de fase onveranderd. Fig. 2c toont het werkelijke toestel met 430 g massa. In fig. 3 zijn  $S_1$ ,  $S_2$  en  $S_3$  vaste spiegels.

L is een witte lichtbron. B is een gedeeltelijk doorlatende vaste plaat. Deze verdeelt de lichtbundel vanuit L in twee deelbundels die met elkaar kunnen interfereren volgens Michelson.

Wanneer de top T station  $V_1$  passeert is de weglengte voor de deelstraal  $BTS_3TB$  dezelfde als voor de deelstraal  $BS_1B$ .

Wanneer T station  $V_2$  passeert zijn de weglengten  $BTS_3TB$  en  $BS_2B$  onderling gelijk.

Deze gelijkheid is de voorwaarde voor versterkingspieken bij het witte licht, gemeten in de vorm van stroomvariatiën bij de foto-elektrische meetapparatuur P.

De lichtbundel heeft genoeg breedte zodat zowel op  $S_1$  als op  $S_2$  licht wordt weerkaatst.

Telkens dus als T één der niveaus  $V_1$  of  $V_2$  passeert ondergaat de lichtstroom op de ontvanger een korte en karakteristieke verandering (fig. 4).

De duur van dit maximum ligt in de orde van enkele  $10^{-7}$  sec.

Daartoe moet L een vermogen hebben van 30 MW en een lichtstroom produceren van 1 miljard lumen, hetgeen telkens ongeveer 1 microseconde kan worden geleverd. De lichtmaxima op P zijn tevens begin en eind van het tellen van impulsen geleverd door een hoogfrequente oscillator.

De afstand h is gelijk aan de halve afstand tussen de spiegels  $S_1$  en  $S_2$ .

Ook deze afstand wordt met een interferentiemethode bepaald met behulp van Kr 86 waarmee juist de meter gedefinieerd was. De golflengte van licht is zodoende niet alleen theoretisch maar ook praktisch onze nieuwe meetlat geworden.

Het bereikte resultaat is dermate nauwkeurig dat de worphoogte niet meer mag zijn dan 40 cm, wil men al niet de verandering in g constateren.

Immers de verhouding van g op het aardoppervlakte



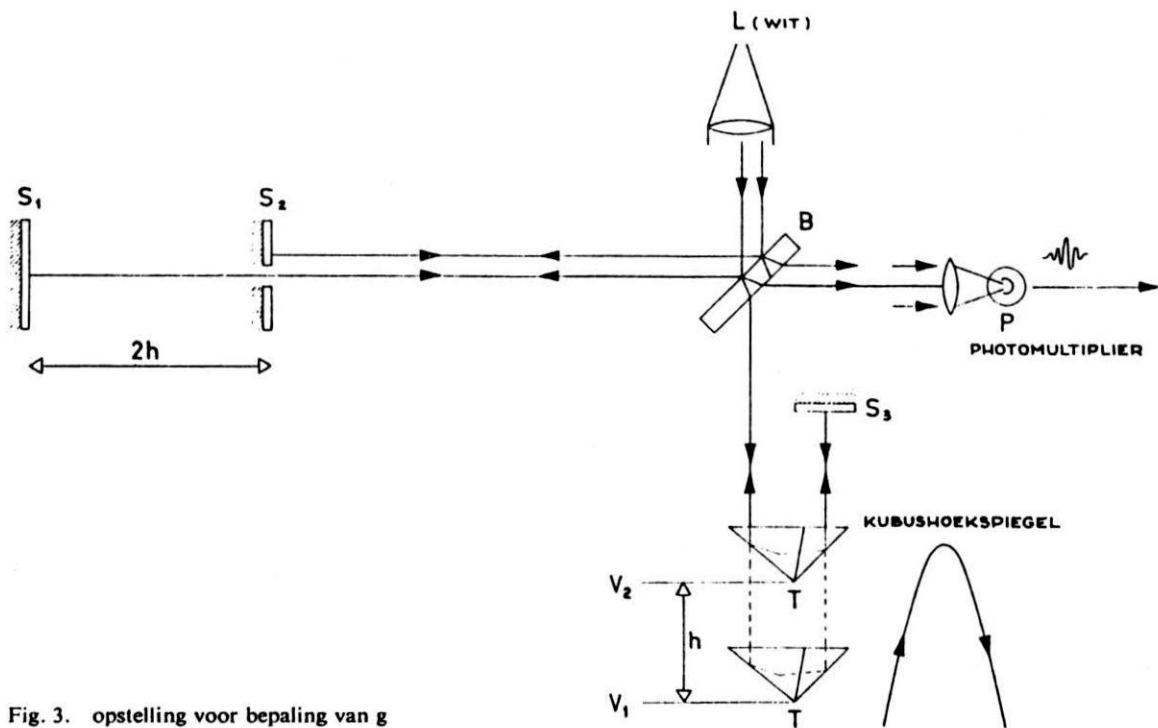


Fig. 3. opstelling voor bepaling van g

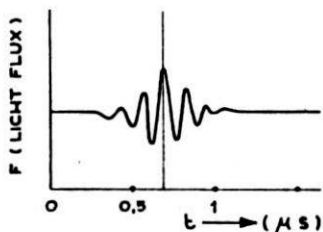


Fig. 4. lichtmaximum

vlak en de waarde ervan één meter er boven, is aldus:

$$g : g' = 6400^2 : 6400,001^2 = 40960000 : 40960013$$

$$\text{dus } \frac{\Delta g}{g} = \frac{13}{40960000} = 3 \cdot 10^{-7}$$

De eerder genoemde waarde van g is een gemiddelde van 50 metingen gedaan in juni 1969. Sindsdien worden er maandelijks nieuwe bepalingen gedaan waarbij de eerste 6 cijfers achter de komma onveranderlijk zijn gebleven.

Veranderingen in de stand van het grondwater, zelfs van de luchtdruk hebben meetbare variaties in g tot gevolg. Maar deze openbaren zich pas bij de 7de en 8ste decimaal.

# Van 0 tot 100, een lange weg

IR. H. M. MULDER

Het is gebruikelijk de elementen te rangschikken volgens een bepaald systeem.

Vandaag kiezen we eens een andere volgorde en wel de historische. We willen nagaan in welk jaar een bepaald element gevonden werd.

Reeds in de oudheid waren een aantal elementen in zuivere toestand gesignaleerd, voornamelijk metalen. Vóór 1200 kende men: ijzer, koper, zilver, tin, goud, kwik en lood en als enige niet-metalen koolstof en zwavel.

De ontdekking ervan is zolang geleden dat een preciese datering van elk niet mogelijk is.

Rond 1200 kende men dus slechts 10% van de nu bekende elementen.

Rond 1250 werd Arsenicum ontdekt, rond 1450 Bismut; in 1604 Antimoon en in 1669 Fosfor. Tussen 1700 en 1800 werden een 10-tal nieuwe elementen aan de lijst toegevoegd, te weten: 1705 Titaan, 1735 Cobalt en Platina, 1746 Zink, 1751 Nikkel, dan volgen drie belangrijke gassen: 1766 Waterstof, 1772 Stikstof, 1774 Zuurstof. Vervolgens 1774 Mangaan, 1783 Wolfram, 1797 Chroom. Op het eind van deze eeuw valt de aandacht op het voor ons zo belangrijke element Uranium, het eerste met hoge atoommassa.

Ongeveer  $\frac{1}{4}$  deel van de elementen is dan bekend.

Na 1800 komt de grote stoot.

Het eerste decennium schijnt de kroon te spannen (een aantal minder bekende elementen wordt weggelaten). 1800 Kalium, 1807 Natrium, 1808 is een kampioensjaar met Borium, Magnesium, Calcium, Barium en Strontium. Dan 1810 Chloor, 1811 Jodium, 1817 Seleen, en Cadmium.

Vervolgens 1823 Silicium, 1826 Broom, 1827 Aluminium, 1828 Beryllium en Thorium.

1860 is het jaar, waarin Mendelejeff zijn beroemde lijst van het periodiek systeem voorstelde.

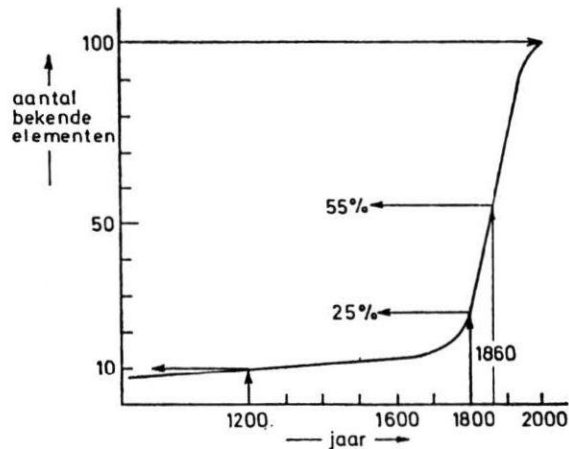
Dat was een belangrijke stap verder. De stand is nu 50%. 1860 Caesium, 1877 Lithium, 1878 Xenon, 1886 Fluor, dan de edelgassen 1894 Argon, 1895 Helium, 1898 Neon en Krypton en de radioactieve stoffen Radium en Polonium.

Zo staan we aan het begin van onze eeuw.

In deze periode zijn voornamelijk de zware elementen boven het getal 90 ontdekt.

Allereerst 1900 Radon, 1940 Neptunium en Plutonium, en na 1945 wordt het getal 100 volgeemaakt.

Alle lege plekken in het periodiek systeem zijn nu opgevuld. We kunnen alleen verwachten dat de lijst aan de staart steeds verder verlengd gaat worden. Het betreft echter stoffen met korte levensduur. Een groot stuk onderzoek is hiermee afgesloten. Tegen deze achtergrond doet de gedachte uit de verre oudheid, dat er 4 elementen bestaan, te weten: aarde, water, lucht en vuur, wel heel erg simpel aan.



# Natuurkunde in blik

IR. H. M. MULDER, *Nassauscholengemeenschap, Breda*

deze proef werd voorbereid en uitgevoerd voor een bijeenkomst van de vaksecties natuurkunde en wiskunde om de betekenis van de wiskunde in de natuurkunde te belichten

We nemen een cilindrisch blik, tikken een gaatje in de bodem, vullen het vat met water en laten het vervolgens weer leeg lopen. Aan dit verschijnsel is het nodig te rekenen en te meten.

Het is niet de bedoeling de nu volgende theoretische overwegingen de leerlingen helemaal door te laten werken. Wel om hen een aantal waarnemingen te laten doen waaruit de theorie grotendeels experimenteel te reconstrueren valt. Een interessante bijzonderheid daarbij is dat ze de hele proef desnoods thuis kunnen doen, want wat je nodig hebt is: een leeg groenteblik, een meetlatje en een horloge!

Er verschijnen allerlei relaties, verbeeld in grafieken van allerlei slag: parabool, hyperbool, rechte lijn.

De volgende grootheden spelen een rol (fig. 1):

- $v_0$  de snelheid waarmee het vloeistofoppervlak daalt
- $v_g$  de snelheid waarmee de vloeistof uit het gat stroomt

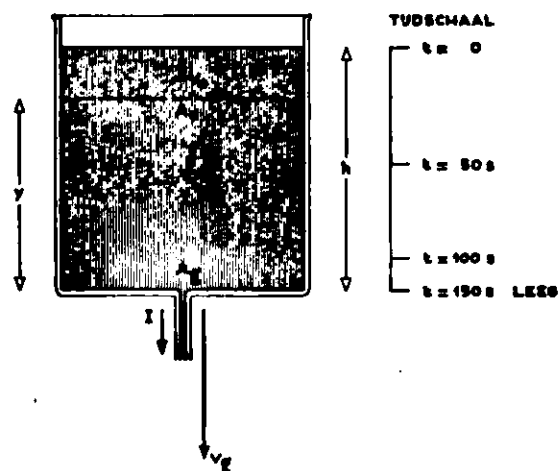


Fig. 1 Leegstromend cilindrisch vat.

- $A_0$  de doorsnede van het vat
- $A_g$  de doorsnede van het gat
- $h$  de oorspronkelijke vloeistofhoogte
- $y$  de vloeistofhoogte op een zeker moment
- $t$  de verlopen tijd sinds het begin van de uitstroming
- $T$  de totale tijd waarin het vat geheel leeg loopt
- $I$  de stroomsterkte ofwel het uitgestroomde volume per tijdseenheid

We zoeken nu een aantal relaties tussen enkele van de variabelen. Daarbij verwaarlozen we inwendige wrijvingsverliezen tijdens de uitstroming. Verder kunnen we, als het gat zeer klein is ten opzichte van de breedte van het vat zelf, dus als  $A_g \ll A_0$  ook stellen dat dan  $v_0 \ll v_g$ .

Bij onze experimenten namen we een blik met diameter 10 cm en een gat van 3 mm. Dat betekent  $A_0 : A_g = 1100 : 1$ . Dan geldt ook:  $v_g = 1100 \times v_0$ .

1. Allereerst willen we berekenen: in hoeveel tijd loopt het vat leeg?

We zouden kunnen stellen dat het vloeistofkolommetje dat zich vertikaal boven het gat bevindt, vrij omlaag valt. Uit  $h = \frac{1}{2}gt^2$  volgt  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ , zijnde de uitstroomtijd van dit kolommetje.

In het vat bevinden zich totaal  $\frac{A_0}{A_g}$ -keer zoveel van dergelijke kolommetjes.

De totale uitstroomtijd  $T$  volgt dan uit:

$$T = \frac{A_0}{A_g} \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{of} \quad T = c\sqrt{h} \quad \text{waarin}$$

$$c = \frac{A_0}{A_g} \sqrt{\frac{2}{g}}$$

Dit resultaat is iets meer verantwoord af te

leiden uit de stroomwet van Bernoulli, maar de leerlingen zijn vertrouwd met de valwetten.

Hier volgt bedoelde afleiding:

Als de vloeistof uitstroomt verdwijnt er boven steeds een zekere massa  $\Delta m$  met een snelheid  $v_o$  die dan vervangen wordt door eenzelfde hoeveelheid  $\Delta m$  bij het gat met snelheid  $v_s$ . Omdat de luchtdruk boven en onder gelijk is ziet de regel van Bernoulli er hier dan als volgt uit:

$$\frac{1}{2}(\Delta m) v_o^2 + (\Delta m) g y = \frac{1}{2}(\Delta m) v_s^2$$

omdat hierbij  $v_o \ll v_s$  (immers  $A_o \gg A_s$ ) kunnen we stellen:

$$g y = \frac{1}{2} v_s^2 \text{ en dus } v_s^2 = \sqrt{2gy}$$

en dit is juist de valformule.

Verder kan men dan afleiden:

$$I = \frac{dV}{dt} = A_o \cdot \frac{-dy}{dt} \rightarrow dt = - \frac{A_o}{A_s \sqrt{2g}} dy$$

$$\text{dus } T = \int_h^0 - \frac{A_o}{A_s \sqrt{2g}} dy \text{ en dus}$$

$$T = \frac{A_o}{A_s} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Ook dit resultaat is uit de valwetten af te leiden.

2. Hoe verandert het nivo van de vloeistof afhankelijk van de tijd?

Als  $t$  de tijd is verlopen sinds het begin van de uitstroming,  $T$  de totale tijd dan is  $T - t$  de nog resterende tijd. Volgens de vorige uitkomst geldt dan:

$$c\sqrt{y} = T - t \text{ of } c\sqrt{y} = c\sqrt{h} - t$$

$$\text{en dus } y = \left(\sqrt{h} - \frac{1}{c} t\right)^2$$

Deze grafiek is een parabool (fig. 2) met minimum 0 voor  $t = c\sqrt{h}$ .

De grafiek raakt daar de t-as.

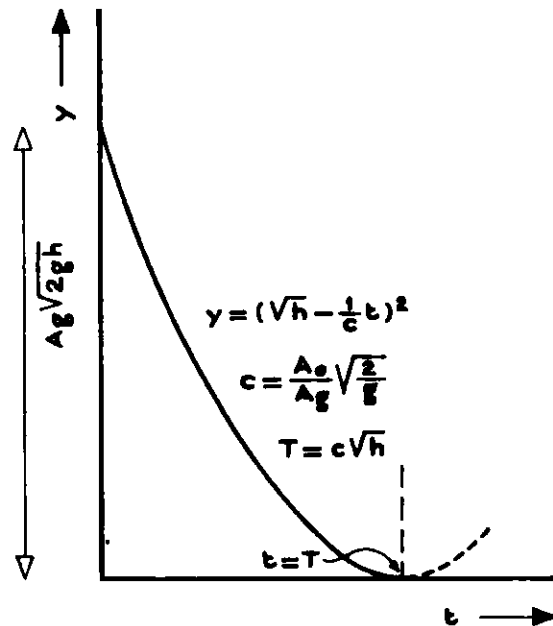


Fig. 2 Hoogte afhankelijk van tijd.

We kunnen het ook omgekeerd stellen:  $t$  als functie van  $y$

$$t = c(\sqrt{h} - \sqrt{y}) \text{ (waterklokformule)}$$

3. We willen nu bepalen hoe de uitstroomsnelheid  $v_s$  afhankelijk is van de vloeistofhoogte  $y$ .

Volgens dezelfde valwetten zal een vloeistofdruppel die van een hoogte  $y$  valt een snelheid bij het gat hebben:

$$v_s = \sqrt{2gy} \text{ (met verwaarlozing van } v_o)$$

Hoe verandert dezelfde  $v_s$  als functie van de tijd  $t$ ?

$$v_s = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{y} \text{ dus } v_s = \sqrt{2g} \left(\sqrt{h} - \frac{1}{c} t\right)$$

$$\text{en } v_o = \frac{A_s}{A_o} \cdot v_s \text{ dus } v_o = \frac{2}{c} \left(\sqrt{h} - \frac{1}{c} t\right) t$$

Beide grafieken (fig. 3) zijn recht en snijden de t-as bij  $t = T$ . Als hoogste beginwaarden bij  $t = 0$  vinden we:

$$v_{s, \max} = \sqrt{2gh} \text{ en } v_{o, \max} = \frac{2}{c} \sqrt{h}$$

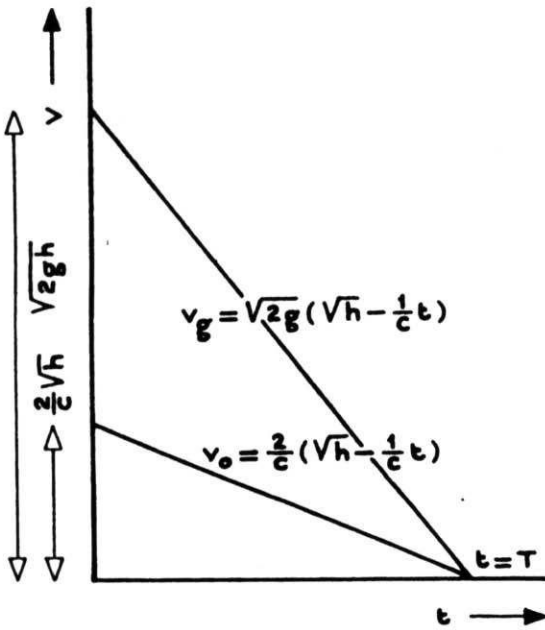


Fig. 3 Snelheid afhankelijk van tijd.

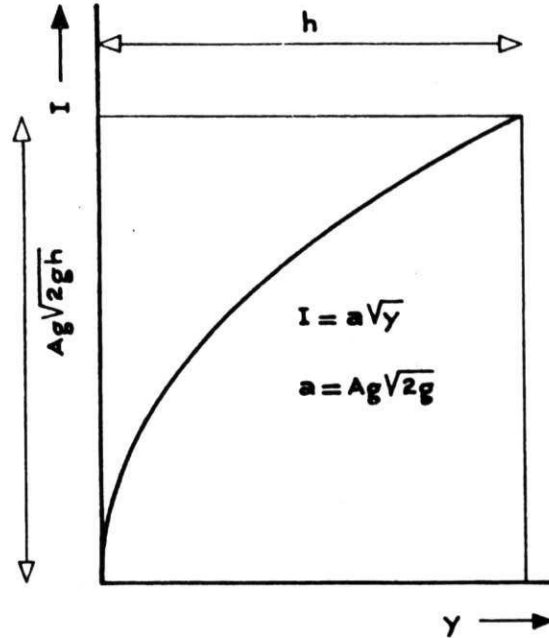


Fig. 4a Stroomsterkte afhankelijk van hoogte.

4. Tenslotte de relatie van de stroomsterkte  $I$  afhankelijk van hoogte  $y$  en tijd  $t$ .

$$I = Ag \cdot v_g = A_g \sqrt{2gy}$$

of  $I = a\sqrt{y}$  waarbij  $a = A_g \sqrt{2g}$

en  $I = A_g \sqrt{2g} \sqrt{y}$  dus  $I = A_g \sqrt{2g} (\sqrt{h} - \frac{1}{c} t)$

met maximale beginwaarde  $I_{max} = A_g \sqrt{2gh}$

De eerste grafiek (fig. 4a) is weer een parabool, de tweede grafiek (fig. 4b) is weer een rechte.

We gaan de zaken nu wat concreter stellen en passen de formules zo aan dat ze geldig zijn voor een normaal groenteblik van bijna 1 liter inhoud.

Zo'n blik is 11 cm hoog en heeft 10 cm diameter. Als beginhoogte voor het water kiezen we  $h = 10$  cm. In de bodem maken we een gaatje met een boortje van 3 mm.

De formules komen er nu als volgt uit te zien:

1.  $c = 502$   $T = c\sqrt{h} = 502\sqrt{0,1} = 502 \times 0,316 = 158$  s

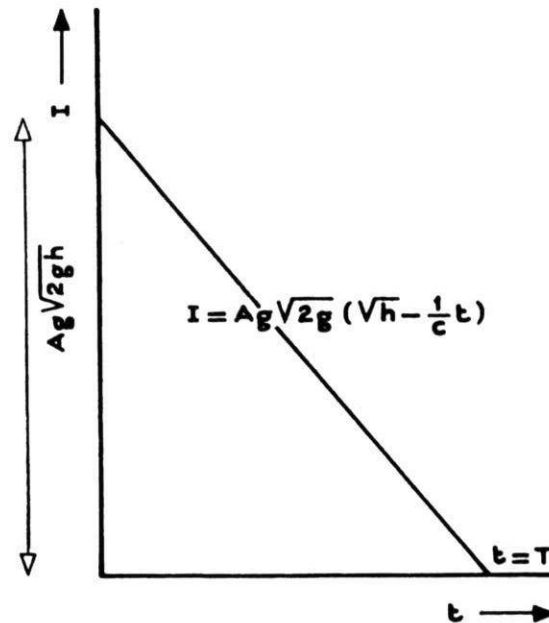


Fig. 4b Stroomsterkte afhankelijk van tijd.

2.  $y = \left(\sqrt{h} - \frac{1}{c} t\right)^2 = (0,3 - 0,002 t)^2$

3.  $v_g = \sqrt{2gy} = 4,4\sqrt{y}$   
 $v_g = 4,4(0,3 - 0,002 t)$   
 $v_o = 0,004(0,3 - 0,002 t)$   
 $v_{g,max} = 1,32 \text{ m/s}$  en  $v_{o,max} = 0,0012 \text{ m/s}$   
 $v_g : v_o = 1100 : 1$

4.  $I = A_g \sqrt{2g}(0,3 - 0,002 t) =$   
 $= 3 \cdot 10^{-5} (0,3 - 0,002 t)$   
 waarbij  $I_{max} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$  of  $9 \text{ cm}^3/\text{s}$

En wat doen we nu met dit alles voor de leerlingen? Het lijkt het verstandigst met hen zuiver experimenteel aan het werk te gaan. Daarvoor zouden de volgende opdrachten kunnen dienen.

*Leerlingenpracticum* (de meetresultaten staan aan het eind vermeld)

Ter beschikking is een leeg blik met een asdoorsnede van ongeveer  $10 \times 10 \text{ cm}$ . Tik met een spijker een gat van ongeveer 3 mm. Knip uit stevig karton een strook en maak daarop met strepen een cm-verdeling. Nummer de strepen 1-2-3-...-9-10. Zet de strook vertikaal tegen de binnenkant vast met een paperclip. Zorg dat de nul bij de bodem staat. Vul het blik met water tot een beginhoogte  $h = 10 \text{ cm}$ . Laat het water er nu weer uit lopen en bepaal de tijd telkens bij het passeren van een maatstreep.

Bij  $y = 10 \text{ cm}$  behoort dus  $t = 0 \text{ s}$ .

- Zet de meetresultaten in een tabel. Herhaal de meting nog twee keer.
- Bepaal zo nauwkeurig mogelijk de uitstroomtijd  $T$ . Beschouw de stroming daarbij geëindigd als de straal breekt.
- Teken de grafiek  $y = f(t)$
- Is de grafiek recht?
- Welke is de betekenis van de snijpunten

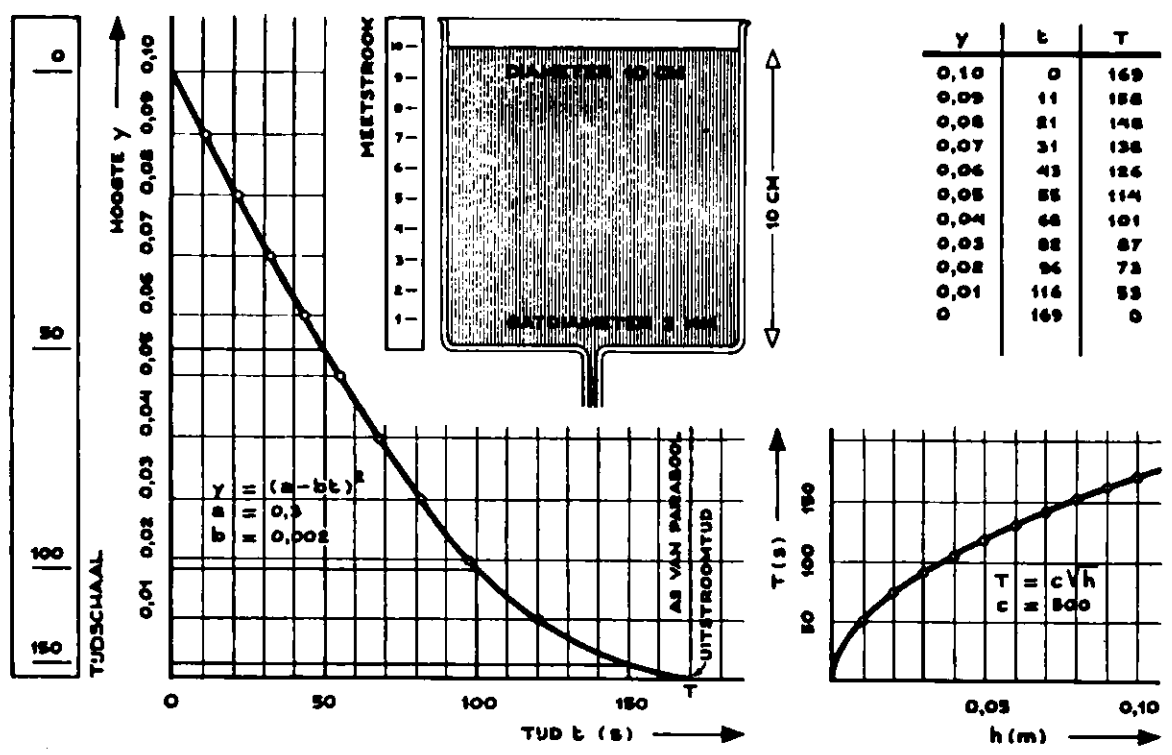


Fig. 5 Meting aan de uitstroming bij een groenteblik.

van de grafiek met de t-as en de y-as?

f. De relatie is van het type  $y = (a - bt)^2$  waarbij a en b constanten zijn. Probeer a en b bij benadering uit de grafiek te bepalen.

g. Hoe zou je dit blik kunnen gebruiken als waterklok? IJk met behulp van de grafiek een 10 cm lange meetstrook als tijdmeter. Geef daarop de punten aan voor 0 s, 50 s, 100 s, ... Is de tijdschaal lineair of niet-lineair?

Wat betekent dat eigenlijk?

2. a. Lees uit de tabel af door middel van aftrekkingen, hoe groot de uitstroomtijd T telkens is, als het blik leeg loopt van een hoogte 10 cm, 9 cm enz.

Zet ook die uitkomsten in een tabel.

b. Maak ook hiervan een grafiek waarbij  $T = f(h)$ .

c. Welke van de volgende relaties kan hier de juiste zijn?

Maak een keuze uit:

$$T = c \cdot h \quad T = c \cdot h^2 \quad T = \frac{c}{h}$$

$$T = c\sqrt{h} \quad T = \frac{c}{\sqrt{h}}$$

c stelt hierbij telkens een constante voor.

d. Bepaal in het gekozen geval de waarde van c.

3. a. Je zou ook de relatie kunnen onderzoeken tussen de stroomsterkte I, zijnde de hoeveelheid water die per s uitstroomt en de tijd t. Volgens de theorie van de stromende vloeistoffen wordt de grafiek van deze relatie een rechte lijn.

Teken ongeveer de stand van deze rechte in een (t, I) assenstelsel.

b. Welke is de betekenis van de snijpunten van deze lijn met de beide assen?

c. Toon aan dat de oppervlakte van het vlakdeel begrensd door de lijn en de beide assen, het totale uitgestroomde volume verbeeldt.

d. Bepaal door een inhoudsberekening of

eenvoudigweg door het water in een maatglas uit te gieten, het watervolume als het blik tot 10 cm hoogte gevuld is.

e. De oppervlakte van de bij (c) bedoelde driehoek is  $\frac{1}{2} I_{\max} \cdot t$ . Bereken nu de waarde van  $I_{\max}$ .

f. Onderzoek of deze uitkomst ook door een directe meting te bepalen is. In hoeveel seconden is het water gezakt van hoogte 10 cm tot hoogte 9 cm?

g. Krijg je zo dezelfde uitkomst als bij (e)?

4. De snelheid waarmee het vloeistof oppervlak daalt stellen we  $v_0$ ; de snelheid waarmee het water uit het gat stroomt stellen we  $v_g$ . Toon aan dat de verhouding  $v_0 : v_g$  steeds constant is. Bepaal deze verhouding.

5. Tik nu met dezelfde spijker nog een gat in de bodem van het blik. Hoe groot wordt nu de uitstroomtijd?

Tik er nog zo'n zelfde gat bij. Hoe groot wordt T nu? Geef de relatie tussen de uitstroomtijd T en de totale gatdoorsnede  $A_g$ . Geef deze relatie eerst in woorden, daarna in een meer wiskundige vorm.

6. Hoe zal de uitstroomtijd T afhangen van de doorsnede  $A_0$  van het blik zelf? (bij een even groot uitstroomgat en dezelfde beginhoogte). Geef de relatie eerst weer in woorden, daarna in een formule.

Wij deden nog metingen aan een blikje jaffa-drink. Dit had een diameter  $6\frac{1}{2}$  cm. Probeer een soortgelijk blikje te krijgen en tik dan met dezelfde spijker weer een gaatje in de bodem.

Controleer nu of de uitstroomtijd, die je nu kunt meten redelijker wijze overeenstemt met een waarde die je kunt berekenen volgens (6).

7. Hoe zouden de uitkomsten veranderen als tijdens de uitstroming steeds een blok hout op het water dreef? Veronderstel dat het blok

daarbij het water niet hindert bij het leeglopen van het vat.

Zouden de grafieken hun vorm geheel handhaven?

8. Zou de uitstroomtijd  $T$  een andere worden als we de proef deden op een plaats op aarde, waar

- a. de luchtdruk een andere waarde heeft?  
b. de gravitatie anders is?

*Opmerking:* door de scherpe randen van het gat kan de straal iets insnoeren; in de berekeningen gaat het dan steeds om de effectieve doorsnede.

*De meetresultaten:*

1. a. zie fig. 5  
b.  $T = 169$  s  
c. zie fig. 5  
d. de grafiek is niet recht  
e. uitstroomtijd  $T$  en beginhoogte  $h$   
f. bij  $t = 0$  volgt  $y = 0,1$   
dus  $a^2 = 0,1$  en  $a = 0,3$   
bij  $t = 169$  wordt  $y = 0$   
dus  $0,3 = 169 \cdot b$  en  $b = 0,002$   
g. zie fig. 5  
de tijdschaal is niet-lineair (afstand en tijd niet evenredig)
2. a. zie fig. 5  
b. zie fig. 5  
c. de relatie is  $T = c\sqrt{h}$

$$d. 169 = c\sqrt{0,1} \text{ dus } c = 169 : 0,3 = 500$$

3. a. zie fig. 4b  
b.  $T$  en  $I$  max  
c.  $V = \int I \cdot dt$   
d.  $V = 785 \text{ cm}^3$   
e.  $\frac{1}{2} I_{\text{max}} \cdot t = V$  dus  $\frac{1}{2} I_{\text{max}} \cdot 169 = 785$   
dus  $I_{\text{max}} = 9,4 \text{ cm}^3/\text{s}$   
f. in de eerste 11 s is  $78,5 \text{ cm}^3$  water uitgestroomd dus  $I = 78,5 : 11 = 7,1 \text{ cm}^3/\text{s}$   
g. neen;  $I$  daalt; de uitkomst is een gemiddelde over 11 s

$$4. v_o : v_g = A_g : A_o = 1 : 1100$$

$$5. T_2 = \frac{1}{2} T_1 \text{ en } T_3 = \frac{1}{3} T_1$$

$T$  is omgekeerd evenredig met  $A_g$  of  $T = \frac{k_1}{A_g}$

6.  $T$  is evenredig met  $A_o$  of  $T = k_2 \cdot A_o$   
 $d_1 : d_2 = 10 : 6,5$  dus  $A_1 : A_2 = 400 : 169$   
dus  $T_2 = \frac{169}{400} T_1 \rightarrow T_2 = 72 \text{ s}$

7. Men kan het drijvend stuk hout vervangen denken door de hoeveelheid verplaatst water (wet van Archimedes). Er zal dus niets veranderen aan de grafieken, tot het moment dat het blok de bodem treft. Als het gat dan nog vrij is, wordt alleen  $A_o$  verkleind.

8. a. verandering van de luchtdruk heeft geen gevolgen voor de uitstroomtijd.  
b. verandering van  $g$  beïnvloedt de uitstroomtijd wel.



# Centripetaal

IR. H. M. MULDER, *Breda*

In de mechanica experimenteren we ijverig met tickertapes en luchtkussenrail om relaties tussen krachten en bewegingen te onderzoeken. De cirkelbeweging komt daar maar bekaaid bij af. Er zijn vrijwel geen proeven ontwikkeld om metingen te verrichten aan de centripetale kracht.

1. Als we op een draaitafel een blokje zetten (fig. 1) dat door middel van een veer aan het middelpunt via een ring verbonden is, dan is de uitrekking van de veer tijdens de rotatie een maat voor de centripetale kracht. Maar het lijkt moeilijk de veeruitrekking tijdens die rotatie vast te stellen, tenzij men zelf mee zou roteren.

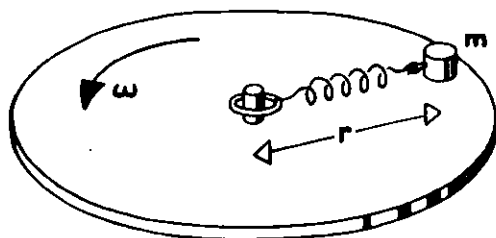


Fig. 1 Draaitafel met aan veer rondslingerende massa.

Wie ontwerpt een 'maximum-veerunster' voor krachtmeting zoals er ook een 'maximum-thermometer' voor temperatuurmeting is? Zo'n veerunster zou hier goede dienst kunnen bewijzen.

Dan zou de formule  $F_c = m \frac{v^2}{r}$  goed te testen zijn.

In afwachting daarvan kunnen we nu alvast de veeruitrekking tijdens de rotatie met een stroboskoop bepalen.

De relatie tussen veerlengte en hoeksnelheid volgt aldus: stel we hebben een veer met een lengte in ontspannen toestand  $l_0$  en een veerconstante  $c$ . Als de massa  $m$  dan met een hoeksnelheid  $\omega$  roteert, geldt:

$F_c = m\omega^2 r$  en volgens de wet van de veerkracht:

$F_v = c \cdot u$  waarbij  $u = r - l_0$

zodat  $c(r - l_0) = m\omega^2 r$  ofwel:  $r = \frac{c l_0}{c - m\omega^2}$

Men zou de proef kunnen uitvoeren door de schijf op een bepaalde hoeksnelheid in te stellen en dan  $r$  op te meten. Men kan ook omgekeerd te werk gaan door eerst met de formule uit te rekenen bij welke hoeksnelheid het blokje ongeveer de rand van de schijf zal bereiken en dat dan na te meten.

De hoeksnelheid van de schijf kan afgesteld worden met een ring van zwart-wit blokjes door die te belichten met een neonlampje aangesloten op het 50 Hz lichtnet.

Om de wrijvingskracht uit te schakelen lijkt het beter om een karretje te nemen met de straalrichting als rijrichting.

2. Hier volgt nog een ander experiment dat ik 20 jaar geleden van een Belgische collega door kreeg en voor mij al jaren hét proefje is ter bevestiging van de uitkomst van de centripetale kracht.

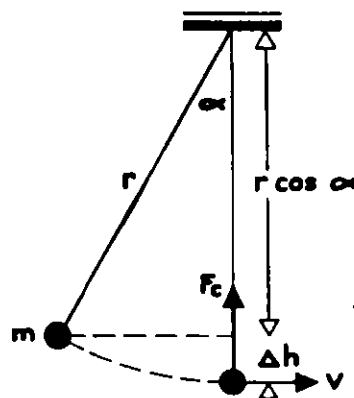


Fig. 2 Centripetale kracht bij slingerende massa.

Stel een slinger met lengte  $r$  wordt losgelaten vanuit een amplitudehoek  $\alpha$ . Gevraagd wordt de spanning in het koord bij het passeren van de verticale stand (fig. 2).

De snelheid waarmee de massa de evenwichtsstand passeert volgt uit:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot (r - r \cos \alpha)$$

$$\text{dus } v^2 = 2 g r (1 - \cos \alpha)$$

De spanning in het touwtje bij het passeren van de verticale stand is dan:

$$F = F_z + F_c = mg + m \frac{v^2}{r}$$

$$= mg + m \frac{2gr(1 - \cos \alpha)}{r}$$

$$= mg(3 - 2 \cos \alpha)$$

Bij  $\alpha = 30^\circ$  wordt dit bijvoorbeeld

$mg(3 - \sqrt{3}) = 1,27 m \cdot g$ . Het gewicht van de massa neemt dan schijnbaar met 27% toe.

Wij voeren de proef als volgt uit:

$m = 200 \text{ g}$  (4 schijfgewichten van elk 50 g) de kracht bij het passeren van de vertikaal wordt dan  $1,27 \times 0,2 \times 10$  ofwel 2,54 N (5 schijfgewichten van elk 50 g en nog 4 g extra).

Bij keuze van een grotere hoek wordt de kracht zoals aangegeven groter.

Bij  $\alpha = 45^\circ$  wordt deze  $mg(3 - \sqrt{2}) = 1,58 mg$

bij  $\alpha = 60^\circ$  wordt deze  $mg(3 - 1) = 2 mg$ .

Dit laatste betekent dus een verdubbeling van het gewicht.

*Opstelling en meting (fig. 3)*

Aan de staander van een balans is met terryklemmen een plankje bevestigd, waarop een fietslampje is gemonteerd. Dit lampje maakt aan een kant verbinding met een pool van een 6V-batterij en aan de andere kant met het ijzer van de balans. Bij A bevindt zich een metalen steun waarop het juk rust. Deze steun is met de andere

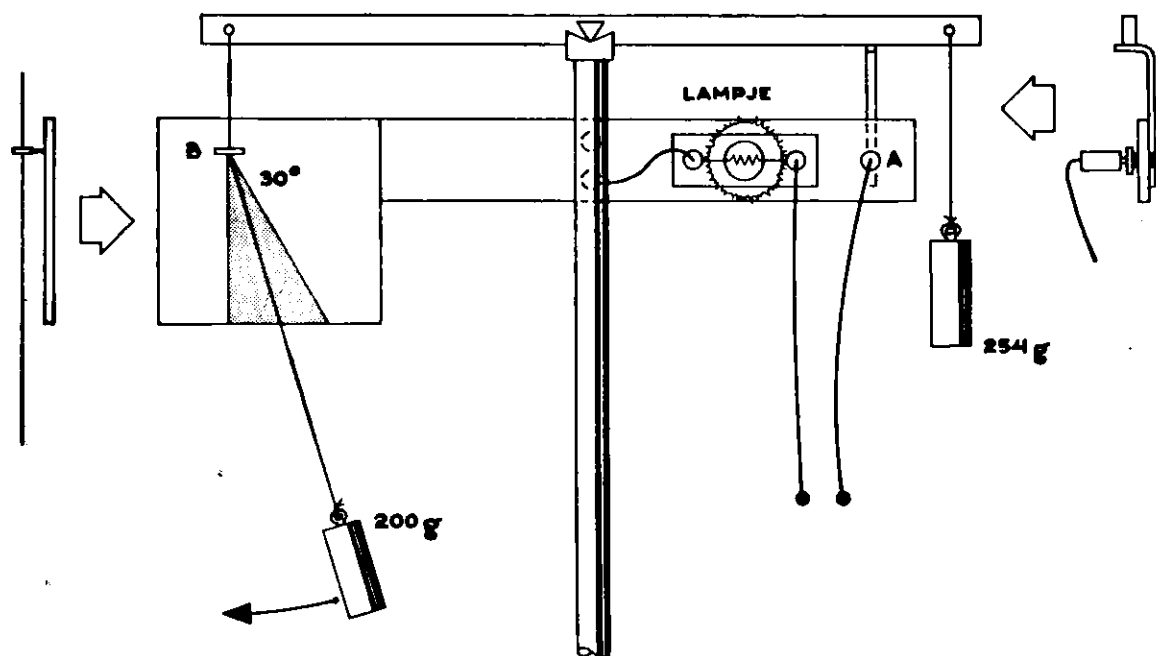


Fig. 3 Balans om de centripale kracht te meten.

pool verbonden. Rechts hangen we 254 g; links de slinger met 200 g. Volgens de berekening heeft de lengte van de slinger geen invloed. Op de plank is de 30°-hoek aangegeven. Bij B is een schroefoog in de plank gedraaid. Door het oog loopt de draad.

We geven nu de slinger een amplitude van meer dan 30°. Telkens wordt nu het contact boven punt A verbroken omdat de spanning in het touwtje telkens bij het passeren van de verticale stand even meer is dan 2,54 N.

Maar . . . bij verdere demping wordt vanzelf de amplitudehoek minder dan 30° en . . . het lampje blijft tijdens de verdere slingering nu voortdurend branden.

Als we de slingerlengte tenslotte nog veranderen, zien we dat bij dezelfde hoek de flikkering van het lampje overgaat in constant branden. Immers: de kritieke hoek is onafhankelijk van  $r$ !

### 3. de klepslinger

Het is ook mogelijk de proef alleen kwalitatief aan te bieden, hetgeen uitstekend kan in de vorm van de klepslinger.

Neem de bordlineaal. Knoop bij het gat een dun touw met een gewicht (fig. 4). Leg de lat op

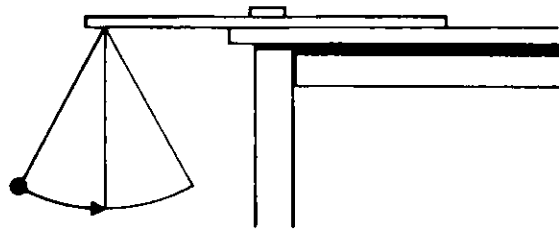


Fig. 4 De klepslinger.

tafel zover over de rand, dat een korter deel uitsteekt en de lat dus niet van de tafel valt.

Laat de slinger nu bewegen in het verticale vlak dat gaat door de lineaal. Schuif vervolgens de lat zover over de rand dat deze tijdens het slingeren telkens even wipt.

Tijdens die beweging is het gewicht van de slinger groter bij het passeren van de vertikaal. Bij grotere starthoek stijgt ook deze trekkracht op de lat.

Dit is gemakkelijk te onderzoeken door de lat zo af te stellen dat deze bij een bepaalde starthoek net niet wipt; bij een grotere starthoek zal het wippen dan weer optreden. Uiteindelijk verdwijnt het wippen weer doordat ten gevolge van demping de amplitude vanzelf afneemt.

# Centripetaal? ... Wij doen het zo!

HENK MULDER, *Breda*

In het septembernummer van *Faraday* 1975 werd de vraag gesteld: hoe is het mogelijk, langs experimentele weg, de formule voor de centripetale kracht te testen, door tegelijkertijd massa, frekwentie, kracht en straal te meten. De voornaamste moeilijkheid scheen te schuilen in het aflezen van een roterende veerunster.

De vraag was eigenlijk: hoe is het mogelijk een 'maximale veerunster' te konstrueren, die de grootste trekkracht vastlegt.

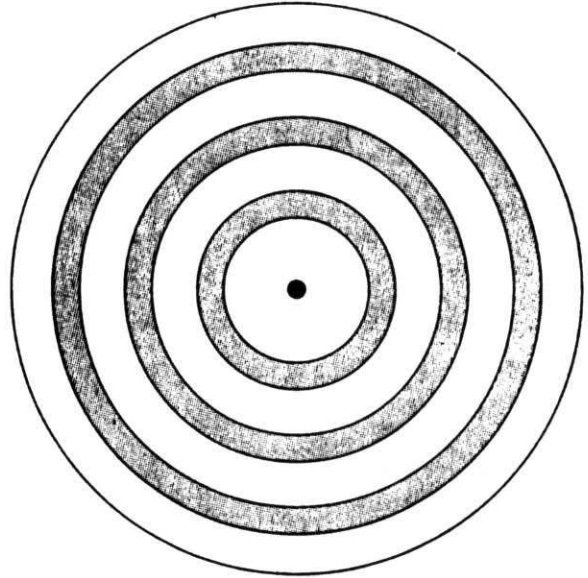
Van diverse collega's kwamen reacties binnen, getuigend van fantasie en handigheid, welke laatste eigenschap zij wellicht dan vaak zullen delen met hun amanuensis. Hier volgt een aantal in de praktijk getoetste oplossingen. We hebben ze ondergebracht in 2 categorieën.

## A. met potloodstift of kortsluitwagen

1. R. Brongers in Almelo verbindt het blokje op de draaitafel door middel van een veerunster met het middelpunt van de schijf, waarbij hij in het blok vertikaal een gaatje boort, waardoor een potloodstift wordt gestoken. Op de draaitafel is dan een stuk papier geplakt, waarop de stift de posities van het blok tijdens de draaiing noteert in de vorm van een radiaal gericht lijnstuk. Later is bij stilstand van de schijf de centripetaalkracht af te lezen door de veerunster weer even ver uit te rekken.

2. H. van Wijnen te Amsterdam komt met een erg aardige oplossing. Hij werkt met een kortsluitwagentje, waarvan voor- en achteras elektrisch geïsoleerd zijn. In het karretje zijn een lampje en een batterij gemonteerd. Als voor- en achteras geleidend verbonden worden, gaat het lampje aan.

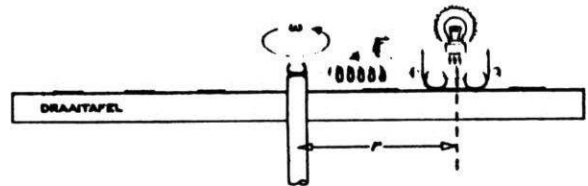
Op de draaitafel zijn 3 concentrische banen van dun Al-folie geplakt, waarbij de breedte van zo'n baan ongeveer 1 mm meer is dan de afstand van de beide assen (fig. 1). Dan laat hij de tafel zo snel ro-



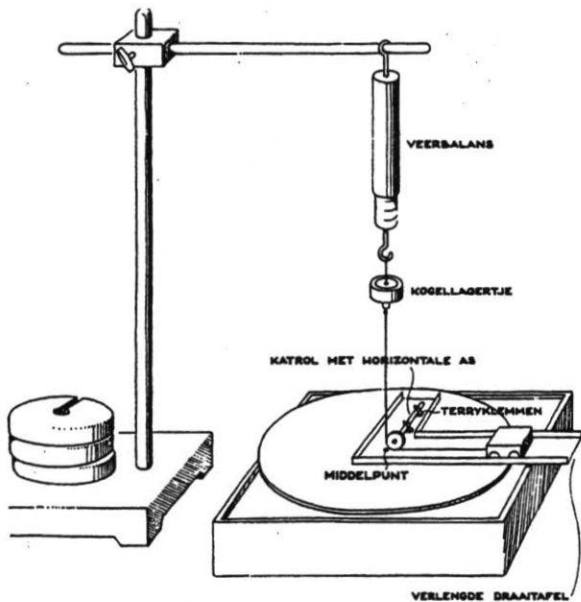
Figuur 1 Draaitafel met 3 concentrische banen van aluminiumfolie.

teren dat het lampje net aangaat en bepaalt het erbij behorende toerental. Het wagentje staat nu op de binnenste baan. Vervolgens verhoogt hij de hoeksnelheid tot de volgende en de dan volgende bereikt worden (fig. 2). Daarna laat hij het toerental weer afnemen en doet nogmaals 3 metingen. Een uitstekende methode om fouten te elimineren.

Hoe de afwerking verder verloopt zal u inmiddels wel duidelijk zijn.



Figuur 2 Meting met kortsluitwagen.



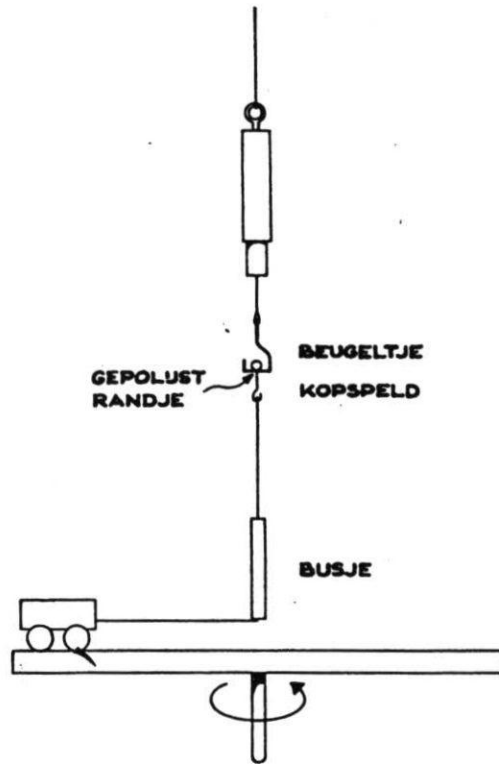
Figuur 3 Meting met verticale vaststaande veerunster.

*B. met vertikaal opgestelde veerunsters*

1. A. van der Valk uit Den Haag werkt met een omgebouwde pick-up waarmee hij toerentallen van 16 tot 76 per minuut kan bereiken. Op de rand van de schijf wordt een blokje gelegd, waarna hij met de unster de kracht bepaalt, nodig om het blokje net weg te trekken. Daarna worden de toeren zo hoog opgevoerd dat het blokje eraf vliegt. Weer worden dan toerental en andere zaken bepaald.

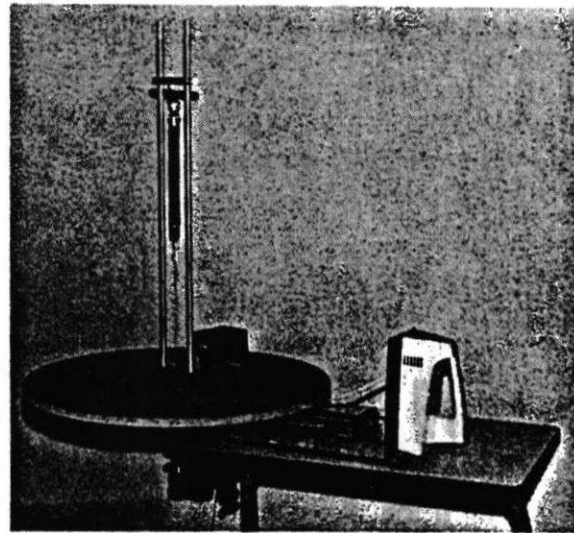
Voor een directere methode gebruikt hij de opstelling van fig. 3. Recht boven het draaipunt, opgehangen aan een apart statief, hangt vertikaal de veerbalans, die via een kogellagertje verbonden is aan een draad, die door middel van een met de tafel meedraaiend katrolletje aan het karretje vastzit. Zodoende kan de centripetale kracht nu direct bepaald worden.

2. F. Steenbrink te St. Oedenrode komt met een vrijwel gelijke oplossing. Ook hij heeft geworsteld met het probleem van het in elkaar draaien van het verticale deel van de draadverbinding. Hij heeft onder de veerunster in plaats van een kogellager gekozen voor een haakje gemaakt van een speld met glazen kop. Deze draait rond in het gat van een stalen stripje (fig. 4).



Figuur 4 Oplossing met busje en kopspeid.

3. H. Botterweg heeft samen met zijn technisch onderwijs assistent een sjeke oplossing gefabriceerd. Bij hen zit de veerunster weer aan de roterende tafel



Figuur 5 Oplossing met verticale meedraaiende veerunster.

vast in een meedraaiend statief. Zo is er ook aflezing van de centripetale kracht mogelijk (fig. 5).

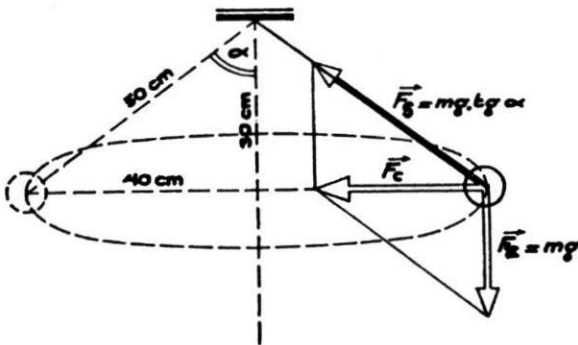
*Nog 4 opmerkingen:*

a. spaar de draaitafels door steeds diametraal aan de andere kant een overeenkomstige massa mee te laten draaien; de lagering van de schijven zal dan niet zo zwaar belast worden.

b. de toerentallen zijn stroboscopisch te meten of door simpelweg visueel te tellen hoeveel omwentelingen per minuut worden gemaakt.

c. voor iemand die helemaal geen spullen heeft is er altijd nog de konische slinger (fig. 6).

Bind een moer aan een touwtje zodat de slingerlengte 50 cm wordt. Laat de moer vlak over de grond zwieren terwijl de hand op 30 cm hoogte wordt gehouden. Als dat dan gelukt bij een frequentie van ongeveer 55 toeren per minuut, is de formule voor de centripetaalkracht ook getest.



*Figuur 6* Konische slinger.

*Bewijs:*

$$F_c = mg \tan \alpha = \frac{4}{3} mg$$

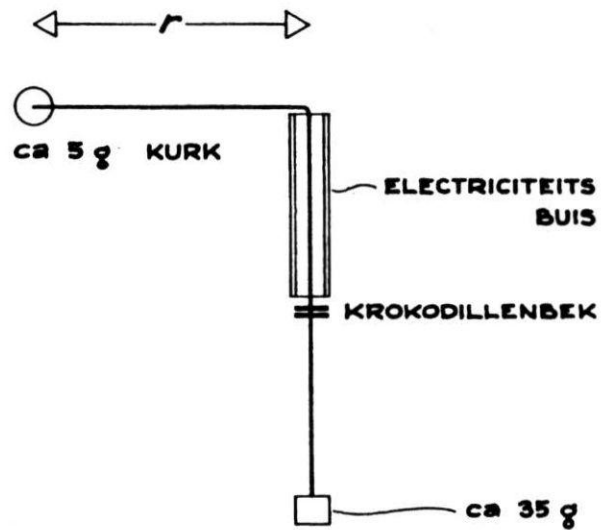
$$\frac{4}{3} mg = \frac{mv^2}{r} \text{ waarbij: } r = 40 \text{ cm}$$

hieruit volgt:  $v = 2,3 \text{ m/s}$  ofwel:

$$f = \frac{v}{2\pi r} \cdot 60 \text{ per minuut ofwel } 55 \text{ per minuut.}$$

d. Heel fraai blijft ook nog steeds de oplossing van Nuffield (fig. 7). Deze proef is zeer geschikt voor practicum.

Met de hand wordt de hele zaak aan het draaien gebracht. De krokodillebek mag de onderkant van de pijp net niet raken en dient om de afstand  $r$  constant te houden.



*Figuur 7* De oplossing van Nuffield.

# Motivatie

HENK MULDER, *Breda*

Wat beweegt kinderen om zich met ons vak in te laten? Wat is eigenlijk onze dagelijkse opgave: hen te motiveren of hen gemotiveerd te houden? Je zou het laatste denken als je de antwoorden leest die 2000 jongens en meisjes uit het hele land hebben ingezonden op de vraag die een krant hen stelde:

Als de Amerikanen en de Russen ook door een sterrekijker kijkten, hoefden ze geen raketten naar maan, Mars en andere planeten te sturen om ze te onderzoeken.

**Bastiaan Logister (13),  
Tiel.**

Ik wil met eigen ogen eens zien of het waar is dat de sterren zich steeds verplaatsen. Ze kunnen me zoveel vertellen.

**André Mens (11),  
Rotterdam.**

Toen ik klein was dacht ik, wat gek er vliegen allemaal kleine hulsjes in de lucht. Nu ik groot ben weet ik dat dat kometen, meteoren, planeten, satellieten enz. zijn.

**Fred Smits (11),  
Rotterdam.**

Door een eenvoudige sterrekijker zie ik waarschijnlijk een geelachtige bol met zwarte vlekken en lichtgevende vijfhoekige punten, de sterren. De zon is een gloeiende bol van gas die zo heet is dat ijzer zou smelten en een mens ook volgens mijn opinie.

**Ton v.d. Berg (13),  
Gorinchem**

Als men door een sterrekijker kijkt zie je: marsmannetjes op mars, een bloedoog op jupiter en bibbermannetjes op pluto. Een ster die jonkies krijgt. Een ster miljoen maal zo groot als de zon. En als je slecht kijkt zie je niks!

**Nomdo Jansonius (8),  
Groningen.**

Door een sterrekijker zie je lucifermannetjes die op sterren leven. Bij hun geboorte brandt alleen hun hoofd. Ze leven 20 seconden en zijn dan opgebrand. Ze planten zich snel voort, miljarden per seconde. Dankzij hen geeft een ster licht.

**Michel Philippa (12),  
Rotterdam.**

Ik zou wel eens willen weten wat er met de rest van de maan gebeurt als hij niet vol meer is.

**Maarten Kelder (12),  
Oud-Beijerland.**

Ik denk dat ik door een sterrekijker de sterrenhemel beter kan opserveren. Ik vind sterren ontzettend interessant. Ik lees wekkelijks er een boek over.

**Marco Dijkman (12),  
Blaricum.**

waarom zou je een sterrekijker willen bouwen en wat verwacht je dan waar te nemen?

Hier een aantal van hun verwachtingen en fantasieën. Laten we wel bedenken dat ze volgend jaar bij ons in de klas zitten. Volgens mij verwachten ze dan iets van ons.

Als je een dure sterrekijker hebt dan zie je misschien de zon. Je ziet al die vlammen en bedenk je ineens dat de aarde en andere planeten ook van de zon afkomen en dat is zo onvoorspelbaar, je hebt er gewoon geen woorden voor.

**Joyce Vleugels (13),  
Hoogerheide.**

Als eerste zou ik graag Uranus willen zien, want ik heb gehoord dat er grote geulen en scheuren in de bodem zitten. De planeet die ik het graagst zou willen zien is Mars, ook om de fascinerende rode stof die nu en dan opwaait.

**Hayco Jesse (11),  
Chaaam.**

Als je door een eenvoudige kijker kijkt, zal de maan net een stuk kaas lijken. Want je ziet dan een heleboel gaten (kraters) en bergen.

**Stephen Bartholomeüs (11),  
Nijmegen.**

*Kijk ik 's avonds door de kijker  
en zie de sterren en de maan.  
Maar ook de andere planeten,  
waaronder Mars, zie je dan staan.  
Dan dwaalen mijn gedachten  
naar die planeet als vuur zo rood.  
Zou er daar nu leven zijn  
of is alles dood?*

**René Heijkoop (13),  
Oud-Beijerland.**

Ik denk dat ik door een brilleglaskijker kan zien: De maan en de sterren en planeten en de melkwegstelsel en stenen van 40 centimeter keer 25 centimeter keer 25 centimeter en nog meer, maar dat zijn zulke moeilijke woorden!

**Corina Sebel (11),  
Vlaardingen.**

De melkweg is net een lange weg met kleine witte steentjes.

**Sonja Stals (11),  
Weert.**

Na het ondergaan van de zon, zag ik Venus in haar nachtjapon. Voordat die er 's morgens weer was, stond zij al weer in haar ochtendjas.

**Remko Bokma (11),  
Den Ham.**

Ik denk dat ik o.a. de kleurentelevisie van de overburen uitstekend zou kunnen zien.

**Vincent Wolsing (12),  
Wageningen.**

# Label evenwicht

IR HENK MULDER, *Nassauscholengemeenschap Breda*

Een leerling van de tweede klas probeert thuis met een zelf gemaakt weegschaaltje de kracht te meten die een magneetpool uitoefent op een stukje ijzer en hoe die kracht afhangt van de onderlinge afstand.

Dat blijkt nog niet zo'n eenvoudig karwei te zijn.

Stel je neemt een veerunster zoals in fig. 1, hangt daaraan een stuk ijzer en probeert afstand en kracht te meten. Het zal dan blijken dat het stuk ijzer telkens omhoog of omlaag dreigt weg te schieten.

Het lijkt interessant (voor onszelf, niet voor de tweede klasser) om dit probleem eens nader te analyseren.

De magnetische kracht ( $F_m$ ) als functie van de afstand ( $x$ ) zouden we kunnen stellen op:  $F_m = \frac{b}{x^2}$  (waarbij  $b$  een constante is).

Het functieverband zal wel ingewikkelder zijn maar de aard van de grafiek toch weinig in wezen verschillend.

De veerkracht ( $F_v$ ) als functie van de afstand ( $x$ )  $F_v = C(a - x)$  waarbij  $C$  de veerconstante is en  $a$  de afstand van het blokje ijzer tot de magneetpool als de magneet het blokje niet aan zou trekken. Beide grafieken staan in fig. 1.

Er doen zich nu 3 gevallen voor.

1. De grafiek van de veer ligt geheel onder die van de magneet. Dit is het geval als men het blokje dicht bij de magneet houdt, zonder dat de veer veel is uitgerekt. Dan is de waarde van  $a$  klein.

Voor elke waarde van  $x$  geldt nu:  $F_m > F_v$  zodat het blokje op de magneetpool springt.

2. Als we het ophangpunt van de veer hoger kiezen, zodat  $a$  groter wordt, zal de veergrafiek evenwijdig omhooggaan. Er zal dan een moment komen dat de rechte de kromme gaat raken in punt A.

Dit punt A verbeeldt dan een evenwichtssituatie, waarbij  $F_m = F_v$ . Bij een kleine afname van  $x$  schiet het blokje omlaag omdat dan  $F_m > F_v$ , maar bij een kleine toename van  $x$  evenzo omdat de magnetische kracht langzamer terugloopt dan de veerkracht.

3. Als we het ophangpunt van de veer nog hoger kiezen, dus bij nog hogere waarde van  $a$ , zal de rechte de kromme in 2 punten B en C gaan snijden. Beide punten stellen weer label evenwicht voor. Immers in punt B zal bij afname van  $x$  het blokje omlaagschieten en bij toename van  $x$  omhoog. Dat was gemakkelijk te verwachten. Maar in punt C geschiedt juist het omgekeerde.

Als je vanuit die evenwichtssituatie het blokje verder omlaag trekt, schiet het juist omhoog en omgekeerd.

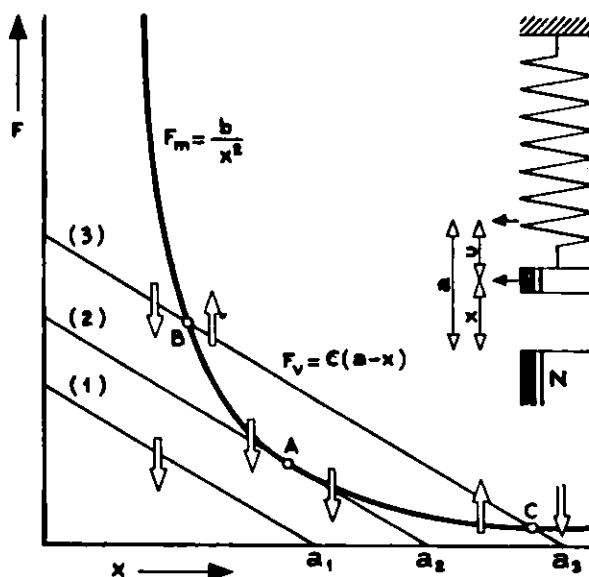


Fig. 1 verband tussen magnetische kracht en veerkracht en de afstand

Wel zeer merkwaardige vormen van labiliteit.

Overigens, de tweede klasser die zichzelf onbewust met dit probleem confronteerde, loste de moeilijkheid heel elegant aldus op.

Hij legde een stuk karton van  $\frac{1}{2}$  cm dikte tussen pool en ijzer en trok zo hard met behulp van de veer omhoog tot het blokje losliet. Zo kon hij de kracht meten.

Daarna maakte hij het pakje karton 1 cm dik en bepaalde weer de lostrekkraft. Zo lukte het hem toch een relatie te meten tussen kracht en afstand.

Op het moment van losschieten zal hij dan wel in evenwichtssituatie B gezeten hebben.



# Breking in een bol

IR HENK MULDER, *Nassauscholengemeenschap Breda*

Op onze vakantiereis in Zuid-Amerika zagen we op verschillende vliegvelden meteostations. Onze aandacht werd daar speciaal getroffen door een bepaald type zonneshijmeter. Zo'n apparaat bestaat uit een glazen bol (fig. 1) waarbij het evenwijdige zonlicht tot één punt geconvergeerd wordt op een papierstrook. Daar wordt dan een gaatje geschroeid. Als de zon zich nu verplaatst wordt ook dat gaatje iets verder op de strook ingebrand. 's Avonds wordt de papierstrook gewisseld en zo heeft men elke dag een registratie van het aantal uren zonneshijn. De papierstrook (fig. 2) heeft een urenverdeling zoals bij een zonnwijzer. Wij werden gefascineerd door de breking in de glazen bol en reeds onderweg probeerden we enig inzicht te krijgen in wat zich hier afspeelt. Als je in het oerwoud van de Amazone zit mis je dan wel je gonio-tafel!

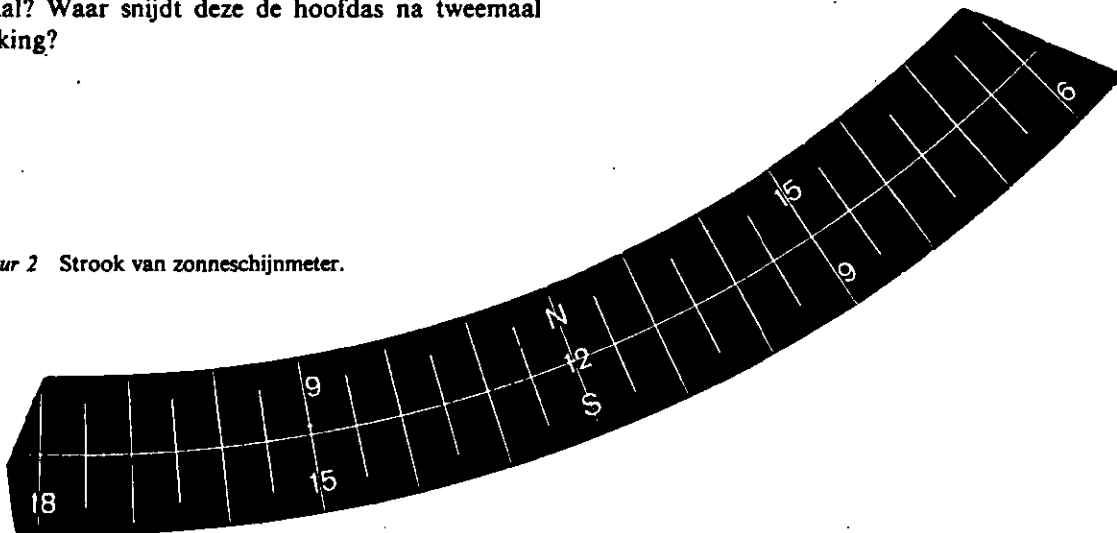
## *Brandpunt bij een bol*

In figuur 3 is een glazen bol getekend. Een straal door het middelpunt M gaat gewoon rechtdoor. Hoe gaat het met een willekeurige evenwijdige straal? Waar snijdt deze de hoofdas na tweemaal breking?



*Figuur 1* Zonneshijmeter met glazen bol en papierstrook.

*Figuur 2* Strook van zonneshijmeter.



Stel de straal van de bol  $r$ , de invalshoek  $\alpha$ , de brekingshoek  $\beta$  en de afstand van het gezochte snijpunt tot het middelpunt  $x$ . De overige hoeken zijn in de figuur verder aangegeven. De berekening voor  $x$  gaat nu als volgt.

We gebruiken in  $\triangle MBC$  de sinus-regel.

$$\frac{x}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{r}{\sin(2\alpha - 2\beta)}$$

$$x = r \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\beta - \sin 2\beta \cos 2\alpha}$$

$$x = r \cdot \frac{\sin \alpha}{(2 \sin \alpha \cos \alpha)(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) - (2 \sin \beta \cos \beta)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}$$

omdat  $\sin \alpha : \sin \beta = n$  kunnen we  $\sin \beta = \frac{1}{n} \sin \alpha$  stellen

$$x = \frac{1}{2}r \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) - \frac{1}{n} \sin \alpha \cos \beta (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}$$

We kunnen nu teller en noemer delen door  $\sin \alpha$ .

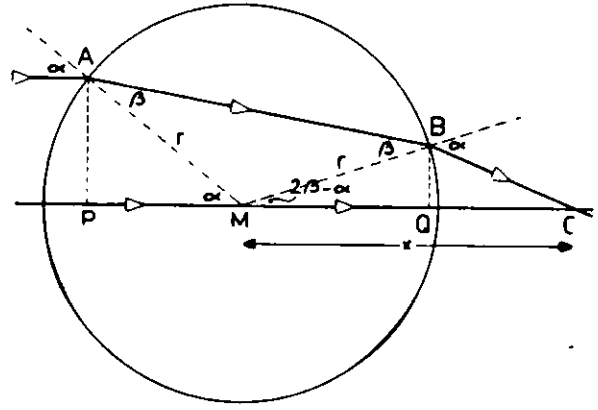
De uitwerking lijkt nogal tamelijk ingewikkeld te worden. We willen nu  $x$  bepalen voor het geval van een lichtstraal vlak bij de hoofdas, dus met kleine invalshoek  $\alpha$ . In dat geval nadert dus  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\cos \alpha \rightarrow 1$ ,  $\cos \beta \rightarrow 1$  en  $\sin \beta \rightarrow 0$ .

Als we dat invullen in de formule voor  $x$  vinden we:

$$x = \frac{1}{2}r \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}r \frac{n}{n - 1}$$

Voor de glazen bol waarbij  $n = 1,5$  vinden we dan  $x = \frac{3r}{2}$ . Zodoende moet het scherm dus  $\frac{1}{2}r$  van de bol verwijderd zijn. Dat klopte bij de zonneschijnmeters die we op de meteo-stations tegen kwamen. Ze waren van de firma Wilh. Lambrecht K.G. te Göttingen.

De glazen bol had een middellijn van 9,2 cm en het papier bevond zich op een afstand van 2,3 cm van het glas. Voor een bol van water wordt de



Figuur 3 Een straal breekt in een bol.

uitkomst bij  $n = \frac{3}{2}$ .

$$x = \frac{1}{2}r \cdot 4 = 2r$$

Het hoofdbrandpunt bevindt zich dus daar op een afstand  $r$  achter de waterbol.

Op school hebben we dit laatste experiment uitgevoerd door een grote glazen kolf (middellijn 24 cm) te vullen met water. Inderdaad treedt daar convergentie van zonlicht op 12 cm buiten het glas.

#### Overige stralen

In figuur 4 hebben we voor een aantal stralen de breking nader onderzocht.

1. De convergentie in het hoofdbrandpunt treedt alleen maar op voor stralen dicht bij de hoofdas. Bij een glazen bol valt het op dat het licht in een vrij klein gebied uittreedt. Er is een hoogste punt B. Het is mogelijk de ligging van dit punt te bepalen.

Terugkerend naar figuur 3 moeten we dus een maximum zoeken voor BQ.  $BQ = r \sin(2\beta - \alpha)$   
Wanneer is  $\sin(2\beta - \alpha)$  maximaal?

We moeten daartoe de functie BQ differentiëren naar  $\alpha$  en dan de afgeleide nul stellen.

$$\sin \beta = \frac{1}{n} \sin \alpha \quad \text{dus} \quad \cos \beta \, d\beta = \frac{1}{n} \cos \alpha \, d\alpha$$

$$\text{dus} \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1 \cos \alpha}{n \cos \beta}$$

We differentiëren nu de functie en stellen de eerste afgeleide nul.

$$\cos(2\beta - \alpha) \left[ 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} - 1 \right] = 0$$

Nu zou de eerste faktor nul kunnen zijn hetgeen betekent  $2\beta = \alpha$ . In dat geval blijkt BQ juist minimaal te zijn en wel 0 (zie daarvoor verder punt 3).

De tweede faktor nul stellen geeft:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{1}{2} n = \frac{3}{2}$$

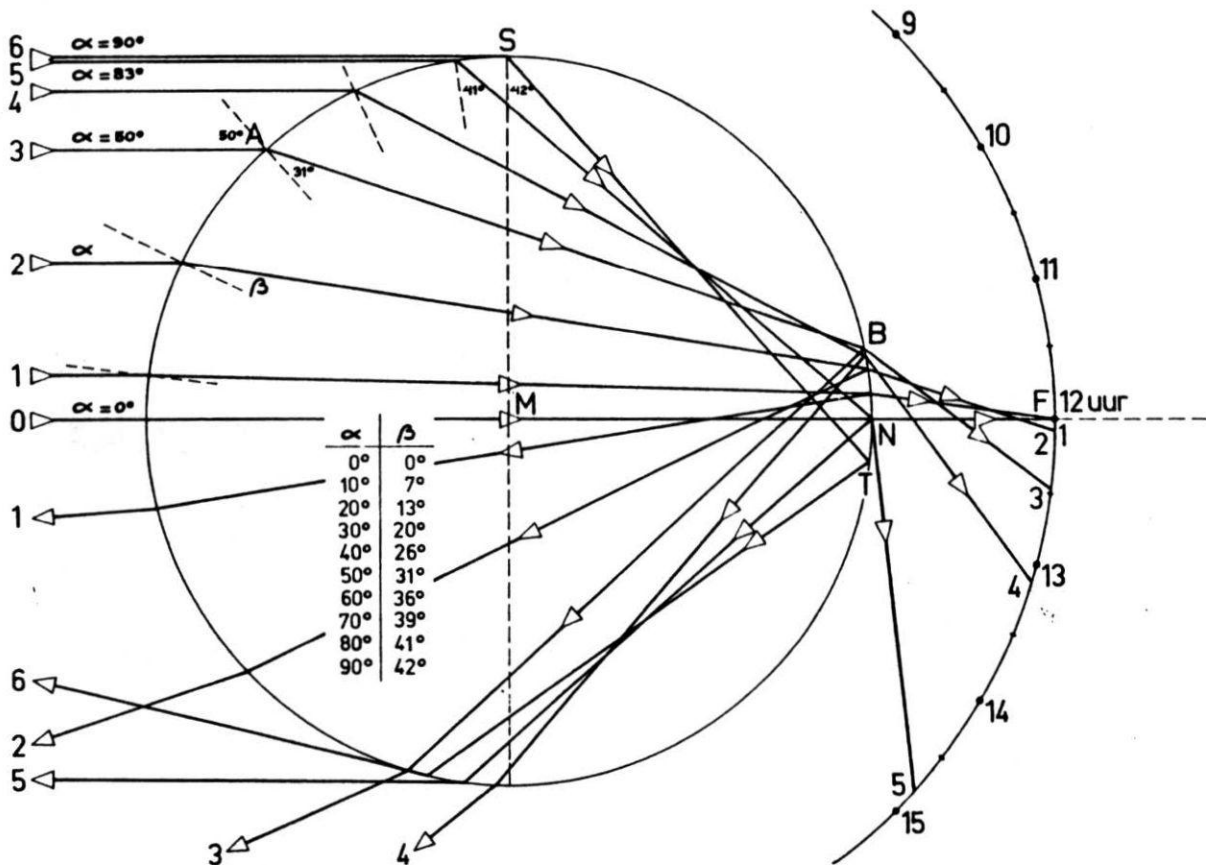
Na verdere uitwerking volgt hieruit:

$$\sin^2 \beta = \frac{7}{27} = 0,259$$

$$\text{dus} \quad \sin \beta = 0,5 = \beta = 30^\circ \quad \text{en} \quad \alpha = 50^\circ$$

Bij verdere berekening vinden we dan voor  $BQ = 0,2 r$  en voor  $AP = 0,76 r$

Deze 'hoogste straal' is in figuur 4 geconstrueerd.



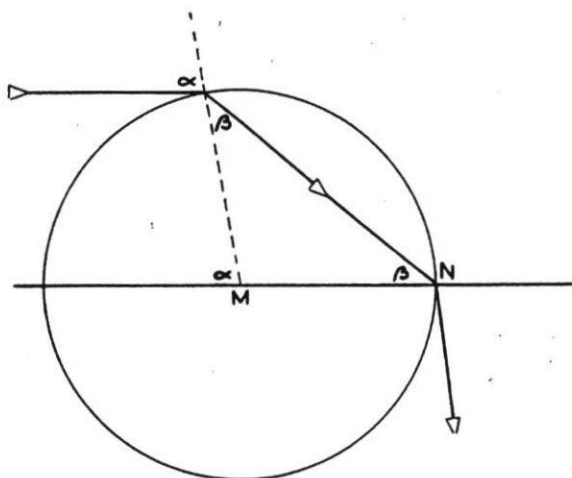
Figuur 4 S'raalbreking in een glazen bol.

2. Elke straal vertoont natuurlijk ook nog reflectie tegen de glaswand inwendig. De teruggekaatste stralen zijn aangegeven.

3. Hoe hoger een straal binnenkomt des te

dichter bij punt N ligt het snijpunt ervan met de hoofdas.

Er is één straal die na breking zelfs door het punt N gaat (op de bol). Deze situatie staat in figuur 5. Hiervoor geldt  $\alpha = 2\beta$ . We berekenen



Figuur 5 Een straal passeert het uiterste punt N.

nu de bijbehorende waarde van  $\alpha$ .

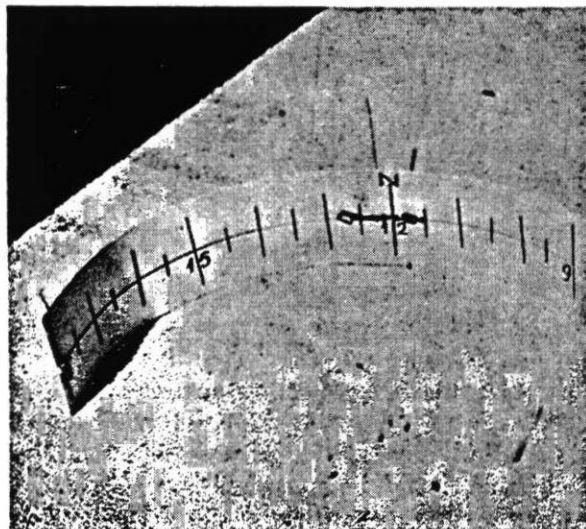
$$\frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} = n; \quad \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{\sin \beta} = n; \quad \cos \beta = \frac{1}{2}n = 0,75$$

dus  $\beta = 41^\circ$  en  $\alpha = 83^\circ$

Deze straal komt dus erg hoog binnen.

4. Er is maar één straal die voor totale reflectie in aanmerking komt. Dat is de straal door het hoogste punt S. Totale reflectie treedt op in punt T.

Figuur 6 Zonneschijnmeter met waterbol.

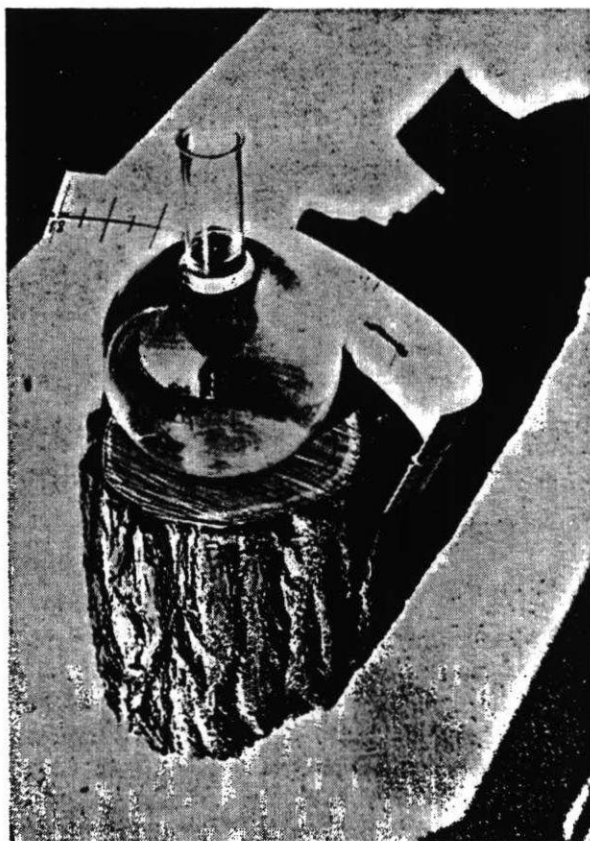


### Zonneschijnmeter

Met onze leerlingen kunnen we de stralengang in een plat cirkelvormig glasblok met behulp van evenwijdig licht uitstekend nagaan. We krijgen dan fig. 5 te zien.

Spannender lijkt het meteen maar te experimenteren aan een glazen kolf met water. Op deze manier kan een zonneschijnmeter gebouwd worden die aanzienlijk goedkoper is dan die van de Duitse firma (f 1200,-). Er worden alleen gaatjes gebrand bij directe zonnestraling. Bij feller licht zijn de gaatjes ook groter. De papiersoort is weinig belangrijk. We moeten wel zorgen voor loodrechte inval. Daartoe moet de as van de papierstrook samenvallen met de as van de schijnbare zonnebaan. De verbindingslijn van het midden van de strook en het midden van de bol moet met behulp van een kompas dan nog precies noord-zuid gesteld worden.

De foto's van figuur 6 zijn gemaakt aan een dergelijke opstelling.



# Druk, Boyle, Gay-Lussac, zonder kwik

IR. HENK MULDER, *Nassauscholengemeenschap, Breda*

Druk is kracht gedeeld door oppervlakte.

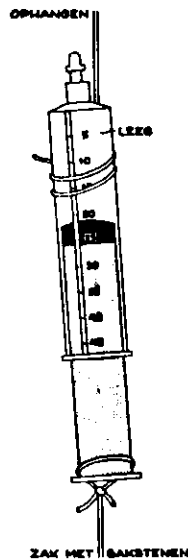
Het lijkt voor de hand liggend om drukken te bepalen door krachten en oppervlakten te meten. Het is dan didactisch ook weinig zinvol om traditiegetrouw, drukken aan te geven in vloeistofhoogten, zoals 76 cm Hg of 10 m H<sub>2</sub>O.

Een gevolg daarvan is dat een proef als van Torricelli alleen historische waarde dreigt te krijgen. Wordt de luchtdrukmeting daardoor minder interessant? Meting van de luchtdruk in 'aantal bakstenen' lijkt voor tweede klassers zeker zo boeiend als in 'kwikkolom'.

Hier volgt een verslag van een pogen om los te komen van 'Torricelli' en aansluiting te vinden bij 'Newton'.

## 1. Vacuum trekken

We nemen een plastic injectiespuit (van bijv. 35 cm<sup>3</sup>). Druk de zuiger tot op de bodem en sluit de buis met een dopje af (figuur 1). Hang de buis met de zuiger omlaag. Laat de leerlingen zelf ervaren, hoe hard ze moeten trekken om de zuiger tegen de luchtdruk in, te verplaatsen (variatie op de proef met de Maagdenburger halve bollen). Bij dat trek-



Figuur 1 injectiespuit voor de meting van de luchtdruk

ken ontstaat onder de zuiger een vacuum of lege ruimte (waarom zeggen we eigenlijk 'luchtledig' en niet gewoon 'ledig' of nog gewoner 'leeg'?).

Het valt ze meestal tegen hoe hard ze moeten trekken. Na deze ervaring zullen ze er vast wel behoefte aan hebben om de benodigde trekkracht te meten en zo de grootte van de luchtdruk te bepalen.

## 2. Meting van de luchtdruk

Aan de zuiger binden we nu een touwtje vast en hangen daaraan een plastic zak. Vervolgens doen we zoveel bakstenen in die zak dat de zuiger gaat lopen. Dat gebeurt bij ons bij 1½ baksteen. Het hangt natuurlijk van het gewicht van de bakstenen af en van de doorsnede van de zuiger.

In ons geval is de diameter van de zuiger 24 mm en de doorsnede 4,5 cm<sup>2</sup>. De bakstenen hebben een massa 3 kg en dus een gewicht 30 N. De eenheid van kracht '1N' definiëren we eenvoudig weg als het gewicht van 1 ons (kaas).

De (normale) luchtdruk is dan:  $\frac{1,5 \times 30 \text{ (N)}}{4,5 \text{ (cm}^2\text{)}}$  of 10 N/cm<sup>2</sup> ook wel 1 atmosfeer of 1000 millibar genoemd.

Bij dit soort experimenten hebben we enige last van de wrijving van de zuiger in de cilinder. We

kunnen deze apart meten. In ons geval ging de zuiger, bij cilinder aan weerszijden open, zich verplaatsen bij aanhangen van een massa 180 g. Het zal duidelijk zijn dat de nauwkeurigheid van de meting hier naar het tweede plan is verdrongen. Als men wil is de correctie echter door te voeren.

### 3. Proef in vacuum

Het is mogelijk in de cilinder onder de zuiger een klein ballonnetje aan te brengen. Je kunt dat maken van een stuk elastiek van een groter ballonnetje en dat wat opblazen en met garen dichtknopen. Door de zuiger op te trekken zien we het ballonnetje opzwellen (kennelijk daalt de druk dan onder de zuiger), door de zuiger neer te drukken wordt de inhoud ervan verkleind.

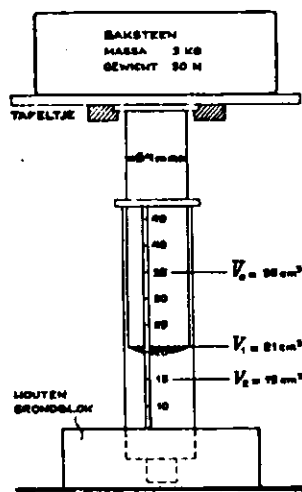
### 4. De wet van Boyle

Het is mogelijk met dit eenvoudige toestel de wet van Boyle op te sporen of te testen.

We vullen de buis met 35 cm<sup>3</sup> normale lucht en sluiten het eind dan met het dopje af.

De cilinder wordt nu verticaal in een houten blok gezet (figuur 2) waarin een passend gat is geboord. Op de zuiger is een plankje als tafeltje gemonteerd.

Vervolgens plaatsen we één baksteen van 3 kg open en we zien de zuiger dan zakken tot 21 cm<sup>3</sup>. Dan



Figuur 2 praktikumapparaat voor de wet van Boyle

plaatsen we nog een tweede baksteen bij. De zuiger zakt nu tot 15 cm<sup>3</sup>.

Omdat elke baksteen een druk levert:  $\frac{30}{4,5}$  ofwel

$\frac{2}{3} \cdot 10 \text{ N/cm}^2$  volgt:

$$p_1 = (1 + \frac{2}{3}) \cdot 10 = \frac{5}{3} \cdot 10 \text{ N/cm}^2$$

$$p_2 = (1 + \frac{4}{3}) \cdot 10 = \frac{7}{3} \cdot 10 \text{ N/cm}^2$$

Samenvattend vinden we:

$$V_0 = 35 \text{ cm}^3 \text{ en } p_0 = 1 \cdot 10 \text{ N/cm}^2$$

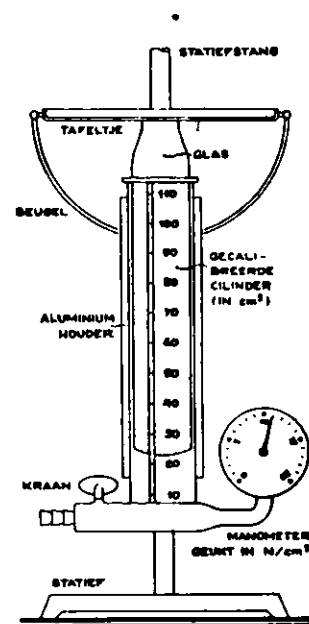
$$V_1 = 21 \text{ cm}^3 \text{ en } p_1 = \frac{5}{3} \cdot 10 \text{ N/cm}^2$$

$$V_2 = 15 \text{ cm}^3 \text{ en } p_2 = \frac{7}{3} \cdot 10 \text{ N/cm}^2$$

Voor het produkt  $p \times V$  vinden we hier dan 350 N · cm.

### 5. Gebruik van een manometer

Als demonstratietoestel en om direkter te kunnen meten hebben we nog een grotere eveneens gecali-breerde cilinder (volume 100 cm<sup>3</sup>) met gekoppelde manometer (figuur 3). De cilinder is van glas en de langgerekte zuiger eveneens. Er is, met enig vet, een zeer goede afdichting.



Figuur 3 toestel voor de wet van Boyle met direkte aflezing van  $p$  en  $V$

De cilinder eindigt in een T-stuk met kraan en aansluiting voor een manometer. Hieraan hebben we een metaalmanometer gemonteerd die oorspronkelijk geijkt was in 0 – 0,5 – 1,0 – 1,5 – 2,0 atmosfeer. We hebben die schaal gewijzigd in 0 – 5 – 10 – 15 – 20 N/cm<sup>2</sup>. Door met de hand het bovenblad omlaag te duwen of door met de beugel de zuiger op te trekken, zijn diverse volumina in te stellen. De bijbehorende druk is dan telkens af te lezen.

#### Het metervolume

Een moeilijkheid bij deze opstelling is het inwendig volume van de drukmeter zelf. Dit bleek niet te verwaarlozen. Het is vrij direkt te meten. Een leerling uit een van de hogere klassen gaf de volgende oplossing. Hij zegt: open de kraan; zet de zuiger in de laagste stand en sluit dan de kraan. De manometer staat nu op 10. Trek de zuiger nu zo hoog op dat de manometer op 5 komt te staan. Dit gebeurde bij ons apparaat bij optrekken tot 10 cm<sup>3</sup>. Daaruit volgt dan direkt dat het inwendig volume van de meter met zijn verbindingbuis 10 cm<sup>3</sup> is. Ongetwijfeld een uitstekende methode!

Toen hebben we alle getallen op de buis 10 cm<sup>3</sup> opgeschoven. Bij 0 staat nu 10, bij 10 staat 20 enz.

#### Metten

Open de kraan. Zet de zuiger op 50 cm<sup>3</sup>. Sluit de kraan. De druk onder de zuiger is dan weer 10 N/cm<sup>2</sup>. Duw de zuiger neer tot 25 cm<sup>3</sup>; de meter staat dan op 20. Trek de zuiger op tot 100; de manometer wijst dan 5 aan. Correct!

We kunnen op deze wijze een verzameling bij elkaar behorende waarden van  $p$  en  $V$  aflezen en in een grafiek uitzetten.

#### Ijking van de manometer

Het lijkt interessant de schaalverdeling van de manometer op zijn betrouwbaarheid te toetsen. We gebruiken daar weer onze bakstenen voor. De zuigerdiameter bij deze buis is 31 mm en de doorsnede dus 7,5 cm<sup>2</sup>. Als we één baksteen op het tafeltje zetten, zal de zuiger een stuk zakken en de

druk onder de zuiger stijgen met een bedrag:  $30 / 7,5 = 4 \text{ N/cm}^2$ .

Dat is direkt op de manometer te controleren!

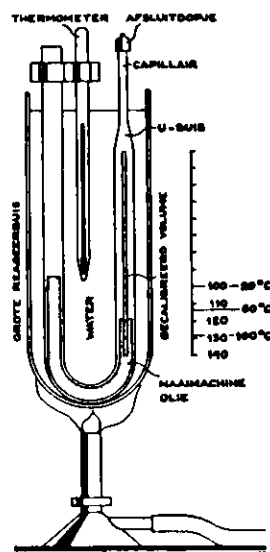
#### 6. De volume-wet van Gay-Lussac

Ook de wet van Gay-Lussac is zonder gebruik van kwik te toetsen. We onderzoeken de wet: bij een constante gasmassa en constante gasdruk geldt dat  $V$  en  $T$  evenredig zijn.

We gebruiken een wijde reageerbuis (figuur 4) met een diameter van 35 mm en vullen die gedeeltelijk met water. Daarin plaatsen we een U-buis die aan een zijde in een capillair eindigt, dat met een dopje kan worden afgesloten. Aan die kant is de buis ook gec calibreerd van 0 tot 140 mm.

Houd het capillair open en vul de U-buis vanuit de wijde kant met naaimachineolie tot rechts streep 100 bereikt is. Sluit dan het capillair met het dopje af. Vervolgens wordt het water met een vlam verhit.

Bij verschillende temperaturen lezen we telkens het nivo af. Eigenlijk stijgt bij deze proef ook enigermate de druk van de lucht, maar dat is vanwege de geringe vloeistofhoogte en de geringe dichtheid van olie verwaarloosbaar.



Figuur 4 toestel voor de wet van Gay-Lussac:  $V$  evenredig met  $T$

Hier volgen onze meetresultaten:

| temperatuur    | oliestand |
|----------------|-----------|
| 20 °C (293 K)  | 100 mm    |
| 60 °C (333 K)  | 112 mm    |
| 100 °C (373 K) | 127 mm    |

Vervolgens kunnen we hieruit de bekende grafiek samenstellen, de uitzettingscoëfficiënt van lucht bepalen en door extrapolatie de ligging van het absolute nulpunt.

Het zal duidelijk zijn dat geschetste behandelingen bedoeld zijn voor de tweede klassers.

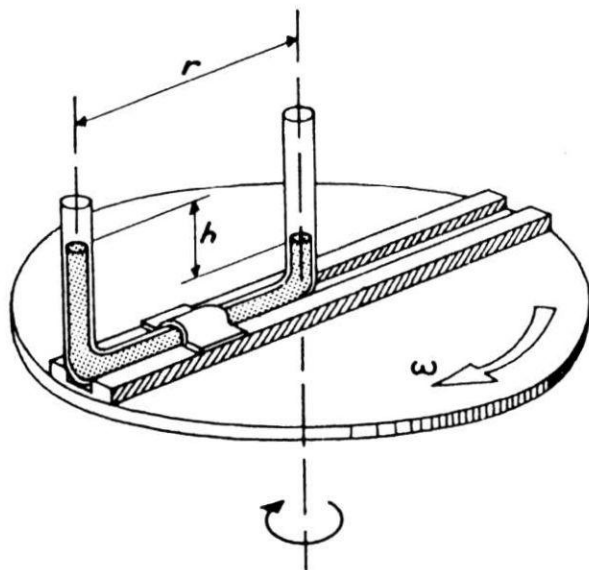
## Vloeistoftoerenteller

### Een rotatieproef

IR. HENK MULDER, *Nassauscholengemeenschap Breda*

Op de draaitafel van een pick-up is een communicerend vat bevestigd, zodanig dat een verticale buis zich juist boven het draaipunt bevindt en de andere aan de rand ervan (figuur 1). De omgebogen buis is gedeeltelijk met water gevuld, dat bij stilstand in beide benen even hoog staat. We zetten de pick-up nu op 78 toeren per minuut. Het water in de buitenste buis gaat nu hoger staan dan in de binnenste. Hoeveel hoger?

Het blijkt ruim 3 cm te worden. Is het evenwicht wel stabiel? Zouden we het apparaat kunnen ijken als toerenteller? Hoe is de nauwkeurigheid te verhogen?



Figuur 1 toerenteller met behulp van een U-buisje

Hangt het hoogteverschil ook af van de soort vloeistof? Een serie interessante vragen, waar onze leerlingen geschikt aan zouden kunnen werken.

### De theorie

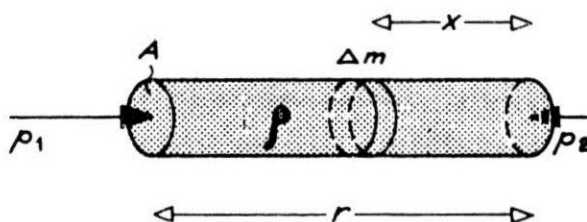
Op de vloeistof in het buitenste been en op de vloeistof in het horizontale verbindingsstuk dienen centripetale krachten te werken tijdens de rotatie. In het buitenste been wordt die geleverd door de tegendruk van de wand; de horizontale kolom ondervindt een centripetale kracht als gevolg van een drukverschil bij de einden ervan. Dat drukverschil wordt weer veroorzaakt door het hoogteverschil tussen beide vloeistofkolommen (figuur 2).

Een hoogteverschil  $h$  geeft bij een vloeistof met dichtheid  $\rho$  een drukverschil  $h \cdot \rho \cdot g$ .

Dientengevolge ontstaat een resulterende kracht naar het middelpunt ter grootte  $h \cdot \rho \cdot g \cdot A$ .

Hoe groot dient de centripetale kracht te zijn om de horizontale vloeistofkolom met hoeksnelheid  $\omega$  rond te draaien?

Voor een massaelement  $\Delta m$  op een afstand  $x$  van



Figuur 2 krachten werkend op roterende vloeistofkolom



het middelpunt is de benodigde kracht:  $\Delta m \omega^2 x$ .

De gemiddelde afstand van de vloeistofelementen tot het draaipunt is  $\frac{1}{2}r$ , zodat de naar het middelpunt gerichte kracht, nodig om de vloeistofkolom te roteren,  $\frac{1}{2}m\omega^2 r$  wordt, als  $m$  de massa van de horizontale vloeistofkolom voorstelt. Voor  $m$  kunnen we daarbij stellen:  $m = \rho Ar$ .

#### De relatie tussen $\omega$ en $h$

Bij eenparige rotatie geldt de volgende vergelijking:

$$h\rho gA = \frac{1}{2}m\omega^2 r$$

of

$$h\rho gA = \frac{1}{2}\rho Ar^2\omega^2$$

of

$$2hg = \omega^2 r^2 \quad \text{dus} \quad \omega = \frac{1}{r} \sqrt{2hg}$$

$$\text{en omdat } f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ geldt: } f = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{2hg}$$

$$\text{ofwel } f = \frac{0,7}{r} \sqrt{h}$$

Opvallend is dat de soort vloeistof helemaal geen rol speelt. Ook het wrijvings-effect is niet van invloed.

#### IJKgrafiek

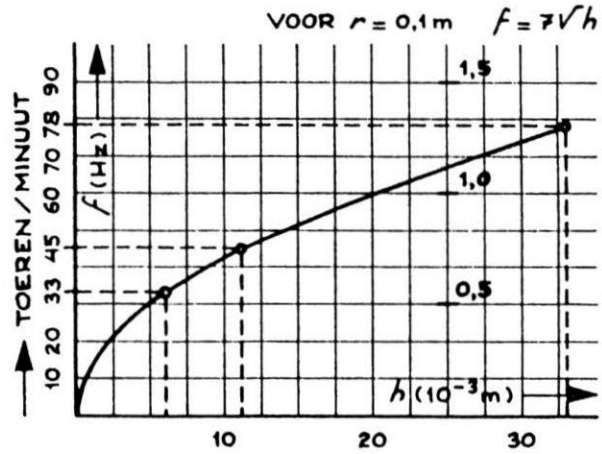
In figuur 3 is de grafiek getekend voor het geval men voor  $r = 10$  cm kiest.

Speciaal de waarden van  $h$  behorend bij de bekende toerentallen per minuut (33, 45 en 78) zijn in de grafiek aangegeven.

Als voor  $r$  een grotere waarde genomen wordt, zal de meting van  $\omega$  nauwkeuriger worden. Bij dezelfde  $f$  meet men bij een  $2 \times$  grotere waarde van  $r$  een  $4 \times$  grotere waarde van  $h$  enz.

Uitgaande van deze gedachte is het nu ook niet meer moeilijk om de leerlingen uit te leggen, dat, indien men een bredere bak met water op de draaitafel zet, het nivo een parabolisch verloop zal krijgen.

Men zou zo'n bak immers op kunnen vatten als



Figuur 3 grafiek van de relatie hoogte — frequentie

een horizontale buis met daarop vele verticale stijgbuisjes, roterend met verschillende waarden van  $r$ .

Bij een zekere waarde van  $f$  geldt dan dat  $h$  evenredig is met  $r^2$ , waarmee de parabolische vorm is aangetoond.

#### Uitvoering

Zoals in de tekening te zien, kan men best een langwerpig blok nemen en daar een gleuf in zagen, met een breedte gelijk aan die van de glasbuis. Met behulp van een plaatje en 2 schroefjes kan de U-buis gemakkelijk op het plankje worden vastgezet.

Door midden in het blok een passend gat te boren en het blok daarmee op de centrale as van de draaitafel te plaatsen, blijft het geheel tijdens de rotatie uitstekend staan.

Wanneer men een schaalverdeling wil aanbrengen zou dat het best kunnen gebeuren op het buisje in het middelpunt, omdat dit vrijwel stilstaat en zo gemakkelijk kan worden afgelezen.

Wanneer tijdens het draaien het waternivo wat op en neer blijft dansen, wordt dit veroorzaakt doordat de verbindingbuis onvoldoende horizontaal staat. Het toestelletje is erg gemakkelijk te maken en de meetresultaten voldoen uitstekend aan de berekende waarden.

# Wat willen ze eigenlijk weten?

IR HENK MULDER, *Nassauscholengemeenschap, Breda*

Wat wij in de natuurkundelessen behandelen is qua inhoud en vorm natuurlijk sterk historisch bepaald. We veronderstellen stilzwijgend dat onze leerlingen al die dingen die wij zo belangrijk vinden, ook graag zouden willen weten.

Meestal behandelen wij het dopplereffekt toch niet omdat ze dan op straat bij het passeren van een brommer, van hun nieuwsgierigheid afraken, maar... omdat het aangegeven staat in groep 13, onderdeel 16, van de eindexamenlijst.

Het lijkt interessant eens aan de andere kant te beginnen en de vragenlijst van de leerlingen zelf te inventariseren en dat eens te vergelijken met wat wij aanbieden.

Wij hadden daar dit jaar een kans voor.

Naar aanleiding van het televisieprogramma *Daar vraag je me wat*, kwamen er na elke uitzending honderden nieuwe vragen van kijkers binnen, waaruit we dan telkens voor volgende uitzendingen een keuze maakten. Vaak waren het vragen van jonge kijkers, uw en mijn leerlingen.

Voor wie er nieuwsgierig naar is, hier een kleine selectie natuurkundige problemen.



*Daar vraag je me wat*

Hoe ontstaan de kleuren van de regenboog.  
Overdag zie je bij halve maan, de rest als blauwe lucht; kun je daar dan door de maan heen kijken.  
Waarom komen bij vorst bloemen op de ruiten.

Hoe kun je een radiogolf op de t.v. krijgen.

Hoe kan een bal eigenlijk rollen.

Waarom kunnen astronauten bij hoge luchtdruk zweven.

Hoe kan een van papier gemaakt vliegtuigje in de lucht blijven.

Ik weeg 56 kilo. Ik eet 1 kilo appels en drink 2 bekers. Weeg ik nou meer of nog 56 kilo.

Als mijn fiets stilstaat val ik om, maar als ik rij niet. Hoe zit dat.

Als je roert in een theekopje, gaan alle prutjes naar het midden.

Als bij races een autowiel er afloopt, rolt het de auto voorbij.

Rivieren brengen zoet water naar de zee; hoe is die dan zo zout.

Hoe komt het dat de aarde draait.

Waarom is de aarde rond.

Waarom is ijs glad.

Waarom is water nat.

Hoe krijgen ze fietskogeltjes rond en zo op maat.

Hoe krijg je het geluid van een heel orkest in één grammofoonplaat.

Kunt u me ook vertellen wanneer de zee licht.

Waar haalt de aarde zoveel energie vandaan om zoveel aan te trekken.

Hoe ontstaan golvingen op zandwegen, soms meters achter elkaar.

Waarom zijn sommige wolken wit en andere zwart.  
Hoe komt het dat iemand aan een parachute zakt, maar achter een auto omhoog gaat.

Als je een ei met een rotgang door de lucht werpt en het komt op het gras, dan breekt het toch niet.

Kan een blinde met beelden dromen.

Kan een ijszeiler harder gaan dan de wind.

Hoe komt het dat sterren van kleur veranderen.

Waarom is gesmolten poolijs zoet water.

Soms zie ik iets door een vergrootglas vergroot, soms op zijn kop.

Waarom gebruiken ze bij filmopnamen een klapplankje.

Waarom stijgt warmte boven de kachel en blijft het niet hangen zoals vuur.

Hoe zet een trapezewerker, die vrij in de lucht hangt, zich af.

Als je op de grond springt, zak je door je knieën.

Kun je een fata morgana fotograferen.  
 Hoe ontstaan onweer en bliksem.  
 Hoe ontstaat de harde klap bij een straaljager.  
 Hoe komt het dat je in een rijdende bus zo moeilijk naar achteren kunt lopen.  
 Waarom rollen zeegolven overal naar het strand.  
 Hoe werkt de schaal van Richter.  
 Hoe blijft de aarde draaien.  
 Als je een ballon opblaast, zakt die; met helium gaat je omhoog en als je hem goed door je haar strijkt kan die aan het plafond plakken.  
 Waar komen de belletjes in de Seven-Up vandaan.  
 Hoe hebben ze verzonnen dat je brand met water kunt blussen.  
 Waarom wordt gekreukt wasgoed door hitte glad.  
 Als ik een beschuit met jam laat vallen, gaat die altijd met de jam naar beneden. Hij lijkt zich gewoon om te draaien.  
 Waarom is de zon 's avonds rood.  
 Waarom kan ik wel een spijker in hout slaan, maar niet in ijzer.  
 Hoe kun je met iemand praten zonder draad.  
 Waarom wordt de schaduw van je hand groter, als je hem dichterbij een kaarsvlam houdt.  
 Hoe werkt de wichelroede.  
 Hoe komt het dat specie tussen stenen blijft zitten.  
 Kun je energie uit watergolven halen.  
 Waarom draaien alle molens rechtsom.  
 Waarom komt uit grammofoonplaten verschillende muziek; ze zijn toch hetzelfde.  
 Wat is een laserstraal.  
 Waarom werken grammofoonplaten van buiten naar binnen; dat is toch tegen de centrifugale kracht in.

Waarom smelt sneeuw als je er zout opgooit.  
 Waarom knippen sterren.  
 Hoe kun je de spanning van een brug berekenen.  
 Waarom kun je door glas heen kijken en niet door lood.  
 Waarom brommen hoogspanningsdraden in de weilanden.  
 Waarom draait het water in de gootsteen altijd dezelfde kant uit.  
 Wat zal er gebeuren als men met de tijd gaat goochelen, bijvoorbeeld kwadrateren.  
 Wordt de aarde door het gebruik van grondstoffen lichter en verandert daardoor de baan in het heelal.  
 Hoe ontstaat geluid als je dingen tegen elkaar schuurt.  
 Als astronauten op de maan zijn sturen ze foto's.  
 Hoe kan dat.  
 Als je een radio hebt op batterijen en je draait eraan krijg je muziek. Je hebt toch geen contact met Hilversum.  
 Als de fluitketel fluit doe ik de toon soms na. Dan komt er vaak een derde toon.  
 Waarom kun je licht niet vangen.  
 Waarom is de aarde rond en de vloer recht.  
 Hoe weet iemand of hij onder of boven de aardbol woont.  
 Waarom kun je wind wel horen maar niet zien.  
 Hoe snel doet de straling van magnetisme over 10 meter.  
 Waarom is keukenzout niet giftig; er zit toch NaCl in.  
 Hoe weten ze zoveel over molekulen; je kunt ze toch niet zien.  
 Hoe doet een tour-de-france rijder zijn behoefte ???

## Luchtdruk

IR MENK MULDER, *Nassauscholengemeenschap, Breda*

### *A - Luchtdruk en hoogte*

Als we de drukeenheid  $N/m^2$  serieus nemen, zullen we op zekere dag ook de vertrouwde metaalbarometer van de muur moeten nemen om de oude cm-kwik eenheden over te plakken.

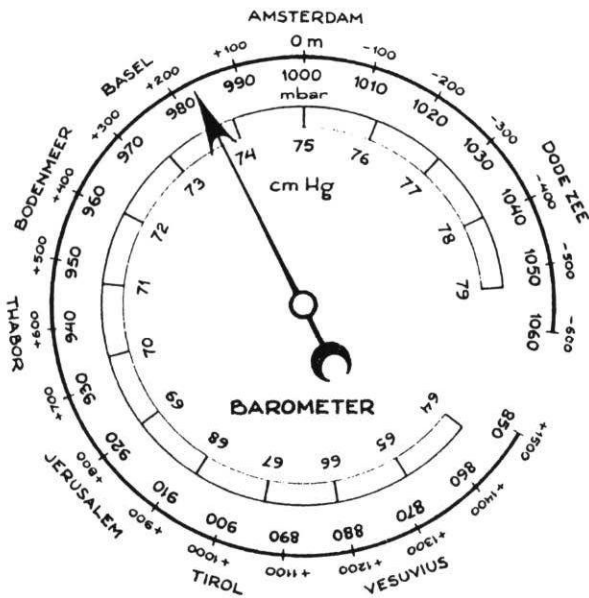
Een verandering van 3 cm kwikdruk stemt overeen met  $4000 N/m^2$  (of 40 mbar) op de nieuwe schaalverdeling.

De schaal — moderne stijl — ziet er dan uit als in

figuur 1. Eigenlijk zou het wel aardig zijn om tegelijk ook nog maar een hoogteschaal bij te plakken.

We kunnen vrijwel stellen dat bij elke stijging van 100 m in de dampkring de druk 10 mbar daalt.

De laatste grote vakantie gingen we met een groep tweede klassers naar de bergen van Tirol. We hadden de barometer in de bus meegenomen. We vertrokken 's-morgens om 6 uur op zeeniveau bij een druk 1000 mbar. Rond de avond wees het apparaat 800 mbar (67 cm Hg). We waren in het Lechtal aangekomen op 1100 m hoogte.



Figuur 1 Barometer met nieuwe schalen

Tijdens de diverse beklimmingen is de barometer nog vaak in de rugzak meegeweest.

### Hoe hoog is de dampkring?

Het is merkwaardig dat we in onze schoolboeken geen bepaling vinden van de minimale hoogte van de dampkring, gebaseerd op zelf gedane metingen.

We weten inmiddels:

- de luchtdruk is  $10^5 \text{ N/m}^2$
- de dichtheid van lucht is  $1,3 \text{ kg/m}^3$ .

Als we de dichtheidsvermindering op grotere hoogte vergeten (en ook de daling van  $g$ ) dan zou de dampkring dus een minimale hoogte moeten hebben:

$$10^5 \text{ (N/m}^2\text{)} : 13 \text{ (N/m}^3\text{)} = 8000 \text{ m} = 8 \text{ km}$$

In werkelijkheid is de dampkring natuurlijk hoger, maar zonder met een ballon uit het natuurkundelokaal op te stijgen kunnen we toch, alleen uitgaande van de drukk bepaling en de luchtweging, een eerste benadering geven van de hoogte van de dampkring op een voor tweede klassers controleerbare wijze.

In werkelijkheid blijkt op deze hoogte de lucht-

druk pas (of reeds?) tot een derde deel gedaald te zijn.

### Een betere benadering

Nu de leerlingen van de hoogste klas in de wis-kunde zo uitvoerig omgaan met differentialen, integralen en e-machten, lijkt het mogelijk aan hen een afleiding te geven over de werkelijke daling van de luchtdruk op grotere hoogte.

We gaan daarbij uit van de volgende waarden op zeeniveau:

- $\rho$  (luchtdichtheid)  $1,3 \text{ kg/m}^3$
- $b$  (barometerdruk)  $10^5 \text{ N/m}^2$
- $g$  (gravitatie)  $10 \text{ m/s}^2$

Ter vereenvoudiging denken we overal de temperatuur  $273 \text{ K}$ , verwaarlozen de asrotatie (situatie zoals aan de polen) en ook de daling van  $g$  op grotere hoogte. De benadering die zo ontstaat is redelijk goed. De dichtheidsverandering van de lucht brengen we natuurlijk wel in rekening.

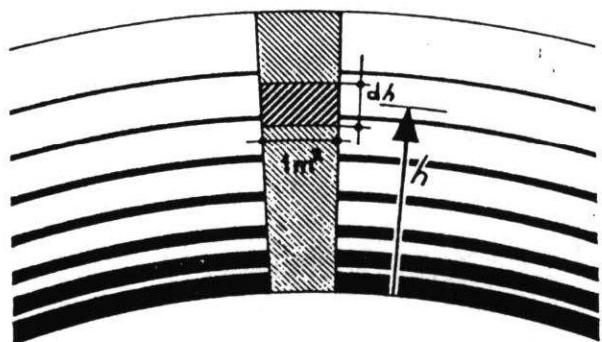
Een luchtzuiltje (figuur 2) op een hoogte  $h$  boven zeeniveau, met een druk  $p$  en een doorsnede  $1 \text{ m}^2$ , heeft een massa:

$$(dm) = \rho \cdot (dV) = 1,3 \cdot \frac{p}{10^5} \cdot (dh)$$

en een gewicht:

$$(dm) \cdot g = 13 \cdot 10^{-5} \cdot p \cdot (dh)$$

Nu is de druk op zekere hoogte  $h$  de resultante van



Figuur 2 De dampkring

de partiële zwaartekrachten, werkend op de bovengelegen luchtpakketten met doorsneden  $1 \text{ m}^2$ .

Omdat de druk op grotere hoogte afneemt, volgt hieruit:

$$\frac{dp}{dh} = -13 \cdot 10^{-5} \cdot p$$

Als algemene oplossing geldt dan:

$$p = c \cdot e^{-13 \cdot 10^{-5} \cdot h}$$

Door differentiëren is dat gemakkelijk na te gaan.

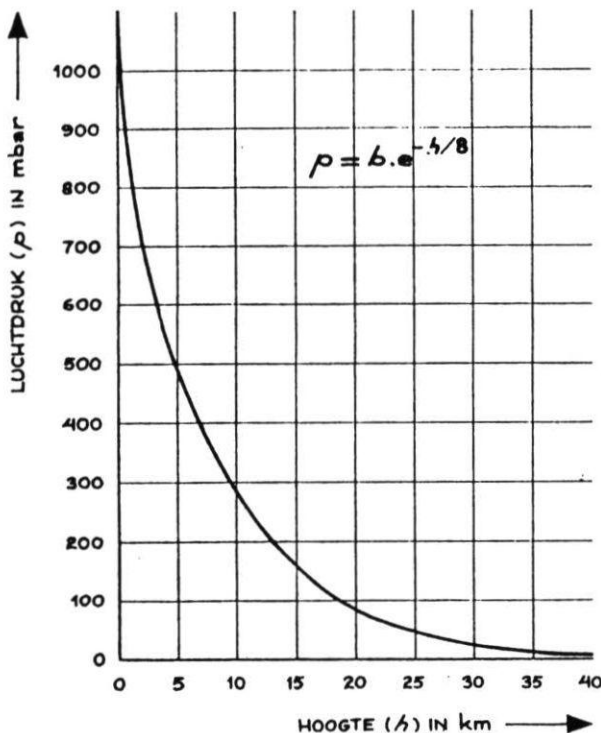
De waarde van de constante  $c$  volgt uit de randvoorwaarde: voor  $h=0$  geldt  $p=b$ . Zodoende wordt  $c=b$ .

De oplossing ziet er dan tenslotte zo uit:

$$p = b \cdot e^{-13 \cdot 10^{-5} \cdot h} \text{ waarbij } p \text{ in } \text{N/m}^2 \text{ en } h \text{ in m.}$$

Schrijven we  $h$  in km dan kunnen we afronden op deze eenvoudige uitkomst:

$$p = b \cdot e^{-h/8}$$



Figuur 3 Relatie luchtdruk en hoogte

Dit is vrijwel de experimentele grafiek uit figuur 3.

Het komt hierop neer dat we telkens op gelijke afstanden hoger in de dampkring, drukken aantreffen die eenzelfde faktor lager zijn.

Als we opstijgen tot 18 km hoogte, is de druk verlaagd tot 10% van de waarde hier op het aardoppervlak; weer 18 km hoger tot 1% enz.

## B- Luchtdrukverdeling bij versnelde beweging

We veronderstellen meestal stilzwijgend dat de luchtdruk in een bepaalde ruimte overal dezelfde waarde heeft. Dat is in een ruimte, die versneld wordt, niet meer het geval. Het is zoals bij water: het niveau is horizontaal in een kopje met thee, als we tenminste niet tegen de tafel stoten of het kopje ronddraaien.

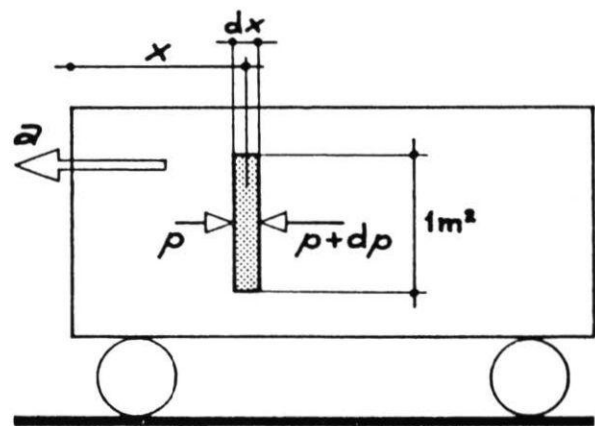
We bestuderen nu de luchtdrukverdeling in een vat, in de volgende gevallen:

1. het vat beweegt rechtlijnig met een constante versnelling
2. het vat roteert; er werkt een centripetale versnelling.

### 1. Rechtlijnig en versneld

We denken een afgesloten vat, gevuld met lucht van  $0^\circ\text{C}$ , dat met een constante versnelling  $a$  naar links beweegt (figuur 4).

Het zal duidelijk zijn dat, tengevolge van de versnelling, de luchtdruk in het vat, gaande naar rechts,



Figuur 4 Versnelde translatie

zal toenemen. Het is als in een optrekkende autobus: de passagiers worden naar achteren gedreven.

Hoe verloopt de luchtdruk nu in zo'n ruimte?

We beschouwen een luchtlaag, met dikte  $dx$ , op een afstand  $x$  van de linkerwand. De doorsnede ervan kiezen we  $1 \text{ m}^2$  (figuur 4). Links van deze laag is de druk  $p$ , rechts ervan  $p + dp$ .

De dichtheid van lucht bij een temperatuur  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  en een druk  $10^5 \text{ N/m}^2$  is  $1,3 \text{ kg/m}^3$  en bij een druk  $p$  wordt de dichtheid  $k \cdot p$  waarbij  $k = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ kg/mN}$ .

De massa van dit luchtpakketje met dikte  $dx$  en doorsnede  $1 \text{ m}^2$ , is dan  $k \cdot p \cdot dx$ .

Dit pakketje wordt versneld door een kracht  $dp$ , zodat volgens de wet van Newton geldt:

$$dp = k \cdot p \cdot a \cdot dx$$

ofwel

$$\frac{dp}{p} = k \cdot a \cdot dx$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking luidt:

$$\ln \frac{p}{c} = k \cdot a \cdot x \text{ waarbij } c \text{ een nog nader te bepalen constante is. Als we de druk uiterst links, voor } x = 0, \text{ gelijk stellen aan } p(0) \text{ dan kunnen we de oplossing schrijven als:}$$

$$p = p(0) \cdot e^{k \cdot a \cdot x}$$

De constante  $k$  is afhankelijk van de temperatuur in het vat en de gassoort.

De waarde  $p(0)$  is te voorspellen, als gegeven is hoe groot de druk in het vat is bij rust of eenparige beweging. Men stelt dan dat de totale gasmassa constant moet zijn gebleven, waaruit  $p(0)$  als onbekende kan worden opgelost.

Interessanter voor het moment is het verloop van de druk in het vat.

#### Een bijzonder geval

Om enig inzicht in de gevonden uitkomst te krijgen, nemen we een voorbeeld. Omdat de waarde van  $k$  klein is, heeft het alleen maar zin een geval te kie-

zen waarbij  $a$  groot is.

Een onbemand Russisch ruimtevoertuig brengt maanmonsters naar de aarde en remt in de dampkring af met  $400 \text{ g}$  of met  $4000 \text{ m/s}^2$ .

Als de capsule  $2 \text{ m}$  hoog is, zal de verhouding van luchtdrukwaarden, onder en boven in de capsule, zijn:

$$1 : e^{0,104} = 1 : 1,110 \text{ dus een verschil van } 11 \%$$

#### Vereenvoudigde formule

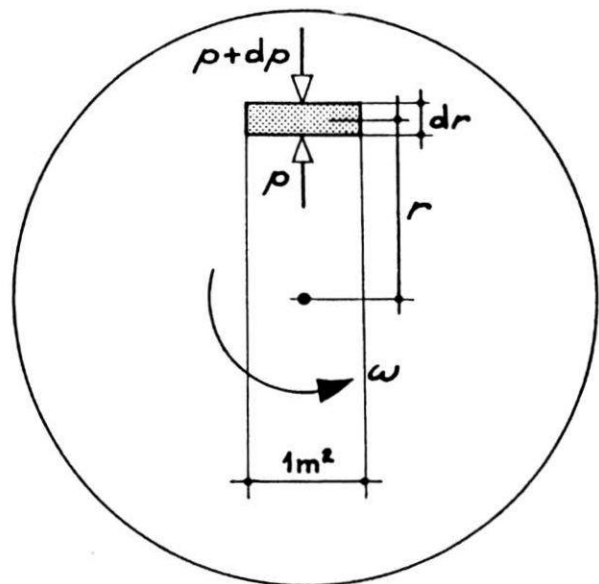
Voor kleine waarden van  $kax$  kan men  $e^{kax}$  vervangen door  $1 + kax$ . In dat geval kunnen we de formule voor de drukverdeling eenvoudiger schrijven als:

$$p = p(0) \cdot (1 + kax)$$

#### 2. Roterend

We willen nu bekijken hoe er drukverschillen ontstaan bij rotatie.

Een vat met lucht draait om een punt met hoeksnelheid  $\omega$ . We beschouwen een luchtpakketje, met dikte  $dx$ , een doorsnede van  $1 \text{ m}^2$  en op een afstand  $r$  van het rotatiecentrum (figuur 5).



Figuur 5 Eenparige rotatie

Dit pakketje heeft weer een massa  $k \cdot p \cdot dr$ .

Het verschil in kracht aan boven- en onderzijde levert de centripetale versnelling met een waarde  $\omega^2 \cdot r$ .

Volgens de wet van Newton geldt dan weer:

$$dp = k \cdot p \cdot \omega^2 \cdot r \cdot dr$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking wordt:

$$p = p(0) \cdot e^{1/4 k \omega^2 r^2}$$

De waarde  $p(0)$  stelt de druk voor in het punt waar  $r = 0$ , dus in het middelpunt. De druk is het hoogst aan de rand.

#### *Een bijzonder geval*

Een raceauto rijdt met een snelheid van 180 km/h of 50 m/s. De straal van de wielen is 0,3 m.

Bij het rollen kantelt een wiel steeds om het laagste punt. De hoeksnelheid daarbij is 50 : 0,3 of 167 rad/s. De drukverdeling in de autoband verloopt dan aldus:

$$p = p(0) \cdot e^{0,18 r^2}$$

De druk in de band, vlak bij de grond, verhoudt zich dan tot die in het hoogste punt van de band, waar  $r = 0,6$  m, als  $1 : e^{0,065} = 1 : 1,065$

In dit geval is de druk in de band in het hoogste punt dus 7% hoger dan bij de grond.

Voor kleine waarden van de exponent, kunnen we de formule weer beter schrijven als:

$$p = p(0) \cdot (1 + 1/4 k \omega^2 r^2)$$

Het geheel overziende is het opvallend, dat de drukverschillen in het geval van rotatie veel opvallender zijn dan in het geval van de versnelde translatie.

# De helling af

IR HENK MULDER, *Nassau scholengemeenschap, Breda*

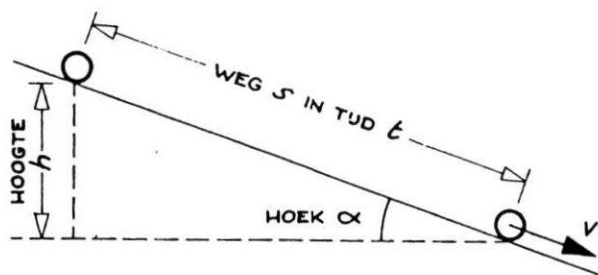
Het is niet ingewikkeld om de tijd te bepalen waarin een steen valt. Ook de eindsnelheid is eenvoudig te berekenen. Ook voor een massa die een helling afglijdt, hebben we geschikte formules bij de hand. De versnelling is daar niet  $g$  maar  $g \cdot \sin \alpha$ .

Maar hoe bepalen we versnellingen als dingen een helling afrollen? We komen dan uit bij vragen als: wat komt eerder beneden, een rollende cilinder of een rollende bol. En maakt het dan nog uit of ze hol of massief zijn?

Zijn massa en straal daarbij nog van belang?

## Werkprincipe

We gaan in al deze gevallen uit van de wet van behoud van energie.



Figuur 1 Afglijden en afrollen.

Stel (figuur 1) dat de hoogte van de helling  $h$  is, de lengte  $s$ , de afdaaltijd  $t$ , de beginsnelheid nul de versnelling  $a$  en de eindsnelheid  $v$  en bedenken we verder dat al dergelijke bewegingen eenparig versneld zijn, dan gelden steeds deze bewegingsformules:

$$v = at \quad \text{en} \quad s = \frac{1}{2}vt.$$

De laatste volgt uit de algemene stelling: afstand = gemiddelde snelheid  $\cdot$  tijd.

Uit deze relaties kunnen we dan uitkomsten afleiden voor eindsnelheid, tijd en versnelling, telkens

uitgedrukt in de gravitatie  $g$  en de maten  $h$  en  $s$  van de helling.

## Totale energie

Een schuivende massa heeft een translatieenergie  $\frac{1}{2}mv^2$ , en een draaiende rotatieenergie  $\frac{1}{2}J\omega^2$ .

In het geval van rollen hebben we een combinatie van translatie- en rotatieenergie.

Bij een rollende bol of cilinder verstaan we onder  $v$ , de eindsnelheid van de as of van het middelpunt.

Bij een rollende holle cilinder is de rolenergie:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(mR^2)\frac{v^2}{R^2} = mv^2$$

(figuur 2).

|  | objekt         | traagheidsmoment  | rolenergie         |
|--|----------------|-------------------|--------------------|
|  | holle cilinder | $mR^2$            | $mv^2$             |
|  | massieve cil.  | $\frac{1}{2}mR^2$ | $\frac{3}{4}mv^2$  |
|  | holle bol      | $\frac{2}{3}mR^2$ | $\frac{5}{6}mv^2$  |
|  | massieve bol   | $\frac{2}{5}mR^2$ | $\frac{7}{10}mv^2$ |

Figuur 2 Traagheidsmoment en rolenergie.

Op dezelfde manier berekenen we de rolenergie van een massieve cilinder en vinden daar dan  $\frac{3}{4}mv^2$ .

Voor een holle en massieve bol worden de uitkomsten  $\frac{5}{6}mv^2$  en  $\frac{7}{10}mv^2$ .

## De bewegingsformules

Als een massa een helling wrijvingsloos afglijdt, geldt:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \text{dus} \quad v = \sqrt{2gh}.$$



De tijd wordt  $\frac{2s}{v}$  of  $t = \frac{2s}{\sqrt{2gh}}$ .

Uit  $a = \frac{v}{t}$  volgt voor de versnelling  $\frac{2gh}{2s}$  ofwel

$$a = \frac{h}{s} \cdot g \text{ of } a = g \sin \alpha.$$

Bij een holle cilinder geldt:

$$mv^2 = mgh \text{ dus } v = \sqrt{gh}.$$

De waarden voor  $t$  en  $a$  worden dan vlug gevonden door in plaats van  $2g$  nu  $g$  te schrijven.

Voor de rollende holle cilinder vinden we dan

$$t = \frac{2s}{\sqrt{gh}} \text{ en } a = \frac{h}{2s} \cdot g$$

of  $\frac{1}{2}g \sin \alpha$ .

Bij de massieve cilinder gaan we uit van:

$$\frac{3}{4}mv^2 = mgh \text{ dus } v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

Daaruit volgt dan:

$$t = \frac{2s}{\sqrt{\frac{4}{3}gh}} \text{ en } a = \frac{2h}{3s} \cdot g \text{ of } a = \frac{2}{3}g \sin \alpha.$$

Als we bij een rollende bol op dezelfde manier werken, vinden we daar in het geval van een holle bol:

$$t = \frac{2s}{\sqrt{\frac{8}{5}gh}} \text{ en } a = \frac{3}{5}g \sin \alpha.$$

Bij een rollende massieve bol tenslotte krijgen we:

$$t = \frac{2s}{\sqrt{\frac{10}{7}gh}} \text{ en } a = \frac{5}{7}g \sin \alpha.$$

|             | 1          | rollen    |         |          |         |
|-------------|------------|-----------|---------|----------|---------|
|             | translatie | cilinder  |         | bol      |         |
|             | blok       | hol       | massief | hol      | massief |
| snelheid    | 1          | 0,71      | 0,82    | 0,78     | 0,85    |
| tijd        | 1          | 1,41      | 1,22    | 1,29     | 1,18    |
| versnelling | 1          | 0,50      | 0,67    | 0,60     | 0,71    |
|             | vlugst     | langzamer | vlug    | langzaam | vlugger |

Figuur 3 Snelheid, tijd en versnelling in verhoudingsgetallen.

## Verhoudingen

De verhoudingen van de snelheden in de 5 verschillende genoemde gevallen, wordt dan:

$$\sqrt{2} : 1 : \sqrt{\frac{4}{3}} : \sqrt{\frac{6}{5}} : \sqrt{\frac{10}{7}}$$

en uitgaande van het translatiegeval wordt deze verhouding

$$1 : 0,71 : 0,82 : 0,78 : 0,85.$$

Op dezelfde wijze kunnen we de verhoudingsrij voor de tijden bepalen. We vinden dan

$$1 : 1,41 : 1,22 : 1,29 : 1,18.$$

Tenslotte voor de versnellingswaarden

$$1 : 0,50 : 0,67 : 0,60 : 0,71.$$

Het overzicht staat in figuur 3.

## Tenslotte

Samenvattend valt het op dat schuiven toch altijd nog sneller gaat dan rollen. Maar dat moet dan wel wrijvingsloos zijn.

Van de cilinders en bollen is de holle cilinder het langzaamst en de massieve bol het vlugst.

Massief gaat altijd vlugger dan hol.

We kunnen een en ander gemakkelijk uitproberen door een massieve knikker en een massieve cilinder tegelijk een helling af te laten rollen.

Zo kunnen we ook een vol en een leeg groenteblik omlaag laten gaan en kijken welk het eerst beneden is. We moeten bij die gevulde blikken wel oppassen. Als de inhoud kan gaan hutselen, ontstaan inwendige wrijvingsverliezen en daardoor gaat het afdalen langzamer. Dat kunnen we goed zien als we een ronde trommel half vol knikkers een helling af laten rollen.

Opmerkelijk is het dat de afmetingen geen rol spelen. Een grote stalen knikker en een kleine glazen komen in gelijke tijd omlaag.

Als we letten op de uitkomsten voor de verschillende versnellingen, lijkt het of de translatie zich afspeelt in een gravitatieveld met sterkte  $g$ , maar het rollen van een holle cilinder in een veld met sterkte  $\frac{1}{2}g$  en van een massieve in een met sterkte  $\frac{2}{3}g$ .

Voor de rollende bol worden die waarden dan respectievelijk  $\frac{3}{5}g$  en  $\frac{4}{5}g$ .

Rollen verloopt soortgelijk als schuiven, alleen lijkt het zich af te spelen op planeten met kleinere gravitatie.

---

## Draaien + schuiven = rollen

IR HENK MULDER, *Nassauscholengemeenschap, Breda*

Het blijkt uitermate moeilijk een definitie van rollen te geven die voldoende aansluit bij het taalgebruik. Eigenlijk moeten we ons erover verwonderen, dat een begrip, waar we zo vertrouwd mee omgaan, zo duister is.

Of vind u het nogal eenvoudig?

Bollen en cilinders kunnen rollen, ja zeker. Maar, kan een aardappel ook rollen, of moeten we dat hobbelen noemen? En een ei? En als een hoepel in een fraaie spiraal rondwentelt, rolt die dan? En een tol die met vertikale as rondzwaart ... en als die as dan ook nog een kegel gaat beschrijven? Rolt de

aarde in haar baan om de zon? Zou voor rollen een steunvlak essentieel zijn? Wat is rollen eigenlijk? Wie waagt zich aan een algemene definitie?

We beperken ons nu maar tot een hoepel rollend in een plat vlak, of tot een bol of cilinder, al of niet massief, waarbij middelpunt of as een constante afstand tot het steunvlak houden. Contactpunten met dat steunvlak verkeren telkens in rust, waardoor we slippen bij rollen uitsluiten. In deze gevallen zouden we uit kunnen gaan van deze definitie: *rollen = draaien + schuiven*.

Dit betekent dat elk punt van het rollend voorwerp op elk moment onderworpen is aan twee bewegingen, een rotatie en een translatie.

Concreter: als we beweren dat het voortwentelen van een bol, cilinder, schijf of hoepel in sommige gevallen rollen mag heten, dan moeten we bewijzen dat de beweging van elk punt op te vatten is als een optelling van een rotatie- en een translatievektor. Als de assnelheid  $v$  is, dan is die translatievektor ook  $v$  en de hoeksnelheid voor de rotatie  $v/R$ , waarbij  $R$  de straal is.

Het blijft de vraag of bijvoorbeeld een voortrollend autowiel aan die eis voldoet.

Er is nog iets. Meestal vermelden we ook nog zonder meer, dat de rolenergie gevonden kan worden door een scalaire optelling van rotatie- en trans-

latie-energie. Ook dat zullen we moeten aantonen.

Beide stellingen worden in de lespraktijk als vanzelfsprekend aanvaard. Bij nader inzien blijkt het nogal wat moeite te kosten om ze te bewijzen.

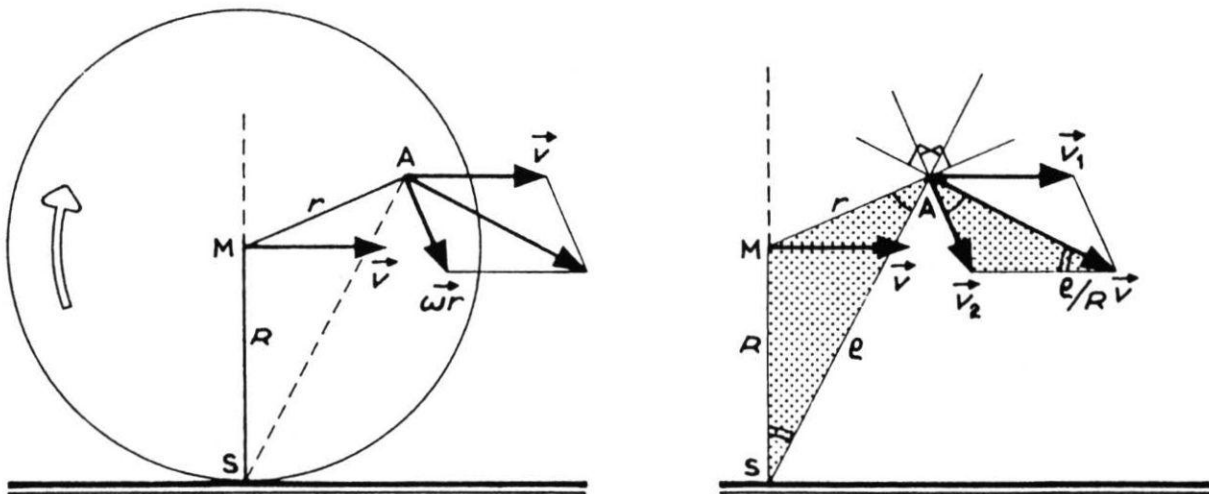
### Een dubbeltje op zijn kant

In figuur 1a staat een platte schijf, voorwaarts rollend met een snelheid  $v$ . De snelheidsvektor van een of ander punt A moet dan loodrecht staan op AS, de verbindingslijn van punt A en het draaipunt S.

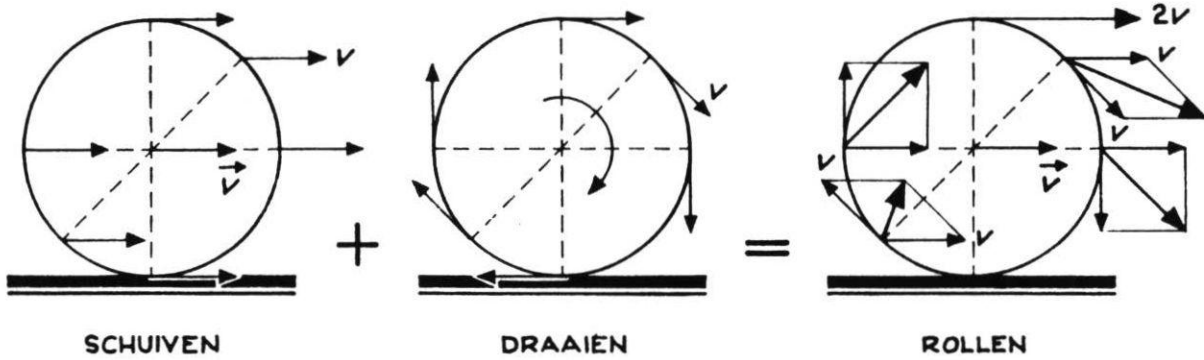
We zullen nu moeten aantonen dat deze snelheid te ontbinden is in een horizontaal gerichte vektor en een vektor loodrecht op AM, de verbindingslijn naar de as. De eerste zou dan de grootte  $v$  moeten hebben en de tweede  $\omega r$ , waarbij  $r = AM$  en  $\omega = v/R$ .

We gaan nu aantonen dat elk de veronderstelde waarde heeft. De snelheid van punt A, gelegen op afstand  $r$  van de as en op een afstand  $\rho$  van het kantelpunt S, is in grootte  $v \cdot \rho/R$ . We ontbinden deze in de bedoelde richtingen; de eerste vektor stellen we  $v_1$ , de tweede  $v_2$ .

In figuur 1b ontdekken we dan, dat beide gearceerde driehoeken gelijkvormig zijn. Vanwege de



Figuur 1 Ontbinding van de rolvektor in een schuif- en een draaivektor.



Figuur 2 Rollende hoepel.

gekozen richtingen zijn de hoeken ervan immers twee aan twee gelijk.

Daaruit volgt dan:

$$v_1 : R = \frac{\rho}{R} v : \rho \quad \text{of} \quad v_1 : R = v : R$$

dus  $v_1 = v$

evenzo:

$$v_2 : r = \frac{\rho}{R} v : \rho \quad \text{of} \quad v_2 : r = v : R$$

dus  $v_2 = \frac{r}{R} v = \omega r$ .

En hiermee is de juistheid van deze veronderstelling aangetoond.

Niet alleen voor een dubbeltje op zijn kant, maar ook voor een rollende cilinder of bol geldt eenzelfde redenering. Cilinder en bol kunnen dan nog hol of massief zijn.

Als we iets van dit bewijs aan onze leerlingen zouden willen overdragen, kunnen we ons het best tot de rollende hoepel beperken (figuur 2).

### Rolenergie

Het tweede probleem betreft de totale of rolenenergie van een voortwentelend wiel. Ook hier is het meestal gebruikelijk maar stilzwijgend te veronderstellen dat schuif- en draaienergie gewoon optelbaar zijn.

We onderzoeken de zaak weer voor het geval van de rollende schijf met assnelheid  $v$

Elk massaelement  $\Delta m$  heeft dan een glijnsnelheid  $v$

en een draaisnelheid  $w$ , volgend uit de hoeksnelheid  $\omega$  volgens:  $w = \omega r$ .

We nemen nu een paar van zulke even grote grote massaelementen, gesitueerd in  $P_1$  en  $P_2$ , diametraal tegenover elkaar, op gelijke afstand  $r$  van de as.

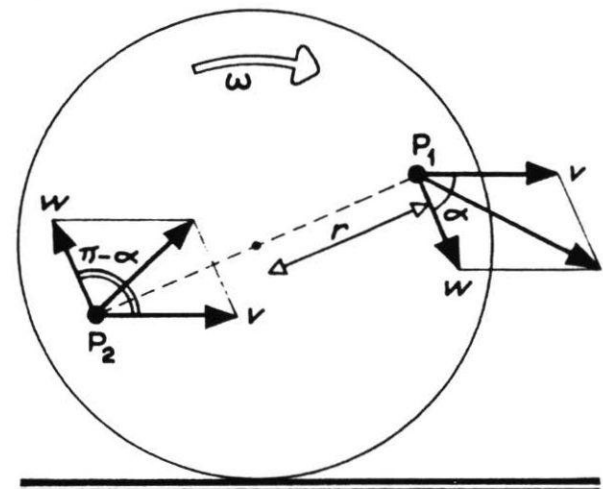
De hoek tussen  $v$  en  $w$  stellen we bij  $P_1$  gelijk aan  $\alpha$ ; bij  $P_2$  wordt die hoek dan  $\pi - \alpha$ .

De totale kinetische energie van de massa in  $P_1$  wordt dan:

$$\frac{1}{2} \Delta m (v^2 + w^2 + 2vw \cos \alpha)$$

en voor de massa in  $P_2$ :

$$\frac{1}{2} \Delta m (v^2 + w^2 - 2vw \cos \alpha)$$



Figuur 3 Rollende cilinder.

Optelling van beide kwanta geeft:

$$2\left(\frac{1}{2}\Delta m \cdot v^2 + \frac{1}{2}\Delta m \cdot \omega^2 r^2\right) = \\ = 2\left(\frac{1}{2}\Delta m \cdot v^2 + \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 r^2\right) =$$

$$2\left[\frac{1}{2}\Delta m \cdot v^2 + \frac{1}{2}(\Delta m \cdot r^2)\omega^2\right] = \\ = 2\left(\frac{1}{2}\Delta m \cdot v^2 + \frac{1}{2}\Delta J \cdot \omega^2\right)$$

Omdat we de schijf zo helemaal uit diametraal

tegenover elkaar gelegen massadeeltjes opgebouwd kunnen denken, geldt nu ook voor de hele roterende schijf de stelling:

$$\text{rolenergie} = \text{schuifenergie} + \text{draaienergie.}$$

Eenzelfde redenering gaat op voor een rollende cilinder en bol. Voor een hoepel wordt het verhaal het eenvoudigst.

## De golflengte van licht meten . . . met een schuifmaat

IR HENK MULDER, *Ulvenhout*

We kennen allen wel de traditionele natuurkundeproeven van Melde tot Wheatstone. Het is dan ook altijd een groot genoegen op een andere school laden en kasten voorzichtig open te mogen schuiven, zoekend naar iets nieuws.

Waarschijnlijk gebeurt dit al te zelden. Misschien zijn de meeste van u ook veel bescheidener dan de schrijver.

Op vaak slecht gedrukte stencils zou u dan creatieve inspanningen aantreffen van uw collega's, gewrocht op een late maandagmiddag samen met een handige amanuensis, een ongeduldige met sleutels rammelende conciërge op de achtergrond.

Overigens, originele ideeën zijn zeldzaam. Het is als met goud zoeken, soms moet je een rivier uitbaggeren om een gram goud te vinden. Hierbij het resultaat van een dag rondscharrelen in het natuurkundepraktikum van de Vrije Universiteit van Amsterdam.

Voor het bepalen van golflengte van licht maken we vaak gebruik van dure tralies met bijvoorbeeld 1500 lijnen per cm.

Hier volgt de beschrijving van een golflengte-

meting van een neon-laser met behulp van een reflektietralie. Het blijkt dat de reflektierende vlakjes die voor het interferentiepatroon moeten zorgen, helemaal niet zo dicht bij elkaar behoeven te liggen. Met een tralieconstante  $d = 10^{-3}$  m is uitstekend te werken.

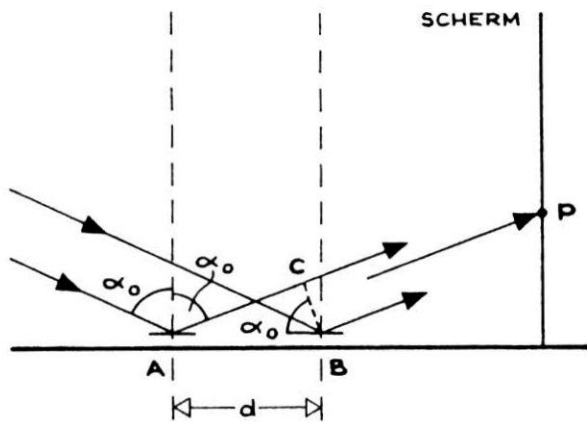
We nemen daarvoor de mm-verdeling op een normale stalen schuifmaat.

Zo hebben we voor deze proef alleen een laserstraal nodig, een schuifmaat en een scherm.

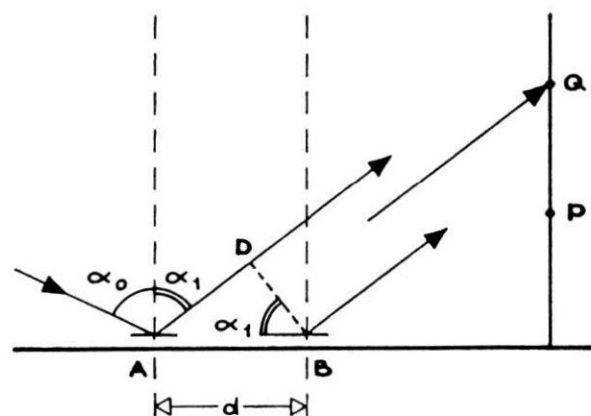
We laten een smalle bundel evenwijdig licht vallen op twee kleine spiegeltes A en B, op korte afstand  $d$  van elkaar. De invalshoek is  $\alpha_0$ . Dit licht komt samen op een vertikaal scherm in P (figuur 1a). De terugkaatsingshoek is evenzo  $\alpha_0$ .

Echter, volgens de theorie van Huygens, zal ook in andere richtingen nog licht op het scherm kunnen vallen. Daarbij kunnen stralen, van beide spiegeltes afkomstig, elkaar uitdoven of versterken. We onderzoeken nu in welke punten van het scherm nog licht is te verwachten.

BC is het golffront van het normale terugkaatsingsduo. In figuur 1b bekijken we een terugkaat-



*Figuur 1a* In P komt de hoofdbundel na terugkaatsing (nulde maximum)



*Figuur 1b* In Q komt het eerste maximum

singsduo dat een kleinere hoek  $\alpha_1$  met de vertikaal maakt. Het stuk AD is nu korter dan het stuk AC. Als Q het eerste lichtende punt boven P op het scherm is, dan moet gelden:  $AD = AC - \lambda$ .

#### Bepaling van de golflengte $\lambda$

In figuur 1a is af te lezen:  $\sin \alpha_0 = \frac{AC}{d}$

en in figuur 1b:  $\sin \alpha_1 = \frac{AC - \lambda}{d}$

Hieruit kunnen we afleiden:

$$\sin \alpha_0 - \sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{d}$$

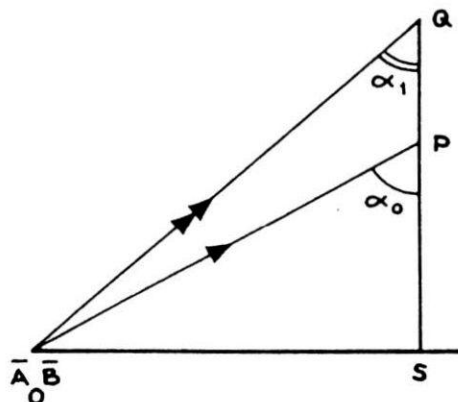
$$\text{of } \lambda = d(\sin \alpha_0 - \sin \alpha_1)$$

en daaruit kunnen we  $\lambda$  bepalen.

In figuur 2 volgt nu verder

$$\sin \alpha_0 = OS/OP \text{ en } \sin \alpha_1 = OS/OQ$$

Daar OS, OP en OQ op te meten kunnen  $\sin \alpha_0$  en  $\sin \alpha_1$  bepaald worden. Hierbij is de grootte van de spiegeltes en hun onderlinge afstand klein ten opzichte van hun afstand tot het scherm.



*Figuur 2* Bepaling van  $\sin \alpha$

#### Volgende maxima

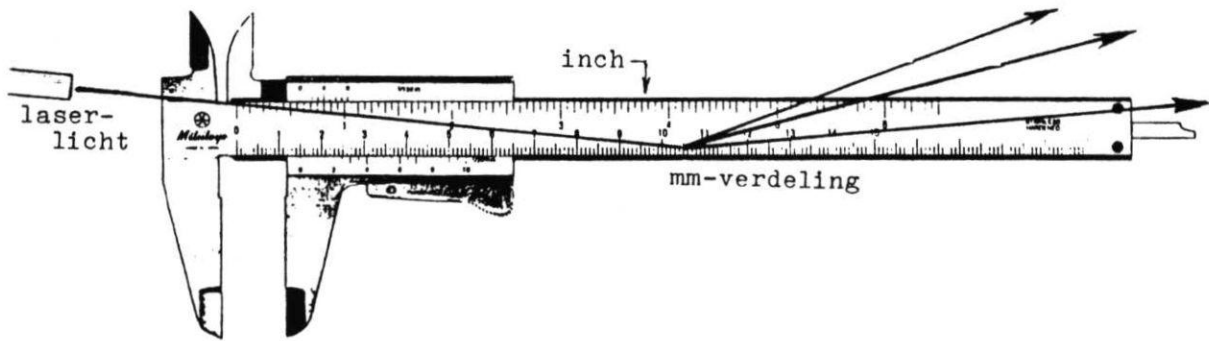
Als P het centrale of nulde maximum is, geldt voor het  $n^{\text{de}}$  maximum op een soortgelijke wijze:

$$n\lambda = d(\sin \alpha_0 - \sin \alpha_n)$$

Met behulp van zo'n verder gelegen maximum kunnen we de golflengte met meer nauwkeurigheid berekenen. Soms is het wel mogelijk 30 van zulke maxima aan weerszijden te tellen.

#### Voorbeeld van een meting

We laten de laserstraal met grote invalshoek



Figuur 3 De schuifmaat als reflektietralie

(bijv.  $80^\circ$ ) op de mm-verdeling van een horizontaal geplaatste, stalen schuifmaat vallen (figuur 3).

Hierbij zijn niet twee spiegeltjes in bedrijf, maar tientallen. Dat verhoogt de intensiteit van de stippen op het scherm. Bij de door ons gedane meting was dus  $d = 10^{-3}$  m en  $OS = 1,78$  m. Het centrale maximum lag  $0,153$  m boven het vlak en het tiende  $0,253$  m erboven. Daaruit volgt:  $OP = 1,7866$  m en  $OZ = 1,7979$  m. Zo wordt:  $\sin \alpha_0 = 0,9963$  en  $\sin \alpha_{10} = 0,9900$ . Daaruit volgt voor de golflengte  $63 \cdot 10^{-8}$  m.

*Opmerking*

Ook beneden P liggen nog interferentiestippen.

Daarvoor geldt een soortgelijke theorie en ook daarmee is de golflengte te bepalen.

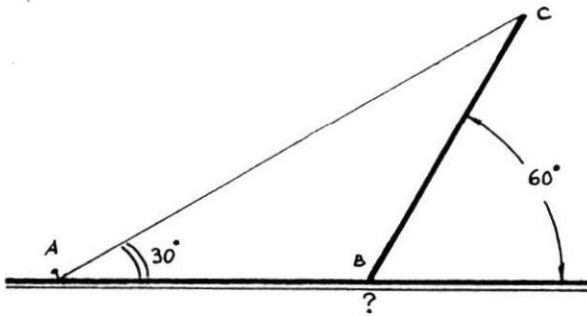
*Enkele ideeën voor extra vragen*

1. Hoe luidt de formule voor het eerste maximum onder P?
2. Wat is het nut ervan om  $\alpha_0$  groot te nemen? Test het antwoord.
3. Welke verandering ondergaat het interferentiepatroon als we met de  $\frac{1}{16}$ -inch verdeling op de schuifmaat zouden werken? Nu wordt  $d = 1,6$  mm.
4. Probeer een opstelling te maken waarbij zoveel mogelijk interferentiestippen verschijnen.
5. ...Is het niet mogelijk dat de verklaring voor de stippen eenvoudig deze is: weerkaatsingen tegen de opvolgende mm-strookjes?

## Natuurkunde als recreatie

Een nieuwe rubriek op initiatief van Henk Mulder.  
Wie zendt de volgende opgave in?

### Wrijvingscoëfficiënt



Een staaf BC staat schuin op de grond en wordt overeind gehouden door een draad AC met verwaarloosbare massa. De draad maakt  $30^\circ$  met de grond, de staaf  $60^\circ$ .

Bereken hoe groot de wrijvingscoëfficiënt minstens moet zijn, om te beletten dat de staaf langs de grond wegglijdt.

Te weinig gegevens? Nee, voldoende!

(Oplossing op blz. 91)

## Slingertijd bij veranderlijke $g$

IR HENK MULDER, *Ulvenhout*

De proef met de 'mathematische' slinger (waarom zeggen we niet 'kogelslinger'?) is een van de aantrekkelijkste experimenten. Ze illustreert in hoge mate de natuurkundige werkwijze, er schuilen problemen genoeg achter en ... je hebt bijna niets nodig.

Als nieuwe leerlingen, die geen enkele ervaring met ons vak hebben, met enige nieuwsgierigheid ons lokaal betreden, zouden we best direkt met die proef kunnen beginnen. Het lijkt zinvoller dan ons traditioneel verhaal omtrent het verschil tussen levende en levenloze natuur.

Een opgewekte klassediscussie met verrassende uitkomsten. Waarvan hangt de slingertijd af? Massa, uitwijking, lengte??

We zouden de zaak keurig af kunnen werken met de (niet rechtlijnige) grafiek. En zouden we schrikken voor de formule:  $T = 0,1 \sqrt{l}$ , waarbij we onder  $T$  gerust nog even de tijd tussen twee uiterste standen mogen verstaan? Dat zelfs 'in de natuur' nog

wortelvormen voorkomen geeft veel verbazing. En dat wiskunde iets met de werkelijkheid van doen heeft, evenzo! En dat het nu mogelijk is bij een gegeven slingerlengte ook het slingerritme te voorspellen, met behulp van de formules, geeft helemaal het gevoel, de zaak volkomen in de broekzak te hebben.

### Voor de hoogste klas

Maar ook voor leerlingen van de hoogste klas, die inmiddels al over de volle waarheid beschikken in de vorm  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , is er nog raadsel genoeg over.

Dat bijvoorbeeld de slingertijd afhankelijk is van  $g$ , wordt vrijwel nooit onderzocht.

Moeten we ermee naar de maan gaan om die relatie te ervaren?

In gewichtsloze toestand zou  $T$  oneindig worden, volgens de formule. Dat betekent alleen maar dat

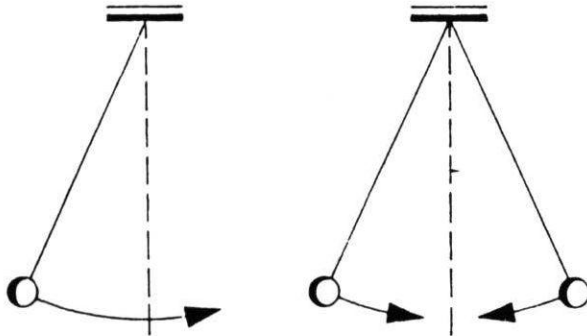


het slingeren ophoudt. Immers bij  $g$  nul wordt  $T$  zeer groot. Maar is dat ophouden van die slingering ook te constateren?

Je zou een slingerende slinger vrij kunnen laten vallen en kijken wat er dan gebeurt. Dat gaat alleen een beetje vlug en je ziet zo weinig. We zouden een kleine verandering in de proef aan kunnen brengen, waarbij we niet afgaan op hetgeen we zien, maar op hetgeen we horen.

*Op het geluid af*

In figuur 1a staat de normale kogelslinger. In figuur 1b is die vervangen door een combinatie van twee even lange kogelslingers, die tegen elkaar kunnen ketsen. De bolletjes zijn hier stalen kogels. De lengte van de touwtjes nemen we bijvoorbeeld 6 cm.



Figuur 1a slinger

Figuur 1b ketsende balletjes

Als we ze eerst uit elkaar houden en dan loslaten, zullen ze op elkaar ketsen, terugspringen, weer botsen en zo een aantal keren. Het tikritme dat we nu horen is het dubbele van de normale slingerfrequentie, behorend bij de bedoelde lengte.

Houd nu het gemeenschappelijk ophangpunt tussen duim en wijsvinger vast en laat iemand anders de knikers uiteen houden en dan loslaten. Zodra het ketsen begint, laten we het ophangpunt los en ... het vinnige tikken houdt op.

Als we de valproef in het trappenhuis van de school doen, hebben we valhoogte en valtijd voldoende. Het effect is beslist frappant.

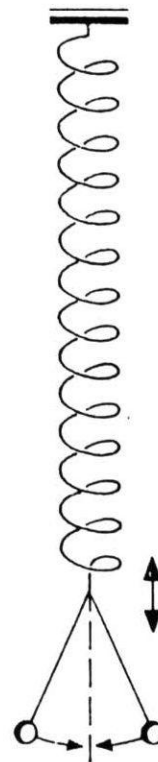
*Nog aardiger*

Het is ook mogelijk een opstelling te verzinnen, waarbij we de slingerproef doen in een zwaarteveld met wisselende waarde van  $g$ .

We nemen daarvoor een lange slappe veer en hangen daaronder weer de kogelslingercombinatie. Trek de veer een eind uit en houd tegelijkertijd de kogels uit elkaar. Laat dan alles los. We krijgen nu een veertrilling gecombineerd met een ketsende slingerbeweging (figuur 2). Wat nu sterk opvalt is dat het ketsritme voortdurend wisselt.

We moeten wel zorgen dat de veer dermate slap is dat het tikritme wel vijf keer zo hoog is als het wipritme. Dan kan een interessante klassediscussie volgen: waar is het tikritme het hoogst? In de bovenste stand of juist in de onderste? Of in het midden?

Wat vindt u van deze redenering: in de uiterste standen staat de slingercombinatie even stil, dus daar is het ketsritme als in de normale toestand, bij stilstaand ophangpunt??



Figuur 2 de slingertijd is afhankelijk van  $g$

# De vergeetachtige zandloper

IR HENK MULDER, *Ulvenhout*

Hier volgt de beschrijving van een verrassend experiment. Het is alleen jammer dat zo'n verrassingsgevoel meestal maar van korte duur is. En wel zolang totdat we de verklaring hebben gevonden. We geven dat moment aan met de kreet: oh, logisch! Dan stopt onmiddellijk dat ondefinieerbare gevoel, dat elke onderzoeker kent, zolang hij gefascineerd kijkt naar iets waar hij (nog) geen verklaring voor heeft gevonden.

Tijdens de voorjaarsconferentie van onze westduitse collega's in de universiteitsstad Gieszen, eind maart, stonden vele interessante experimenten uitgesteld. Allerlei geleerde zaken als lasers, hologrammen, focaultslingers e.d. stonden ter discussie. Eén plek trok echter het meeste volk. Het was de stand van een collega uit Duisburg, een soort natuurkundig Waterlooplein.

Het ging er om proefjes met kurken en lucifers en ander eenvoudig spul, maar wij, die er in verbazing om samendromden, kwamen vaak aan 'oh, logisch' niet toe. Zelfs uitvoerige natuurkundige opleidingen, bleken niet rechtlijnig naar een oplossing te voeren.

Eén van die fysische grappen was 'de vergeetachtige zandloper'. Die heeft wat tijd nodig om zich te bezinnen of het zinken of drijven wordt in de omringende vloeistof.

## Vooraf

We kopen in een winkel voor huishoudelijke artikelen een glazen zandloper, zoiets als we in de keuken voor het eierenkoken gebruiken. We slopen alleen het glazen ding eraf, de rest hebben we niet nodig. Dan doen we het in een bak met water. Het apparaatje zou nu kunnen gaan zinken of drijven. Het ding dat ik kocht was lichter dan water en bleef dus drijven. We gaan nu zoveel dun metaaldraad voorzichtig om de hals van het zandloperje wikkelen tot het net in water heel langzaam naar beneden zakt. Het moet dus wel zinken maar bijna zweven.

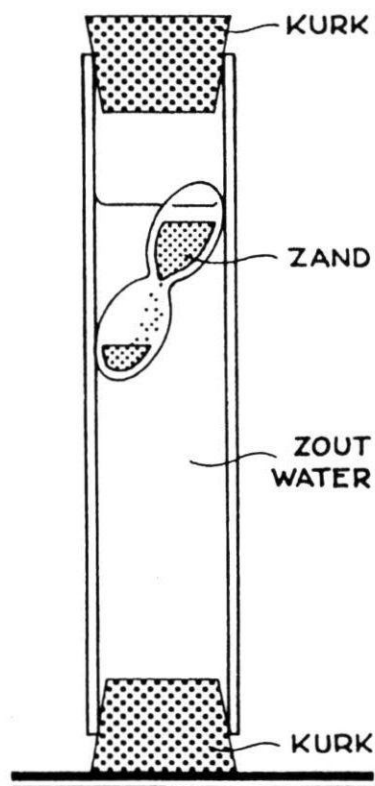
## Het experiment

Neem nu een smal vat, bijvoorbeeld een maatglas of een doorzichtig stuk plastic cilinder. Zorg in ieder geval dat beide einden kunnen worden afgesloten. Verder is een vereiste dat de buis zelf smaller is dan de zandloper lang is (figuur 1).

Vul het vat met water. Doe dan de zandloper in het vat, de met zand gevulde helft aan de bovenkant. Sluit het vat met een kurk.

Doordat het zwaartepunt nogal hoog ligt, zal de zandloper scheef in de buis gaan hangen. Maar het gekke is dat de zandloper niet direkt zinkt, maar pas nadat een zekere hoeveelheid zand is overgelopen.

Als de zandloper gezonken is en al het zand is naar de andere helft, draaien we de hele buis op zijn



Figuur 1 De geheimzinnige zandloper

kop en we zien hoe de zandloper eerst weer een tijdje blijft drijven en bijvoorbeeld pas na een minuut zinkt.

Duidelijk een zandloper met traag bewustzijn!

Misschien heb ik nu al zoveel verklapt dat u de verklaring al weet. Maar u moet zich voorstellen, dat alles keurig staat opgesteld en je dan plotseling, zonder commentaar, ineens met de grap geconfronteerd wordt. Je ziet de toeschouwers dan hardop denken. Door de stroming van het zand verandert het gewicht toch niet, en ... de opwaartse kracht evenmin.

Probeer u de opstelling te realiseren. U zult uw leerlingen er zeker mee verrassen. Overigens, een Duitse scholier formuleerde het aldus: 'erst wird sie geschoben und dann wird sie gezogen'. Kan het kernachtiger?

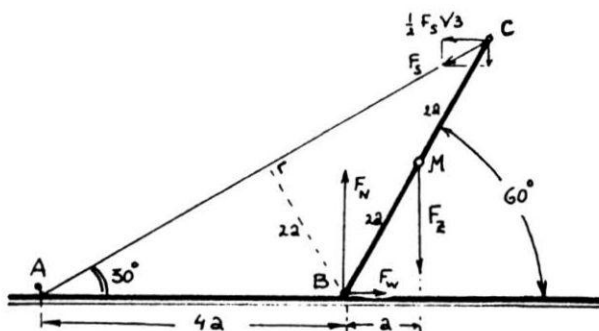
Andersom

Mocht de zandloper uit de winkel net te zwaar zijn, dan gaan we het ding rond de hals wat omwikkelen met een dun laagje kurk. Het is natuurlijk ook klaar te maken door met andere vloeistoffen te knutselen, zoals zout water of spiritus. Maar het hoeft niet.

Wel leuk lijkt het om nog een tweede vergeetachtige zandloper te maken die juist lui op de bodem ligt en zich na enige tijd bewust wordt dat zij moet drijven.

Deze moet dus voldoende licht gehouden worden, zodat deze in een wijd vat gewoon langzaam zou stijgen. Door voldoende dun metaaldraad om de hals te wikkelen, is ook dat gemakkelijk te realiseren.

*Oplissing: zie pag. 88*



Teken krachten werkend op de staaf, dan geldt bij evenwicht:

$$\sum(\text{momenten})_A = 0 \rightarrow F_N = \frac{5}{4}F_Z$$

$$\sum(\text{momenten})_B = 0 \rightarrow F_S = \frac{1}{2}F_Z$$

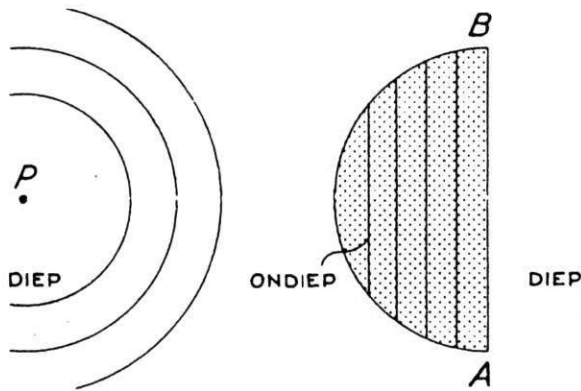
$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_W = \frac{1}{2}F_S\sqrt{3} = \frac{1}{4}F_Z\sqrt{3}$$

dus wrijvingscoëfficiënt =  $\frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}\sqrt{3} = 0,346$   
minimaal.

# De platbolle lens

IR HENK MULDER, *Ulvenhout*

'In  $P$  van figuur 1 staat een trillingsbron, die transversale cirkelgolven opwekt in een golfbak. In de golfbak liggen gebieden met verschillende diepte.



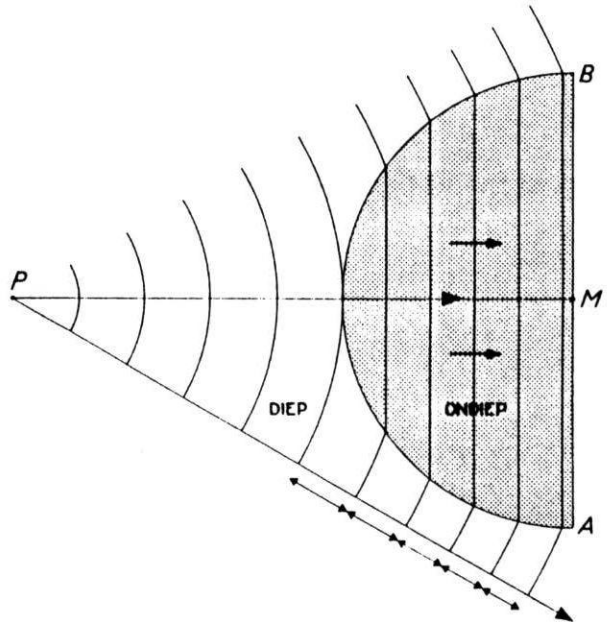
Figuur 1 Is dit mogelijk?

Het ondiepe deel is begrensd door de rechte  $AB$  en een halve cirkel. Het golvensysteem is getekend zowel voor het linker diepe gedeelte alsook voor het rechter ondiepe gedeelte.' Aldus begint een opgave uit een natuurkundeboek voor de bovenbouw. Er volgen dan een aantal vragen en opdrachten. De vraag die bij ons opkwam, is deze: kan zoiets als in figuur 1 is geschetst?

Er wordt in de tekening namelijk van uitgegaan dat het ondiepe deel een 'cirkelvormige' begrenzing heeft. Als we de golffronten serieus gaan uittekenen blijken er moeilijkheden te komen. Bij een cirkelvormige begrenzing loopt het tekenwerk vast.

## Afnemende golflengte

We kunnen de tekening van figuur 1 vergelijken met die van een lichtbron, waarbij vanuit een punt  $P$  een divergente bundel wordt uitgezonden, die na breking in de lens als een evenwijdige bundel uittreedt. Daarbij moet  $P$  wel op brandpuntsafstand van de lens liggen.



Figuur 2 Afnemende golflengte in het diepe gedeelte?

De evenwijdige bundel komt overeen met de rechte golffronten in het ondiepe watergedeelte.

Elke rechte of kromme in de tekeningen stelt een verzameling van gelijkfasige punten voor, waarbij het faseverschil tussen twee naburige lijnen 1 is.

De rechte fronten in het ondiepe deel (figuur 2) hebben onderling gelijke afstanden. Dat is immers de verkorte golflengte als gevolg van een verminderde voortplantingssnelheid. Als we aansluiting willen houden met de cirkels in het diepere deel, dan zien we dat de golflengte verderop zou moeten teruglopen.

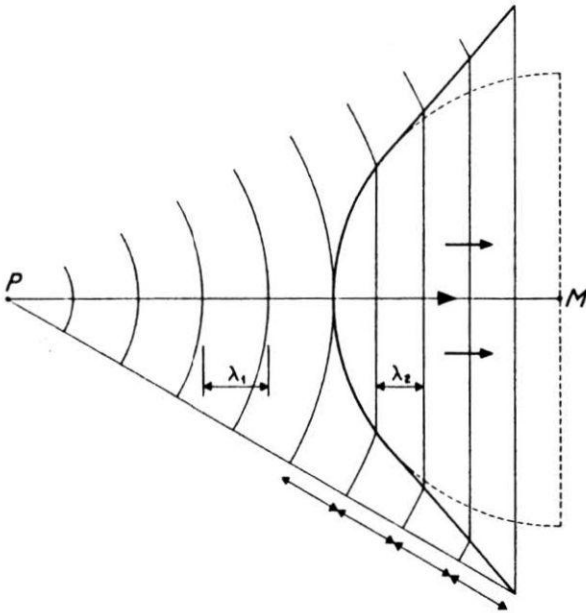
Langs de onderste golfstraal kunnen we, naar rechts gaande, die vermindering duidelijk nameten. Maar dat komt niet overeen met de werkelijkheid. Immers, de golflengte in het diepere gedeelte is, vanwege de constante voortplantingssnelheid aldaar, ook constant, hoewel groter dan in het ondiepe deel. Het lukt ons dus niet in beide delen, op de cirkelvormige grens, aansluiting te vinden tussen rechte en cirkelvormige fronten.

Het blijkt dus fysisch niet mogelijk om bij een platbolle lens met een sferisch oppervlak met behulp van één trillingsbron een evenwijdige bundel te realiseren.

*Andere vorm*

We draaien de zaak nu om en proberen de begrenzing van het ondiepe deel zo te construeren dat beide golflengten wel constant blijven en er toch aansluiting blijft tussen cirkels en rechten. Dat is gedaan in figuur 3. De vorige cirkelvormige foutieve begrenzing is, ter herinnering, gestippeld bijgetekend.

De getrokken kromme ontstaat uit de verzameling snijpunten van telkens een rechte en een cirkelboog.

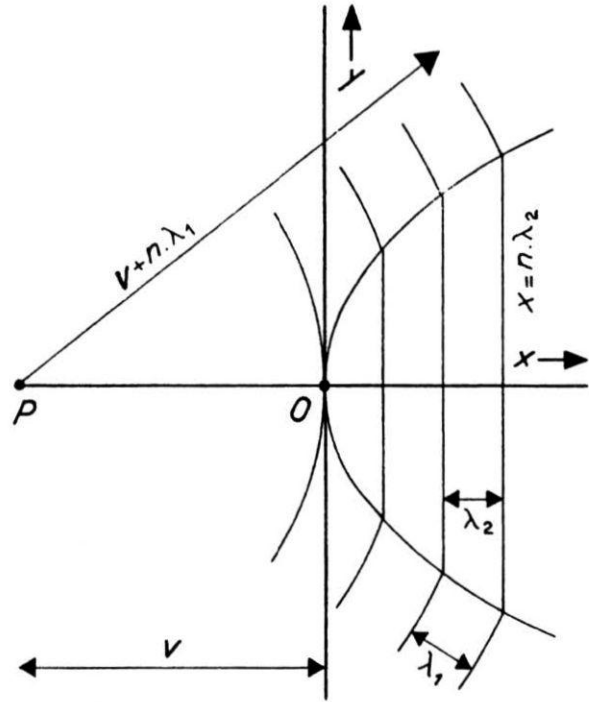


Figuur 3 Constante golflengte in het diepe deel.

*Parabool?*

Zo op het oog krijgen we de indruk dat de vorm van de kromme een parabool is. Dat is ons redelijk vertrouwd. Immers, ook bij een sferische spiegel treedt geen exacte evenwijdige bundel uit als we licht vanuit het brandpunt op de spiegel laten vallen. Maar met een parabolische spiegel lukt het volledig.

Zou ook hier de parabool de cirkel weer verdrongen hebben?



Figuur 4 Parabool?

*Welke vorm?*

We proberen de vorm exact te berekenen.

De afstand van P tot de lens stellen we  $r$  (figuur 4). Verder hebben we met twee golflengten te maken en wel  $\lambda_1$  voor het diepe en  $\lambda_2$  voor het ondiepe deel, waarbij  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Het voorste punt van de lens nemen we als oorsprong van het assenstelsel en de optische as als  $x$ -as.

De golfvronten die door de oorsprong gaan geven we het rangnummer 'nul'. Het  $n$ -de rechte golfvront heeft dan als vergelijking:

$$x = n \cdot \lambda_2$$

en het  $n$ -de cirkelvormige vront

$$(x + r)^2 + y^2 = (r + n \cdot \lambda_1)^2$$

Als we de parameter  $n$  elimineren, komen we uit op de volgende relatie tussen  $x$  en  $y$ :

$$(x + r)^2 + y^2 = \left( r + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x \right)^2$$

We willen deze uitkomst wat verder onderzoeken.

De  $x$ -as is duidelijk de symmetrie-as van de kromme. Zou het een parabool zijn??

Stel eens  $y = 0$  en bepaal  $x$ . Natuurlijk vinden we allereerst  $x = 0$ , maar bovendien de waarde

$$x = -r \frac{2\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

De tweedegraadskromme heeft dus nog een tweede tak en blijkt een ...hyperbool te zijn.

Voor onze leerlingen is dit laatste onderzoek weinig interessant. Wel lijkt het de moeite waard hen eens een aantal punten, zoals in figuur 3 is voorgedaan, zelf te laten opzoeken.

Zo ontdekken ze dan, al tekenend, dat de cirkelvorm c.q. de bolvorm in ieder geval onbruikbaar is. De ideale begrenzing voor een platbolle lens, is dus geen bol en ook geen paraboloid, maar zeer tot onze verrassing een hyperboloid!

## Natuurkunde als recreatie

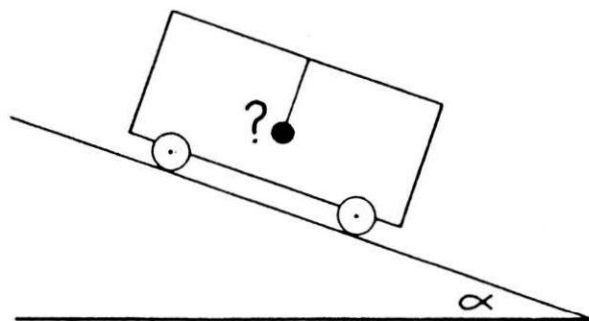
### Langs het hellend vlak

IR HENK MULDER, *Ulvenhout*

In een karretje is aan het plafond een kogelslinger opgehangen. Als het karretje over een horizontaal vlak eenparig rijdt, zal de slinger vertikaal hangen. Nu laten we het karretje vrij een helling afrollen met hellingshoek  $\alpha$  (figuur 1). De versnelling is daarbij nog afhankelijk van die hellingshoek.

Hoe zal de slinger nu gaan staan ten opzichte van de vloer van het karretje afhankelijk van de hellingshoek? Zal de slinger meer naar rechts of meer naar links ten opzichte van de getekende stand gaan staan?

Is er misschien een kritieke hoek, waarbij de slinger weer precies loodrecht op de vloer wijst?



Figuur 1 Een karretje rolt een helling af. Hoe stelt zich de slinger?

**Oplossing:** zie pag. 97.

# De helling af II

IR HENK MULDER, *Ulvenhout*

In de vorige jaargang hebben we onderzocht hoe groot de tijd is, waarin cilinders een helling afrollen.

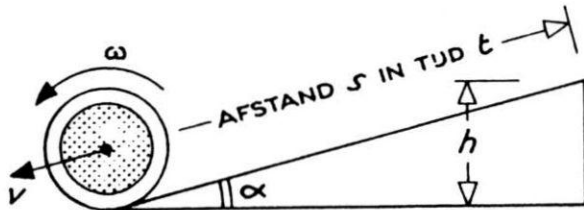
De massa, de dichtheid en de straal spelen daarbij geen rol, wel het hol of massief zijn. De uitkomst was, dat een massieve cilinder in een kortere tijd omlaag rolt dan een holle.

## Verandering van asdikte

Wat gaat er gebeuren als we de asdikte van de rollende cilinder gaan veranderen?

We zetten een berekening op voor een massieve cilinder met massa  $m$ , met straal  $R$ , die roteert om een as met straal  $r$ , die we variabel stellen. De massa van de as zelf verwaarlozen we.

De cilinder rolt nu vrij een helling af met hoek  $\alpha$ , lengte  $s$  en hoogte  $h$  (figuur 1). Snelheid en hoeksnelheid onder aan de helling stellen we  $v$  en  $\omega$ .



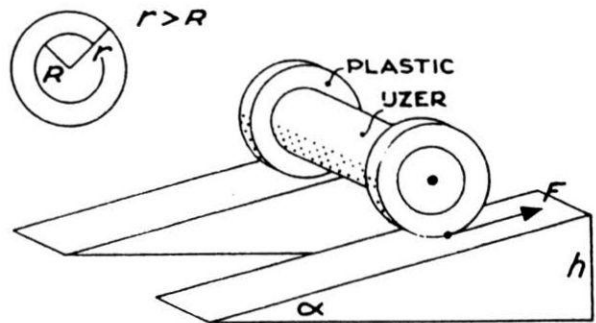
Figuur 1 De roltijd bij een helling

In figuur 2 staan drie voorbeelden. In het geval van de 'deegroller' is  $r$  kleiner dan  $R$ , in het andere geval van het 'wielensstel' is het juist omgekeerd. Bij de cilinder die om zichzelf rolt, zijn beide stralen gelijk.

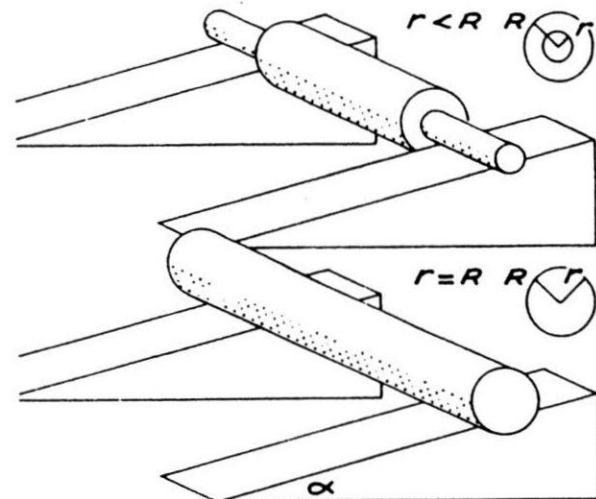
De afroltijd is afhankelijk van de verhouding  $\frac{R}{r}$ . Hoe?

## Formule

Bij het afrollen gaat potentiële energie over in kinetische (translatie en rotatie), volgens:



WIELENSTEL



DEEGROLLER

Figuur 2 Van deegroller tot wielensstel.

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgh \quad (\text{bij massieve cilinder } J = \frac{1}{2}mR^2)$$

$$mv^2 + \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\frac{v^2}{r^2} = 2mgh$$

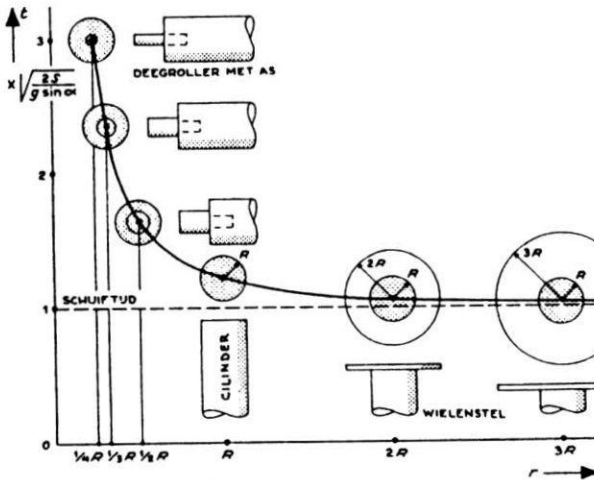
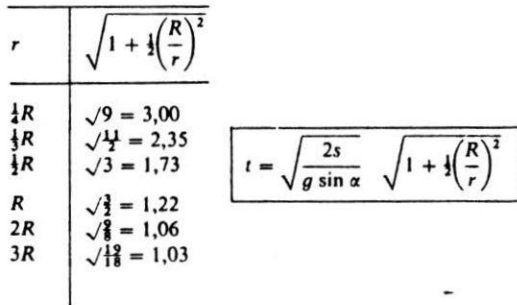
$$v = \sqrt{\frac{2hg}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2gs \sin \alpha}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2}}$$

De gemiddelde snelheid bij het eenparig versnelde afrollen is  $\frac{1}{2}v$ , dus de afroltijd  $t = \frac{2s}{v}$ . Dus

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin \alpha}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^2}$$

**Grafiek**

In figuur 3 hebben we de relatie tussen  $t$  en  $r$  in beeld gebracht. De afroltijd staat er als functie van de straal van de draaiingsas. De grafiek heeft twee asymptoten.



Figuur 3 De afroltijd als functie van  $r$ .

Vooreerst een verticale voor  $r = 0$ . Bij steeds dunnere draaiingsas, stijgt de roltijd onbeperkt. Bij een naalddunne as heeft de cilinder een zeer lange tijd nodig om omlaag te rollen.

Voor zeer grote waarden van  $r$  bereikt de roltijd een limiet, en wel:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin \alpha}}$$

Dat is juist de tijd die een voorwerp nodig heeft om wrijvingsloos af te glijden! Het klinkt wat ongeloofwaardig, maar het snelst is altijd nog een blok dat wrijvingsloos afglijdt. Een cilinder met erg grote (massaloze) wielen gaat dus even vlug omlaag als een vrij glijdend blok. Overigens, voor het rollen is altijd wrijving\* nodig, zonder dat kan het niet.

**Experiment**

De roltijd is te meten met een tweetal combinaties van lampje en fotocel bij start en finish, gekoppeld met een klok.

De beide hellingen kunnen van hout gemaakt worden. Door gaatjes in de einden van de cilinder kunnen verwisselbare plastic asjes gestoken worden, met verschillende diameter.

Daarop kunnen dan ook weer de dunne plastic wielen geschoven worden. Kies daarvoor diameters twee en driemaal die van de cilinder. Een grotere diameter heeft weinig zin omdat in het laatste geval de roltijd nog maar 3% boven de limietwaarde uitkomt.

Misschien zit hierin een idee voor een praktikum of schoolonderzoek.

\* Zie de opmerking hierover in Rollen zonder slippen, van Andries Hekstra, *Faraday* 48, 254 (nr. 6).



# Nederland, land van Jan Modaal

IR HENK MULDER, *Ulvenhout*

In ons onderwijs schijnt de sinuslijn vervangen te worden door een horizontale rechte. Dit streven heet 'gelijkheid' en heeft als bijverschijnsel vervlakking. Het niveau waarop die horizontale rechte zich bevindt, geven we aan met de kreet: modaal en de drager van dit effect heet Jan Modaal. Daar is sinds kort Marietje Modaal bijgekomen.

Ook in ons onderwijs doet zich die trend gevoelen. Super grote scholen zijn geworden tot een bioindustrie van middelmatigheid. Te kleine eieren worden afgekeurd en te grote ook. Beide typen ontregelen de onderwijsmachine.

In het tropenmuseum in Amsterdam werd van 19 tot 27 mei 1980 de twaalfde *European contest for young scientists and inventors* gehouden.

In de hal stonden dertig pronkstukken van wat de jeugd van Europa had klaargemaakt. Alleen . . . . . Nederland was de grote afwezige. West-Duitsland had uit de oorspronkelijke achthonderd inzendingen de zes beste gestuurd; België uit tweehonderd de twee beste. Er waren jonge onderzoekers met hun werkstukken uit Oostenrijk, Denemarken, Finland, Frankrijk, Engeland, Ierland, Italië, Luxemburg, Noorwegen en Spanje.

Ze waren geselecteerd in nationale wedstrijden. In dit lage land hebben we sinds een aantal jaren zoiets niet meer. Geld en animo ontbreken. Is dit de prijs voor ons streven naar modaliteit?

Een collega meende het aldus te moeten zeggen: doe niet van die aparte dingen, want je ontmoedigt de zwakkeren. En een vader: als u iets extra's wilt doen, doet u dat dan voor de minder gemotiveerden,

want de beteren komen er toch wel. Het gevolg is dat begaafde jongeren in onze scholen vrijwel geen inspiratie meer vinden. Zij dienen zich slechts rustig te houden.

Op de lerarenvergadering passeren hun namen met een zucht of een glimlach. Moet je die lijst zien! Volgende kandidaat. Voor hen hebben we geen tijd. Bij een proefwerk leveren ze verveeld vóór tijd hun spulletjes in. Het zal wel weer een 9 of een 10 zijn. Echte vragen waren er voor hen niet bij.

We praten altijd over gelijke kansen. Geldt dat ook voor de besten? Of zijn zij de meest verwaarloosde groep in ons onderwijs? Begaafde Nederlandse jongeren (ook die) hebben dezelfde rechten als hun collega's elders in Europa. We staan voor twee opdrachten: *de zwakkeren te motiveren en de sterkeren gemotiveerd te houden.*

(*Naschrift*: Je krijgt als redactie niet vaak stukjes aangeboden met een begeleidend briefje: 'Als je vindt dat dit niet kan, dan gooi je het maar weg.' Van iemand die zich al jaren in *Faraday* aan de beide genoemde opdrachten houdt, nemen we dit op. De redactie.)

---

*Langs het hellend vlak* (zie pag. 94).

De vraagstelling is tamelijk misleidend. Het antwoord is vrij eenvoudig: bij elke hellingshoek wijst de slinger steeds loodrecht op de vloer, juist zoals in de tekening is aangegeven.

Op de kogel werkt de zwaartekracht  $mg$ . Deze kunnen we bij gegeven hellingshoek  $\alpha$ , ontbinden in een component  $mg\cos\alpha$ , die opgeheven wordt door

de trek van het ophangdraadje. De andere component  $mg\sin\alpha$  veroorzaakt de versnelling  $g\sin\alpha$ , die ook het karretje ondervindt, als het vrij omlaag rolt.

Bij  $\alpha = 90^\circ$  wordt  $mg\cos\alpha = 0$  en valt het touwtje slap. Dit is de vrije val; de slinger gaat daarbij willekeurig staan.

# De zweefmolen

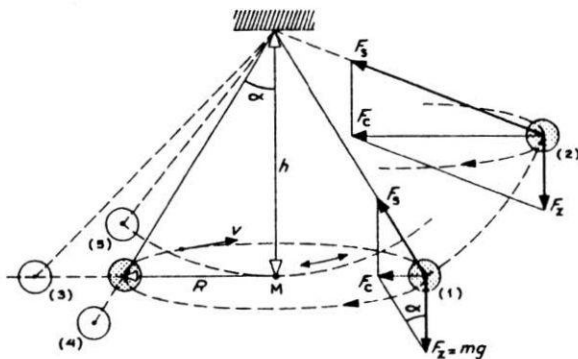
IR HENK MULDER, *Ulvenhout*

In de practicuminstrukties staan vrijwel geen proeven waarbij de centripetaalkracht centraal staat. Nu is de afleiding van de formule voor de centripetaalkracht zelf al knap ingewikkeld, zeker voor leerlingen die van limieten nog vrijwel geen idee hebben.

Voor natuurkundigen is er gelukkig altijd nog een andere weg, die van het experiment. Het zou beter zijn de formule maar aan te bieden en deze dan aanvaardbaar te maken door er wat zinnigs mee te doen. We bedoelen een geschikte proef. En dat lijkt de proef van de kegelslinger, bovendien uitstekend geschikt als huiswerkopgave. Immers, wat hebben we nodig? Alleen een gewicht en een touwtje, en als meetapparatuur... een horloge en een meetlat.

## De kegelslinger

We hangen een voorwerpje aan een touwtje en zwieren de zaak in het rond, zoals bij de zweefmolen op de kermis.



Figuur 1 De kegelslinger.

Als we sneller gaan roteren gaat het draaivlak van de kegel omhoog en neemt ook de hoek  $\alpha$  met de rotatie-as toe (figuur 1).

De spankracht in het touwtje ( $F_s$ ) en de zwaarte-kracht ( $F_z$ ) geven als resultante de centripetaalkracht ( $F_c$ ).

Als de massa  $m$  is, de draaicirkel een straal  $R$  heeft, de afstand van het rotatievlak tot het ophangpunt ofwel de kegelhoogte  $h$  is, de omlooptijd  $T$  is en we zwieren rond met baansnelheid  $v$ , dan geldt:

$$\text{enerzijds } \tan \alpha = \frac{mv^2/R}{mg}$$

$$\text{en anderzijds } \tan \alpha = \frac{R}{h}$$

$$\text{Gelijkstelling geeft: } \frac{v^2}{gR} = \frac{R}{h}$$

$$\text{en omdat } v = \frac{2\pi R}{T} \text{ vinden we } \frac{4\pi^2 R^2}{gRT^2} = \frac{R}{h}$$

$$\text{ofwel } T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot h$$

Nog verder vereenvoudigd:  $T^2 = c \cdot h$  waarbij de constante  $c = \frac{4\pi^2}{g}$  of ongeveer  $4 \text{ s}^2/\text{m}$ .

## Conclusies

1. Allereerst is in figuur 1 af te lezen dat het rotatievlak bij sneller roteren moet stijgen. Immers dan stijgt bij constante  $F_z$  de waarde voor  $F_c$ . Tevens moet  $F_s$  toenemen, hetgeen goed te voelen is. De halve tophoek van de kegel wordt groter.

2. In de afleiding van de formule is  $m$  weggeval-  
len. Dat betekent dat in een zweefmolen bemande  
(en bevrouwde!) stoeltjes dezelfde hoek  $\alpha$  met de  
rotatie-as zullen maken als lege.

3. De lengte van het touwtje zelf blijkt geen rol te  
spelen.

4. Opmerkelijk is dat ook  $R$  is weggeval-  
len. De rotatietijd blijkt enkel af te hangen van de kegel-  
hoogte  $h$ !

### *Frekwentie afhankelijk van $h$*

We nemen als touwlengte bijvoorbeeld 35 cm en  
zieren de kegelslinger rond boven een tafelblad.  
Daarna laten we onze hand zakken tot op 25 cm  
hoogte en verlagen het toerental zover dat het voor-  
werpje net over het tafelblad scheert. Dan volgt uit  
de formule  $T = 1$  s! Dus de draaifrekwentie komt uit  
op 60 toeren per minuut en ... dat is gemakkelijk te  
meten.

De nauwkeurigheid is zelfs opvallend hoog. Maak  
de touwlengte 1,2 m en laat de slinger over de gladde  
vloer scheren. Als we daarbij de hand op 1 m hoogte  
fixeren wordt  $T = 2$  s of de frekwentie 30 per minuut.  
Uitstekend in het lokaal te doen, maar ... wel even  
de stoelen opzij.

### *De slingerformule*

We schrijven de formule nog eens als  $T = 2\pi\sqrt{h/g}$ .  
Hierin herkennen we direkt de bekende slinger-  
formule. De draaifrekwentie van een kegelslinger  
met hoogte  $h$  is dus precies even groot als die van de  
mathematische slinger met lengte  $h$ ! Dat is een  
opmerkelijke uitkomst. Het is dus mogelijk naast de  
kegelslinger een gewone slinger (bij geschikt gekozen  
lengte) mee te laten bewegen en dan te constateren  
dat ze elkaar keurig bijhouden. Dat is dus het geval  
bij de slingers (1) en (5).

Indirekt geeft de formule van de kegelslinger een  
fraai en eenvoudig bewijs voor de formule van de  
gewone slinger.

Immers, we mogen een harmonische beweging  
opvatten als die van de projectie van een eenparige  
cirkelbeweging op een middellijn.

Bij kleine amplitudehoek  $\alpha$  naderen touwlengte en  
kegelhoogte elkaar. Het is dan tegelijk duidelijk dat  
de bekende slingerformule alleen maar kan gelden  
voor kleine amplitude.

### *Opdrachten*

Leerlingen kunnen thuis of op school, na afleiding  
van de grondformule, gemakkelijk zelfstandig wer-  
ken aan een aantal vragen betreffende de kegelslin-  
ger, ongeveer in deze stijl:

1. Zullen bemande en onbemande stoeltjes in de  
zweefmolen evenveel uitstaan? (ja)

2. Waarom zal bij sneller draaien het draaivlak  
omhoog gaan? ( $F_c$  moet toenemen)

3. Zal op de maan bij dezelfde amplitudehoek  $\alpha$   
een kleinere of grotere draaifrekwentie horen?  
(kleinere)

4. Welke van de kegelslingers (1), (3) of (4) zal de  
kleinste hoeksnelheid hebben? (nummer 4)

5. We nemen een kegelslinger en een mathemati-  
sche slinger van gelijke touwlengte. Welke heeft dan  
de grootste frekwentie? (de kegelslinger)

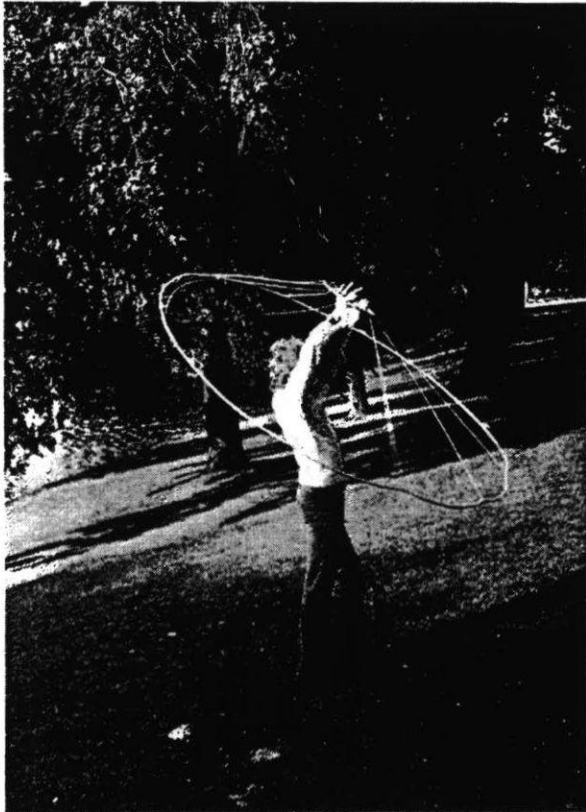
6. Hoe werkt het mechaniek van de energietoe-  
voer vanuit de hand bij de top, als we de konische  
slinger aan de gang willen houden?

(De hand moet een kracht op het objekt uitoefe-  
nen in de richting van de baansnelheid. Daartoe  
beschrijft de hand een kleine cirkel, die iets in fase  
voorligt bij de grote. De daarbij verrichte arbeid is  
dan even groot als de verloren wrijvingswarmte.)

7. Als we ophouden met energie toe te voeren zal  
de amplitudehoek met de tijd afnemen en zal het  
voorwerp tenslotte in het centrum tot rust komen.

Dit doet denken aan een ruimtevoertuig dat via  
remcirkels afdaalt naar de aarde. Is de kegelslinger  
hiervoor een geschikt model?

(Nee, want bij de kegelslinger wordt de omloops-  
tijd bij de demping steeds groter en bij het terugke-  
rend ruimtetoestel juist kleiner.)

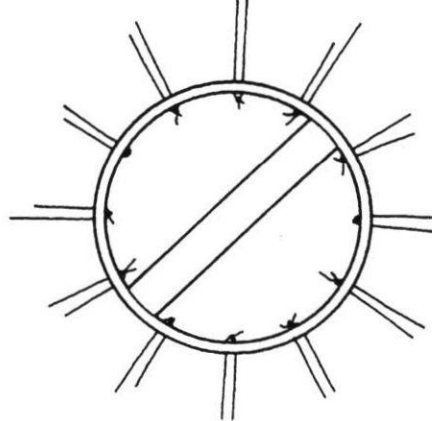


Figuur 2 Het touwwiel.

### Het touwwiel

Een speelse variatie op de konische slinger is het touwwiel (figuur 2). Het is gemakkelijk zelf te maken. Op een meer fantasierijke manier is er de werking van de kegelslinger mee te verkennen. Speciaal de bediening van het aandrijfmechaniek (figuur 3) is ermee goed te onderzoeken.

Beslist ook een aardig speeltuig om op schoolkamp of werkweek mee te nemen. Het kost wel wat oefening om ermee om te gaan.



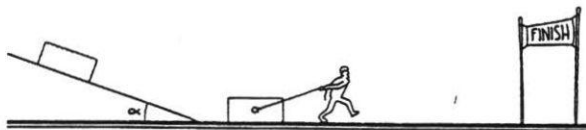
Figuur 3 De aandrijfhoepel.

## Natuurkunde als recreatie

### Hoe schuin?

IR. HENK MULDER, *Ulvenhout*

Tijdens 'een spel zonder grenzen' werd een blok op een helling gelegd. Toen werd de helling steeds steiler gezet, totdat het blok juist eenparig begon te schuiven (figuur 1). Beneden aangekomen moest een speler proberen om het blok over een zeker horizontaal traject mee te slepen en dan een iets verderop staande muur zo snel mogelijk aan te tikken.



Figuur 1 Zo vlug mogelijk

Het probleem voor de deelnemer is: hoe schuin moet hij trekken om zo vlug mogelijk bij de finish te zijn? Het schuine en het horizontale vlak zijn even ruw. Als je schuiner omhoog trekt vermindert de wrijving, maar als je meer horizontaal trekt, krijg je meer versnelling voorwaarts en kom je dus eerder aan.

Aan de lezer de vraag: hoe schuin moet je trekken voor optimaal rendement? Wie de moed opgeeft, raadplege pagina 102.

# Kleurverschuiving bij Jupiter

IR HENK MULDER, *Ulvenhout*

Als een lichtbron ons met hoge snelheid nadert, krijgen we een blauwverschuiving; bij verwijdering een roodverschuiving. Hoe gaat dat in zijn werk bij een draaiend hemellichaam?

Als we de spektroskoop richten op de equator van de planeet Jupiter, gaan de spektraallijnen een zekere helling vertonen. Daarbij komen drie vragen op: blijven de lijnen nog recht blijven ze nog evenwijdig hoe is de relatie tussen hellingshoek en hoeksnelheid.

Voor de golflengte van een naderende bron geldt:

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{c-v}{c} \text{ of } \lambda = \lambda_0 - \frac{v}{c} \lambda_0$$

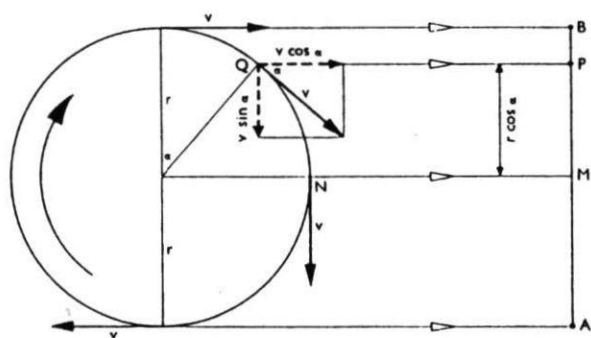
waarbij  $\lambda_0$  de golflengte bij stilstand,  $c$  de lichtsnelheid,  $v$  de relatieve snelheid ten opzichte van de aarde is.

De golflengteverandering en dus ook de verschuiving in het spectrum, wordt dus:

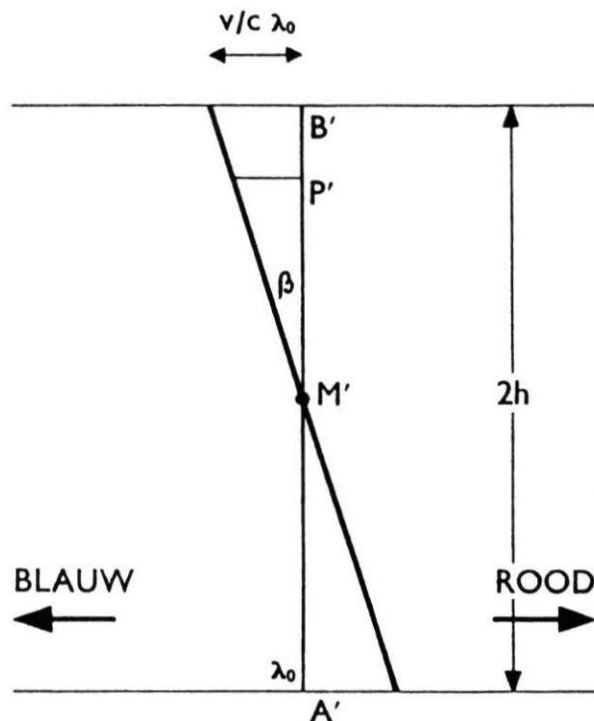
$$\Delta\lambda = \frac{v}{c} \lambda_0$$

## Draaiende planeet

In figuur 1 stelt  $v$  de omtreksnelheid van de planeet voor. Het voor ons dichtst bijgelegen punt  $N$  heeft voor ons een snelheid nul. We beschouwen het licht als evenwijdig. Voor een punt  $Q$ , op een afstand



Figuur 1 Draaiende planeet



Figuur 2 Hellende spektraallijnen

$r \cdot \cos \alpha$  uit het midden, is de snelheid ten opzichte van de waarnemer:  $v \cdot \cos \alpha$ . Voor dit punt  $Q$  wordt de golflengtevermindering:

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{v \cdot \cos \alpha}{c} \text{ waarbij } \cos \alpha = \frac{MP}{r}$$

$$\text{zodat } \lambda = \lambda_0 \cdot \frac{v \cdot MP}{c \cdot r}$$

Als de totale hoogte van de spectrumband  $2h$  is (figuur 2) en we aannemen dat  $MP:r = M'P':h$ , hetgeen betekent dat er een gelijkvormig verkleinde afbeelding van  $AB$  in de spektroskoop ontstaat, dan zal

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{v \cdot M'P'}{c \cdot h}$$

zodat  $\Delta\lambda$  en  $M'P'$  evenredig zijn en de spektraallijn dus recht blijft.

De planeet Jupiter heeft een straal  $r = 7 \cdot 10^7$  m en een rotatietijd  $T = 10$  uur. Hieruit volgt voor de omtreksnelheid:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 7 \cdot 10^7}{10 \cdot 3600} = 12000 \text{ m/s} \quad \text{of} \\ 12 \text{ km/s.}$$

Voor de verschuiving van een lichtsoort in het geel ( $0,6\mu$ ) vinden we voor licht afkomstig van de rand van de planeet:

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{v}{c} = \frac{12}{3 \cdot 10^8} \cdot 0,6 = 2,4 \cdot 10^{-5} \mu = \\ = 0,24 \text{ \AA.}$$

Voor de hellingshoek  $\beta$  van een lijn lezen we in figuur 2 af:

$$\tan \beta = \frac{v \cdot \lambda_0}{c \cdot h}$$

Hieruit volgt dat de spektraallijnen bij rotatie van



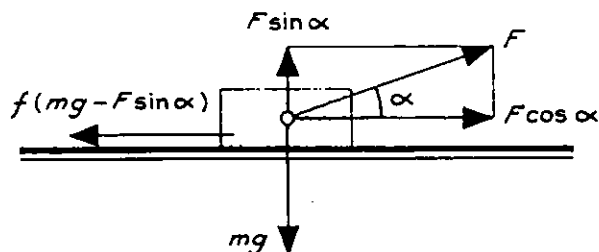
Figuur 3 De planeet Jupiter zoals we die zagen door de ogen van de Voyager 1

het hemellichaam niet meer evenwijdig blijven. Tevens is hiermee de relatie aangegeven tussen de hellingshoek  $\beta$  en de omtreksnelheid.

#### Oplossing: hoe schuin

(naar een idee van C. Berkelmans te Eindhoven)

Hij moet precies onder dezelfde hoek trekken als die waarbij het blok juist afgleed. Bekijken we eens de krachten die op het blok werken, terwijl we het versneld of eenparig voorwaarts bewegen (figuur 2).



Figuur 2 Krachten op het blok

De maximale wrijvingskracht is  $f(mg - F \sin \alpha)$  waarbij  $f$  de wrijvingscoëfficiënt en  $F$  de schuin gerichte trekkracht is. De versnelling volgt dan uit de vergelijking:

$$ma = F \cos \alpha - f(mg - F \sin \alpha) \\ ma = F(\cos \alpha + f \sin \alpha) - fmg$$

De versnelling bereikt een maximum als  $\cos \alpha + f \sin \alpha$  maximaal is. Deze functie van  $\alpha$  is maximaal als de afgeleide functie nul is.

Dus moet gelden:  $-\sin \alpha + f \cos \alpha = 0$  dus  $\tan \alpha = f$ .

Het zal de lezer bekend zijn dat een blok bij die hellingshoek zal afglijden waarbij  $\tan \alpha = f$  en daarmee is de gelijkheid voor beide hoeken aangetoond.

Al met al is dat toch een verrassende conclusie!

# Straalaandrijving

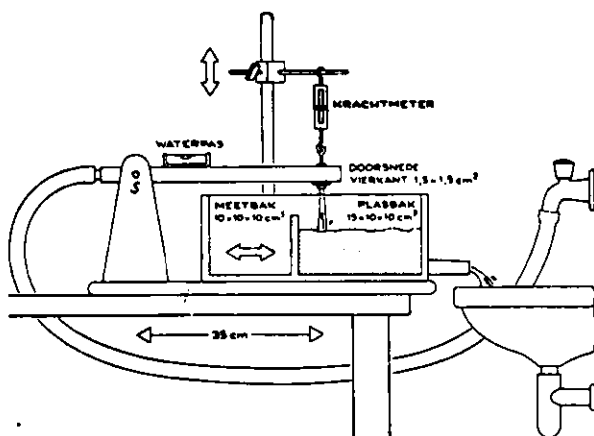
## Een idee voor een leerlingenproef

IR HENK MULDER, ULVENHOUT

Bij een tuinsproeier en een straalvliegtuig hebben we te maken met een voortstuwingskracht als gevolg van een uitstroming. Met een eenvoudige opstelling is aan die kracht te meten. Het apparaat is gemakkelijk zelf te maken.

### Opstelling

In figuur 1 staat een horizontale buis, aan de rechterkant voorzien van een omlaaggericht uitstroombat, aan de andere kant scharnierend om S.



We sluiten de pijp via een slang aan op de waterleiding en laten het water bij het andere eind uitstromen. Het water oefent een reactiekracht uit op het pipeind in opwaartse richting. De kracht wordt gemeten met een krachtmeter.

$$Kracht = stroomsnelheid \times stroomsterkte$$

Wij schrijven één van de wetten van Newton meestal als

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt}. \text{ Voor deze proef schrijven we de wet als}$$

$$F = v \cdot \frac{dm}{dt} \text{ of } F = vI$$

De grootte  $\frac{dm}{dt}$  is de stroomsterkte  $I$  en  $v$  de uitstroomsnelheid bij het gat.

Het doel van de proef is om door meting te controleren of inderdaad de reactiekracht bij het uitstroombat deze waarde heeft. Opgemerkt dient te worden dat  $v$  en  $I$  nog van elkaar afhankelijk zijn.

We meten direct de grootte  $I$  en bepalen daaruit  $v$  volgens  $I = vA\rho$ , waarbij  $A$  de doorsnede van het uitstroombat en  $\rho$  de dichtheid van de vloeistof voorstelt.

### Meetwijze

Stel de kraan even open zodat de pijp volloopt. Sluit vervolgens de kraan weer. Trek de krachtmeter zo hoog op dat de pijp keurig horizontaal staat. Met een waterpas is dat te controleren.

Dan openen we de kraan weer en stellen de stroomsterkte in op een zekere waarde, terwijl we het water in de 'plasbak' opvangen. Inmiddels werkt nu de reactiekracht van het uitstromende water.

We laten de krachtmeter nu zoveel zakken dat de buis weer horizontaal staat.

Als de krachtmeter eerst bijvoorbeeld 2,5 N aanwees en nu 2,1 N weten we dat de kracht  $F$  als gevolg van de uitstroming 0,4 N bedraagt.

Nu gaan we de stroomsterkte  $I$  bepalen. Op  $t = 0$  schuiven we de bak wat naar rechts, zodat het water nu in de geijkte meetbak terecht komt. In ons geval is het volume van de meetbak 1000 cm<sup>3</sup>. Als de meetbak vol is loopt het water automatisch weer over in de plasbak.

Stel eens dat de bak in 14 s volloopt. Dan is de stroom-

sterkte  $I$  gelijk aan 1 kg per 14 s of 0,07 kg/s.

De kraan wordt weer gesloten.

We meten de diameter van het uitstroombgat. In ons geval is dat 4 mm. Hieruit bepalen we de doorsnede.  
 $A = \pi r^2 = 12,57 \text{ mm}^2 = 12,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ .

Vervolgens berekenen we de uitstroomsnelheid van de watermolekulen bij het gat. We vinden  $v$  uit  $I$  aldus:

$$v = \frac{I}{A\rho} = \frac{0,07}{12,6 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3} = 5,6 \text{ m/s.}$$

### Controle

Door invullen willen we controleren of inderdaad geldt dat  $F = vI$ .

$$0,4 \stackrel{?}{=} 0,07 \cdot 5,6 \quad (\text{accoord!}).$$

We kunnen metingen doen bij diverse stroomsterkten. De proef geeft kwantitatief bevredigende uitkomsten, zodat

de kracht bij straalaandrijving goed meetbaar is. De werkwijze is niet ingewikkeld en het apparaat is met weinig complicaties zelf te maken. Bij ons is de pijplengte 35 cm.

### Opmerking

Een moeilijkheid lijkt het moment te leveren dat de slang op het pipeind uitoefent.

Als we telkens keurig afstellen op een horizontale pijpstand en tijdens de meting de slang niet verleggen, mogen we veronderstellen dat dit effect geëlimineerd is. Immers we gebruiken de krachtmeter toch alleen maar om verschilwaarden te meten.

Het lijkt verstandig de opstelling in enkelvoud te gebruiken; als er meer groepen mee werken, beïnvloeden ze elkaars stroomsterkte, te vergelijken met de problemen bij een centrale voeding bij elektriciteitspracticum. In plaats van de krachtmeter kan er ook met één of meer opzetgewichtjes gewerkt worden. Door de afstand tot  $S$  te veranderen kan een evenwichtsinstelling bereikt worden.

## De lange veer

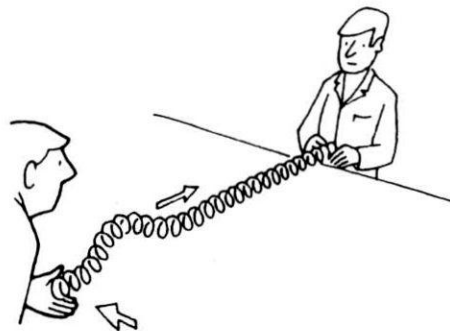
### Iets exclusiefs voor het natuurkundelokaal

IR HENK MULDER,  
Ulvendhout

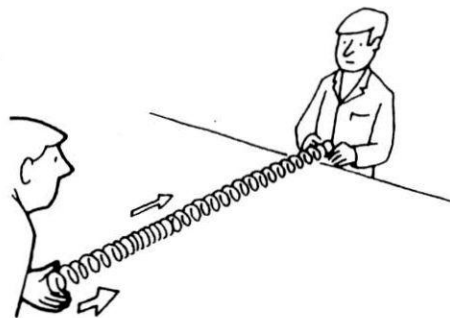
Het lijkt een attractief idee bepaalde proeven blijvend bedrijfsklaar in het natuurkundelokaal op te stellen. Ze geven iets exclusiefs aan de ruimte, bepalen de sfeer ervan en prikkelen belangstellende leerlingen tot nieuwsgierigheid.

De proef met de lange veer is daar een spectaculair voorbeeld van. Het betreft een extra lange veer, langs de hele lokaalmuur, ter demonstratie van golven, transversaal en longitudinaal.

De hele klas kan dit makro-experiment vanaf elke plaats meedoen, niet alleen kwalitatief maar ook kwantitatief. We testen speciaal de bekende golfformules.



Figuur 1a Transversale stoot



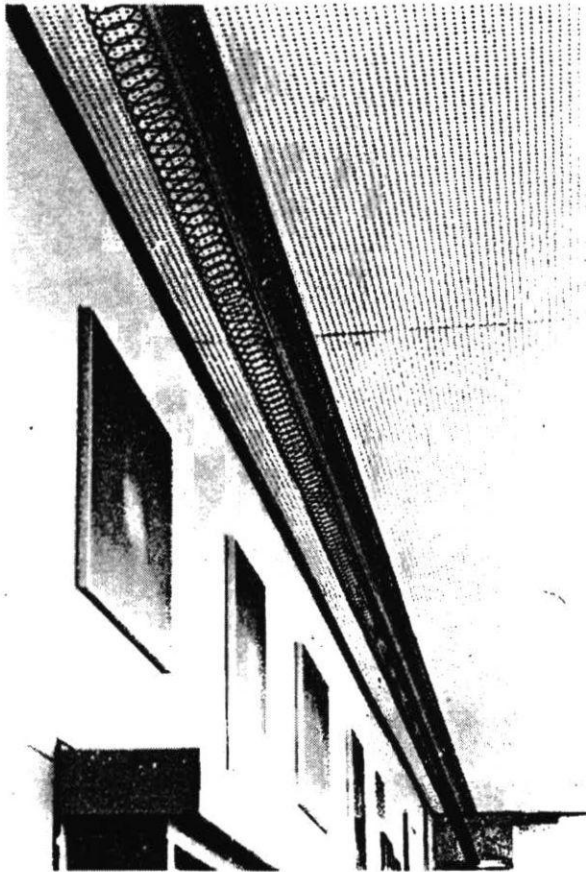
Figuur 1b Longitudinale stoot



### De ophanging

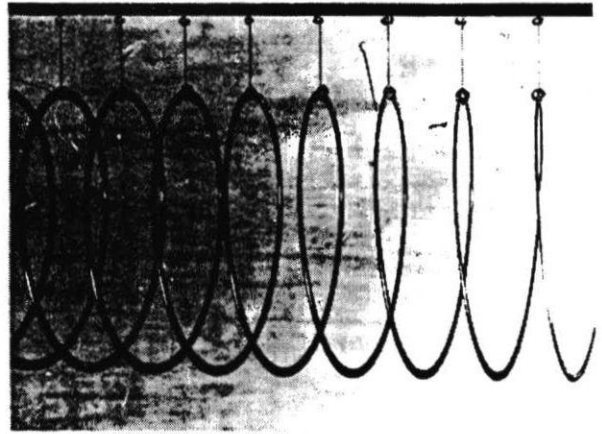
In veel natuurkundeboeken worden proeven beschreven met lange stalen veren. Op een lange tafel (figuur 1) of in het gangpad demonstreren we de transversale of longitudinale voortplanting.

Dergelijke veren zijn vaak niet langer dan een paar meter. Wij gebruiken een veer die gerekt kan worden tot wel 20 m. Ze bestaat uit 300 windingen. We kochten zo'n exemplaar ooit in Stuttgart, maar, voor wie wil, is zo'n ding ook te realiseren door drie 'slinky-veren' in serie te zetten. Dergelijke veren hebben 100 windingen en zijn in speelgoedwinkels te koop.



Figuur 2 De lange veer aan het plafond

Tegen het plafond hebben we over de totale lengte (11 m) latten geschroefd, waarin op gelijke afstanden (3 à 4 cm) 300 schroefogen gedraaid zijn (fig. 2). Aan elk oog hangt dan telkens één winding door middel van een stevige nyloodraad van ongeveer 25 cm lengte (figuur 3). De nyloodraad wordt via een ringetje aan een winding vastge-

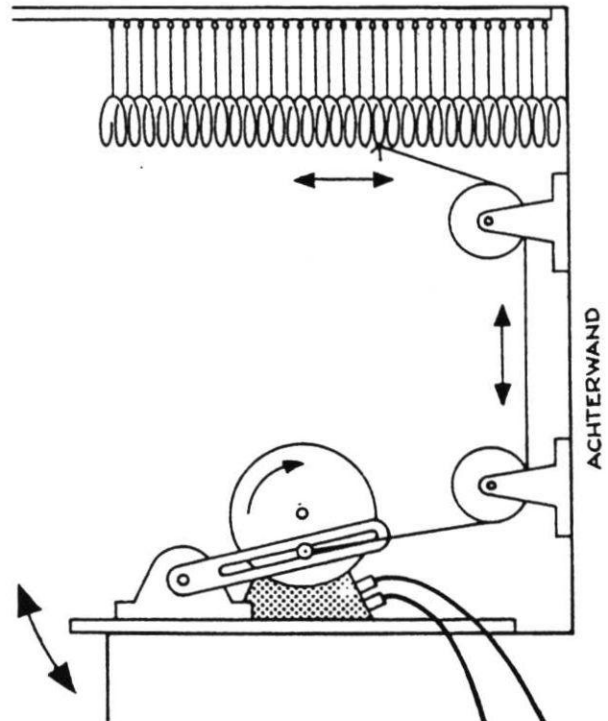


Figuur 3 De ophanging

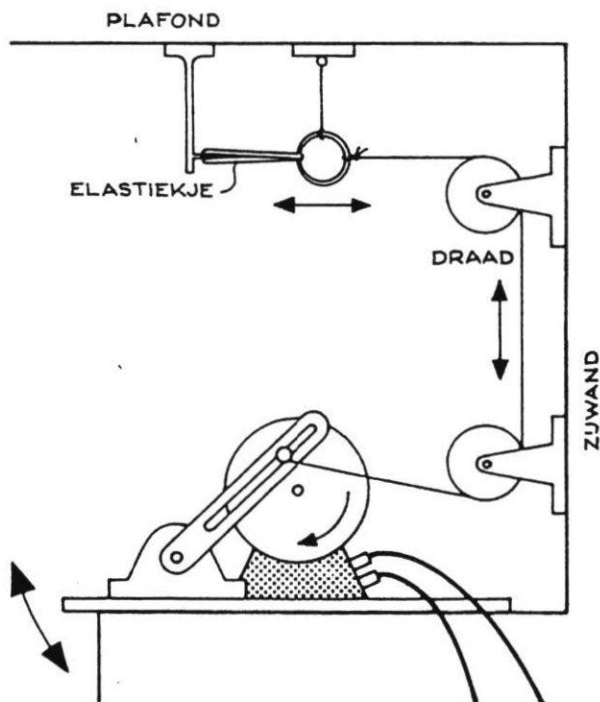
zet om doorsnijden van de draad tegen te gaan. De einden van de lange veer zitten weer met oogjes vast aan de voor- en achterwand van het lokaal. De ophanging is een forse klus, maar het loont beslist de moeite en als alles eenmaal hangt, is de zaak voor jaren bedrijfsklaar.

### De aandrijving

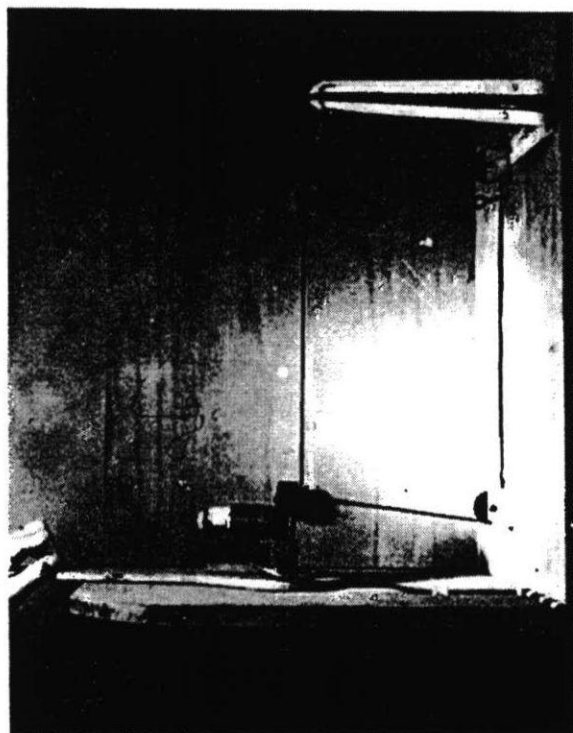
De golfopwekking met regelbare frequentie kunnen we



Figuur 4a Aandrijving longitudinaal



Figuur 4b Aandrijving transversaal



Figuur 4c De aandrijving in twee richtingen

realiseren met behulp van een eenvoudige elektromotor uit een speelgoedwinkel (Fischertechnik), aangesloten op een regelbare spanningsbron. Dit alles gemonteerd op een kast of plank achter tegen de muur. Als we de spanning verhogen stijgt de draaifrequentie van het motortje en daarmee het trillingsritme van de windingen van de veer.

Met behulp van een excentriek, een draad en een paar vaste katrollen kunnen we een longitudinale voortplanting realiseren (figuur 4a); maken we de opstelling zoals in figuur 4b, dan is de aandrijving transversaal. Het is mogelijk beide opstellingen te realiseren met hetzelfde motortje. Door dat op een draaibare plank te monteren, kunnen we de motor met de hand (figuur 4c) een kwart slag draaien om een verticale as en zo overgaan van transversaal op longitudinaal en omgekeerd. Om te vermijden dat daarbij de aandrijfdraad getordeerd wordt, loopt het aangrijpingspunt door een sleuf in een drijfstangetje.

#### Staande golven

Eerst gaan we kwalitatief aan de slag. Door de elektrische spanning geschikt te kiezen, zijn transversale en longitudinale staande golven zichtbaar te maken. Bij een aantal standen van de volumeknop van het spanningskastje ontstaan staande golven met verschillende frequentie en golflengte (figuren 5 en 6). Bij het uittellen van het aantal halve golven kan de hele klas meetellen. Op zich een fraai effect, speciaal omdat er de mogelijkheid is, vanwege de betrekkelijk lage frequentie (bijvoorbeeld 2 à 3 Hz), toelichting te geven hoe de diverse ringen bewegen bij staande golven. De verschillen tussen lopend en staand, longitudinaal en transversaal komen zo duidelijk aan de orde.

#### Metingen

Vooreerst willen we testen of de bekende formule  $v = f \cdot \lambda$  ook voor staande golven geldt. Dat lukt hier door alle drie de grootheden afzonderlijk te bepalen.

##### A. De voortplantingssnelheid

Om de voortplantingssnelheid globaal te meten, geven we een tik tegen een van de windingen op het eind van de lange veer. We tellen met een stopklok in hoeveel tijd de stoot terugkeert. Het is nog beter te voelen dan te zien! De ogen sluiten bevordert hier de objectiviteit en ... de concentratie.

Bij onze veer gaat de evenwichtsverstoring in ongeveer 4

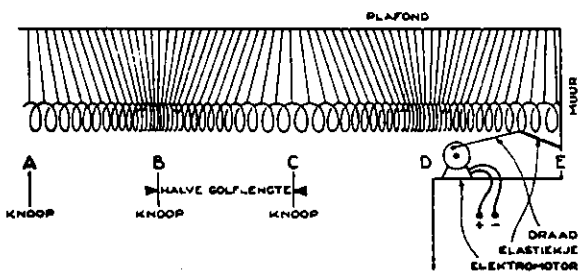


Figuur 5 Transversale golf

seconden heen en terug. Bij een totale lengte van 11 m, betekent dat dus:  $v = 5,5$  m/s. Dat is dan verder een voor ons experiment vast gegeven. We kunnen die stoot nog in de asrichting en ook loodrecht daarop geven. We vinden bij de transversale en bij de longitudinale voortplanting... precies dezelfde waarde. Op zich ook al een merkwaardig effect.

### B. De frekwentie

Nu zetten we het motortje aan en draaien voorzichtig aan de spanningsknop tot er een korrekte staande golf



Figuur 6 Longitudinale golf

verschijnt, transversaal of longitudinaal, naar keuze. We moeten niet te snel sleutelen, want het verschijnsel heeft duidelijk wat tijd nodig om zich in te stellen. Een ritme van bijvoorbeeld 3 Hz is nog goed te tellen, zowel met oog als oor.

We tellen dan in de stijl van 'tik-tak-een', 'tik-tak-twee', 'tik-tak-drie' enzovoorts... dat telt vlotter. Bij 3 Hz komen we dan uit op 'tik-tak-tien' in 10 s.

### C. De golflengte

Tenslotte meten we de golflengte door het aantal halve golven op de totale veerlengte te delen en die uitkomst dan nog te verdubbelen.

#### Voorbeeld

We tellen bijvoorbeeld op de totale 11 m lengte 12 halve golven. We vinden dan  $\frac{1}{2}\lambda = 11/12 = 0,92$  m en dus  $\lambda = 1,84$  m. Verder vonden we  $v = 5,5$  m/s en  $f = 3$  Hz. Kijkt u zelf of geldt:  $5,5 = 3 \cdot 1,84$ ?

We kunnen nog een tweede test doen bij een andere frekwentie, mits niet te hoog.

#### Nogmaals de voortplantingssnelheid

De voortplantingssnelheid is afhankelijk van de spanning in de veer, de massa en de lengte ervan, volgens de formule

$$v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}}$$

waarin  $F$  de trekkracht,  $l$  de veerlengte en  $m$  de massa. (De afleiding van deze formule is te vinden in *Faraday 44*, 127 of in *Fundamentele Natuurkunde* deel 3 van Alonso-Finn.)

Ook die formule willen we testen. Om de massa te bepalen, halen we natuurlijk de veer niet van het plafond. Van een tweede gelijke veer bepalen we de massa op een balans. We vinden 0,6 kg. Vervolgens bepalen we de spankracht in de veer aan het plafond door één eind van de muur los te maken en met een krachtmeter aan een winding, zo dicht mogelijk bij het eind, te trekken. In onze veer is de spankracht 1,6 N. Als we invullen vinden we

$$v = \sqrt{\frac{1,6 \cdot 11}{0,6}} = 5,4 \text{ m/s}$$

en dat is, rekening houdend met de grove meetwijzen, een verbluffend resultaat want het komt keurig overeen met de waarde van  $v$  die we door rechtstreeks meten al hadden.

Dit experiment is aantrekkelijk omdat bij de meeste golfproeven de voortplantingssnelheid veel te hoog is om direct te meten.

#### Eindconclusie

Door dit verhaal te publiceren loopt de Nassauscholengemeenschap in Breda wel het risico iets exclusiefs kwijt te raken. Overigens gunnen we de lezers van *Faraday* hetzelfde genoegens als wij eraan beleven. En voor wie meer wil weten, komt u zelf eens kijken

#### Wij willen ook wat weten

1. Is het theoretisch in te zien dat de voortplantingssnelheid in het geval van longitudinale en transversale voortplanting gelijk is?
2. Bij de experimenten met de lange veer kregen we het vermoeden dat bij elke transversale staande golf ook een longitudinaal effect hoort, zodat beide typen golfbewegingen aan elkaar gekoppeld zouden zijn. Wie heeft daar ervaring mee of inzicht in?

## Natuurkunde als recreatie

### Een luik optrekken

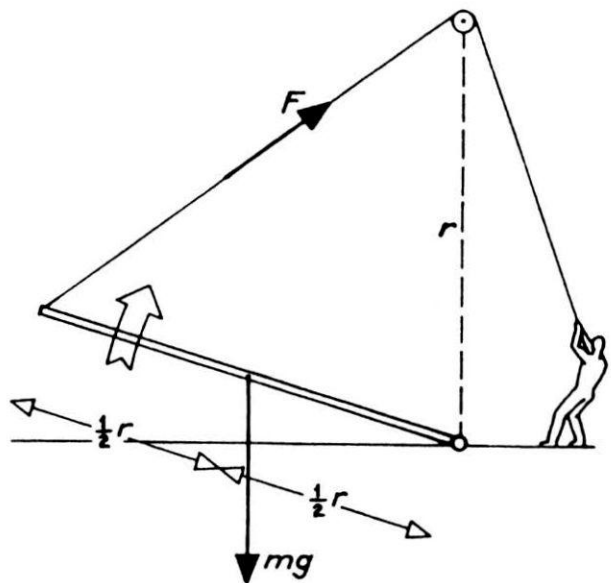
IR HENK MULDER, *Ulvenhout*

In figuur 1 staat een luik getekend dat door middel van een touw en een katrol kan worden opengetrokken. Als de massa ervan  $m$  is en de straal van de cirkel  $r$ , dan is de toename van de zwaarte-energie  $mg(\frac{1}{2}r)$  of  $\frac{1}{2}mgr$ .

Volgens onze stellige verwachting, is dat dan weer gelijk aan de arbeid die verricht moet worden om het luik te openen. Maar het is nog niet zo eenvoudig om die arbeid uit te rekenen. Immers, de benodigde trekkraft  $F$  verandert voortdurend van grootte en richting.

De opdracht luidt nu: probeer door integreren aan te tonen dat de benodigde arbeid inderdaad  $\frac{1}{2}mgr$  is.

Een oplossing staat op pagina 110.



Figuur 1 Optrekken van een luik

# Natuurkunde als recreatie

## De 100 meter-lopers

IR HENK MULDER  
Ulvenhout

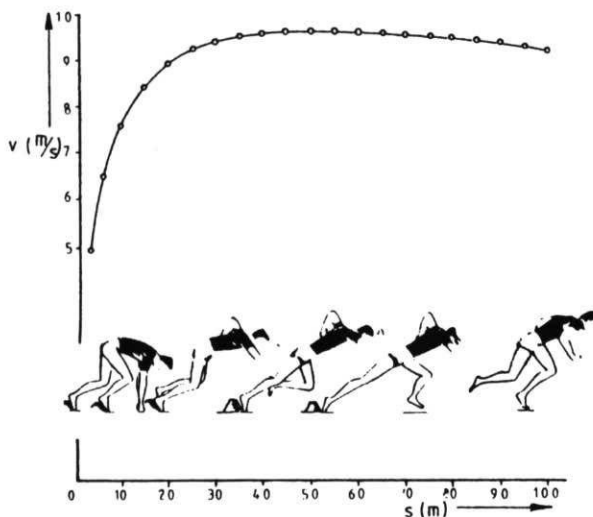
In een boek over atletiek uit de DDR trof ik de grafiek van figuur 1, verbeeldend de relatie tussen de afgelegde weg en de snelheid voor een topsporter op de 100 meter. De snelheid begint met nul, halverwege is de waarde maximaal 9,7 m/s, om tenslotte op het eind nog wat terug te vallen.

We zijn erg vertrouwd met grafieken waarbij de snelheid als functie van de tijd staat uitgezet. Hoe nu?? Toch is het zeker in de atletiek interessanter en gemakkelijker te meten, zoals de voorstelling nu is. Maar hoe moeten we met zo'n functie werken.

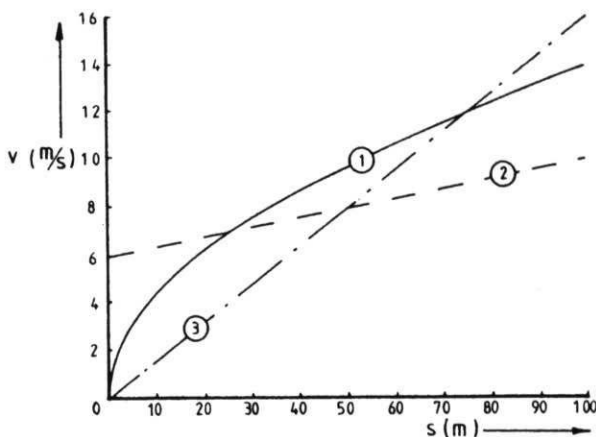
Mijn vraag: hoe lang deed de atleet over de 100 m? Nu is die vraag hier wat moeilijk omdat het functieverband tamelijk ingewikkeld is, maar in eenvoudiger gevallen, hoe moet het dan?

In figuur 2 staan drie grafieken voor relaties tussen  $s$  en  $v$ . De eerste is een halve parabool, de beide andere zijn rechten. In de gevallen 1 en 3 beginnen we netjes met snelheid nul; geval 2 betreft een vliegende start.

En nu de vraag: welke loper komt het eerst aan, welke het laatst?



Figuur 1 Kurvenverlauf der Laufgeschwindigkeit beim 100-m-Lauf (nach Gundlach).



Figuur 2 Relaties tussen  $s$  en  $v$ .

*Oplossing:* Wie wint de 100-meter? (figuur 1)

Voor loper 1 (figuur 2) is af te lezen als relatie:

$$v(s) = 1,4\sqrt{s}.$$

$$\text{Uit } v = \frac{ds}{dt} \text{ volgt: } dt = \frac{ds}{v}$$

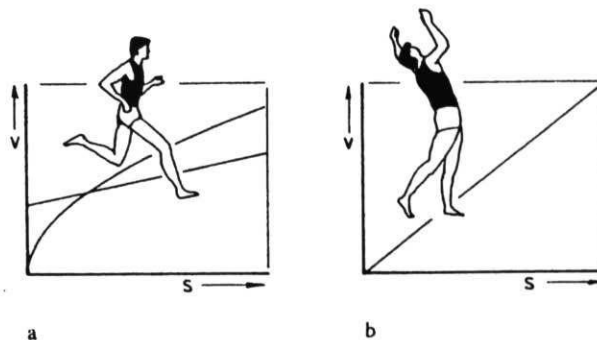
Dus de looptijd

$$T = \int_0^{100} \frac{ds}{v} = \int_0^{100} \frac{ds}{1,4\sqrt{s}} = 14 \text{ seconde.}$$

Voor loper 2 is de relatie:

$$v(s) = 0,04s + 6$$

en dus de looptijd



Figuur 3 Relaties tussen  $s$  en  $v$ .

$$T = \int_0^{100} \frac{ds}{0,04s + 6} = \int_0^{100} \frac{25}{s + 150} ds =$$

$$= 25 \ln \frac{250}{150} =$$

$$25 \ln \frac{5}{3} = 13 \text{ sekonde.}$$

Tenslotte nog looper 3. U ziet de atleet in figuur 3b wanhopige bewegingen maken. Hij schijnt niet uit de startblokken te kunnen komen. Kijken we eens naar de startversnelling. Volgens de definitie:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v.$$

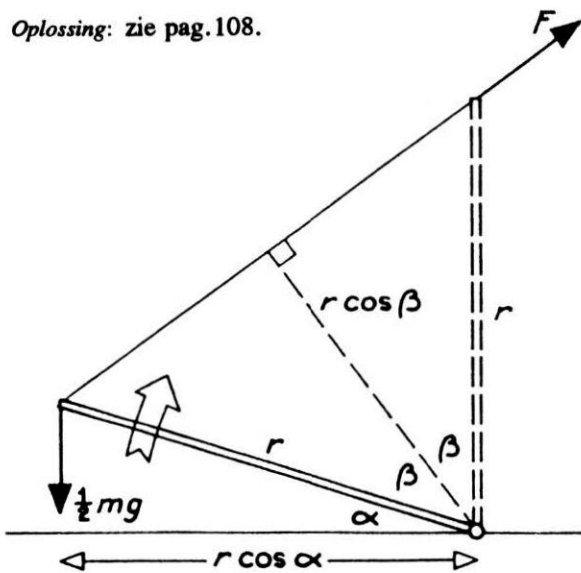
Voor de derde looper is bij de start  $v = 0$  en  $\frac{dv}{ds}$  eindig. Kijkt u maar in de grafiek.

Het produkt van beide, zijnde de startversnelling, wordt dus nul! En als de snelheid nul is en de versnelling ook nog, vorderen we geen millimeter!

Kampioen is dus looper 2, op ruim 1 seconde gevolgd door 1. Loper 3 is niet eens vertrokken; hij wist geen weg met het loopschema van de trainer.

We ontdekken dat we aan  $s$ - $v$  grafieken een voorwaarde moeten stellen: waar de grafiek de  $s$ -as snijdt moet dat loodrecht op de as gebeuren. En daaraan voldeed grafiek 1. Een  $s$ - $v$ -grafiek van het type 3 bestaat dus niet!

Oplossing: zie pag. 108.



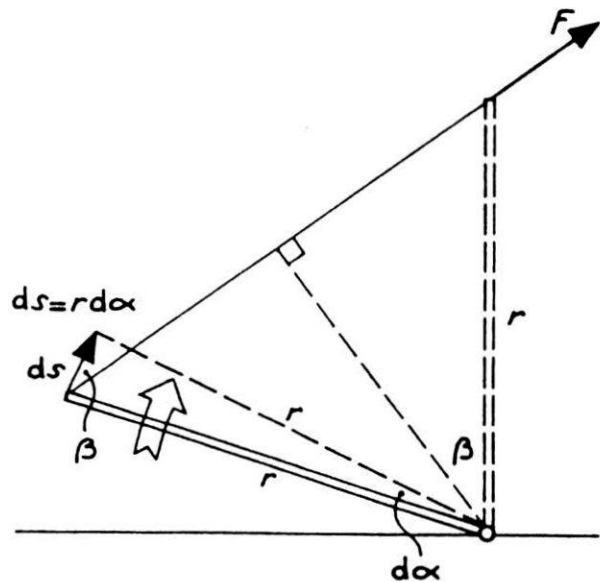
Figuur 2 De benodigde kracht

Als we het luik optrekken, verandert de draaiingshoek  $\alpha$  van 0 tot  $\frac{1}{2}\pi$  (figuur 2). Bij een zekere hoek  $\alpha$  kunnen we de vereiste kracht in het touw bepalen met behulp van de momentenwet, aldus:

$$F r \cos \beta = \frac{1}{2} m g r \cos \alpha \text{ of}$$

$$F = \frac{1}{2} m g \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

Omdat geldt:  $ds = r d\alpha$  (zie figuur 3) en omdat de hoek



Figuur 3 Draaiing en verplaatsing

tussen  $ds$  en  $F$  gelijk is aan  $\beta$ , vinden we voor de arbeid over het traject  $ds$ :

$$dW = F r d\alpha \cos \beta \text{ of}$$

$$dW = \frac{1}{2} m g r \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cos \beta d\alpha = \frac{1}{2} m g r \cos \alpha d\alpha \text{ dus}$$

$$W = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{2} m g r \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{2} m g r [\sin \alpha]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$W = \frac{1}{2} m g r \cdot (+1) = \frac{1}{2} m g r.$$

En dat is het dan!

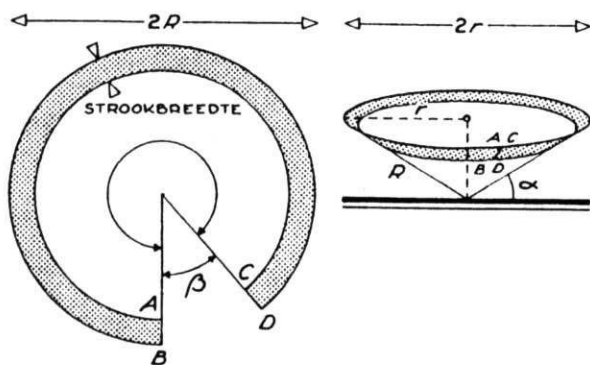
# Ontwerp voor een nieuw type zonnespiegel

HENK MULDER, *Ulvenhout*  
 HUBERT BIEZEVELD, *Zwaag*

Op het Georgia Institute of Technology in Atlanta (USA) zijn experimenten gaande om op een efficiënte en goedkope manier zonlicht te focuseren. Er wordt daarbij niet gewerkt met één spiegel, maar met een verzameling rondlopende reflekterende stroken, elk met een passende helling. In dit artikel worden een paar varianten met een dergelijk principe voorgesteld en doorgerekend.

## Het principe

De figuren 1 en 2a, b, c tonen het principe. Een cirkelvormige strook is dichtgeplakt nadat er een sector  $\beta$  uitgeknipt is. Daardoor ontstaat een stukje van een kegeloppervlak. Door nu een reeks van die kegelstukjes op geschikte wijze te combineren kan één grote spiegel gemaakt worden. In figuur 2a is een paraboloid benaderd. In de figuren 2b en c zijn de stroken op een plat vlak gemonteerd, waarbij zich nog twee mogelijkheden voordoen: het spiegeltype (figuur 2b) en het lenstypetype (figuur 2c) dat werkt met doorvallend licht.



Figuur 1 De cirkel met de uitgeknipte sector en het kegeloppervlak

Uit figuur 1 valt makkelijk af te leiden:

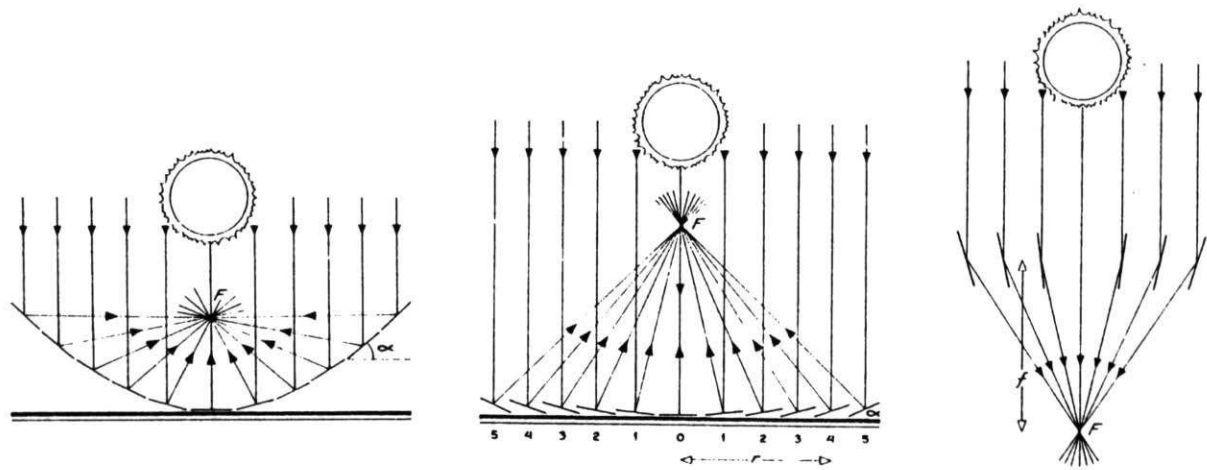
$$\beta = 2\pi(1 - \cos \alpha) \quad (1)$$

$$\frac{r}{R} = \cos \alpha \quad (2)$$

## De paraboloid

De ideale vorm van een zonnespiegel is natuurlijk de paraboloid. De vergelijking daarvan is:

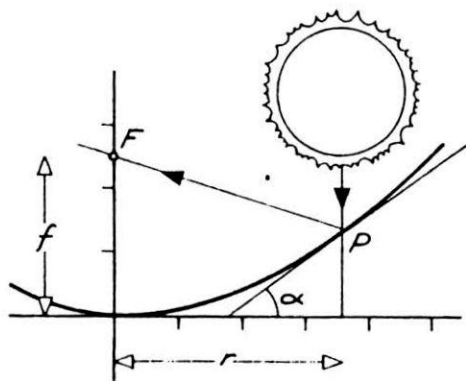
$$y = \frac{r^2}{4f}, \text{ waarin } f \text{ de brandpuntsafstand is.}$$



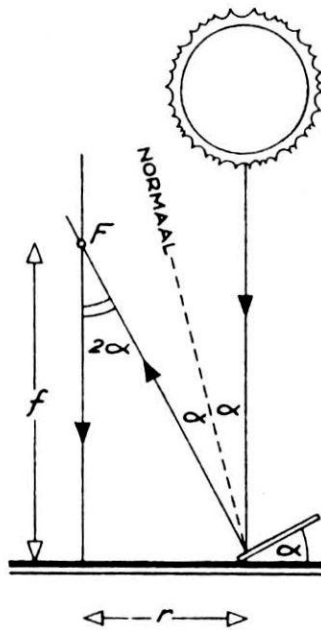
Figuur 2 a Een paraboloid benaderd door reflekterende stroken

b Reflekterende stroken op een plat vlak

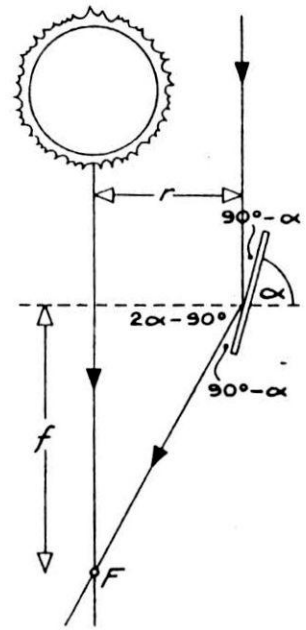
c Het 'lenstypetype'



Figuur 3 a De paraboloïde



b In het platte vlak



c Het lenstyp

Door differentiatie vinden we de tangens van de hellingshoek  $\alpha$  in een zeker punt  $P$ :

$$\tan \alpha = \frac{r}{2f}$$

Combinatie van (2) en (3) levert:

$$\frac{R}{2f} = \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha}$$

We zullen zien, dat hieruit  $\sin \alpha$  te halen is, zodat  $\cos \alpha$  ook bekend is en we dus met (1) de gezochte  $\beta$  kunnen berekenen. Voor het oplossen van (4) noemen we  $\frac{R}{f} = p$ .

$$\tan \alpha = \frac{p}{2} \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{p}{2} \cos^2 \alpha = \frac{p}{2} (1 - \sin^2 \alpha)$$

$$p \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - p = 0$$

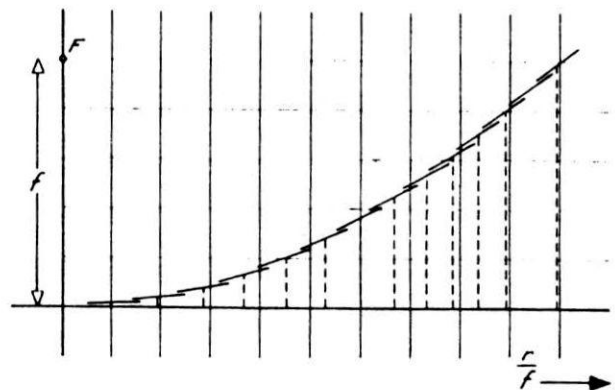
$$\sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + p^2}}{p}$$

$$\text{met } \cos \alpha = \cos \text{INV} \sin \alpha$$

(3)

(4)

(5)



Figuur 4 Het dakpanneffekt

In het platte vlak

Het is mogelijk alle stroken met de juiste helling in een plat vlak te monteren. Het voordeel daarvan is dat de opstelling minder volumineus wordt. De formules moeten daartoe iets worden aangepast. Zie figuur 3b.

$$\tan 2\alpha = \frac{r}{f}$$

(6)



Combineren met (2) levert nu:

$$\tan 2\alpha = p \cos \alpha, \text{ waarin } p \text{ weer } \frac{R}{f} \text{ voorstelt.}$$

De oplossing hiervan is:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = p \cos \alpha$$

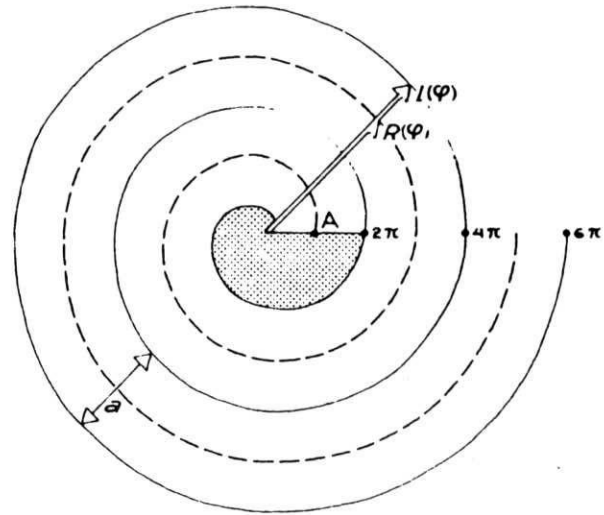
$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = p \cos \alpha$$

$$2p \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - p = 0$$

$$\sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2p^2}}{2p}$$

$$\text{met } \cos \alpha = \cos \text{INV } \sin \alpha \quad (7)$$

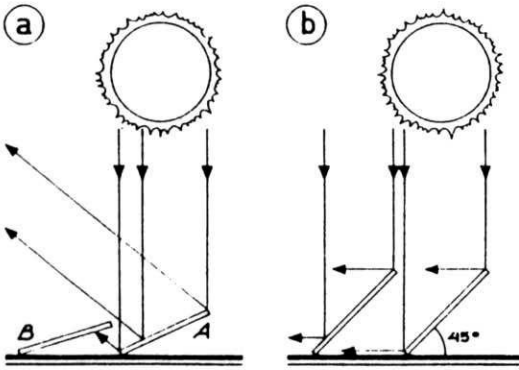
Hiermee is weer via (1) de gezochte  $\beta$  te vinden. De lensvariant zou u zelf kunnen oplossen. Daar horen weer iets andere formules bij.



Figuur 6 Een spiraal

hetzelfde bereiken als met wegknippen en weer dichtplakken.

De (tot nu toe) afgeleide formules zijn ook nu, na kleine aanpassingen, bruikbaar. We benaderen een klein stuk van de spiraal door een cirkel met straat  $R$ , zie figuur 7. We bekijken daarbij steeds een kwart van een rondgang. (Zie

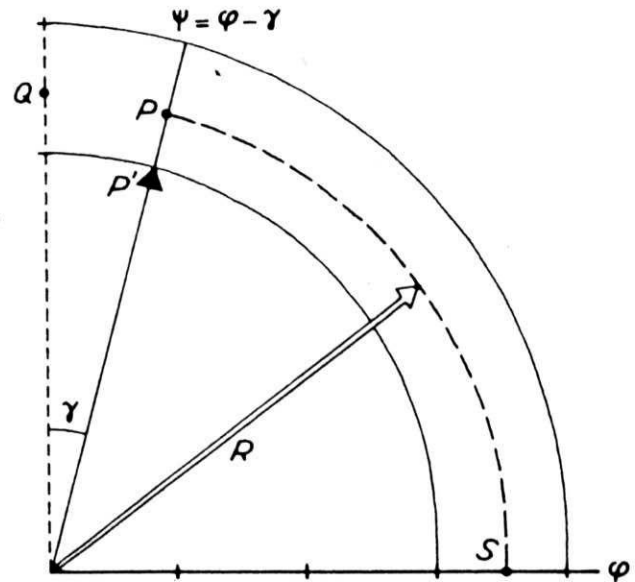


Figuur 5 Afdekking. Hoe schuiner het spiegelje staat des te meer wordt het licht afgedekt. Bij  $45^\circ$  is het effect volledig.

Bij het monteren krijgen we ook nu weer te maken met afdekking, zoals in figuur 5 duidelijk wordt. Wanneer  $\alpha$  gelijk is geworden aan  $45^\circ$  bereikt tenslotte helemaal geen licht meer het brandpunt.

#### De zommespiraal

Een nog niet genoemde variant krijgen we, als we niet uitgaan van concentrische cirkelstroken, maar van een spiraal. Zie figuur 6. De truc is, dat we nu niet hoeven te knippen, maar dat we de spiraal wat doortrekken. Zie bijv. figuur 7, waarin we punt  $P$  monteren bij  $Q$ , zodat we



Figuur 7 Een gedeelte van een spiraal vanaf hoek  $\varphi$ . Punt  $P$  wordt naar  $Q$  toe getrokken, zodat ook een kegeleffect ontstaat.

ook de appendix.) Formule (1) verandert daardoor in:

$$\gamma = \frac{\pi}{2}(1 - \cos \alpha) \quad (8)$$

De formules (2), (6) en (7) blijven ongewijzigd. Wel moet voor  $R$  en dus voor  $p$  een uitdrukking worden gezocht, die aangeeft op welk deel van de spiraal we zitten.

Voor de spiraal geldt (zie figuur 6):

$$l(\varphi) = \frac{\varphi}{2\pi}a$$

En voor de gestreepte hartlijn vanaf  $A$ :

$$R(\varphi) = \frac{\varphi - \pi}{2\pi}a$$

waarin  $a$  de breedte van de strook voorstelt. De gemiddelde  $R$  van het stuk dat we gaan inkorten voldoet dus aan:

$$R = \frac{\varphi + \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} - \pi}{2\pi}a, \text{ of wel:}$$

$$p = \frac{\varphi - \frac{3}{4}\pi - \frac{\beta}{2}}{2\pi} \cdot \frac{a}{f} \quad (9)$$

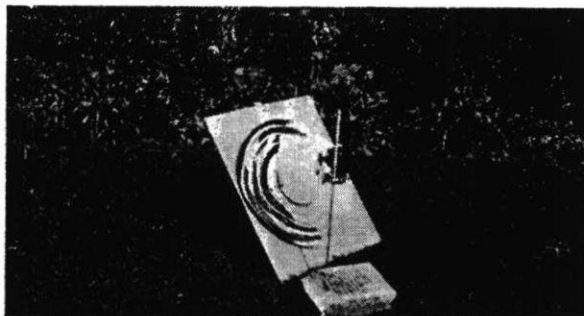
Via een interessant iteratieproces kunnen we nu de hoek  $\gamma$  vinden die bij een zekere hoek  $\varphi$  bij punt  $S$  hoort:

- o kies een willekeurige waarde voor  $\gamma$
- o maak daarmee  $p$  volgens (9)
- o maak daarmee  $\cos \alpha$  volgens (7)
- o bereken daarmee een betere waarde voor  $\gamma$  volgens (8)
- o controleer of deze nieuwe  $\gamma$  en de oude  $\gamma$  meer dan 1% schelen
- o zo ja: herhaal de procedure met deze nieuwe  $\gamma$
- o zo nee: stop de iteratieprocedure en gebruik deze  $\gamma$  als inkortingshoek.
- o maak een nieuwe  $\varphi$  volgens:

$$\varphi_{\text{nieuw}} = \varphi_{\text{oud}} + \frac{\pi}{2} - \gamma$$

- o dit levert  $P$  en vandaar kan je voor het volgende kwart de constructieplaats zoeken.

Deze procedure is alleen op een programmeerbare rekenmachine uit te voeren. In de tabel staan de resultaten voor een spiegel met  $f = 25$  cm en  $a = 5$  cm. De eerste kolom

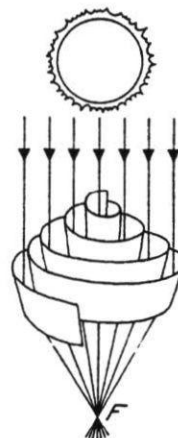


Figuur 8 De zonnepiraal in bedrijf.

geeft  $\Sigma\gamma$ ; de tweede en derde kolom geven u de mogelijkheid onze resultaten te controleren; kolom 4 geeft de montageplaats, waar we  $P'$  moeten vastmaken.

We maakten van spiegelkarton een zonnepiraal met een effectieve diameter van 60 cm. Op een heiige dag in april brachten we hiermee een halve liter water in een ijzeren pot van 500 gram in een half uur van  $14^\circ\text{C}$  op  $48^\circ\text{C}$ . Met de gegevens uit BINAS en de wet van Stefan-Boltzmann kunnen we dan het rendement uitrekenen.

Spiegelkarton heeft het nadeel dat het vrij slap is, zodat de spiegel vrij snel uit model zakte. Waarschijnlijk is het bij dit materiaal handiger om van de spiraal een paraboloid te maken. We moeten dan (5) in plaats van (7) in de iteratie stoppen.



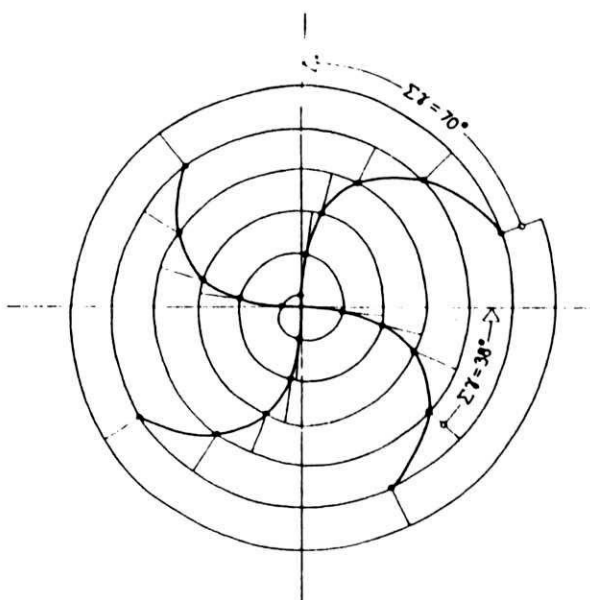
Figuur 9 Een spiegel van het lenstypet uit een spiraal

#### Appendix

Via integreren kunnen we de lengte van de hartlijn van de spiraalstrook berekenen. De lengte  $L$  van  $S$  naar  $P$  (figuur

Tabel I Constructiegegevens voor de zonnepiraal  
 $f = 25 \text{ cm}; a = 5 \text{ cm}$

| $\Sigma \gamma$ | $\cos \alpha$ | $\rho$ | $\rho_m(\text{cm})$ |
|-----------------|---------------|--------|---------------------|
| 0               | 0,99808       | 0,125  | 1,2                 |
| 1               | 0,99629       | 0,175  | 2,5                 |
| 1               | 0,99398       | 0,225  | 3,7                 |
| 2               | 0,99121       | 0,274  | 4,9                 |
| 3               | 0,98805       | 0,324  | 6,1                 |
| 4               | 0,98456       | 0,373  | 7,3                 |
| 6               | 0,98080       | 0,422  | 8,5                 |
| 8               | 0,97684       | 0,471  | 9,7                 |
| 11              | 0,97273       | 0,520  | 10,8                |
| 13              | 0,96852       | 0,568  | 11,9                |
| 17              | 0,96424       | 0,617  | 13,0                |
| 20              | 0,95994       | 0,665  | 14,1                |
| 24              | 0,95565       | 0,713  | 15,2                |
| 29              | 0,95138       | 0,760  | 16,3                |
| 33              | 0,94715       | 0,808  | 17,3                |
| 38              | 0,94299       | 0,855  | 18,4                |
| 44              | 0,93890       | 0,902  | 19,4                |
| 50              | 0,93489       | 0,949  | 20,4                |
| 56              | 0,93097       | 0,996  | 21,4                |
| 63              | 0,92714       | 1,042  | 22,4                |
| 70              | 0,92341       | 1,088  | 23,3                |
| 77              | 0,91977       | 1,134  | 24,3                |
| 84              | 0,91622       | 1,180  | 25,3                |
| 92              | 0,91278       | 1,226  | 26,3                |
| 100             | 0,90942       | 1,272  | 27,2                |
| 109             | 0,90617       | 1,317  | 28,1                |
| 117             | 0,90300       | 1,362  | 29,0                |
| 126             | 0,89992       | 1,407  | 29,9                |



Figuur 10 De uitwerking volgens tabel I

7) is gelijk aan:

$$L = \int_{\varphi}^{\psi} \frac{\varphi - \pi}{2\pi} \cdot a d\varphi = \frac{a}{4\pi} \left[ \varphi^2 - 2\pi\varphi \right]_{\varphi}^{\psi}$$

Deze lengte is ook gelijk aan  $R(\psi - \varphi)$ , immers:

$$R = \frac{\frac{\psi + \varphi}{2} - \pi}{2\pi} a$$

Hiermee is bewezen, dat de benadering van een stuk spiraal door een overeenkomstig stuk cirkel geoorloofd is.

In fig. 10 tenslotte hebben we een spiraal met 20 windingen waarbij we 4 'doortrekkrommen' punt voor punt geconstrueerd hebben. Voor wie zo'n spiraal zelf wil maken, is dit dan de werktekening.

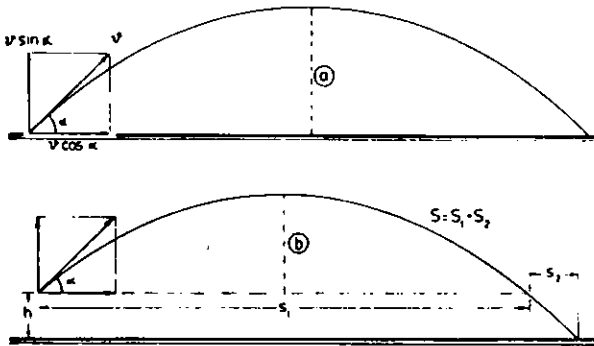
# Kogelstoten onder ... 42°!

IR HENK MULDER,  
*Ulvenhout*

Als we een voorwerp schuin wegwerpen, beschrijft het een parabool. We komen daarbij zo ver mogelijk, bij een zekere beginsnelheid  $v$ , als we werpen onder een hoek van 45°.

Het bewijs daarvoor is vrij eenvoudig en voldoende bekend. De horizontaal afgelegde weg wordt dan  $\frac{v^2}{g} \sin 2\alpha$  en dus bij  $\alpha = 45^\circ$  bij benadering  $0,1 v^2$ . Een geschikte vuistregel!

Het hoogste punt komt dan op  $\frac{v^2}{4g}$ , zodat bij die ideale worp de afstand gelijk wordt aan vier keer de hoogte (figuur 1a).



Figuur 1 Werpen vanaf de grond en vanaf een hoogte  $h$

## Bij kogelstoten

De Amerikaan Feuerbach (figuur 2) stoot met een uitstootsnelheid van 14 m/s over een afstand van ruim 21 m, onder een hoek van ... 42°.

Waarom stoot hij niet onder de schijnbaar ideale hoek van 45°? Wel, de optimale hoek blijkt alleen maar 45° te zijn als begin- en eindpunt op gelijke hoogte liggen! Bij het kogelstoten wordt de kogel gelanceerd vanaf een punt met een hoogte  $h$  boven de grond (figuur 1b). De totale afstand bestaat nu uit de stukken  $s_1$  en  $s_2$ . Het is gemakkelijk in te zien dat het stuk  $s_1$  bij kleinere uitstootsnelheid afneemt, maar het stuk  $s_2$  juist toeneemt. De kunst is het nu om een



Figuur 2 Vreugde bij de Amerikaan Feuerbach na zijn stoot over bijna 22 meter

maximale waarde te bereiken voor het totale stuk  $s = s_1 + s_2$ . Die ligt nu niet meer bij  $\alpha = 45^\circ$ .

## Een maximum voor $s$

In de vijfzigste jaargang van *Faraday*, pagina 157 bewijst Hubert Biezeveld dat, in het geval van een maximale afstand, moet gelden dat de som van de uitstootsnelheid  $v$  en de botsingshoek  $\beta$ , bij gegeven waarden van  $v$  en  $h$ , gelijk moet zijn aan 90°. Dat betekent dus tevens dat de beide vectoren  $\vec{v}_1$  en  $\vec{v}_2$  dan loodrecht op elkaar moeten staan.

In figuur 3 zijn de bedoelde hoeken en de beide snelheden aangegeven. De snelheidsverandering  $\Delta \vec{v}$  is verticaal omlaag gericht. Volgens de wet van behoud van energie geldt:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh \text{ of } v_2^2 = v_1^2 + 2gh.$$

Tevens is in de figuur af te lezen, hoe groot de optimale hoek zal zijn. Immers  $\tan \alpha = \frac{v_1}{v_2}$  of  $\tan \alpha = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + 2gh}}$ .

Als we een uitkomst zonder wortelvorm prefereren en  $v_1$  vervangen door  $v$ , kunnen we gemakkelijk hieruit afleiden:

$$\cos 2\alpha = \frac{gh}{v^2 + gh}$$

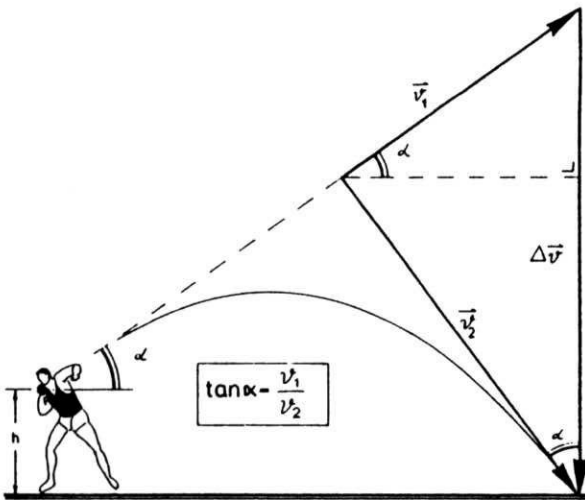
Dit is een geschikte formule om de hoek te berekenen, waarbij we zo ver mogelijk komen. De uitkomst is afhankelijk van zowel  $h$  als  $v$ .

De maximale afstand is als volgt te berekenen:

$$\begin{aligned} s &= v_x t \\ v_x &= v_1 \cos \alpha \\ \Delta v &= gt \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{deze formules} \\ \text{gelden altijd} \end{array}$$

$$\cos \alpha_{\max} = \frac{v_2}{\Delta v} \quad (\text{zie figuur 3})$$

$$s_{\max} = \frac{v_1 v_2}{g}$$



Figuur 3 Bij maximale afstand geldt:  $\alpha + \beta = 90^\circ$

Hiervoor kunnen we ook schrijven:

$$s_{\max} = \frac{v^2}{g} \sqrt{1 + p} \quad (\text{met } p = \frac{2gh}{v^2})$$

Voor de afstand bij een uitstoothoek van  $45^\circ$  valt af te leiden:

$$s_{45^\circ} = \frac{v^2}{g} (1 + \sqrt{1 + 2p})$$

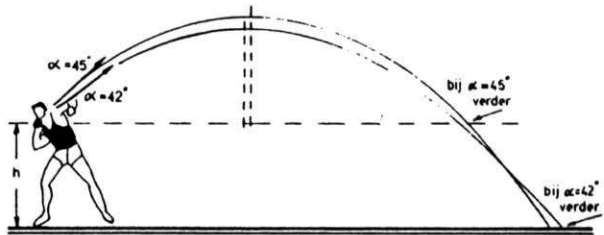
### De stoot van Feuerbach

Analyse van de stoot van Feuerbach gaf als uitkomsten

$$v = 14 \text{ m/s en } h = 1,8 \text{ m.}$$

Als we de optimale hoek berekenen uit  $\cos 2\alpha = \frac{p}{2 + p}$  vinden we voor  $p = 0,18$  en  $\alpha = 42,6^\circ$ .

Het is een in de atletiek bekend feit dat maximale prestaties, zowel bij kogelstoten, speerwerpen als discuswerpen, geleverd worden bij hoeken kleiner dan  $45^\circ$ . In het geval van Feuerbach vinden we bij  $45^\circ$  de theoretische uitkomst door invullen in de gegeven formule: 21,66 m en bij  $\alpha = 42,6^\circ$  een waarde van 21,73 m. Dat scheelt maar ... 7 cm, maar in de topsport is men gewend op de kleintjes te letten. In figuur 4 is getekend hoe aanvankelijk de baan van  $45^\circ$  voorligt, maar tenslotte die van  $42^\circ$  wint.



Figuur 4 Onder  $42^\circ$  komen we toch verder!

Interessant lijkt het om nog te vermelden dat ook kunstmannen, na een kort vertikaal stuk, onder een hoek van  $40^\circ$  de ruimte ingeschoten worden. Ook bij het 'kosmisch kogelstoten' gelden kennelijk soortgelijke overwegingen.

# De perfecte parabool

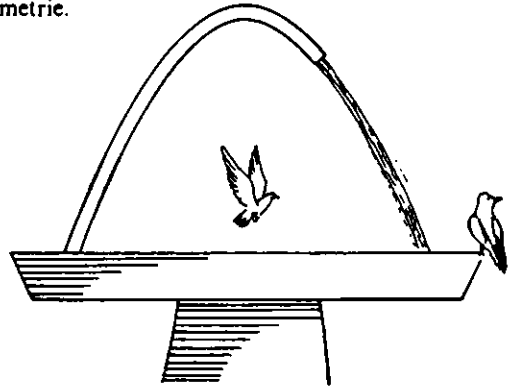
IR HENK MULDER, *Ulvenhout*

Als we een tuinslang schuin omhoog richten en voor voldoende waterdruk zorgen, spuit het water eruit in een fraaie kromme, een parabool (figuur 1). Een van de



Figuur 1 Een waterstraal in de vorm van een parabool

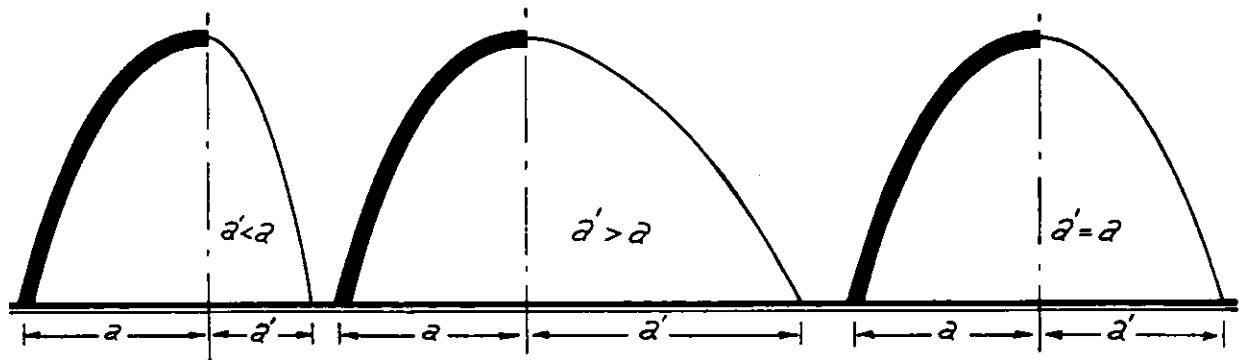
eigenschappen daarvan is de symmetrie; de linker helft is het spiegelbeeld van de rechter. In een Zwitsers dorp troffen we een fontein aan, waar uit een gebogen pijp water stroomt (figuur 2). De pijp heeft daar de vorm van een deel van een parabool en het uitstromende water vormt precies het overige deel. Nu is het de kunst om de waterdruk op de pijp zo af te stellen dat 'pijpparabool' en 'waterparabool' bij elkaar horen. Het probleem daarbij is juist die symmetrie.



Figuur 2 De spuitende fontein

## Een doorlopende kromme

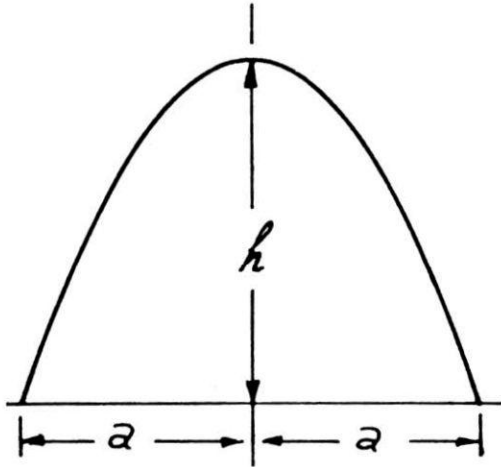
In figuur 3 staan telkens pijpen getekend in de vorm van halve parabolen. In figuur 3a is de waterdruk aan de lage kant, waardoor de beide paraboolhelften niet bij elkaar passen. Het water spuit niet ver genoeg. In figuur 3b spuit het water juist te ver. De waterdruk is er te hoog. Ons interesseert de situatie van figuur 3c; daar is de parabool symmetrisch geworden.



Figuur 3 a Spuiten bij te lage druk

b Spuiten bij te hoge druk

c Spuiten bij de juiste druk



Figuur 4 Een parabool met breedte  $2a$  en hoogte  $h$

We zouden naast de pijp een watertorentje kunnen opstellen en vragen: hoe hoog moet het water daar staan om zulk een druk te krijgen dat het spuiten symmetrisch wordt?

Hoe hoog?

We kunnen een parabool karakteriseren (figuur 4) met behulp van de breedte  $2a$  en de hoogte  $h$ . De pijp in de vorm van een halve parabool (figuur 3) heeft dan een breedte  $a$  en een hoogte  $h$ . De vraag is nu: druk de hoogte van de waterkolom ( $h'$ ) uit in  $a$  en  $h$ .

Het zal direkt duidelijk zijn dat  $h'$  groter moet zijn dan  $h$ . Dat volgt uit de energiewet. Immers, de watermolekulen hebben in het toppunt van de parabool zowel potentiële als

kinetische energie. Zou het water recht omhoog spuiten, dan zou het water in de watertoren even hoog moeten staan als de hoogte van de straal. Want dan heeft het water in het hoogste punt geen bewegingsenergie.

In figuur 5 staat een drietal situaties getekend. Theoretisch is aan te tonen dat de relatie tussen  $h'$ ,  $h$  en  $a$  er aldus uitziet:

$$h' = h + \frac{a^2}{4h}$$

Bewijs

De snelheid van de watermolekulen in het hoogste punt van de schuin spuitende straal stellen we  $v$  (zie figuur 5). De beweging in horizontale zin is eenparig. De tijdsduur voor watermolekulen om een halve parabool af te leggen is dus  $\frac{a}{v}$ . Die moet gelijk zijn aan de stijgtijd gedurende de eerste helft van de beweging en ook aan de daaltijd gedurende de tweede helft.

Uit  $h = \frac{1}{2}gt^2$  volgt dan

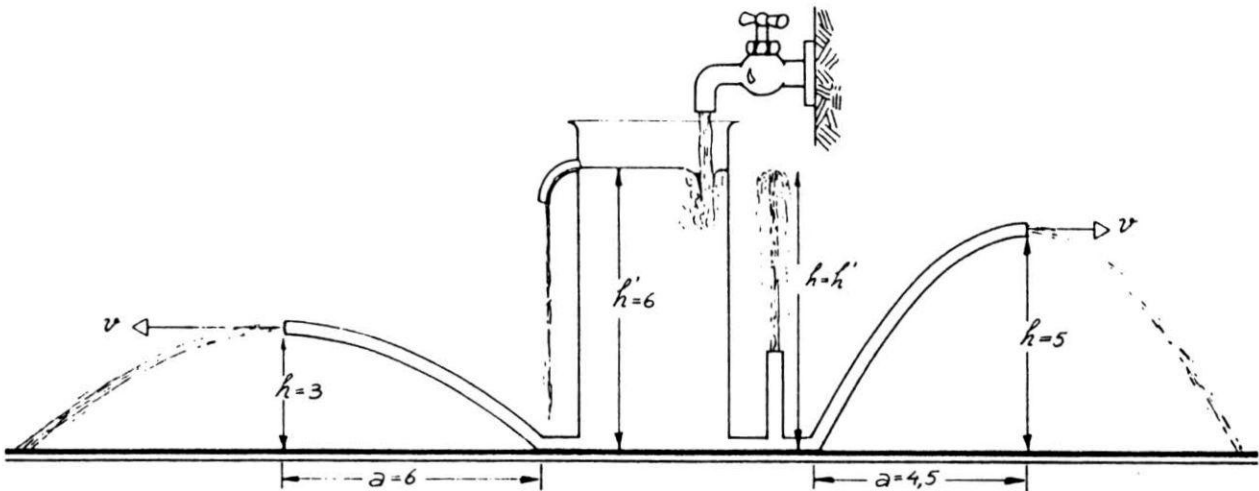
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Uit gelijkstelling volgt:  $\frac{a}{v} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ .

Als we uit deze vergelijking  $v$  oplossen, krijgen we:

$$v^2 = \frac{a^2g}{2h} \tag{1}$$

Nu weten we verder uit de wet van behoud van mechanische energie dat de watermolekulen die boven in het overloopvat verdwijnen, evenveel energie hebben als watermolekulen in de top van de fontein. Daaruit volgt dan:



Figuur 5 Perfekte parabolen bij de juiste waterdruk

$$mgh' = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

waarbij  $m$  de massa van zo'n watermolekuul voorstelt. Dit geeft:

$$v^2 = 2g(h' - h) \quad (2)$$

Door gelijkstelling van (1) en (2) vinden we gemakkelijk:

$$h' = h + \frac{a^2}{4h}$$

Dit is de theoretische uitkomst met verwaarlozing van de wrijvingsweerstand. In werkelijkheid moet  $h'$  dus meer worden dan de gestelde formule aangeeft.

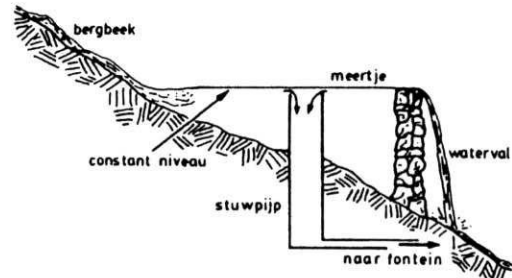
#### Enkele voorbeelden

Als  $a = 0$  vinden we volgens deze formule:  $h' = h$ . Dat hadden we wel kunnen verwachten, want  $a = 0$  betekent dat het water recht omhoog spuit.

Als de pijp de vorm heeft van een halve parabool met  $a = 6$  en  $h = 9$ , dan geeft de formule:  $h' = 10$ . Bij de fontein in het Zwitserse dorp (figuur 2), is  $a$  ongeveer 3,2 m en  $h$  5,5 m. De formule geeft dan voor  $h'$  ongeveer 6 m.

#### Realisatie

We zouden een opstelling kunnen maken met behulp van



Figuur 6 De juiste druk met behulp van een stuwmeertje

een waterkraan en een overloopvat, zoals in figuur 5 is aangegeven.

In het geval van de Zwitserse fontein, bleek deze, bij nader onderzoek, gevoed te worden door een aftakking van een bergstroompje (figuur 6). Het water wordt verzameld in een meertje, waarbij het overtollige water over een muurtje wegløopt. De stuwpijp van de fontein komt vrijwel tot het waterniveau in de plas. Zo bepaalt de hoogte van de 'stuwdam' de waarde van  $h'$ . Bij deze fontein staat dit niveau dus ongeveer een halve meter hoger dan de fontein spuit.

Het zal duidelijk zijn dat de pijp niet de vorm van speciaal een halve parabool hoeft te hebben. In het geval van de fontein, was dat meer dan een halve parabool (figuur 2).



# NVON

---

# maandblad

## **Inleiding**

De NVON, de Nederlandse Vereniging voor het onderwijs in de natuurwetenschappen, ontstond in 1975 door fusie van de Vereniging van Leraren in Natuur- en Scheikunde (Velines) en de Vereniging van Leraren in de Biologie (Velebi). Het NVON-maandblad, in 1994 omgedoopt tot NVOX, verschijnt in zijn huidige vorm sinds 1984. Faraday werd als apart katern in het NVON-maandblad opgenomen, maar na een jaar opgeheven.

Na zijn lange reeks artikelen in Faraday ging Henk Mulder gewoon verder in het NVON-maandblad, tot 1993, zijn laatste levensjaar. In de bibliografie achterin deze bundel zijn alle publicaties in chronologische volgorde vermeld.

Evenals bij de Faraday-artikelen hebben we hier en daar wat in de volgorde veranderd; weggelaten hebben we hier slechts weinig. Op één plaats wordt een artikel van Henk Mulder gevolgd door een aansluitend artikel van een collega.

Enige nadere bijzonderheden geeft op de volgende bladzijde Pietjan Wippoo, die van 1985 tot 1994 hoofdredacteur/eindredacteur voor het vak natuurkunde was van het NVON-maandblad.

## De periode 1985-1993 van het NVON-maandblad

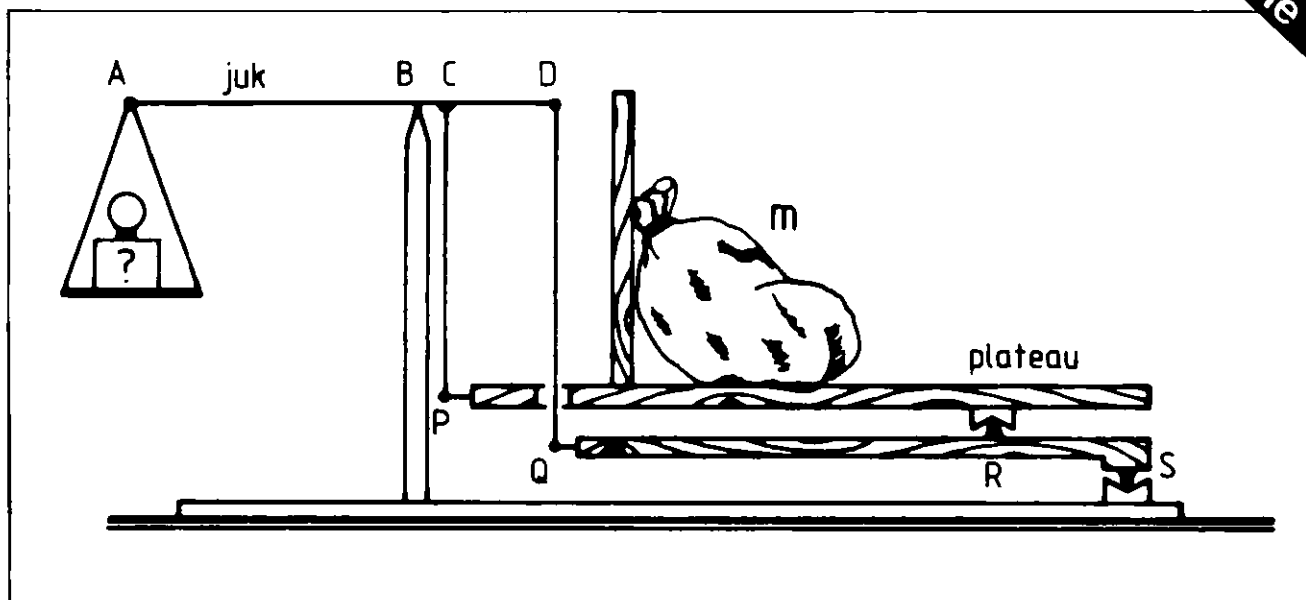
Nu de stukjes min of meer chronologisch zijn verzameld, is goed te zien hoe de inspiratie van Henk parallel liep met het onderwijs. Vroeger werden wetten nog 'bewezen' en Henk was daar een meester in. Kenmerkend is zijn didactische opzet door eerst een probleem te schetsen en pas in een volgend nummer of verderop in het blad de oplossing te geven. Want die oplossing moest er zijn: hij ging door tot hij wist hoe het zat. Dat zijn problemen ook anderen bezig hielden, bleek met zijn verhaal over 'Drijvende blokken' dat in december 1985 in het NVON-maandblad verscheen. Bijna vijf jaar later schreef de heer B.A. Wilking uit Dongen een vervolg met de oplossing van de stand van een drijvend blok bij elke gegeven dichtheid van het hout. Toen Henk dat artikel kreeg, is hij onmiddellijk naar Dongen gereden, heeft alles doorgenomen en belde enthousiast op: 'Die man heeft gelijk!'. Vervolgens heeft hij al het tekenwerk voor dat artikel gedaan om er voor te zorgen dat het zo snel mogelijk kon worden gepubliceerd. Daarom staat dat artikel ook in deze bundel. Het laatste stukje van Henk in het NVON-maandblad verscheen in februari 1993. Het heet 'Prettig zagen'. Het is niet in de bundel opgenomen, omdat een reactie er op niet meer kon worden verwerkt. Zijn voorlaatste artikel 'Botafumeiro' sluit de bundel af: een goede afspiegeling van zijn laatste periode. Geïnspireerd door een vakantiereis en met een dialoog met de lezers. Het is goed om te zien hoe Henk met zijn tijd is meegegaan en ons daarbij voor bleef gaan.

Al werkend aan deze bundel, beseffen we dat de beperkingen die we ons opgelegd hebben, geen recht doen aan de fenomenale prestatie, die Henk heeft geleverd. Er zal dus een vervolg moeten komen. We hopen dat deze bundel de behoefte daaraan zal aantonen.

Pietjan Wippoo

# De bascule, een combinatie van hefboomen

Natuurkunde als recreatie



Een bascule heeft een aantal opmerkelijke eigenschappen, ook voor ons die „alles" afweten van hefboomen en momentenregels.

Ze is opgebouwd uit een stelsel van drie hefboomen (fig. 1), waarvan de eerste, het juk, B als steunpunt heeft; en zo is R het steunpunt van de tweede hefboom PR en tenslotte S dat van de derde QRS. Beide laatste zijn als driehoekshefboomen uitgevoerd (fig. 2).

Waarom zijn er eigenlijk zoveel hefboomen?

Totaal hebben we nu acht draaipunten. In elk daarvan wordt gewerkt met meslagers, waarvan we alleen die bij R en S getekend hebben.

PR is het plateau waarop de te wegen last geplaatst wordt. Vaak wordt een decimale overbrengverhouding 1:10 toegepast, hetgeen betekent: als we een zak aardappelen van 25 kg willen wegen, moet het tegengewicht 2,5 kg worden. Aangaande dit opmerkelijke mechaniek hebben we enkele vragen, die ons althans erg hebben bezig gehouden.

1. Aan welke voorwaarde moet voldaan worden om ervoor te zorgen dat de plaats van de last op het plateau niet van invloed is op de uitkomst van de weging?

Het is toch immers bij hefboomen een normale zaak dat, als de armlengte veran-

derd wordt, ook het draaimoment verandert. Zou dat hier dan niet zo zijn?

2. Zal het plateau zich, tijdens de weging, evenwijdig aan zichzelf verplaatsen?

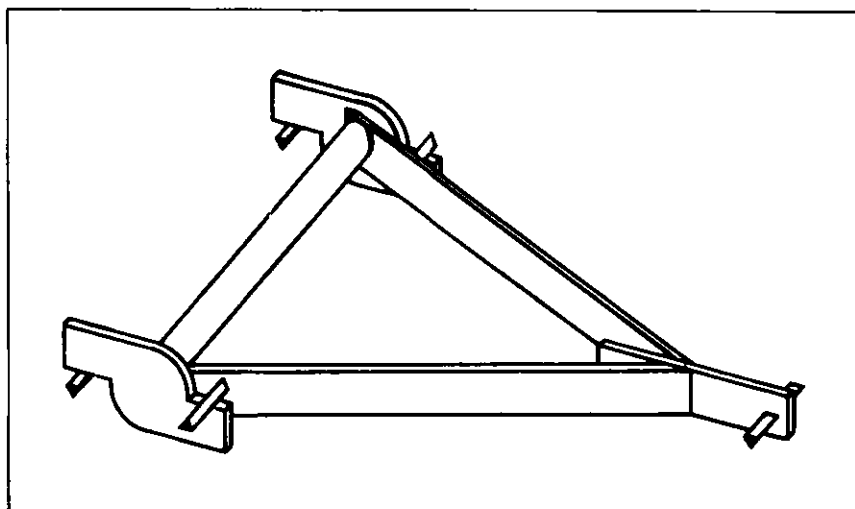
3. Hoe wordt die verhouding 1:10 gerealiseerd?

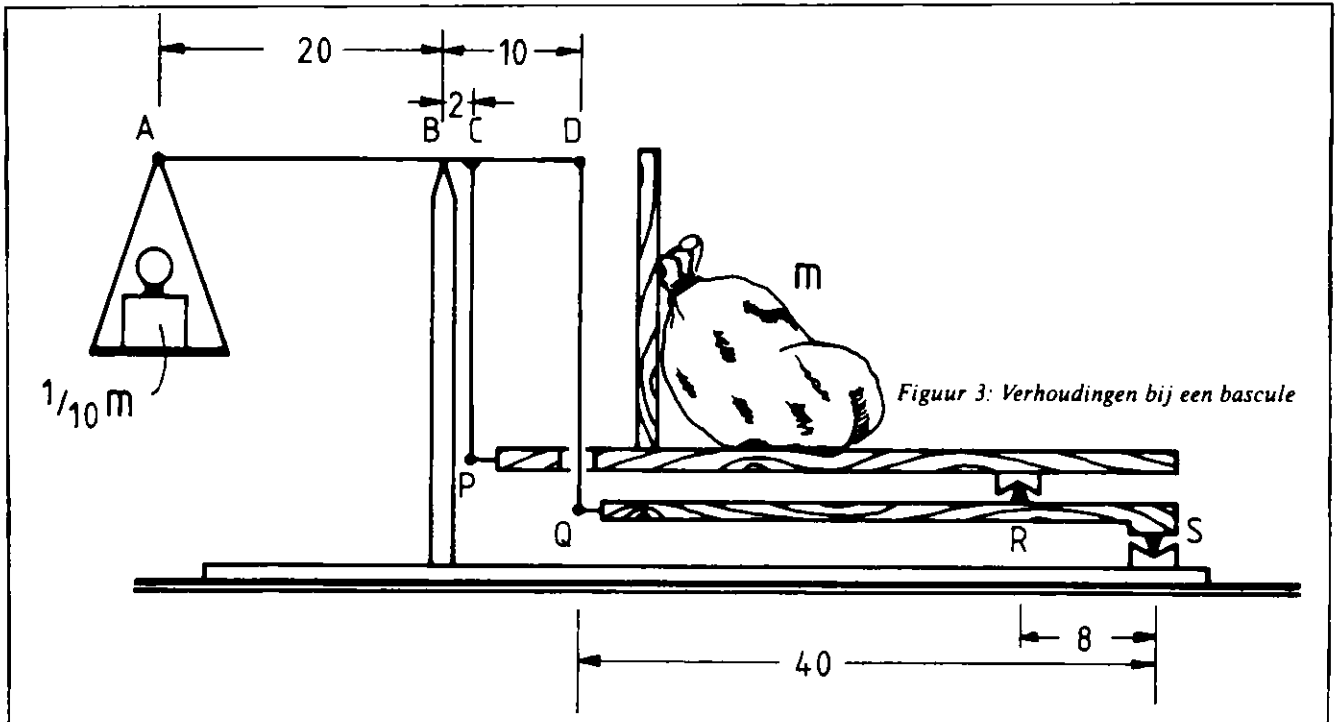
4. De last grijpt nu via twee stangen aan het juk aan. Waar zou de last op het juk moeten aangrijpen, als we dat slechts via één stang zouden doen?

Oplossing, zie pagina 124.

Figuur 1: Bascule met drie hefboomen AD, PR en QS

Figuur 2: Driehoekshefboom





Figuur 3: Verhoudingen bij een bascule

**OPLOSSING**

**De bascule als stelsel van elkaar compenserende hefboomen**

1. De weging is onafhankelijk van de plaats van de last als de verhoudingen BC:BD en SR:SQ aan elkaar gelijk zijn. In het voorbeeld (fig. 3) hebben we hiervoor tweemaal 1:5 gekozen. Als we dan voor het gemak maar uitgaan van de overige getallen, gaat het bewijs daarvoor aldus.

Als het massamiddelpunt van een zak aardappelen een bepaalde afstand heeft tot het steunpunt B, dan zal een deel van het gewicht  $mg$ , laten we zeggen  $pmg$ , drukken op punt P en de rest  $(1-p)mg$  op het punt R. De trek aan het juk bij C

wordt dan  $pmg$  en bij D  $\frac{1}{5} (1-p)mg$ , gezien de overbrengverhouding 1:5 door de hefboom QRS.

Het rechtsomdraaiende moment op het juk wordt dan:  $2pmg + 10(\frac{1}{5})(1-p)mg$  of  $2mg$  en dat is onafhankelijk van  $p$ . Het is dan tevens duidelijk dat een massa  $\frac{1}{10} m$  aan de linkerkant op de schaal voor evenwicht zal zorgen.

Het zal niet moeilijk zijn om in te zien dat het wegvalen van de termen met de factor  $p$ , veroorzaakt wordt door het gelijk maken van de boven genoemde verhoudingen.

2. Hierdoor zal, tijdens het wegen, het plateau zich rond de evenwichtsstand evenwijdig verplaatsen. Stel dat punt A daalt over een kleine afstand  $\epsilon$  (fig. 4). Dan zal C stijgen over een afstand  $\frac{1}{10}\epsilon$  en daarmee P evenzo. D zal echter stijgen

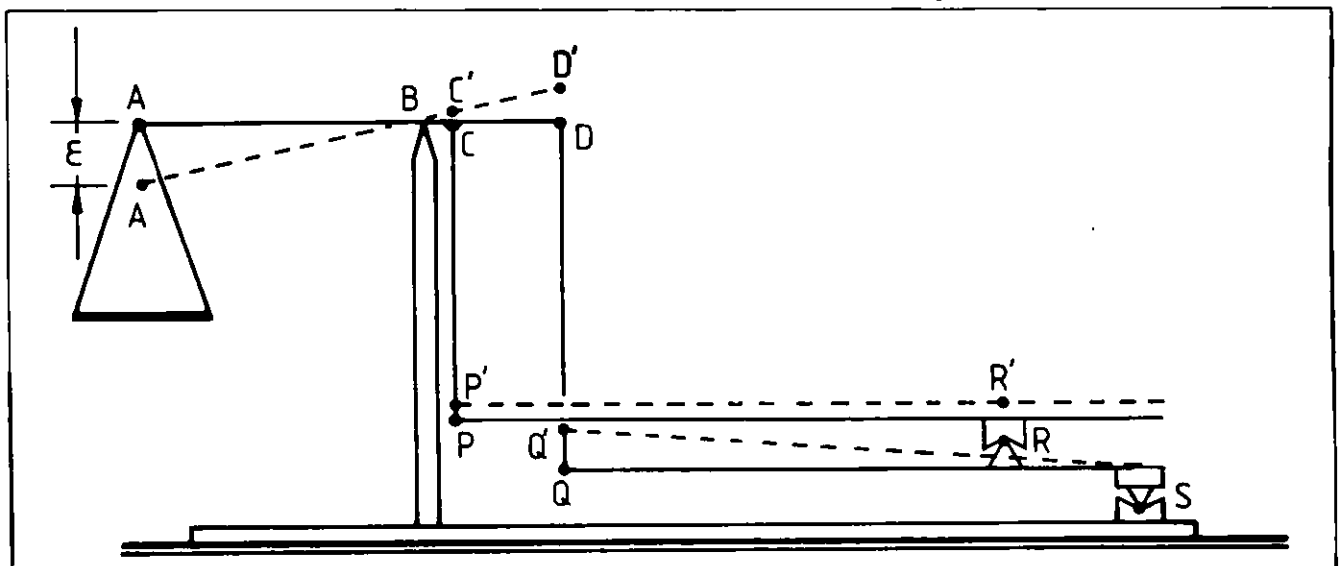
over  $\frac{1}{2}\epsilon$  en daarmee Q. Maar, weer vanwege dezelfde verhouding, zal R stijgen over  $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}\epsilon$  of  $\frac{1}{10}\epsilon$  en daarmee is aangetoond dat, bij geringe verplaatsing, het plateau evenwijdig aan zichzelf blijft.

3. Het zal nu ook wel duidelijk zijn dat de weegverhouding 1:10 bereikt wordt doordat  $BC : BA = 1:10$ .

4. Hetgeen tevens betekent dat BC de eigenlijke arm van de last is, indien we de last slechts via één stang aan het juk zouden hangen.

Samenvattend ontdekken we dat de hefboomen BCD en SRQ elkaars werking compenseren. Als we bijvoorbeeld de last iets naar rechts verplaatsen, wordt de trek op het juk bij C kleiner, maar bij D groter en wel zo dat het resulterend moment gelijk blijft!

Figuur 4: Verplaatsingen bij een bascule



## Een balans zonder armen

### Natuurkunde als recreatie

De tentoonstelling Fenomena is voorbij. Ons fysici zal het nog lang heugen. De eerste decennia hebben we zoiets niet meer te verwachten. Veel bekende experimenten verschenen hier in een nieuw jasje. Al meenden we er zo vertrouwd mee te zijn, ze kwamen weer verrassend over. En voor wie met een bloknootje en een potlood het terrein afliep, verscheen het ene idee na het andere voor schoolonderzoek of practicum. Als afscheid van dit alles, hier nog een voorbeeld.

In figuur 1 staat een merkwaardig type balans.

We zijn vertrouwd met het bekende wipmodel. Op het juk aan weerszijde een gewicht, elk met bijbehorende arm. Zijn de armen gelijk, dan ook, in geval van evenwicht, de beide massa's. Zo niet dan verhouden, volgens de bekende hefboomwet, de gewichten zich omgekeerd als de overeenkomstige armen.

Maar nu ...

Het draaimechaniek bestaat uit een parallellogramconstructie ABCD, draaibaar om twee punten M en N, halverwege de horizontale stangen. Loodrecht op de verticale zijanten zitten twee staafjes waaraan we gewichten kunnen hangen.

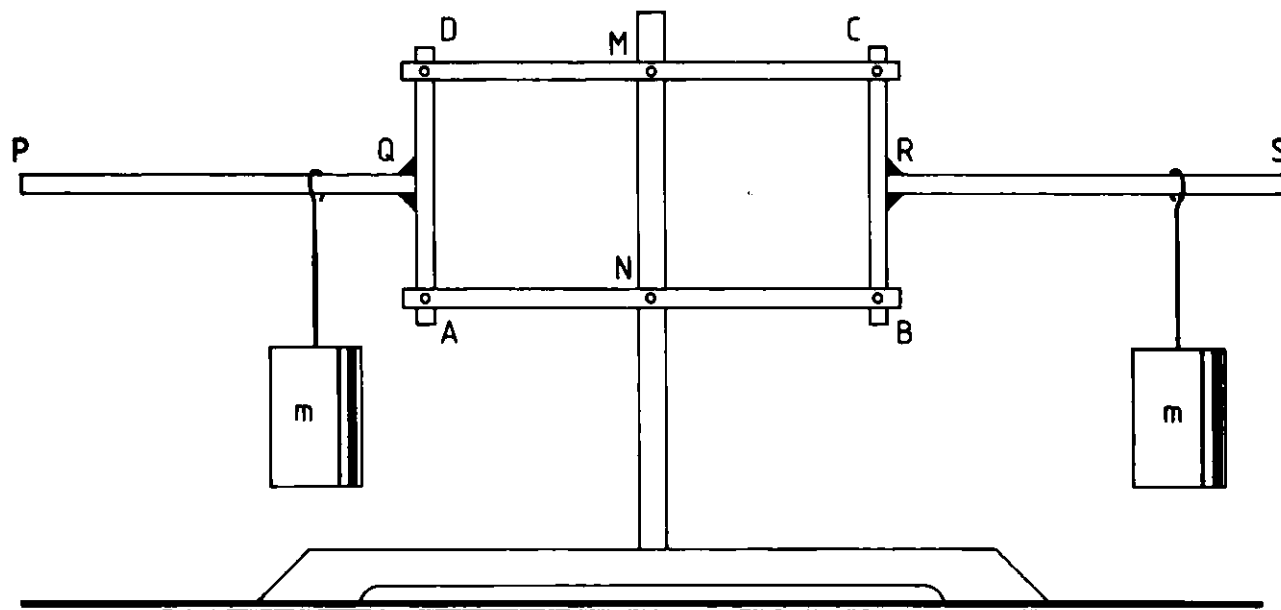
Maar nu komt het: er is alleen evenwicht als beide massa's gelijk zijn ... ongeacht de afstand tot het centrum! Is er eenmaal evenwicht dan kunnen we een massa langs een staafje verplaatsen zonder dat het evenwicht verbroken wordt!

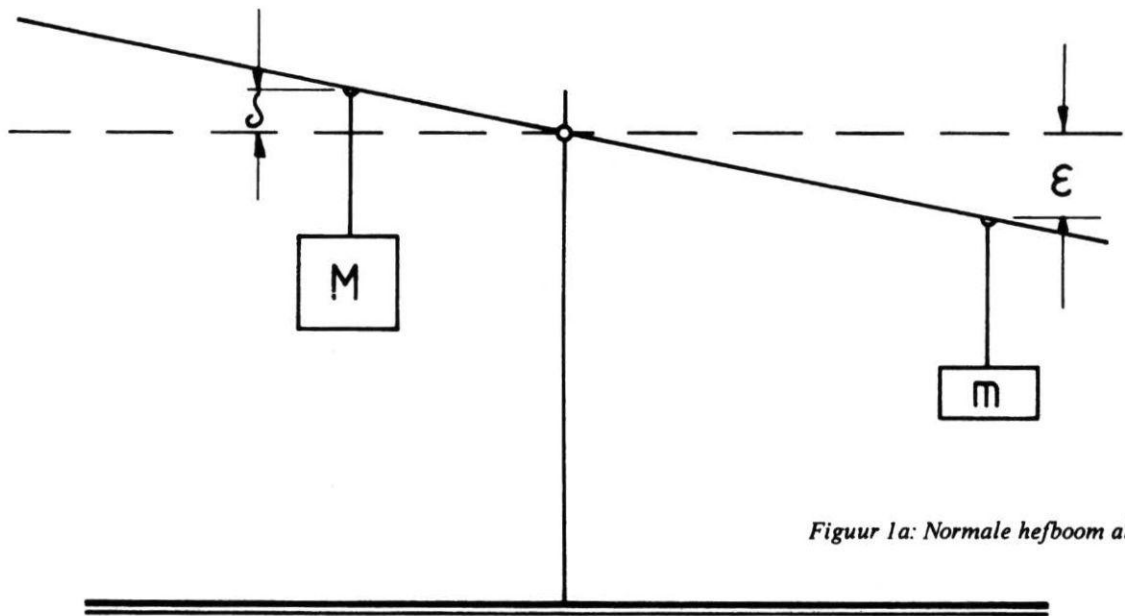
Hoe is dat mechanisch te verklaren??

Speelt de armlengte dan ineens geen rol meer? Is de vertrouwde hefboomregel failliet?

Puzzelt u daar maar eens aan. Wat wij ervan denken staat op pag. 126.

Figuur 1: Nieuw type balans.



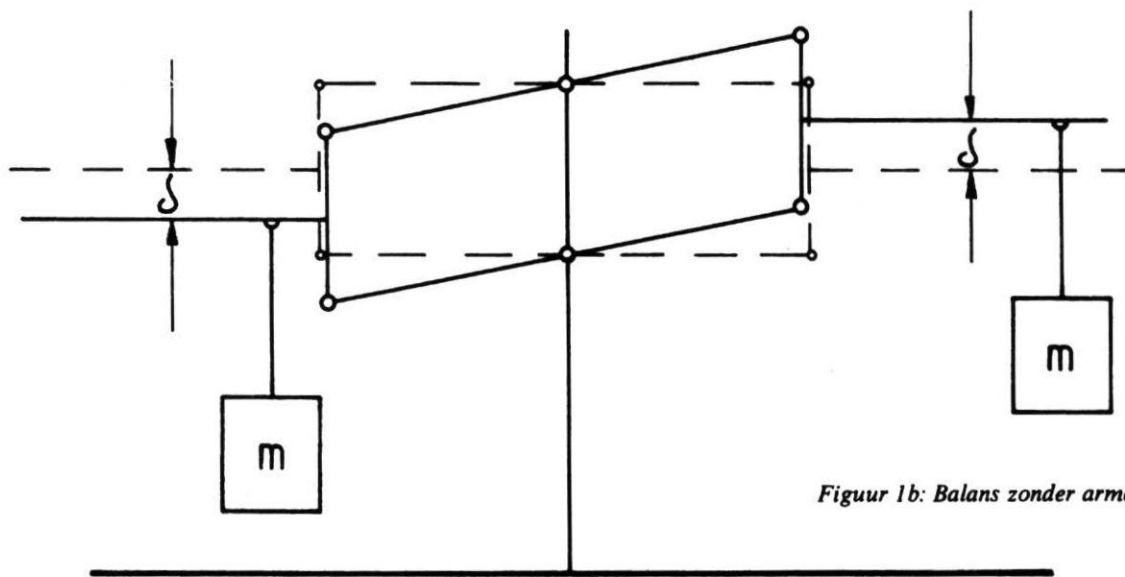


*Figuur 1a: Normale hefboom als balans.*

## Oplossing: Een balans zonder armen

Als we, ten onderscheid, de bekende balans een wipbalans (figuur 1a) noemen, geven we deze nieuwe balans de naam parallelbalans (figuur 1b). Het opvallende verschil is dat bij een wipbalans de grote massa *M stijgt* over een afstand  $\delta$  als tegelijkertijd de kleine massa *m daalt* over  $\epsilon$ . Volgens de wet van behoud van energie geldt dan:  $Mg \times \delta = mg \times \epsilon$ . Ofwel  $M : m = \epsilon : \delta$ .

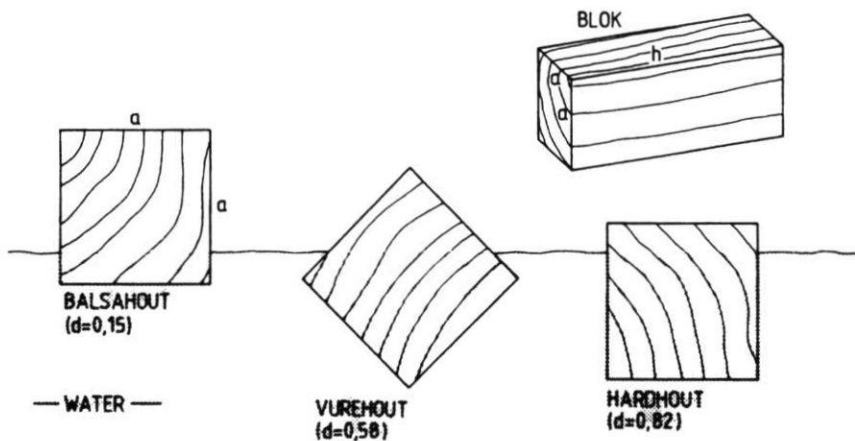
Bij een parallelbalans zijn de verticale verplaatsingen links en rechts steeds even groot en dus, volgens dezelfde energiewet, in geval van evenwicht, ook de beide massa's. En dit is dan onafhankelijk van de afstand van ophangpunt tot centrum.



*Figuur 1b: Balans zonder armen.*

# Drijvende blokken

We nemen drie langwerpige blokken, met dezelfde vierkante doorsnede. Verder zijn ze even lang maar zijn van verschillende houtsoorten (fig. 1). Het eerste is van balsa hout, het tweede van vure hout en het derde van een tropisch hardhout. De dichtheden zijn respectievelijk: 0,15 - 0,58 - 0,82 g.cm<sup>-3</sup>. Als we ze in water werpen, gaan ze drijven, maar . . . tot onze grote verrassing, het eerste in een „platte stand” en het laatste ook, maar het middelste in een „schuine stand”! Hoogst raadselachtig. Hoe werkt dat?



Figuur 1  
Drie blokken van gelijke afmetingen en verschillende dichtheden, drijvend in water

We starten ons onderzoek en beginnen maar met een concreet voorbeeld: een blok met een dichtheid van 0,5 g.cm<sup>-3</sup>. In het verdere verhaal (met nogal wiskundige afleidingen) laten we de eenheid g.cm<sup>-3</sup> weg.  $d$  is dan de verhouding tussen de dichtheid van hout en die van water.

## Blok met $d = 0,5$

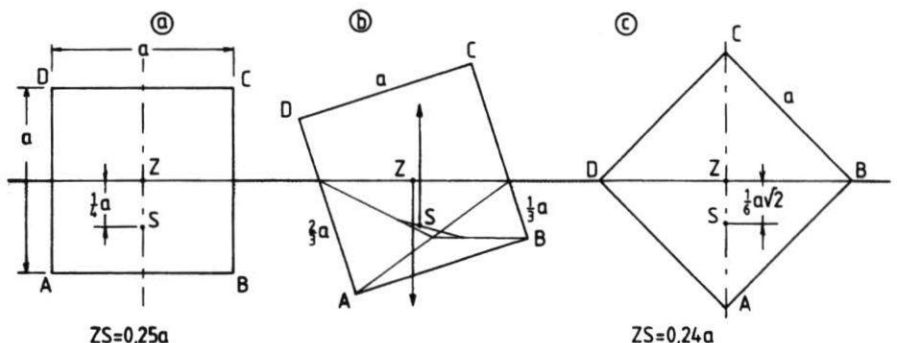
Als een voorwerp drijft, is vrij eenvoudig te bepalen hoe groot het volume is van het ondergedompelde deel. Dat hangt immers samen met de verhouding van de dichtheden van voorwerp en vloeistof.

Ingewikkelder wordt het als we vragen: in welke stand zal het lichaam gaan drijven. We beperken ons tot homogene lichamen. We nemen een langwerpig blok, ( $h > a$ ) met doorsnede  $a^2$  en hoogte  $h$ . We stellen  $d$  gelijk aan 0,5, zodat het blok, bij drijven

in water, half onder en half boven is (fig. 2). Het zwaartepunt bevindt zich dus op vloeistofnivo.

Het punt S, waar de opwaartse kracht aangrijpt, is het massa-middelpunt van het ondergedompelde deel.

Figuur 2  
Drijvend blok bij dichtheid 0,5



We gaan uit van de toestand van fig. 2a. Is dat een geval van stabiel evenwicht?

Om dat te weten te komen, moeten we het blok een stuk draaien om zijn lengte-as en nagaan of het onder invloed van de werkende krachten, naar de oorspronkelijke stand terugkeert of juist niet.

In fig. 2b hebben we het blok ongeveer 18° gedraaid

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}$$

Bij die stand is het namelijk niet moeilijk om de positie van S te construeren. Hopelijk spreekt de figuur voor zich. Het blijkt nu dat er in die stand een linksdraaiend of positief moment gaat werken, waardoor het blok niet meer naar de eerste stand terugkeert. Het draait nu zover door totdat het ondergedompelde deel een driehoekige doorsnede heeft gekregen (fig. 1c). Nu ligt S weer loodrecht onder Z, waardoor de koppelarm nul wordt en er weer evenwicht ontstaat, maar nu stabiel.

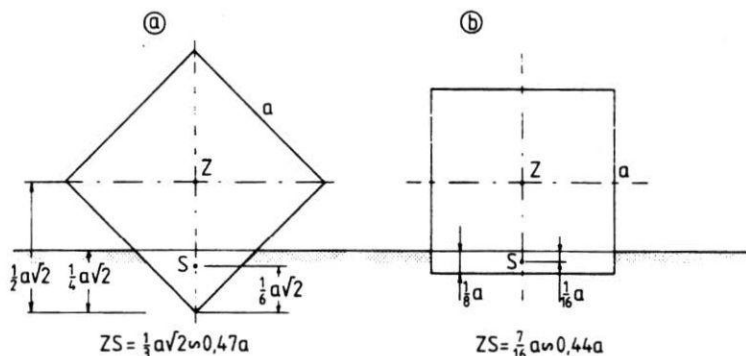
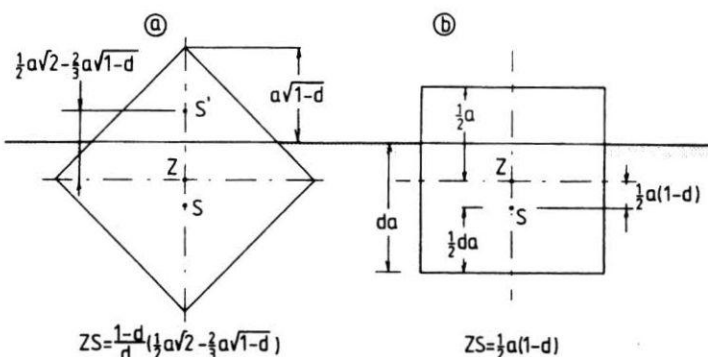
## ZS minimaal

De zwaartekracht probeert het blok naar die stand te trekken, waarbij punt Z zo laag mogelijk komt. Daarentegen werkt in S de vloeistofkracht omhoog. Dit punt probeert dus zo hoog mogelijk te komen. Kennelijk kiest het blok die stand waarbij ZS minimaal wordt.

We kunnen als algemene regel stellen dat de voorwaarde voor stabiel drijven is:

- 1) de lijn ZS verticaal
- 2) ZS minimaal.

**Figuur 5**  
Drijvend langwerpig blok  
bij dichtheid  $d \geq 0,5$



**Figuur 3**  
Drijvend langwerpig blok bij dichtheid  $\frac{1}{8}$

### Drijven bij $d < 0,5$

We gingen uit van het geval dat  $d$  gelijk is aan 0,5. We nemen nu als voorbeeld een blok met

$$d = 0,125 \left(\frac{1}{8}\right),$$

dat weer drijft in water (fig. 3). Van het totale blok is nu één achtste deel ondergedompeld. Die toestand is redelijk overzichtelijk.

Na enig gepuzzel laat zich in fig. 3a aflezen:  $ZS =$

$$\frac{1}{3} a/2 \text{ of ongeveer } 0,47a.$$

Maar ... is die toestand wel stabiel?? In fig. 3b is af te lezen dat bij „plat drijven” geldt:

$$ZS = \frac{1}{16} a \text{ of ongeveer } 0,44a.$$

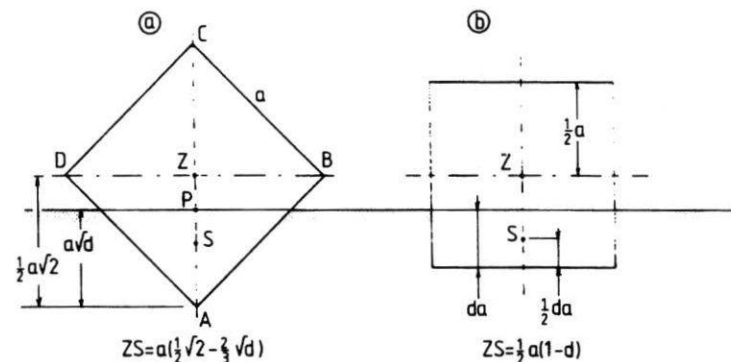
En dat is minder! En daaruit volgt dat bij  $d = 0,125$  een drijvend blok kiest voor stand b en bij  $d = 0,5$  juist voor stand a!

### Kritieke dichtheid

Uit beide voorbeelden volgt dat er een dichtheid zal zijn, waarbij beide standen als stabiele evenwichten mogelijk zijn. Dat is het geval als in de schuine zowel als in de platte stand  $ZS$  even groot is.

We gaan nu een algemene berekening opzetten met  $d$  als variabele (fig. 4) en bepalen daarbij beide waarden voor  $ZS$ . We beginnen met het geval dat minder dan de helft onder zit. In stand a van fig. 4 geldt,

**Figuur 4**  
Drijvend langwerpig blok bij dichtheid  $d \leq 0,5$



dat van de totale doorsnede  $a^2$ , slechts een deel  $da^2$  ondergedompeld is. Enig gereken leert:  $AP = a/d$ .

Uit gelijkvormigheidsregels volgt:

$$AP : AZ = a/d : \frac{1}{2} a/2 = d\sqrt{2} : 1$$

$$\text{dus } AP = AZ \cdot \sqrt{2}d = \frac{1}{2} a/2 \cdot d\sqrt{2} = a/d$$

en dus

$$AS = \frac{2}{3} a/d \text{ zodat } ZS = \frac{1}{2} a/2 - \frac{2}{3} a/d.$$

In stand b van fig. 4 geldt:

$$ZS = \frac{1}{2} a (1-d)$$

De kritieke waarde van  $d$  volgt uit gelijkstelling:

$$\frac{1}{2} a/2 - \frac{2}{3} a/d = \frac{1}{2} a (1-d)$$

$$\text{of } 3/2 - 4/d = 3 - 3d \text{ (voorwaarde } d < 0,5)$$

Dit is te schrijven als een vierkantsvergelijking:

$$3(\sqrt{d})^2 - 4/\sqrt{d} + (3/2 - 3) = 0$$

waarbij de enige oplossing wordt:

$$\sqrt{d} = 0,49 \text{ en dus } d = 0,24$$

Bij deze dichtheid zijn dus platte en schuine stand beide mogelijk.

Ook in het gebied bij  $d > 0,5$  waarbij dus meer dan de helft van het voorwerp ondergedompeld is, kunnen we een soortgelijke berekening opzetten. De echte puzzelaars zullen ongetwijfeld aan fig. 5 voldoende hebben om de berekening te volgen.

De gezochte kritieke dichtheid in dit gebied volgt uit:

$$\frac{1-d}{d} \left( \frac{1}{2} a\sqrt{2} - \frac{2}{3} a\sqrt{1-d} \right) = \frac{1}{2} a(1-d)$$

$$3/2 - 4/(1-d) = 3d$$

$$\text{Stel } 1-d = x \text{ en dus } d = 1-x$$

$$3/2 - 4/x = 3 - 3x \text{ (voorwaarde } d > 0,5)$$

of als vierkantsvergelijking:



$$3(\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} + (3/2 - 3) = 0$$

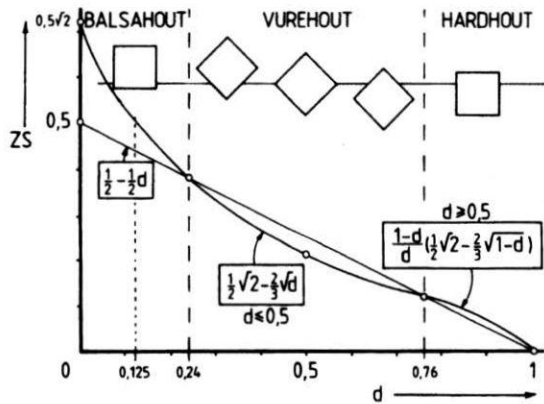
waarbij de enige oplossing wordt:

$$\sqrt{x} = 0,49 \text{ en dus } x = 0,24 \text{ en dus } d = 0,76.$$

### Samenvattend

In fig. 6 staat grafisch het complete overzicht. Daar is af te lezen, hoe voor kleinere en grotere dichtheden de platte stand bij drijven favoriet zal zijn en in het tussengebied ( $0,24 < d < 0,76$ ) juist de schuine stand.

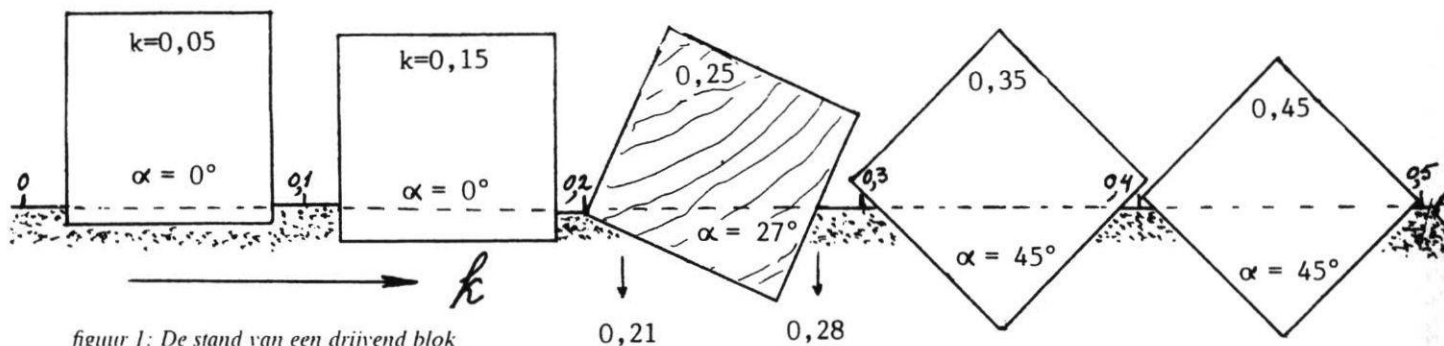
Soortgelijke beschouwingen zijn ook voor andere homogene lichamen te ontwikkelen. Zo kan bij een kubus ook een lichaamsdiagonaal vertikaal komen. Telkens geldt dat die stand bij drijven stabiel is, waarbij S vertikaal onder Z komt en wel zo hoog mogelijk. ZS is daarbij steeds minimaal. De uitkomst wordt enerzijds



Figuur 6  
Het verloop van ZS in beide standen, afhankelijk van d

bepaald door vorm en afmetingen van het lichaam, anderzijds door de verhouding van de dichtheden van voorwerp en vloeistof.

Bij niet-homogene lichamen, zoals dobbers, kan Z onder S komen, maar dat is een ander verhaal.



figuur 1: De stand van een drijvend blok afhankelijk van de dichtheid  $k$ .

B. A. WILKING  
Dongen

## Drijvende blokken

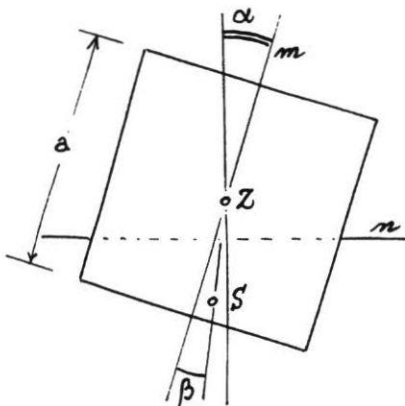
In het NVON-maandblad van december 1985 schreef Henk Mulder onder deze titel hoe de stand van een drijvend blok afhangt van de relatieve dichtheid  $k$  van het blokmateriaal ten opzichte van die van de vloeistof. Uitgaande van een homogeen langwerpig rechthoekig blok met een vierkante doorsnede is die stand in figuur 1 boven dit artikel getekend voor opvolgende waarden van  $k$  van 0,05 tot 0,95.

De standen bij  $k=0,25$  en  $k=0,75$  zijn verrassend en niet eerder beschreven. In dit artikel wordt de berekeningsmethode getoond, die tot dit resultaat leidt.

Op een drijvend blok werken twee krachten. De zwaartekracht (omlaag gericht) grijpt aan in het zwaartepunt  $Z$  van het blok. De opwaartse kracht (omhoog gericht) grijpt aan in het punt  $S$ . Dit is het zwaartepunt van het ondergedompelde deel.

Bij evenwicht ligt  $S$  verticaal onder  $Z$ . Het is dan nog niet duidelijk of dat evenwicht stabiel of labiel is. Dat is niet eenvoudig vast te stellen, want bij een verdraaiing van het blok zal de plaats van  $S$  veranderen.

In figuur 2 is de doorsnede van het blok getekend in een willekeurige stand.



figuur 2: De stand van zaken.

Hoek  $\alpha$  is de hoek tussen de symmetrieas  $m$  en de verticaal. De lijn door de punten  $Z$  en  $S$  maakt een hoek  $\beta$  met  $m$ . Op het blok werkt een koppel met als krachten de zwaartekracht en de opwaartse kracht. Die zijn dus even groot. Dat betekent dat het deel van het oppervlak dat onder de niveaulijn  $n$  ligt gelijk is aan  $k$  maal het gehele oppervlak.

Als  $\beta = \alpha$  ligt  $S$  verticaal onder  $Z$  en is er (labiel of stabiel) evenwicht. Om na te gaan of een evenwichtsstand stabiel is, bepalen we de waarde van de verandering  $d\beta$  van  $\beta$ , die het gevolg is van een verandering  $da$  van  $\alpha$ . Als  $d\beta > da$ , dan komt  $S$  rechts van de verticaal door  $Z$  te liggen en ontstaat er een koppel, dat het blok terug naar de evenwichtsstand draait.

Een evenwichtsstand bij een bepaalde waarde van  $\alpha$  is dus stabiel als de afgeleide  $\frac{d\beta}{d\alpha} > 1$  bij die waarde van  $\alpha$ .

Omdat we in de komende berekeningen voortdurend geconfronteerd worden met  $\tan \alpha$  en  $\tan \beta$ , voeren we als nieuwe variabelen in:  $z = \tan \alpha$  en  $w = \tan \beta$ .

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}$$

Bij evenwicht ( $\beta = \alpha$ ) geldt  $\frac{dw}{dz} = \frac{d\beta}{d\alpha}$ ;

het evenwicht is stabiel als  $\frac{dw}{dz} > 1$ .

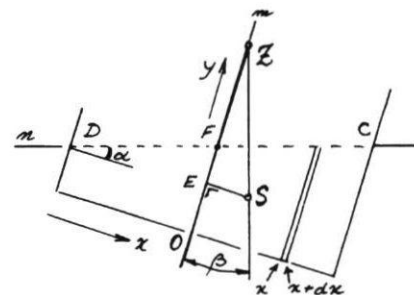
We gaan nu de relatie tussen  $w$  en  $z$  bepalen voor een aantal gevallen. Door symmetrie is het niet nodig om alle waarden van  $z$  te bekijken. Een hoek  $\alpha$  groter dan  $45^\circ$  levert de zelfde stand op als de hoek  $(90^\circ - \alpha)$ , die kleiner is dan  $45^\circ$ . Hieruit volgt dat  $z \leq 1$  alle mogelijke gevallen geeft.

Een dergelijke symmetrie geldt voor  $k$ : de relatieve dichtheid ten opzichte van water. Het zwaartepunt van het deel boven water en het zwaartepunt van het deel onder water liggen op één lijn door  $Z$ . Bij relatieve dichtheid  $k$  is het deel van het volume onder water  $k$  en boven water  $(1-k)$ .

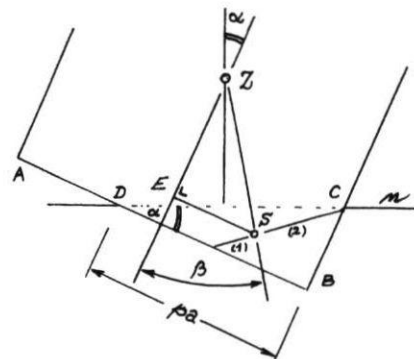
Bij dichtheid  $(1-k)$  is elke situatie vergelijkbaar met een, die wij bij dichtheid  $k$  al gehad hebben.

Daarom beperken we ons tot de gevallen waarbij  $k \leq 0,5$ .

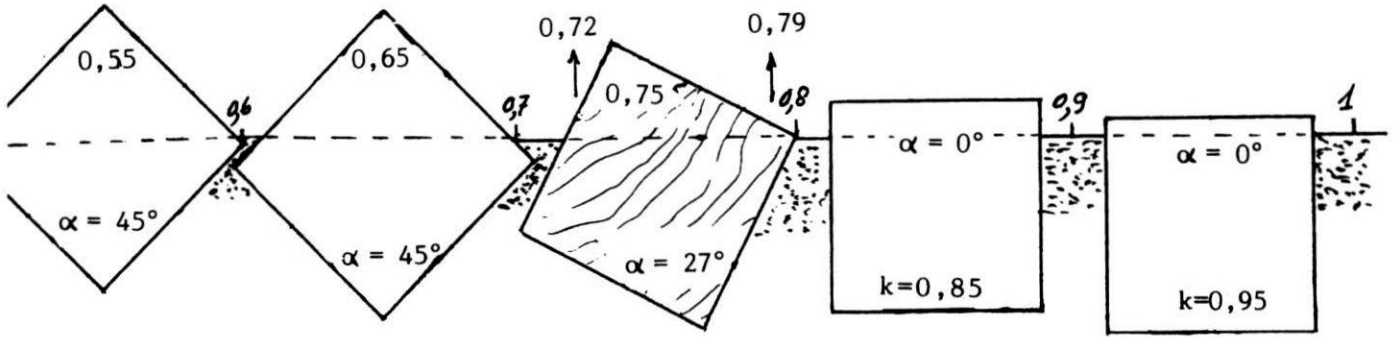
Verder maken we nog onderscheid tussen het geval waarbij het ondergedompelde deel de vorm heeft van een trapezium (figuur 2 en 3, waarbij geldt  $z < 2k$ ) en het geval waarbij het ondergedompelde deel de vorm heeft van een driehoek (figuur 4, waarbij geldt  $z \geq 2k$ ).



figuur 3: De trapezium-vorm.



figuur 4: De driehoek-vorm.



### De trapezium-vorm

Wij kiezen een  $x$ - en een  $y$ -as zoals aangegeven in figuur 3. De lijnen  $n$  en  $m$  snijden elkaar in het punt  $F$  met coördinaten  $(0, ka)$ . De richtingscoëfficiënt van lijn  $n$  in dit coördinatenstelsel is  $z$ , zodat de vergelijking van lijn  $n$  wordt:  $y = zx + ka$ . Beschouw nu een strookje tussen  $x$  en  $x+dx$  met oppervlakte  $ydx = (zx + ka)dx$ . Het zwaartepunt van zo'n strookje is het midden met coördinaten

$$\left(x, \frac{1}{2}(zx + ka)\right).$$

Het zwaartepunt  $S$  van het trapezium heeft coördinaten  $(x_s, y_s)$  als volgt:

$$x_s = \frac{1}{ka^2} \int_{-0,5a}^{+0,5a} x(zx + ka)dx = \frac{za}{12k}$$

$$y_s = \frac{1}{ka^2} \int_{-0,5a}^{+0,5a} \frac{1}{2}(zx + ka)^2 dx = \frac{1}{2}ka + \frac{z^2 a}{24k}$$

dus  $ES = \frac{za}{12k}$  en

$$ZE = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}ka - \frac{z^2 a}{24k}$$

uit  $w = \frac{ES}{ZE}$  volgt:

$$w = \frac{2z}{12k(1-k) - z^2} \text{ bij } z < 2k \quad (1)$$

Hieruit volgt:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{24k(1-k) + 2z^2}{[12k(1-k) - z^2]^2} \quad (1a)$$

Stel nu  $\beta = \alpha$  of  $w = z$  in (1), dan vinden we:

$$z = 0 \text{ of } z^2 + 12k^2 - 12k + 2 = 0$$

Eerste mogelijkheid: het evenwicht bij

$$z = 0 \text{ is stabiel als } \frac{dw}{dz} > 1.$$

Uit (1a) volgt dan  $\frac{1}{6k(1-k)} > 1$

en daaruit weer

$$k < \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3} \text{ of } k < 0,21$$

Het evenwicht bij  $z = 0$  is  
 stabiel als  $k < 0,21$   
 indifferent als  $k = 0,21$   
 labiel als  $k > 0,21$  (en  $k < 0,5$ )

Tweede mogelijkheid: schrijf de relatie

$$z^2 + 12k^2 - 12k + 2 = 0$$

in de vorm van de ellipsvergelijking

$$\frac{(k - \frac{1}{2})^2}{1} + \frac{z^2}{12} = \frac{1}{12} \quad (1b)$$

De as van deze ellips valt samen met de  $k$ -as (zie figuur 5).

Door in (1b)  $z = 0$  te stellen vinden we dat de ellips de  $k$ -as snijdt in

$$k = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3} \text{ of } k = 0,21$$

Het deel van de ellips, dat hier van belang is, ligt in het gebied  $0,21 < k < 0,25$  en  $0 < z < 0,5$ . Immers, het snijpunt van de lijn  $z = 2k$  en de ellips is  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ .

Bij elke  $k$  in het interval  $0,21 < k < 0,25$  zijn er dus telkens drie evenwichtsstanden, te weten op  $z = 0$ , op  $z = 1$  en op de ellipsstak. Aangezien de eerste twee labiel zijn, moet de derde stabiel zijn. Dat in dit interval bij  $z = 1$  labiel evenwicht hoort, wordt hierna bewezen.

### De driehoek-vorm

Dit geval is getekend in figuur 4. Stel  $DB = p \cdot AB = pa$ . De oppervlakte van driehoek  $DBC$  is  $\frac{1}{2}DB \times BC = (\frac{1}{2}pa)(zpa) = \frac{1}{2}p^2za^2$  en dit moet gelijk zijn aan  $ka^2$ , zodat  $p^2z = 2k$ . Het zwaartepunt  $S$  van de driehoek ligt op  $\frac{2}{3}$  deel van de zwaartelijns uit  $C$ .

Uit figuur 4 is af te lezen:

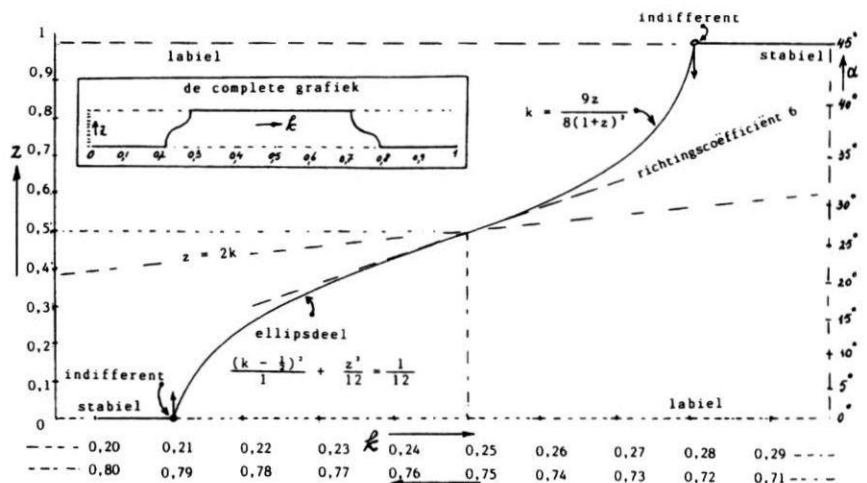
$$ES = \frac{1}{2}a - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}pa$$

$$EZ = \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}zpa$$

met  $w = \tan \beta = \frac{ES}{EZ}$  vinden we:

$$w = \frac{3 - 2p}{3 - 2pz} \text{ en}$$

$$p^2z = 2k.$$



figuur 5: De draaiing van 0 graden naar 45 graden grafisch uitgezet.

Elimineren we hieruit  $p$ , dan krijgen we de relatie:

$$8k(1-wz)^2 = 9(1-w)^2z \quad (2)$$

Door hier term voor term te differentiëren, krijgen we:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{9(1-w)^2 + 16kw(1-wz)}{18(1-w)z - 16kz(1-wz)} \quad (2a)$$

Om de evenwichtsstanden te vinden vullen we in (2) in  $w = z$ . Dat geeft de vergelijking:

$$(1-z)^2[8k(1+z)^2 - 9z] = 0$$

Dit splitst zich in twee gevallen:

enerzijds:  $(1-z)^2 = 0$  of  $z = 1$   
 anderzijds:  $8k(1+z)^2 - 9z = 0$

Om te onderzoeken voor welke  $k$ ,  $z=1$  stabiel evenwicht geeft moet in (2<sup>a</sup>) eerst  $z=w$  worden ingevuld.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{9(1-z) + 16kz(1+z)}{18z - 16kz(1+z)} \quad (2b)$$

Hierbij zijn teller en noemer gedeeld door  $(1-z)$ .

Hieruit volgt voor stabiliteit bij invullen  $z=1$ :

$$\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{16k}{9-16k} > 1$$

Dit geeft  $k > \frac{9}{32}$  of  $k > 0,28$ .

Het evenwicht bij  $z=1$  is dus:

stabiel als  $k > 0,28$   
 indifferent als  $k = 0,28$   
 labiel als  $k < 0,28$

Net zoals in het vorige geval kunnen we weer een relatie zoeken tussen  $k$  en  $z$ .

$$\text{Dat geeft hier: } k = \frac{9z}{8(1+z)^2} \quad (2c)$$

Het gaat om het interval  $0,5 < z < 1$  en  $0,25 < k < 0,28$ .

Met behulp van (2c) kunnen enige punten van de  $k-z$  grafiek berekend worden en het betreffende stuk getekend.

De beide gevonden krommen (figuur 5)

raken elkaar in  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$  bij een richtingscoëfficiënt 6, zodat de grafiek nu volledig is.

Dat de evenwichtsstanden van (2c) stabiel zijn, is gemakkelijk in te zien.

Bij elke waarde van  $k$  uit het interval  $0,25 < k < 0,28$  werden drie evenwichtsstanden gevonden, waarvan die bij  $z=0$  en  $z=1$  labiel waren. De derde stand, die bij (2c) hoort, moet dus stabiel zijn.

### De symmetrische gevallen

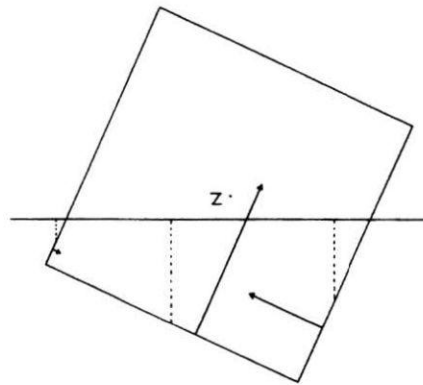
In figuur 5 is de waarde van  $z$  waarbij evenwicht is uitgezet tegen de waarde van  $k$  voor het interval  $0,21 < k < 0,28$ . Omdat voor  $k' = (1-k)$  dezelfde relatie geldt tussen  $\beta$  en  $\alpha$  (en

dus tussen  $w$  en  $z$ ) is in figuur 5 een tweede schaal aangebracht, waarbij  $k'$  (terug-)loopt van 0,79 tot 0,72. Als inzet is een  $z-k$  grafiek getekend voor het gehele interval voor  $k$  van 0 tot 1.

### Naschrift van de redactie

Niet elke lezer zal het bovenstaande rekenwerk willen controleren, maar drie redacteuren en Henk Mulder hebben het wel gedaan. Daarbij past allereerst een compliment voor de schrijver, die hiermee het NVON-maandblad - naar wij kunnen vaststellen - een primeur bezorgt.

Zoals in de vijftiger jaren formules afgeleid werden, wordt in de jaren negentig een computerprogramma geschreven. Omdat het voor de hand ligt om voor rotaties de momentenstelling te gebruiken, hebben we een programma geschreven, dat bij elke stand van het blok het moment van de hydrostatische krachten uitrekent ten opzichte van het zwaartepunt van het blok (zie figuur 6).



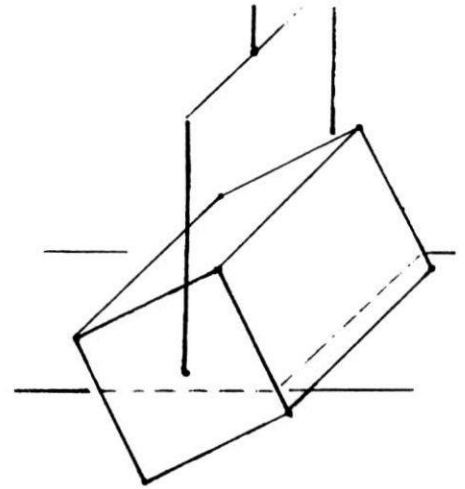
figuur 6: De krachten op de vlakken onder water.

Als het totale moment bij een hoek  $\alpha$  positief is, zal het blok doordraaien naar een grotere  $\alpha$ . Als het moment negatief is, zal het doordraaien naar een kleinere  $\alpha$ .

Er is evenwicht bij moment 0; dit evenwicht is stabiel als het moment bij toenemende  $\alpha$  verandert van positief in negatief. Als het verandert van negatief naar positief, dan is het evenwicht labiel. De uitkomsten van de computerberekeningen met de momentenstelling zijn exact gelijk aan de uitkomsten in dit artikel.

Dit neemt de twijfel weg over de aanname dat de opwaartse kracht aangrijpt in het zwaartepunt van het deel onder water: de berekeningen komen immers overeen met de berekening van de plaats van het zwaartepunt zoals in figuur 3. Al met al dus een proef met vele mogelijkheden.

In figuur 7 staat een suggestie om de



figuur 7: Proefopstelling.

proef op de som te nemen. Een gelakt blok vurehout, een touw, een katrol en enkele gewichten. Het touw is over de katrol heen geslagen. Het ene eind van het touw is aan het zwaartepunt van het blok verbonden en aan het andere eind hangt een te kiezen gewicht.

Door het gewicht te veranderen, wordt de relatieve dichtheid veranderd. De hoek kan met een geodriehoek gemeten worden.

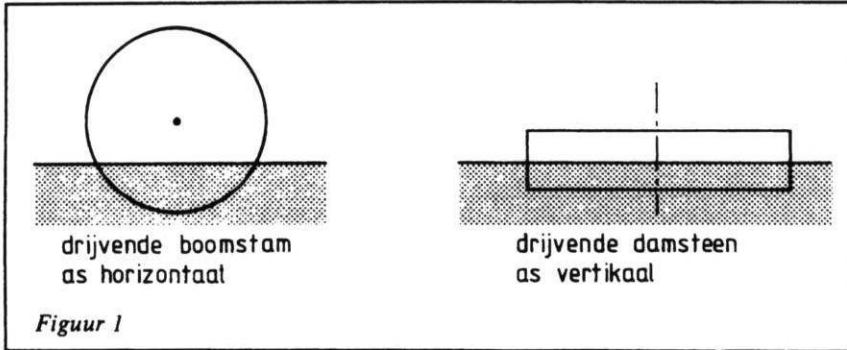
Iets voor een open onderzoek?

# Drijvende cilinders

Een vorige keer<sup>1</sup> legde ik u het probleem voor van lange drijvende blokken met vierkante doorsnede. De vraag was toen: in welke stand zullen ze gaan drijven. Afhankelijk van de dichtheid gingen sommige „plat” staan en andere „schuin”. Maar er is nog een derde mogelijkheid! Als zulke blokken voldoende kort zijn, kunnen ze nog gaan drijven met de lengte-as verticaal.

Gemakkelijk is dat in te zien bij drijvende cilinders. Een cilindrische boomstam drijft op water met de as horizontaal, maar een drijvende damsteen stelt zijn as verticaal (fig. 1).

Er is dus kennelijk een kritieke hoogte, afhankelijk van de dichtheid van de stof, waarbij de ene stand overgaat in de andere.



## Bepaling van de kritieke hoogte

Om de zaak wat te vereenvoudigen gaan we nu maar uit van materiaal met dichtheid  $0,5 \text{ g.cm}^{-3}$ . Bij drijven op water is dan de helft van de cilinder onder en de helft boven water. Bij welke kritieke hoogte, uitgedrukt in de straal  $R$  van de cilinder, zal horizontaal drijven overgaan in verticaal? Om u wat rekenwerk of opzoeken te besparen: het zwaartepunt van een halve

cirkel bevindt zich op een afstand  $\frac{4R}{3\pi}$  van het middelpunt.

Oplossing: pagina 134.

## Voetnoot

1. NVON-maandblad 10 (1985) nr. 12 p. 36-38.

OPLOSSING:

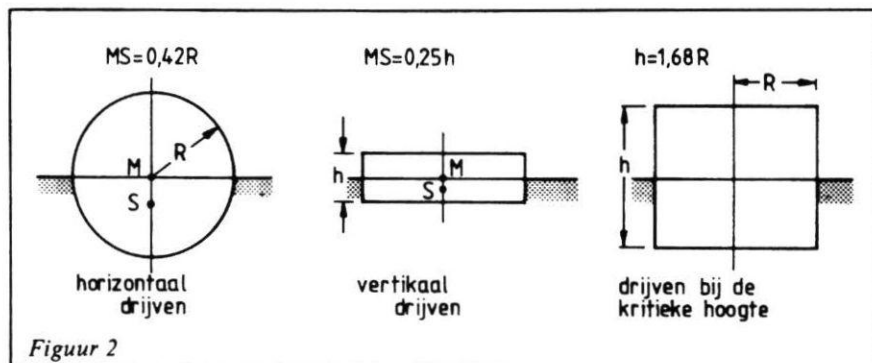
$$d\pi = \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \quad (1)$$

Door integratie is te vinden dat de afstand van het zwaartepunt van het cirkelsegment tot het middelpunt van de boog gelijk is aan:

$$\frac{2R \sin^3 \alpha}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}$$

## Drijvende cilinders

We gaan uit van een cilinder met straal  $R$ , hoogte  $h$  en dichtheid  $0,5 \text{ g.cm}^{-3}$ . (fig. 2).



Bij horizontaal drijven, zoals bij een boomstam, is de afstand van het zwaartepunt van het ondergedompelde deel tot het massamiddelpunt van de totale cilinder  $\frac{4}{3}R$  of ongeveer  $0,42 R$ . In het geval van verticaal drijven, zoals bij een damsteen, is die afstand  $0,25 h$ .

De kritieke hoogte volgt dus uit:  $0,25 h = 0,42 R$  of  $h = 1,68 R$ .

Bij die verhouding is dus zowel verticaal als horizontaal drijven mogelijk. Bij een waarde van  $h$  groter dan deze waarde drijft de cilinder horizontaal, bij een kleinere waarde juist verticaal.

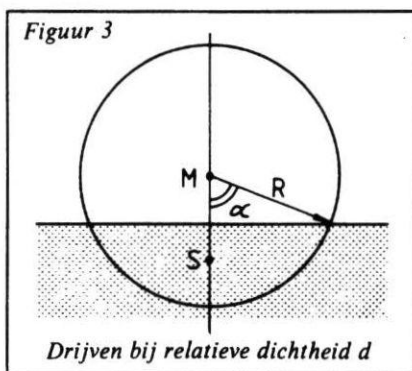
### Bij andere waarden van $D$

Bij een andere dichtheid geldt een andere kritieke hoogte. We stellen de relatieve dichtheid (van het blok ten opzichte van water) gelijk aan  $d$ . We geven hier de onderzoeksresultaten verkort weer.

Een cirkelsegment met straal  $R$  en openingshoek  $2\alpha$  heeft een oppervlakte gelijk aan het verschil van een cirkelsector en een driehoek (fig. 3).

Uitkomst:  $R^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$

We kunnen de oppervlakte ook schrijven als  $d\pi R^2$ , zodat



Bij een willekeurige dichtheid  $d$  ( $0 < d < 1$ ) volgt de kritieke hoogte  $h$  uit:

$$\frac{1}{2}h(1-d) = \frac{2R \sin^3 \alpha}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}$$

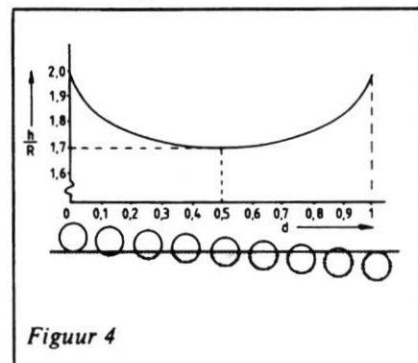
$$\text{ofwel } \frac{h}{R} = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)(1-d)}$$

$$\text{ofwel } \frac{h}{R} = \frac{4 \sin^3 \alpha}{3\pi d(1-d)} \quad (2)$$

De relatie tussen de relatieve kritieke hoogte  $\frac{h}{R}$  en  $d$  volgt dan uit (1) en (2).

Door verschillende waarden van  $\alpha$  te kiezen ( $0 < \alpha < \pi$ ) kan eerst  $d$  en dan de overeenkomstige waarde van  $\frac{h}{R}$  bepaald worden.

John van der Pluijm uit Hoogeveen heeft dit per computer uitgevoerd en zo ook de grafiek van fig. 4 geproduceerd. De lijn  $d = 0,5$  is de symmetrie-as. De limietwaarden behorend bij  $d=0$  en  $d=1$  zijn beide keren  $\frac{h}{R} = 2$ .



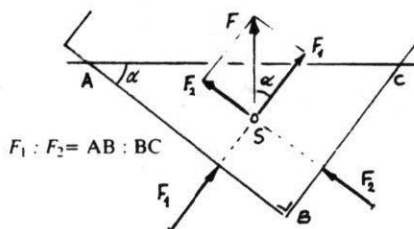
Figuur 4  
Relatie tussen de relatieve kritieke hoogte en de relatieve dichtheid

# Waar grijpt de opwaartse kracht aan?

Op een drijvend voorwerp werkt de opwaartse kracht volgens de wet van Archimedes. Die kracht heeft grootte, richting en aangrijpingspunt. Als een blok drijft is dat tengevolge van de vloeistofkrachten werkend op de diverse zijvlakken. Het aangrijpingspunt van de resultante van al deze deelkrachten is dan het aangrijpingspunt van de opwaartse kracht. Waar ligt dat punt?

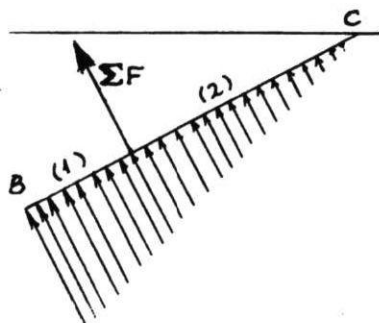
Veelal wordt ervan uitgegaan dat het samenvalt met het zwaartepunt van de verplaatste vloeistof. Onderzoek leert dat dit soms juist is, maar meestal niet!

We gaan uit van een langwerpig blok met vierkante doorsnede, waarbij de dichtheid ten opzichte van de vloeistof kleiner is dan 0,5 en het deel onder water (ABC) de vorm heeft van een rechthoekige driehoek (figuur 1). Op beide zijvlakken



Figuur 1.

werken vloeistofkrachten die evenredig zijn met de oppervlakten ervan en met de „diepte“ onder water. Omdat de vloeistofkrachten, werkend op de elementaire vlakdeeltjes evenredig toenemen met grotere diepte, ligt het aangrijpingspunt van de resultante niet in het midden, maar, gerekend vanaf het vloeistofniveau, op  $\frac{2}{3}$  deel (figuur 2).

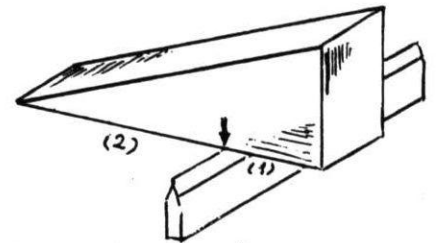


Figuur 2.

Vergelijk het evenwicht bij een afgeschuind blok (figuur 3). Omdat de gemiddelde diepte voor de beide vlakken AB en BC dezelfde is, zullen zich  $F_1$  en  $F_2$  verhouden als de oppervlakten van de zijvlakken, dus in dit geval als AB:BC.

## Aangrijpingspunt

Beide krachten hebben een resultante F, aangrijpend in punt S. Het kost weinig



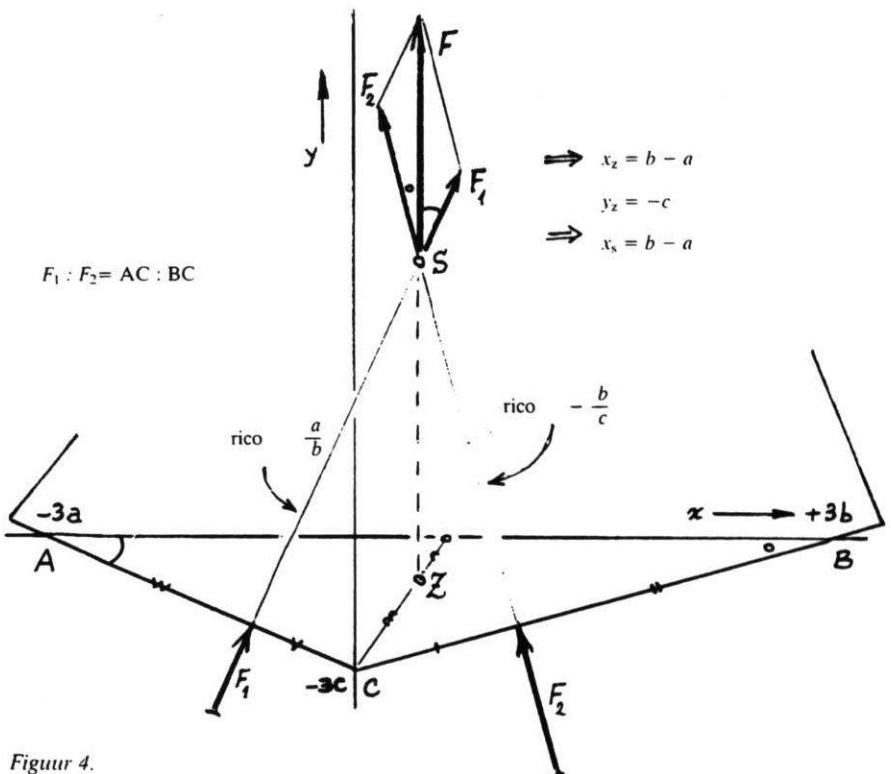
Figuur 3. Evenwicht op  $\frac{1}{3}$ .

meetkundige inspanning om in te zien dat punt S samenvalt met het zwaartepunt van de driehoek.

Uit de gelijkvormigheid van de vectorendriehoek en driehoek ABC volgt ook dat de pascalkracht verticaal omhoog wijst. En zo hoort het ook.

## Willekeurige driehoek

Wat gaat er gebeuren als het onderge-



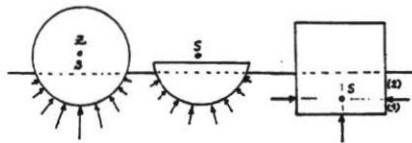
Figuur 4.

dompelde deel de vorm van een ander soort driehoek heeft?

In figuur 4 staat de situatie getekend. Omdat weer  $F_1:F_2 = AC:BC$  zijn de krachtendriehoek en de onderdompelingsdriehoek weer gelijkvormig. Hieruit volgt weer dat de resultante verticaal omhoog wijst. Maar wat nog opvallender is: je kunt in de figuur aantonen dat de werklijn van de pascalkracht door het zwaartepunt van het onderdompelde deel gaat! Figuur 4 geeft voldoende aanwijzingen om het wiskundige spoor te volgen. S en Z hebben dezelfde x-coördinaat. Eindconclusie: S en Z vallen niet meer samen, maar de werklijn van de opwaartse kracht gaat wel door Z.

### Andere vormen

In figuur 5 drijft een cilindrische boomstam. Omdat de vloeistofkrachten alle loodrecht op de wand staan, ligt het centrum ervan in het zwaartepunt Z van de boomstam. Bij het drijvende bootje komt het punt S zelfs boven het water te liggen en buiten het bootje. En als het deel onder water rechthoekig is, komt S niet in het centrum uit, maar verdeelt de verticaal in de verhouding 1:2.



Figuur 5.

Het schijnt dat punt S zowat overal kan liggen: in het zwaartepunt van het voorwerp, in dat van het verplaatst volume, of daaronder... of daarboven...

Wel lijkt de verbindinglijn ZS voortdurend verticaal te komen. Maar mijn inzicht hieromtrent laat nog veel te wensen over. Laatste vraag: waarom beweert men eigenlijk: het centrum van de opwaartse kracht valt samen met het zwaartepunt van de verplaatste vloeistof? Is in het algemeen theoretisch aan te tonen dat de resultante opwaartse kracht altijd door Z moet gaan? ■

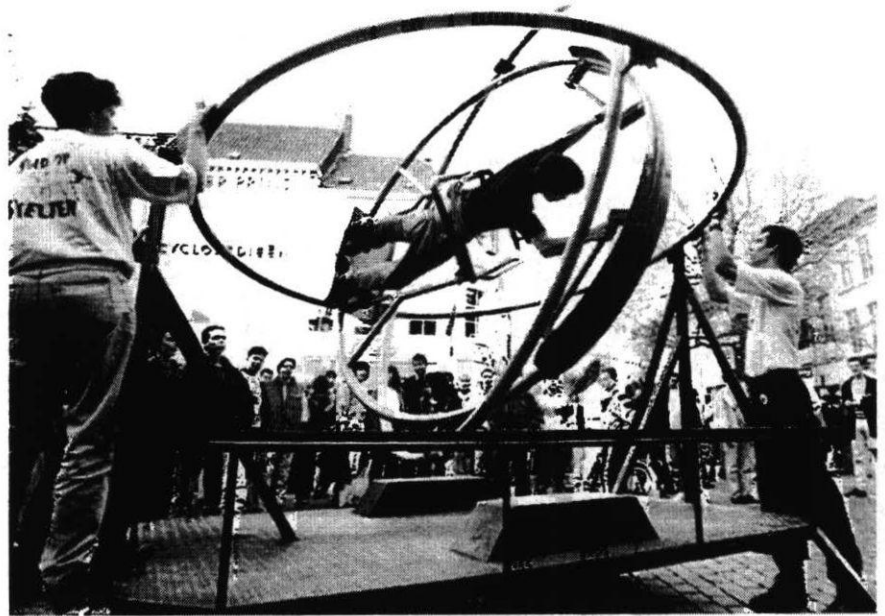
HENK MULDER  
Ulvenhout

## Een proef op straat

Bij een kompas of een gyroscoop, is een cardanische ophanging heel gewoon. Maar hoe voelt het om zelf in zo'n op-

stelling te bewegen? Op de foto kunt u een indruk krijgen van de mogelijkheden. Er komt in ieder geval genoeg publiek op af!

foto: Johan van Gorp - Breda.



### Noot

1. Zie eerdere artikelen in het NVON-maandblad van december 1985 en mei 1991.



# Zolderluik

Vanuit mijn werkplaats leidt een trap en een luik naar de zolder. Om dat luik gaat het.

Het vertoont enigszins verrassende eigenschappen (fig. 1). In de hoogste stand OQ verkeert het kennelijk in stabiel evenwicht. Want, als ik het probeer dicht te trekken en even later weer loslaat, draait het uit eigen beweging weer helemaal open.

Ook de gesloten stand OS blijkt stabiel. Als we het luik vanuit die horizontale stand wat optrekken en dan weer loslaten, zakt het automatisch weer dicht.

Tenslotte blijkt er nog een derde stand te zijn, waarbij het luik netjes blijft staan. Het betreft een tussenstand, gekenmerkt door labiele evenwicht.

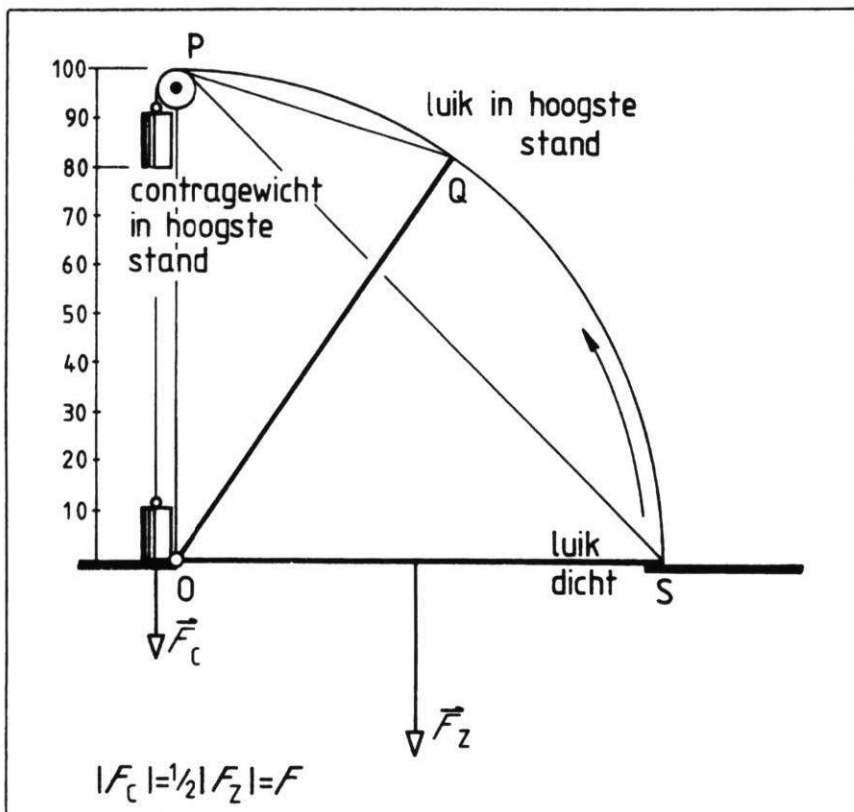
We nemen, om concreet te zijn, een luik van 100 cm lengte, een contramassa met een gewicht half zo groot als dat van het luik en een hoogste daling van 80 cm voor het contragewicht.

Opmerking: ga bij het onderzoek uit van soepel dun touw en van een licht lopende katron met verwaarloosbare afmeting.

Oplossing: zie pag. 138.

Een tweetal vragen:

1. Ga eens na, door wat geknutsel met vectoren, dat het luik in de uiterste standen inderdaad stabiel is.
2. Bij welke openingshoek hoort de labiele tussenstand?



## OPLOSSING ZOLDERLUIK

Als het contragewicht  $F$  weegt en het luik  $2F$  dan kunnen we het gewicht van het luik verdelen in een kracht  $\vec{F}_0$  aangrijpend bij het scharnierpunt  $O$  en een kracht  $\vec{F}_s$  in punt  $S$  (fig. 2), die allebei grootte  $F$  hebben.

In  $S$  ontbinden we  $\vec{F}_s$  in twee vektoren, de ene werkend in de richting van het scharnierpunt, de andere in het verlengde van het touw. Let speciaal op die laatste vektor  $\vec{a}$ . Deze is duidelijk groter dan  $F$ , zodat het luik door het contragewicht niet kan worden opengetrokken.

In een hogere stand (bijvoorbeeld  $OQ$ ) blijkt de component  $\vec{c}$  juist kleiner dan  $F$  te zijn en kan het luik bij loslaten verder opengaan. In ieder geval valt het luik dan niet meer dicht.

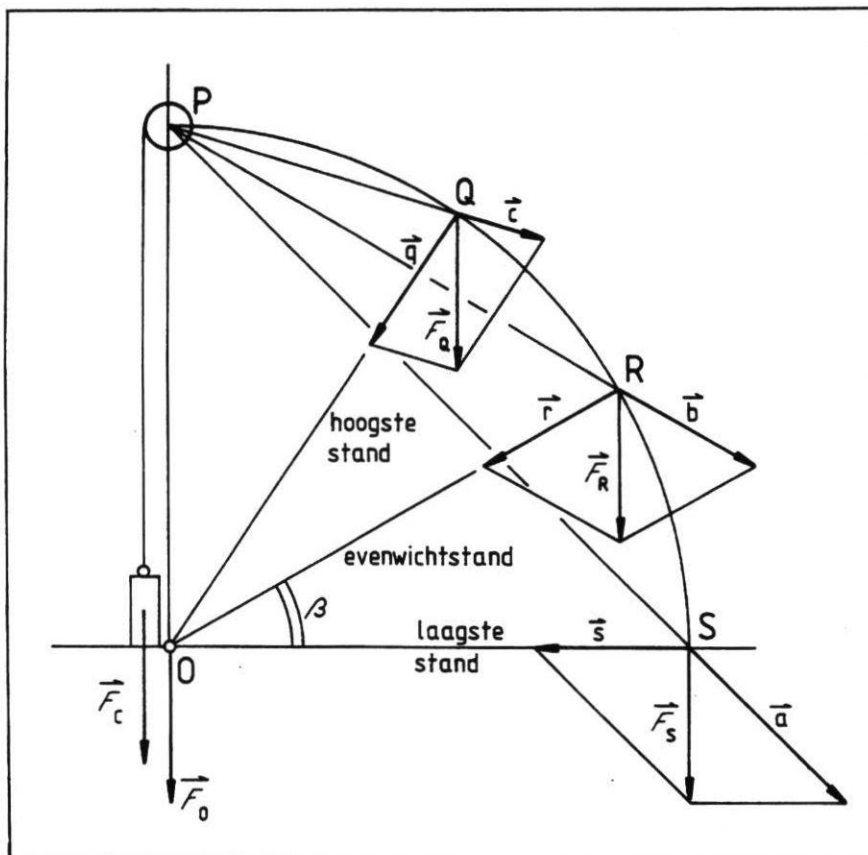
Er is een stand  $OR$  waarbij de component  $\vec{b}$  net even groot is als  $F$ . De krachtendriehoek wordt dan gelijkzijdig en dus ook de gelijkvormige driehoek  $ORQ$ . Voor de labiele tussenstand geldt dus:  $\beta = 30^\circ$ .

Het is opvallend dat de grootte van de component wijzend in de scharnierrichting, altijd even groot is en wel gelijk aan  $F$ . Dat komt omdat driehoek  $OQP$  steeds gelijkbenig is.

### De grootte van het contragewicht

Bij een dergelijke constructie komt het erop aan het contragewicht voldoende groot te kiezen. Als het te klein is kan het luik uit zichzelf niet open blijven staan. Anderzijds mag het ook niet te groot zijn anders kan het luik niet dichtblijven.

In ons voorbeeld blijkt de grootste openingshoek  $72^\circ$  te zijn. Dan geldt:  $c = 0,6 F$ . In de gesloten toestand geldt:  $a = 1,4 F$ . Daarom moet het contragewicht liggen tussen 30 % en 70 % van het luikgewicht. Het is dan ook te begrijpen waarom wij voor 50 % kozen.



HENK MULDER,  
Ulvenhout

## Dobber in fles

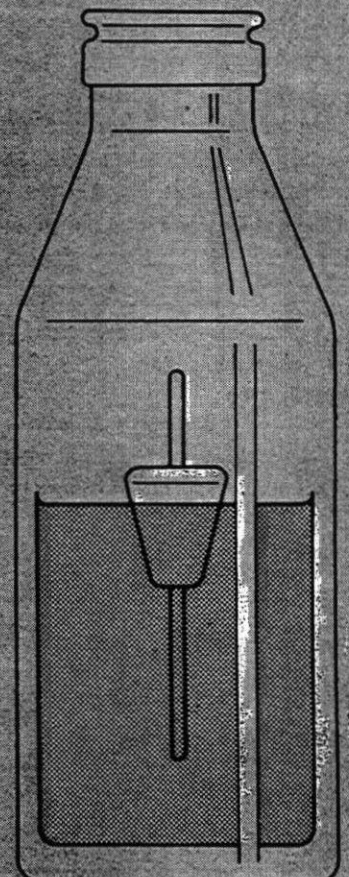
### NATUURKUNDE ALS RECREATIE

Het lijkt dit keer een eenvoudig probleem, maar de vraagstelling heeft al tot verhitte discussies aanleiding gegeven, en niet alleen in de klas maar ook in de leraarkamer!

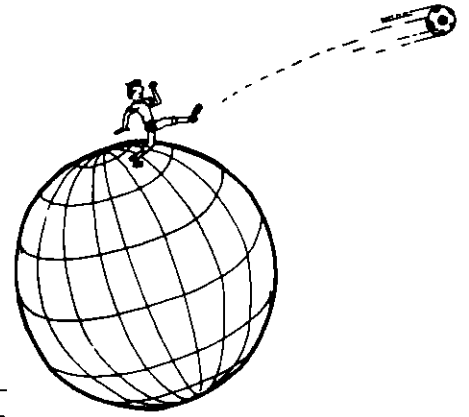
In een fles met water drijft rechtstandig een dobber. We bewegen nu de fles versneld met een ruk omhoog of omlaag. Vraag: wat doet de dobber.

Omdat u nog al tamelijk vlug naar de pagina met de oplossing wilt doorbladeren, laten we u dit keer met het probleem alleen. Dus dit keer geen antwoord.

Prettige koffiepauze!



# Satellietbanen, rekenen en tekenen



In veel natuurkundeboeken van de hoogste klas treffen we verzamelingen ellipsen aan, zoals in figuur 5. Daar wordt een overzicht gegeven van mogelijke satellietbanen, uitgaande van een zekere lanceerhoogte, bij verschillende startsnelheden  $\vec{v}$  loodrecht op de radiusvector  $\vec{r}$ .

Het is goed mogelijk voor wat meer ervaren leerlingen aan dergelijke krommen te rekenen en ze te construeren. Een actief stukje ruimtevaart in de school, werk voor rekenmachine en computer. Waarom is er eigenlijk, anno 1986, nog geen keuzegroep 'ruimtevaart' voor de examenklassen?

Misschien kan dit artikel wat ideeën geven. Speciaal de ellipsbaan staat hier centraal en met name de *snelheidsformule*.

We zullen eerst moeten beginnen de wiskunde van de ellips te behandelen, want in het analytisch geweld van de moderne wiskunde is de leer van de kegelsneden ten onder gegaan.

## De wiskunde van de ellips

Een eerste definitie: een ellips is een verzameling punten waarvoor de som der afstanden tot twee vaste punten, brandpunten geheten, constant  $2a$  is. Daar hoort dan de bekende vergelijking in Cartesische coördinaten bij. Maar die is voor ons doel tamelijk onpraktisch.

De andere definitie geeft een betere uitgangsstelling (figuur 1). Een ellips als een verzameling punten, waarvoor de afstand tot een vast punt (brandpunt) een bepaalde fractie is van die tot een vaste lijn (richtlijn). Die fractie heet excentriciteit ( $e$ ).

Hoewel die richtlijn fysisch niet veel voorstelt, geeft ze de mogelijkheid om nu snel een vergelijking in poolcoördinaten af te leiden.

In figuur 1 is gemakkelijk af te lezen:

$$\frac{r}{e} + r \cos \varphi = \frac{p}{e}$$

waaruit volgt:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \varphi} \quad (1)$$

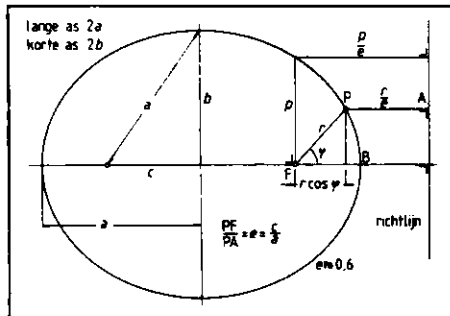
Het lijnstuk  $p$  speelt in baanberekeningen en constructies een interessante rol.

De lange as heeft een lengte van  $2a$ , de korte  $2b$  en de afstand der brandpunten is  $2c$ . Een meer praktisch gerichte definitie voor  $e$  zou nu kunnen worden:

$$e = \frac{c}{a} \text{ ofwel } c = ae \quad (2)$$

Verder gelden de volgende relaties:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (3)$$



Figuur 1 Ellips

$$p = a(1 - e^2) \quad (4)$$

Bij ellipsen geldt:  $0 < e < 1$ .

Voor  $e=0$  gaat de ellips over in een cirkel, waarbij beide assen even lang worden en de brandpunten samenvallen in  $M$  ( $c=0$ ).

Voor  $e=1$  gaat de ellips over in een lijnstuk, waarbij de korte as nul wordt en de beide brandpunten samenvallen met de einden ervan ( $b=0$  en  $a=c$ ).

Hoe groter  $e$ , des te platter is de ellips, hoe kleiner des te bolter.

In het geval  $e=1$  kan de ellips ook overgaan in een parabool. Dan worden beide assen oneindig lang. Het lijnstuk  $p$  blijft eindig en krijgt de lengte  $2r$  (zie figuur 6). Zoets is het geval bij de komeet Halley, die in 76 jaar een zeer langgerekte baan ( $e = 0,97$ ) om de zon beschrijft. Het deel waar de komeet om de zon keert lijkt sterk op een parabool. Bij  $r = 88 \cdot 10^9$  m hoort  $p = 173 \cdot 10^9$  m.

## De cirkelbaan

Met de cirkel zijn we het meest vertrouwd, laten we daarmee beginnen. In analogie met de ellips stellen we de middellijn  $2a$ . Als  $M$  de aardmassa voorstelt en  $m$  de massa van de satelliet (figuur 2) kunnen voor een straal  $a$  de omloopssnelheid  $v_c$  als volgt bepalen:

$$\frac{GMm}{a^2} = m \frac{v_c^2}{a}$$

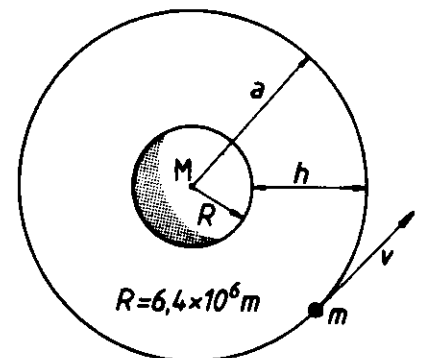
$$\text{dus } v_c^2 = \frac{GM}{a} \text{ of } v_c^2 = \frac{\mu}{a} \quad (5)$$

Vullen we in:  $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$  en  $M = 5,98 \cdot 10^{24}$  dan volgt daaruit

$$\mu = 4 \cdot 10^{14} \text{ (alles in SI)} \quad (6)$$

Voor de omlooptijd  $T$  volgt dan:

$$T = \frac{2\pi a}{v_c} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \text{ ofwel } T = \pi \cdot 10^{-7} \sqrt{a^3} \quad (7)$$



Figuur 2 Cirkelbaan

Hier volgen enkele voorbeelden:

|   |                         |                          |                         |
|---|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| allereerst de theoretische baan, vlak langs het aardoppervlak, bij weglating van dampkring en kerktorens, |                         |                          |                         |
| $h = 0 \text{ km}$  | $a = 6400 \text{ km}$   | $v_c = 7,9 \text{ km/s}$ | $T = 85 \text{ min}$    |
| Dan de beroemde Spoetnik van 3 oktober 1957   |                         |                          |                         |
| $h = 330 \text{ km}$  | $a = 7730 \text{ km}$   | $v_c = 7,7 \text{ km/s}$ | $T = 91 \text{ min}$    |
| Dan de kunstmaan synchroon met de asrotatie (geostationnair)  |                         |                          |                         |
| $h = 35794 \text{ km}$  | $a = 42194 \text{ km}$  | $v_c = 3,1 \text{ km/s}$ | $T = 1436 \text{ min}$  |
| Ten slotte de maanbaan  |                         |                          |                         |
| $h = 378030 \text{ km}$   | $a = 384430 \text{ km}$ | $v_c = 1,0 \text{ km/s}$ | $T = 39530 \text{ min}$ |

Hierbij geldt dat het product  $v^2 a = \mu$  steeds constant is.

### De snelheidsformule

Als een massa  $m$  een elliptische baan om de aarde maakt; zal in elk punt van de baan de som van kinetische en potentiële energie constant blijven.

$$\text{Ofwel } \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{r} = \text{constant.}$$

Uit de wetten van Newton en/of Kepler valt af te leiden dat deze constante waarde

$$-\frac{\mu m}{2a} \text{ heeft, zodat de relatie wordt:}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{r} = -\frac{\mu m}{2a}$$

$$\text{ofwel } v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (8)$$

Dit is de centrale wet voor baanberekeningen bij satellieten. Hierbij is dus  $r$  de voerstraal,  $v$  de snelheid en  $a$  de lange as.

In speciale gevallen is de weg gemakkelijk te testen.

Als we invullen  $r=a$  volgt uit (8) de uitkomst van (5) voor de circulaire snelheid.

En voor het geval  $a$  oneindig wordt, volgt uit (8) de bekende stelling: de ontsnappings-snelheid ( $v_o$ ) is  $\sqrt{2}$  keer de circulaire snelheid ( $v_c$ ).

$$v_o = v_c \sqrt{2} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \quad (9)$$

Interessant is ook het geval dat een massa  $m$

van de aarde af recht omhoog wordt geschoten (figuur 3). Op een afstand  $r$  is de snelheid  $v$  (minder dan de ontsnappings-snelheid) en op een afstand  $2a$  is de snelheid tot nul afgenomen.

Volgens de wet van behoud van energie vinden we hier:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{r} = -\frac{\mu m}{2a}$$

$$\text{ofwel } v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

En zo kunnen we in het laatste geval de snelheidsformule volledig bewijzen. Maar de betekenis is algemeen.

Ook formule (7) voor de omloopstijd bij cirkelbewegingen blijkt geldigheid te hebben voor alle elliptische banen. Ook daarvan kunnen we hier tot onze spijt geen algemeen bewijs leveren. We willen nog wel enkele nuttige relaties geven die uit (8) volgen.

Waar  $r$  het grootst is, wordt de snelheid het kleinst en omgekeerd. We bedoelen hier de eindpunten van de lange as.

Voor het verste punt waar  $r = a(1+e)$  is  $v$  minimaal

$$v^2 (\text{minimaal}) = \frac{\mu}{a} \left( \frac{1-e}{1+e} \right) \quad (10)$$

Voor het meest nabije punt, waar  $r = a(1-e)$  is  $v$  maximaal

$$v^2 (\text{maximaal}) = \frac{\mu}{a} \left( \frac{1+e}{1-e} \right) \quad (11)$$

Voor de eindpunten van de korte as, waar  $r=a$ , geldt

$$v^2 (\text{eind korte as}) = \frac{\mu}{a} \quad (12)$$

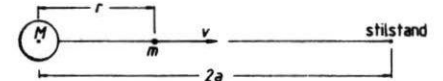
Als laatste bijzonderheid: de perkenwet van Kepler.

We kunnen met enige moeite de oppervlakte uitrekenen van een per tijdseenheid door de voerstraal doorlopen perk.

In de eindpunten van de assen is die berekening nu niet moeilijk meer. We vinden:

$$\text{perk per tijdseenheid: } \frac{1}{2} \sqrt{\mu p} \text{ of } 10^7 \sqrt{p} \quad (13)$$

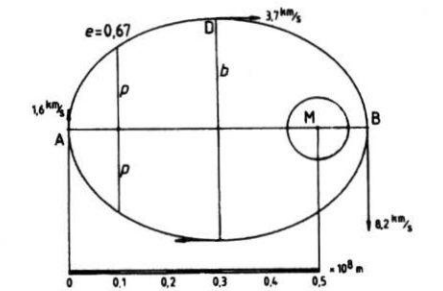
Om in het algemeen het bewijs te leveren is weer tamelijk ingewikkeld.



Figuur 3 Massa recht omhoog geschoten

### Ellipsbanen

We gaan nu al deze theorie op een concreet voorbeeld loslaten. In figuur 4 stellen we het volgende probleem.



Figuur 4 Elliptische baan bij gegeven  $\vec{r}$  en  $\vec{v}$

Op een afstand van  $0,5 \cdot 10^8 \text{ m}$  van het aardmiddelpunt lanceren we een kunstmaan in een richting loodrecht op de verbindingslijn.

1. We willen de *ellips* realiseren met een lange as  $2a = 0,6 \cdot 10^8 \text{ m}$  en excentriciteit  $\frac{2}{3}$  (of  $e = 0,67$ ).

Achtereenvolgens vinden we met (2)  $c = 0,20 \cdot 10^8$  m met (3)  $b = 0,22 \cdot 10^8$  m met (4)  $p = 0,17 \cdot 10^8$  m Vervolgens met (8) de snelheden 1,6 km/s, 3,7 km/s en 8,2 km/s. Met behulp van twee punaises en een draad garen is het ruimtelijk model keurig uit te tekenen. Door uitzetten van de stukken  $2a$ ,  $2b$ ,  $2c$  en  $2p$  vinden we steeds acht punten van de ellips.

### Verdere ellipsbanen

In figuur 5 hebben we deze ellipsbaan met  $e = 0,67$  opnieuw geschetst. De bijbehorende snelheid in P was daar 1,6 km/s. We willen nu de snelheid in het lanceerpunt P veranderen en onderzoeken welke invloed dat op de baan heeft. We houden de richting van  $v$  wel loodrecht op PM.

Wat zal er gebeuren als we de snelheid steeds verder verkleinen? We lopen het risico dat de satelliet aan de achterkant langs de aarde gaat scheren. Dat geval gaan we onderzoeken.

2. Welke is de *kritieke snelheid* waarbij theoretisch nog een lancering slaagt?

In figuur 5 is af te lezen:

$$2a = 0,500 \cdot 10^8 + 0,064 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Dus  $a = 0,28 \cdot 10^8$  m en  $r = 0,55 \cdot 10^8$  m waaruit  $v$  weer te bepalen is. Er komt uit:

$$v_k = 1,4 \text{ km/s.}$$

In de uiterste punten van de ellips geldt als  $\vec{r}$  en  $\vec{a}$  samenvallen

$$e = \left| 1 - \frac{r}{a} \right| \quad (14)$$

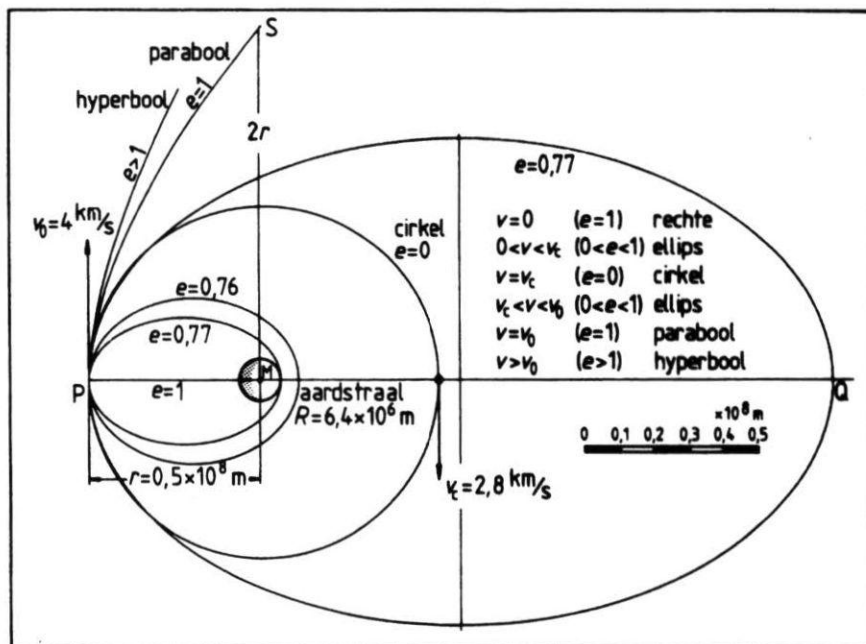
Zo vinden we  $e = 0,77$  en  $b = 0,18 \cdot 10^8$  m en  $c = 0,22 \cdot 10^8$  m.

3. We berekenen vervolgens de startsnellheid waarbij de *cirkelbaan* behoort.

Uit (5) volgt:  $v_c = 2,8$  km/s.

4. We gaan de snelheid nu nog verder verhogen tot 3,5 km/s. Welke wordt nu de baan? Daartoe berekenen we met (8) de waarde van  $a$ . Het zou wel nuttig zijn als we daartoe uit (8)  $a$  zouden oplossen.

$$\text{resultaat: } a = \frac{\mu r}{2\mu - v^2 r} \quad (15)$$



Figuur 5 Ellipsen bij verschillende startsnellheden

We vinden achtereenvolgens:

$$a = 1,07 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$e = 0,77$$

$$b = 0,68 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$\text{en } c = 0,82 \cdot 10^8 \text{ m}$$

We kunnen nu weer de beide assen uitzetten, het tweede (lege) brandpunt opsporen en vervolgens met punaises en garen de ellips trekken.

5. De ontsnappingssnelheid wordt  $v_c \sqrt{2}$  ofwel 4,0 km/s. Daar hoort de *paraboolbaan* bij ( $a$  oneindig).

6. Bij snelheden groter dan 4,0 km/s ontstaan *hyperbolen*, die ten slotte weer naar een rechte baan tenderen.

7. Hetzelfde gebeurt als we  $v = 0$  kiezen. We krijgen dan een gewone vrije val. De ellips gaat over in een rechte met  $e = 1$ .

### **v constant, maar niet in richting**

We lanceren een aantal kunstmanen vanuit hetzelfde punt P (dus PM constant), met snelheden van dezelfde grootte, maar met verschillende richtingen (figuur 6).

Volgens (8) hebben alle ellipsen een even lange as en dus ook een gelijke omlooptijd. Alle objecten die op hetzelfde moment met gelijke aanvangssnelheid vanuit P gelanceerd worden, keren tegelijkertijd ook daar weer terug.

De vraag is wel: hoe is het mogelijk bij gegeven afstand MP en gegeven snelheidsvector  $\vec{v}$  de elliptische baan te construeren.

### Satellietbanen bij gegeven $\vec{r}$ en $\vec{v}$

In figuur 7 stellen we een voorbeeld.

Gegeven zijn

$$r = 25 \cdot 10^6 \text{ m, } v = 5,2 \text{ km/s en } \alpha = 135^\circ.$$

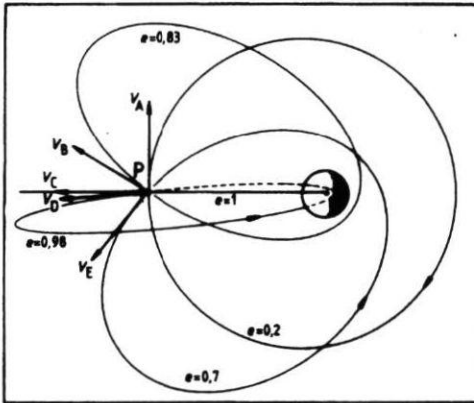
We moeten nu over voldoende relaties beschikken om de karakteristieke grootheden van de ellips zoals  $a$  en  $e$  te kunnen bepalen. Tevens moeten we hoek  $\varphi$  nog kennen om de stand van de lange as in de ruimte vast te leggen.

We beginnen natuurlijk weer met (15) om  $a$  te berekenen, maar we moeten nog een nieuwe relatie hebben waarin  $a$  een rol speelt. Zonder afleiding geven we die:

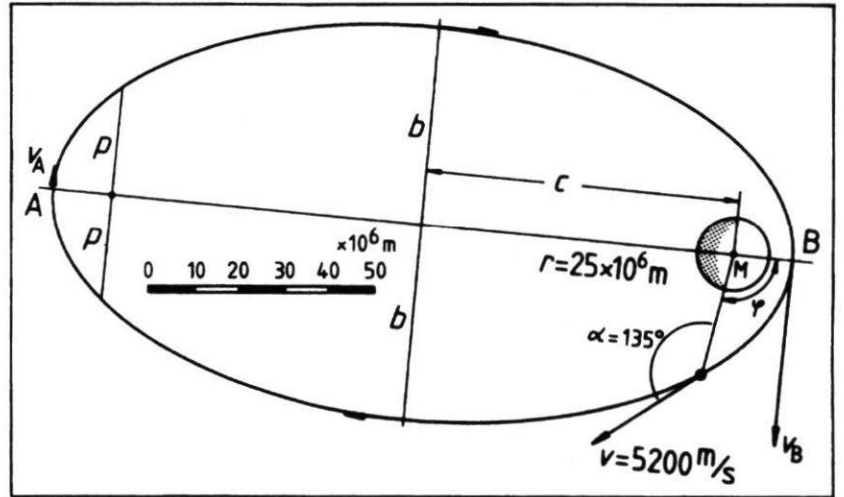
$$e = \left[ 1 - \frac{r}{a^2} (2a - r) \cdot \sin^2 \alpha \right]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

Controle: als  $\alpha = 0$  dan  $e = 1$  (rechte lijn)

als  $\alpha = 90^\circ$  dan  $e = \left[ 1 - \frac{2r}{a} + \frac{r^2}{a^2} \right]^{1/2} = \left| 1 - \frac{r}{a} \right|$



Figuur 6 Startsnelheid gelijk in grootte, niet in richting



Figuur 7 Ellipsbepaling bij gegeven  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  en  $\alpha$

### Werkwijze

We bepalen eerst weer de lengte van de lange as met (15). Vervolgens berekenen we met (16) de waarde van  $e$ ... Tenslotte bepalen we hoek  $\varphi$  met behulp van ellipsvergelijking (1) die we voor dit doel schrijven als:

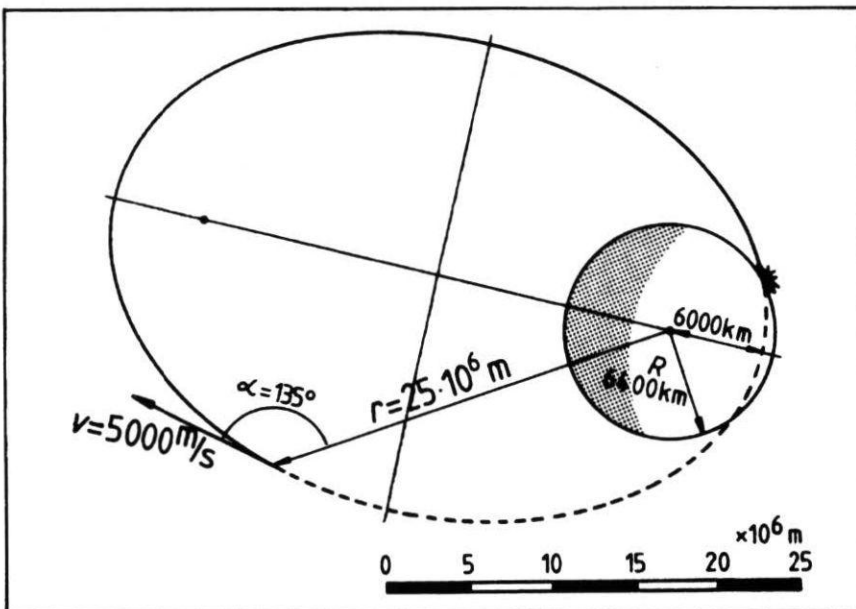
$$\cos \varphi = \frac{p-r}{er} \quad (17)$$

Hier volgen de rekenresultaten:

- $e = 0,86$
- $a = 80,6 \cdot 10^6 \text{ m}$
- $b = 41,2 \cdot 10^6 \text{ m}$
- $c = 69,3 \cdot 10^6 \text{ m}$
- $\cos \varphi = -0,186$  ofwel  $\varphi = 101^\circ$ .
- Verder  $T = 227327 \text{ s}$  of 63 h.
- De ellips is in figuur 7 geconstrueerd.
- Er rest nog één controle. Als de aardstraal  $R$  is moet voor een geslaagde lancering gel-

den:  $a - c > R$ , anders stort de kunstmaan op aarde of verbrandt in de dampkring. Ga zelf maar na dat dit het geval zou zijn geweest als we de lanceersnelheid niet 5,2 km/s maar 5,0 km/s hadden gekozen. In dat geval zou  $a - c = 6000 \text{ km}$  geworden zijn en dat is te weinig!

In figuur 8 staat het resultaat.



Figuur 8 Mislukte lancering

### Nabeschuiving

De bedoeling van dit artikel is niet om dit allemaal de leerlingen zo voor te zetten. Het stelt de ellipsbaan centraal en geeft zo leraren voorbeelden en formules in handen.

### Literatuur

Astronomie, Mollerinstituut Tilburg  
College ruimteonderzoek, Utrecht  
Orbital motion University, Glasgow

# Planetaire reizen: retourtje Mars

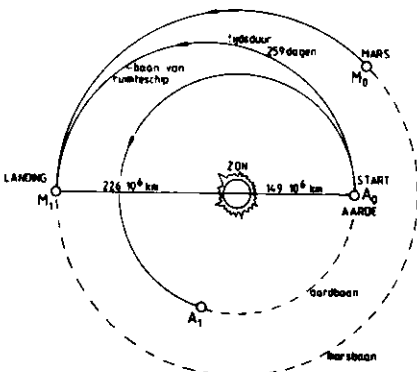
Na de spectaculaire maanlanding op 21 juli 1969 om 3 uur 56 Nederlandse tijd, waarbij de eerste mens Neil Armstrong voet op het maanoppervlak zette, kijken we uit naar het moment waarop we een planeet zullen betreden; daarvoor lijkt Mars de eerst aangewezen.

In 1962 werd Mars voor het eerst bezocht door een Russisch ruimtevoertuig. In 1971 werd er een geslaagde zachte landing uitgevoerd. Vrijwel gelijktijdig bereikte de Mariner 9 van de Amerikanen de planeet.

In vergelijking tot de maanreis geven planetaire reizen aanzienlijk meer problemen. Alles draait om de benodigde energieën, snelheden en tijdsduren. Daarbij blijkt dat de transfertijd toeneemt als we energievriendelijker willen uitkomen. In 1925 beschreef Walter Hohmann in zijn boek: 'Die Erreichbarkeit der Himmelskörper' bepaalde banen, die wat stuwkracht betreffen, het voordeligst zijn, omdat daar de vereiste snelheidsveranderingen minimaal zijn. In dit artikel verstreken we wat gegevens van een Marsreis via een Hohmann-baan.

## Hohmann-baan

Een Hohmann-baan is een ellips, die de binnenste planeetbaan uitwendig en de buitenste planeetbaan inwendig raakt (figuur 1).



Figuur 1: baan ruimteschip naar Mars

Bij een juiste keuze van de vertrektijd op Aarde (binnen het lanceervenster) moet het ruimtevoertuig Mars bereiken op het moment dat een halve omloop om de Zon is volbracht.

De vereiste lanceersnelheid blijkt slechts weinig groter te zijn dan de snelheid 11,2 km/s die nodig is om aan het zwaartekrachtsveld van de Aarde te ontsnappen. Omgekeerd zal blijken dat de goedkope Hohmann-baan een relatief grotere reistijd vergt.

## Energieën

Bepalend voor de benodigde, met behulp van raketmotoren te leveren snelheidsveranderingen, is de totale energie van het ruimteschip ten opzichte van het centrum van het gravitatieveld, dat in een zekere fase van de reis domineert.

Bij het lanceren is dat de Aarde, bij het doorlopen van de Hohmann-baan de Zon, bij de landing bijvoorbeeld Mars.

De bedoelde energieën hebben waarden:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \text{ en } E_{\text{pot}} = -\frac{\mu m}{r}$$

waarbij  $\mu = GM$  met  $G$  als gravitatieconstante en  $M$  de massa van het dominerende hemellichaam.

Wrijvingskrachten in de atmosfeer laten we buiten beschouwing. De energievergelijking in het geval de motoren niet werken, luidt:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \text{constant} \quad (1)$$

In het linkerlid staan energieën per eenheid van massa.

## Enkele grootheden

$$\begin{aligned} \mu (\text{aarde}) &= 4,0 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \\ \mu (\text{zon}) &= 1,3 \cdot 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2 \\ \mu (\text{mars}) &= 4,3 \cdot 10^{13} \text{ m}^3/\text{s}^2 \\ \text{straal van de aardbaan } a_A &= 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} \end{aligned}$$

straal van de marsbaan  $a_M = 2,3 \cdot 10^{11} \text{ m}$   
straal aardequator  $R_A = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$   
straal marsequator  $R_M = 3,4 \cdot 10^6 \text{ m}$   
We veronderstellen verder dat Aarde en Mars concentrische cirkelbanen om de Zon beschrijven in het eclipticavlak (coplanaire baan).

## Algemene formules

1 Voor een Kepler-ellips geldt dat de snelheid van een massa op afstand  $r$  van het centrale hemellichaam, bij een halve lange as  $a$ , berekend kan worden met:

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2)$$

Dit geeft voor de totale energie (per massa-eenheid)

$$E_{\text{totaal}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (3)$$

2 Voor een cirkelbaan is  $r = a$  (constant) en dus volgt uit (2)

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (4)$$

en verder:

$$E_{\text{kin}} = \frac{\mu}{2r}; E_{\text{pot}} = -\frac{\mu}{r} \text{ en } E_{\text{totaal}} = -\frac{\mu}{2r} \quad (5)$$

Merk op dat steeds  $E_{\text{kin}} = -E_{\text{totaal}}$  (6)

De ontsnappingsnelheid in de cirkelbaan:

$$v_0 = v_c \sqrt{2} \text{ ofwel } v_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \quad (7)$$

## Lancering

We bepalen eerst het lanceervenster.

De Hohmann-baan in de vorm van een halve ellips heeft een lange as  $(1,5 + 2,3) \cdot 10^{11} \text{ m} = 3,8 \cdot 10^{11} \text{ m}$ , zodat  $a = 1,9 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .

Volgens de formule voor de omloopstijd van een Kepler-ellips volgt voor de reistijd Aarde-Mars:

$$\frac{1}{2}T = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{6,6 \cdot 10^{33}}{1,3 \cdot 10^{20}}} = 259 \text{ dagen.}$$

Als we weten dat de omloopstijden van de Aarde en Mars respectievelijk 365 en 687 dagen zijn, is het niet moeilijk meer om uit te

rekenen dat Mars op het moment van de lancering ongeveer  $45^\circ$  vóór moet zijn op de Aarde, om na 259 dagen precies bij Mars uit te komen.

De benodigde startsnelheid in de Hohmann-baan volgt uit (2).

Als we invullen:  $r = 1,5 \cdot 10^{11}$  m en  $a = 1,9 \cdot 10^{11}$  m, vinden we:

$$v_{H,start} = 33 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

De Aarde heeft zelf al een snelheid in haar cirkelbaan om de Zon, volgend uit (4)

$$v_A = \sqrt{\frac{1,3 \cdot 10^{20}}{1,5 \cdot 10^{11}}} = 30 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Er is dus nog een snelheidsvermeerdering van 3 km/s nodig om in de Hohmann-baan te komen. Die snelheid moet dan wel wijzen in dezelfde richting als de baansnelheid van de Aarde. Daarbij moet nog wel de aantrekkingskracht van de Aarde overwonnen worden.

Praktisch gesproken, wordt het ruimtetuustel eerst in een parkeerbaan om de Aarde gebracht, om van daaruit te ontsnappen naar de Hohmann-baan in het gravitatieveld van de Zon.

De lancering geschiedt vanaf de aardequator in Oostelijke richting, dus met de aardrotatie mee, naar een parkeerbaan op bijvoorbeeld 460 km hoogte boven de evenaar. Uit (4) volgt:

$$v_{parkeer} = \sqrt{\frac{4,0 \cdot 10^{14}}{6,8 \cdot 10^6}} = 7,6 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

## Landing op Mars

De cirkelbaansnelheid van Mars om de Zon, volgend uit (4)

$$v_M = 24 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

De snelheid in het eindpunt van de Hohmann-ellips volgt weer uit (2)

$$v_{H,eind} = 21 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

De extra snelheid nodig om de Mars-baan te halen is dus  $3,0 \cdot 10^3$  m/s.

De snelheid om weer in een parkeerbaan op 460 m hoogte te komen, volgt weer uit (4) en wordt:

$$v_{parkeer} = 3,3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Bij de landing op Mars moet dus tweemaal

een snelheidstoename volgen, eenmaal om Mars 'in te halen' en eenmaal om in de parkeerbaan te komen.

Naast het verhaal van de snelheden is er nog dat van de energieën. Er is uit te rekenen hoeveel energie elk van de overgangen vergt. Ze worden steeds bepaald per massa-eenheid en uitgedrukt in  $\text{m}^2/\text{s}^2$ .

## De weg terug

Om terug te keren moeten ze nog een aantal keren snelheidsveranderingen realiseren, zowel bij het opstijgen van Mars als bij de landing op de thuisbasis.

Maar er is nog een specifieke moeilijkheid: er is een aanzienlijke wachttijd. Binnen één jaar bijvoorbeeld kunnen ze zo niet terug! Ze zullen moeten wachten tot Aarde en Mars weer zo in juiste positie ten opzichte van elkaar staan dat ze via 'het kosmisch balspel' weer naar huis terug kunnen. Maar die wachttijd moet u zelf maar eens uitrekenen. Daarover gaat dit keer 'natuurkunde als recreatie'.

## Voetnoot

Dit verhaal kwam tot stand in overleg met prof. dr. W. de Graaff uit Houten.



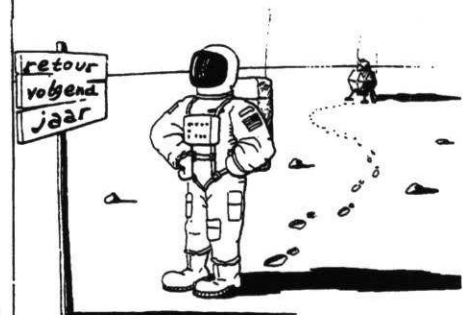
## Natuurkunde als recreatie: Wachttijd op Mars

Een groep astronauten is via een Hohmann-baan (figuur 1) op Mars geland. Na enkele weken (of maanden?) kijken ze toch wel weer uit naar de dag dat ze naar moeder Aarde kunnen terugkeren.

Als ze dit met een minimaal brandstofverbruik willen doen, moet het moment van vertrek goed worden uitgekiend in verband met de positie van de Aarde. Dan wordt de baan weer een halve Hohmann-ellips, beginnend bij Mars en eindigend bij de Aarde.

De opgave is: bereken de minimale wachttijd op Mars.

Ga hierbij uit van de duur van de halve ellips (258 dagen) en de omlooptijden voor de coplanaire cirkelbanen van Aarde (365 dagen) en Mars (687 dagen). Voor oplossing, zie pagina 145.





## Oplossing: wachttijd op Mars

In figuur 2 is de hele expeditie op schaal uitgezet. De opeenvolgende posities van Aarde en Mars geven we achtereenvolgens aan met  $A_0, A_1 \dots M_0, M_1 \dots$

Op het moment van de landing op Mars, ligt de Aarde een hoek  $\alpha$  vóór op Mars (figuur 3). We stellen de hoeksnelheden van Aarde en Mars respectievelijk  $\omega_1$  en  $\omega_2$ .

Voor de gelande astronauten lijkt Mars nu stil te staan en de Aarde om de zon te wentelen met een hoeksnelheid  $\omega_1 - \omega_2$ . Vanwege de symmetrie (zie figuur 3) moet de Aarde een hoek  $360^\circ - 2\alpha$  afleggen, alvorens de expeditie kan terugkeren.

Daaruit volgt dan voor de minimale wachttijd:

$$t = \frac{360^\circ - 2\alpha}{\omega_1 - \omega_2}$$

Voor  $\alpha$  vinden we:

$$\alpha = \frac{258}{365} \cdot 360^\circ - 180^\circ = 74,5^\circ$$

De hoeksnelheden volgen uit:

$$\omega_1 = \frac{360}{365} = 0,996 \text{ graad per dag}$$

$$\omega_2 = \frac{360}{687} = 0,524 \text{ graad per dag}$$

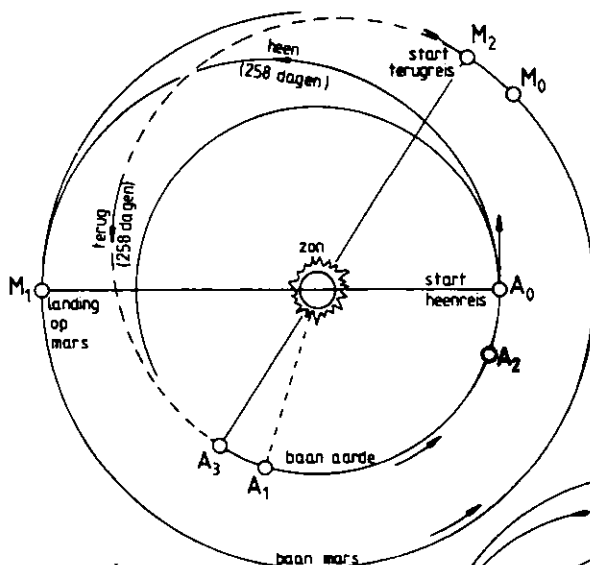
waaruit volgt:

$$\tau = \frac{360 - 149}{0,986 - 0,524} = 458 \text{ dagen of 1 jaar en 3 m.}$$

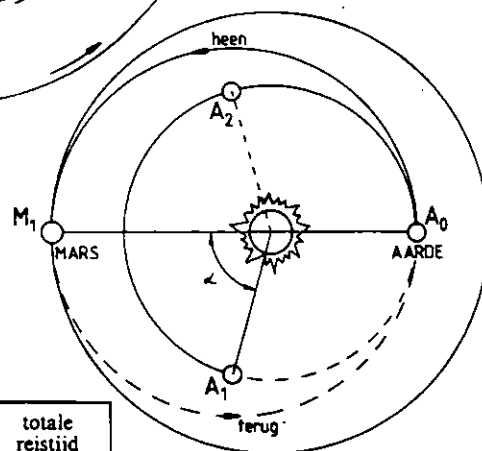
De totale reisduur van de Marsexpeditie met minimaal brandstofverbruik wordt dan:  $258 + 458 + 258 = 974$  dagen of 2 jaar en 8 maanden!

Voor de binnenplaneten Mercurius en Venus zijn de totale reistijden korter, voor de buitenplaneten langer.

Zo is de reisduur voor een Mercuriusexpeditie minimaal 9 maanden maar voor Pluto 91 jaar! Tenminste bij gebruik van Hohmannbanen.



Figuur 2: Heen- en terugreis en wachttijd



Figuur 3:  $A_1$  en  $A_2$  zijn elkaars spiegelbeeld

| planeet   | transfer tijd | wachttijd | totale reistijd |
|-----------|---------------|-----------|-----------------|
| Mercurius | 105 d         | 67 d      | 9 m             |
| Venus     | 146 d         | 1 j + 3 m | 2 j + 1 m       |
| Mars      | 259 d         | 1 j + 3 m | 2 j + 8 m       |
| Jupiter   | 3 j           | 7 m       | 6 j + 6 m       |
| Saturnus  | 6 j           | 11 m      | 13 j + 11 d     |
| Uranus    | 16 j          | 11 m      | 33 j + 1 m      |
| Neptunus  | 31 j          | 9 m       | 62 j + 1 m      |
| Pluto     | 45 j          | 22 d      | 91 j            |

### retourtje Mars



# Periodiek of eenmalig, een kwestie van plus of min

Kracht en versnelling zijn evenredig. En de versnelling is de tweede afgeleide van de verplaatsing. Daarom zullen de meeste mechanische problemen beschreven worden door een differentiaalvergelijking met daarin een tweede afgeleide. Vaak zal dan de wiskundige trucendoos ver opengetrokken moeten worden om tot oplossingen te komen.

Een vrij veel voorkomende vorm is die waarbij de werkende kracht evenredig is met de verplaatsing  $u$ . Het merkwaardige daarbij is dat de bedoelde vergelijking twee type oplossingen biedt, die sterk in uiterlijk van elkaar verschillen en ook bij verschijnselen horen, die sterk van elkaar afwijken.

## Het hangt af van het teken

Laten we uitgaan van de differentiaalvergelijking:  $u''(t) = c \cdot u(t)$ . Daar blijkt zowel een goniometrische combinatie geschikt als oplossing, maar ook een samenstel van e-machten. Immers sinus en cosinus komen na tweemaal differentiëren weer op zichzelf uit en e-machten blijven bij differentiëren de rust zelve.

Laten we beide soorten oplossingen maar eens proberen.

- $u''(t) = c \cdot u(t)$  heeft als mogelijke oplossing  
 $u(t) = A \sin pt + B \cos pt$ .  
 Dan is  $u'(t) = pA \cos pt - pB \sin pt$   
 en  $u''(t) = -p^2 (A \sin pt + B \cos pt)$ .  
 Hieruit volgt:  $-p^2 = c$ , dus  $p = \sqrt{-c}$ . (1)  
 Dit kan alleen maar als  $c$  negatief is.  
 In dit geval is het verschijnsel een harmonische trilling.

- $u''(t) = c \cdot u(t)$  heeft ook als mogelijke oplossing  
 $u(t) = Ae^{pt} + Be^{-pt}$ .  
 Dan is  $u'(t) = pAe^{pt} - pBe^{-pt}$   
 en  $u''(t) = p^2(Ae^{pt} + Be^{-pt})$ .  
 Hieruit volgt:  $p^2 = c$ , dus  $p = \sqrt{c}$ . (2)  
 Dit kan alleen maar als  $c$  positief is.  
 Dan echter is het verschijnsel geen trilling maar een eenmalige gebeurtenis.

En hiermee is het pleit beslecht. Als de constante  $c$  negatief is, hebben we een repeterend effect, is deze positief dan een eenmalig aflopend verschijnsel.

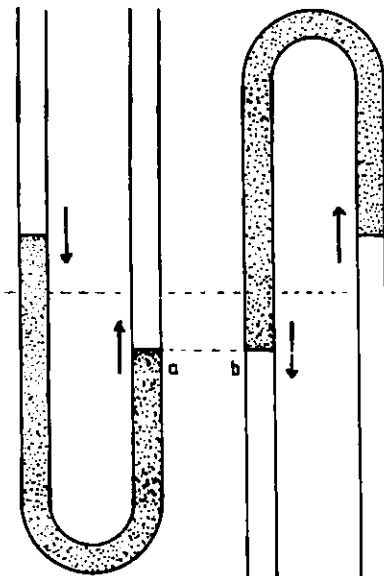
## Van beide een voorbeeld

We nemen twee bekende experimenten die

sprekend op elkaar lijken en beschreven worden met dezelfde differentiaalvergelijking.

In het eerste geval gaat het om water in evenwicht in een U-buis met constante doorsnede (figuur 1a). In het tweede geval houden we de buis omgekeerd (figuur 1b). Als we in het eerste geval één van de water-nivo's over een afstand  $r$  omlaagduwen en dan de vloeistof weer aan haar lot overlaten, ontstaat een harmonische trilling met amplitude  $r$ . Het verschijnsel is stabiel. Als we in- en uitwendige wrijvingskrachten even verwaarlozen, keren de nivo's telkens weer terug naar hun evenwichtsstand. We noemen zo'n effect stabiel.

In tegenstelling tot figuur 1b waar het evenwicht labiel is. De werkende kracht is hier tegengesteld gericht. Als we hier een vloeistof



Figuur 1: Complementaire verschijnselen

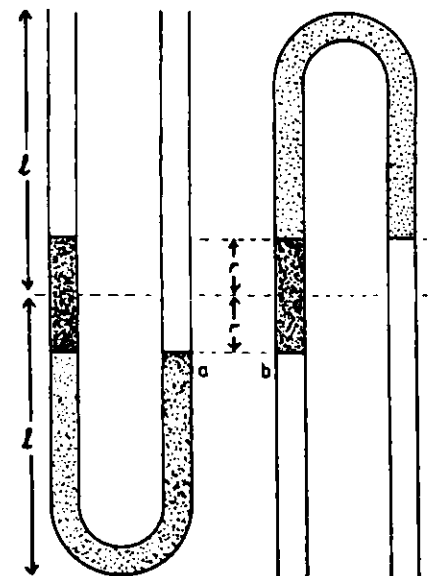
stofnivo vanuit de labiele evenwichtsstand over een kleine afstand verplaatsen en dan het verschijnsel verder weer de vrije loop laten, stroomt alle vloeistof versneld uit, zoals dat bij een hevel gebruikelijk is. Ook hier denken we de wrijvingskrachten voor het gemak maar weg. Het gaat uiteindelijk om een theoretische beschouwing.

Als probleem stellen we: bepaal  $T$ . In het eerste geval verbeeldt  $T$  de trillingstijd; in het tweede geval verbeeldt  $T$  de uitstroom-tijd.

## Het opstellen van de (differentiaal)vergelijkingen

De vergelijking is een invulling van de tweede wet van Newton:  $F = m \cdot a$ . Vanwege de symmetrie vullen we de buizen voor de helft met water. De lengte van de waterkolom is  $2l$ . Zie figuur 2. Bij begin-uitwijking  $r$  (vanaf de stabiele of labiele evenwichtsstand) is het verschil van de zwaartekrachten van de waterkolommen links en rechts de drijvende kracht. Als de totale massa van de hele waterkolom  $m$  is, dan zit

$$\text{links } \frac{l+r}{2l} \cdot m \text{ en rechts } \frac{l-r}{2l} \cdot m$$



Figuur 2: Kracht en massa

Het verschil van de zwaartekrachten is dan

$$\frac{2r}{2l} mg = \frac{r}{l} mg.$$

Invullen in  $F = m \cdot a$  geeft dan:

$$\frac{r}{l} mg = ma; \text{ dus } a = \frac{g}{l} r.$$

Als de uitwijking  $u$  is geldt een dergelijke afleiding, de vergelijking is dan

$$a = \frac{g}{l} u.$$

Als we de versnelling  $a$  en de uitwijking  $u$  als vectoren zien dan is er een verschil tussen de twee gevallen. In geval a is de uitwijking naar boven (positief) en de versnelling naar beneden (negatief), dus de vergelijking is

$$a = -\frac{g}{l} u.$$

terwijl in geval b uitwijking en versnelling naar beneden zijn (beide negatief), dus

$$a = \frac{g}{l} u.$$

Met de wetenschap dat  $a(t) = u''(t)$  krijgen we de differentiaalvergelijkingen uit de inleiding met constante

$$c = \frac{g}{l} \text{ of } -\frac{g}{l}.$$

## Het oplossen van de vergelijkingen

### 1. De trilling

Omdat  $c = -\frac{g}{l}$  negatief is, is de oplossing

$$u(t) = A \sin pt + B \cos pt, \text{ met } p = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Voor het tijdstip  $t=0$  geldt:  
 $u(0) = B = -r$  (in rechterbuis)

$u'(0) = pA = 0$  (beginsnelheid 0).  
 Invullen van  $A(0)$ ,  $B(-r)$  en  $p$  geeft:

$$u(t) = -r \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right).$$

Voor de trillingstijd  $T$  volgt uit

$$\sqrt{\frac{g}{l}} T = 2\pi \text{ dat } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 6,3 \sqrt{\frac{l}{g}}$$

### 2. De leegstromende hevel

Omdat  $c = \frac{g}{l}$  positief is, is de oplossing

$$u(t) = Ae^{pt} + Be^{-pt}, \text{ met } p = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Voor het tijdstip  $t=0$  geldt:  
 $u(0) = A + B = -r$  (in linkerbuis)  
 $u'(0) = pA - pB = 0$ .

Hieruit volgt:  $A = B = -\frac{1}{2}r$ , dus

$$u(t) = -\frac{1}{2}re^{pt} - \frac{1}{2}re^{-pt}.$$

De leegstroomtijd  $T$  wordt bepaald door  $u(T) = -l$ .

$T$  moet worden opgelost uit de vergelijking

$$e^{pT} + e^{-pT} = \frac{2l}{r}.$$

Hiervoor stellen we  $e^{pT} = y$ , dan is  $e^{-pT} = \frac{1}{y}$ .

$y + \frac{1}{y} = \frac{2l}{r}$  is gelijk aan de vierkantsvergelijking

$$ry^2 - 2ly + r = 0 \text{ met oplossing}$$

$$n_v = \frac{l + \sqrt{l^2 - r^2}}{r} = e^{pT}.$$

(De oplossing met het minteken geeft een negatieve  $T$ ).

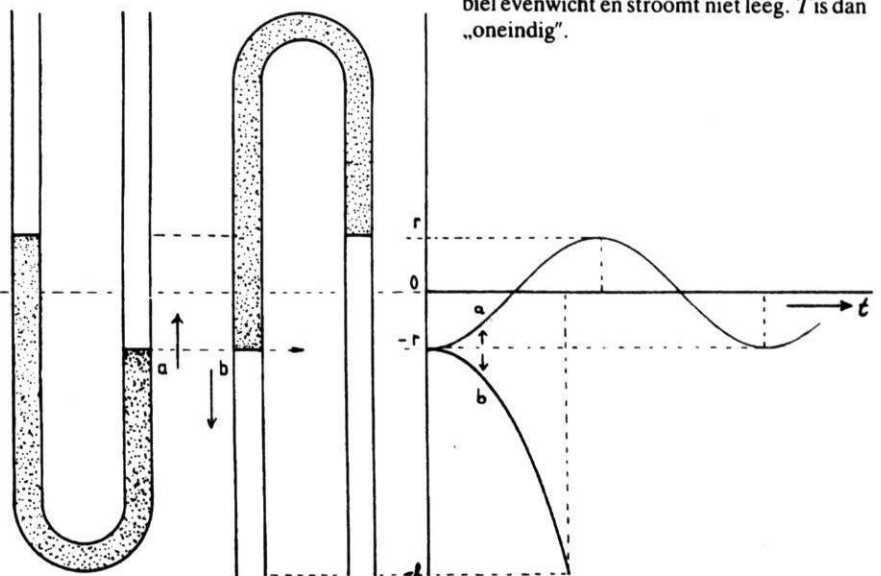
$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{(l + \sqrt{l^2 - r^2})}{r}$$

In ons getekende voorbeeld is  $r = 0,2l$ .

$$\text{Dan is } T = 2,3 \sqrt{\frac{l}{g}}$$

In figuur 3 zijn de grafieken van beide gevallen getekend.

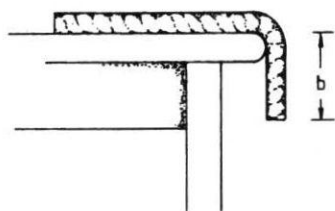
Opmerking: als  $r=0$  verkeert de hevel in labiel evenwicht en stroomt niet leeg.  $T$  is dan „oneindig“.



Figuur 3: Grafieken van trilling en leegloop

## Superelastische botsing

of: hoe vertel ik het mijn leerlingen?



Figuur 4: Afglijdend touw (totale lengte:  $a$ )

### Nabeschouwing

Al werkend aan deze problemen, overvleien mij de nodige „niet-fysische” gevoelens. Is het niet verwonderlijk hoe een uiterst eenvoudige differentiaalvergelijking alle geheimen van zo verschillende verschijnselen in zich sluit. En hoe bepaalt een enkel teken om welk van de twee het gaat.

Vreemd dat sinusfuncties en  $e$ -machten complementair zijn. Spelen beide soorten functies geen sterke rol in het leven van alle dag? Zijn we niet omgeven door talloze periodieke verschijnselen als loopritme, hartklop, dagen en nachten, seizoenen? Dwars daardoorheen lopen aflopende verschijnselen of oplopende; bevolkingsgroei, carrière, veroudering.

De grootheid  $T$  is enerzijds de tijdsduur van een cyclus, een cursusjaar, een proefwerk... anderzijds de tijdsduur van een eenmalig verschijnsel zoals ons leven.

Vaak zien we ons leven als een periodiek verschijnsel, telkens hetzelfde; weer je belastingpapier invullen, weer naar school. We koppelen dat aan begrippen als saai en eentonig. Soms ervaren we het leven duidelijk als iets dat afloopt; de kinderen de deur uit...

Volgens de differentiaalvergelijking verschillen al die dingen van elkaar enkel maar door een plus of min!

### Natuurkunde als recreatie

Rekenen aan harmonische verschijnselen is de meeste van ons redelijk vertrouwd. Minder bekend is wellicht de oplossing met de  $e$ -machten. Voor wie daar nog eens aan oefenen wil, geven we hier nog een karweitje. Een soepel touw met lengte  $a$ , bungelt over de tafelrand (figuur 4). Het overhangende stuk is  $b$  lang. Bepaal, met verwaarlozing van interne en externe wrijvingskrachten, in hoeveel tijd het touw over de rand afglijdt. **Oplossing hiernaast**

Neem een plastic bekertje, prik door de bodem een punaise en zet daarop een kurkje. Vul dan het bekertje gedeeltelijk met water. Laat het geheel vervolgens rechtstandig vrij vallen. Tot onze verbazing knalt de kurk, na botsing met de grond, vele meters omhoog de lucht in. Dat komt niet vaak voor dat iets hoger opstuit dan het punt waar het werd losgelaten. Eindelijk een voorbeeld van energiewinst? Een botsing die meer dan elastisch is?

Stijgt de opwaartse kracht korte tijd omdat de waterdichtheid tijdens de botsing toeneemt? Of zoekt het water een remweg en duwt daarbij de kurk eruit?

Moet het kurkmateriaal een geringere dichtheid hebben dan het water? Welke

waterhoogte is ideaal? Is de vorm van de kurk belangrijk?

Doet uzelf eerst dit knallend experiment en leg het dan aan uw leerlingen uit. De redactie is benieuwd naar uw betoog. Graag inzenden aan de natuurkunderedactie. (adres zie colofon.)



### Oplossing afglijdend touw

$$\text{afglijdtijd: } T = \sqrt{\frac{a}{g}} \ln \frac{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}}{b}$$

# Roterende kwikspiegel

Voor een goede spiegeltelescoop willen we het liefst een spiegel met grote brandpuntsafstand, grote oppervlakte en parabolisch van vorm. Het fabriceren van een dergelijke spiegel is geen eenvoudige zaak. Aan de „Universit  Laval” in Quebec, Canada, heeft men een originele oplossing in studie: laat een bak met kwik roteren. Het vloeistofoppervlak zal een parabolische vorm aannemen. We beschikken dan over een goed reflecterende spiegel, ideaal van vorm. Hier volgen theorie en realisatie.

## De parabool

1. Een parabool met vergelijking  $y = ax^2$  (figuur 1) heeft een brandpuntsafstand

$$f = \frac{1}{4a} \quad (1)$$

We willen eerst aantonen dat alle teruggekaatste stralen die volgens de  $y$ -as invallen, inderdaad na reflectie door  $F$  gaan.

Door differentiëren vinden we voor de hellingshoek  $\alpha$  van de raaklijn in een zeker punt  $P$  aan de parabool:  $\tan \alpha = 2ax$ . Er geldt dus ook voor de hoek tussen de invallende straal en de normaal:  $\tan \alpha = 2ax$ .

Nu kan men door enig rekenwerk bewijzen dat voor de hoek  $\beta$  tussen de normaal en  $PF$  evenzo geldt:  $\tan \beta = 2ax$ . Waarmee is aangetoond:  $\alpha = \beta$ . En dit geldt voor elk punt  $P$ .

2. Als we een bak met vloeistof om haar as roteren, met hoeksnelheid  $\omega$ , ontstaat een paraboloid-vorm (figuur 2). Waarom?

Als er evenwicht bereikt is, kan een vloeistofmolecuul  $P$  aan het oppervlak alleen een reactie-kracht van de rest van de vloeistof ervaren in de normaalrichting. Immers, als er ook een tangentiële component was, zou het molecuul langs het oppervlak gaan schuiven. Totaal werken er dan op het molecuul twee krachten, de reactie van de vloeistof en de zwaartekracht. De resultante van beide moet de horizontaal gerichte centripetaalkracht leveren, ter grootte  $m\omega^2x$ .

We kunnen nu gemakkelijk aflezen:

$$\tan \alpha = \frac{\omega^2 x}{g} \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dx} = \tan \alpha, \text{ zodat}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

Deze differentiaalvergelijking heeft als algemene oplossing:

$$y = \frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2 + C$$

Als we stellen dat de kromme door 0 gaat, geldt:  $C = 0$ .

De asdoorsnede van de vloeistof is dus inderdaad een parabool van het type:

$$y = ax^2.$$

Tevens valt hieruit de brandpuntsafstand af te lezen:

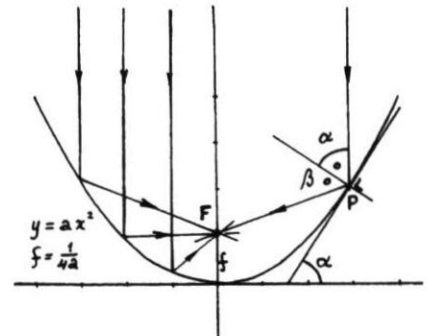
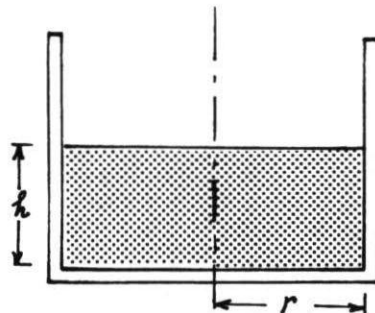
Volgens (1) geldt:

$$f = \frac{1}{4a} \quad \text{ofwel} \quad f = \frac{g}{2\omega^2} \quad (2)$$

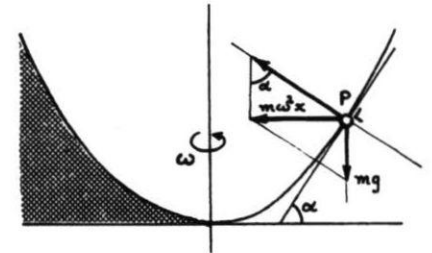
En hiermee is aangegeven hoe bij elke hoeksnelheid de brandpuntsafstand te bepalen is. Hoe sneller we draaien, hoe kleiner de brandpuntsafstand wordt.

Overigens is  $f$  onafhankelijk van de diameter van de bak waarin de vloeistof zit. Schrijven we  $f$  als functie van de rotatietijd  $T$ , dan gaat relatie (2) er als volgt uitzien:

$$f = \frac{gT^2}{8\pi^2} \quad \text{of} \quad f = 0,124 T^2 \quad (3)$$



Figuur 1: De parabool heeft een exact brandpunt



Figuur 2: Roterend vloeistofoppervlak in evenwicht

3. Alvorens op de praktische uitvoering in te gaan, nog een enkel theoretisch detail.

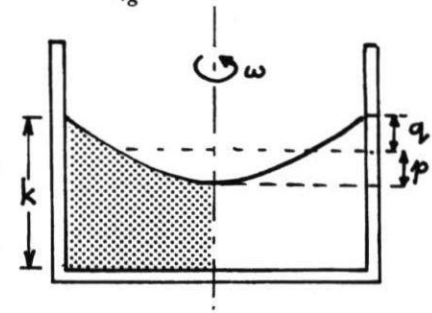
Als de vloeistof sneller gaat roteren, verandert de vorm ervan maar het volume blijft constant (figuur 3).

Met behulp hiervan zouden we kunnen uitzoeken, hoeveel, bij een bepaalde hoeksnelheid, het centrum van de vloeistof zal gaan dalen en de rand ervan omhoog komen.

Stel het volume van de stilstaande vloeistof op  $\pi r^2 h$ .

Als we dan gaan draaien komt de vloeistof aan de rand op een zekere hoogte  $k$ . Bereken door integratie opnieuw het vloeistofvolume afhankelijk van  $k$ . Door beide uitkomsten aan elkaar gelijk te stellen, kan  $k$  berekend worden als functie van  $\omega$ . Daarna kunnen we nog bepalen hoeveel de daling  $p$  en de stijging  $q$  wordt. We vinden voor beide eenzelfde uitkomst en wel:

$$p = q = \frac{r^2}{4g} \cdot \omega^2 \quad (4)$$



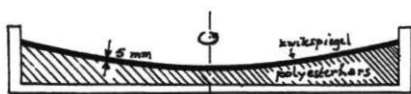
Figuur 3: Bij rotatie blijft het volume constant

Bij rotatie zakt de vloeistofspiegel in het centrum dus evenveel als ze aan de rand stijgt.

### Realisatie

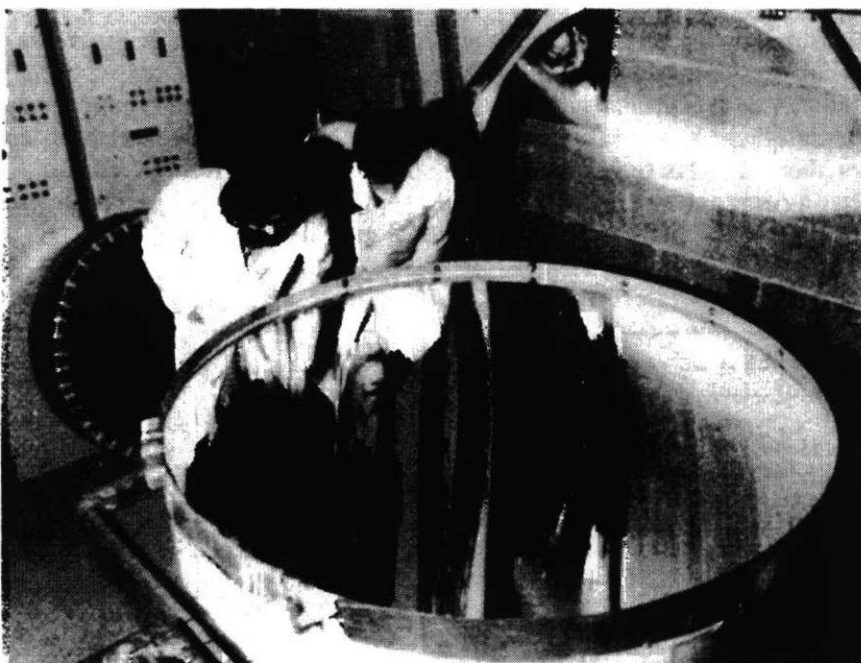
In Quebec werkt men met een vloeistofspiegel met een brandpuntsafstand van 4,5 m. Uit (3) volgt dan: de rotatietijd  $T$  wordt 6 s. Merk op dat er dus met uiterst kleine hoeksnelheden gewerkt wordt in verband met de vereiste grote brandpuntsafstand. Als diameter voor de spiegel is 100 cm gekozen. Uit (4) volgt dan:  $p = q = 7$  mm.

Het hoogteverschil tussen centrum en rand is dus maar 14 mm. Al in 1909 werd aan de University van Baltimore een poging gedaan om een dergelijke spiegel te maken, maar zonder succes. Om een exacte spiegelvorm te houden moet de opstelling uiterst stabiel zijn en de draaisnelheid volkomen constant. Er wordt gewerkt met een speciaal lager en een speciale drijfriem. De as van de spiegel wordt gestabiliseerd met luchtdruk. De drijfriem is van een bijzonder materiaal dat vanzelf losspringt als de motor onverhoeds zou stoppen. Het geheel staat in een zandbak om trillingen te onderdrukken.



Figuur 4: De spiegel praktisch uitgevoerd

Is het werken met zo'n kwikplas niet gevaarlijk? In de bak giet men een laag vloeibare polyesterhars. Al draaiend laat men dit stollen zodat er al een parabolische bedding voor het kwik ligt. De kwiklaag zelf hoeft zo maar 5 mm dik te worden. Het totale kwikvolume komt dan op ongeveer 4 liter en de massa op 55 kg. De kwiklaag mag niet dunner worden dan 3 mm, anders vallen er gaten. Iets boven de roterende bak is een uiterst dunne (0,01 mm) doorzichtige folie gespannen om rimpeling op het kwikoppervlak ten gevolge van luchtstroming tegen te gaan. Het grote voordeel van dit type spiegels



Een holle spiegel met een diameter van 1 m, een brandpuntsafstand 4,5 m en een rotatietijd 6 s.

is dat een grotere diameter relatief goedkoop te realiseren is.

Een voorbeeld: een holle spiegel met zes meter middellijn zou, gemaakt volgens de klassieke methode 25 miljoen dollar moeten kosten. Volgens het vloeistoftype wordt deze constructie op 200.000 dollar begroot, dat is minder dan 1 %!

Maar de kwikspiegel heeft ook negatieve aspecten: de as kan uitsluitend verticaal gericht zijn en... kwikdamp is uitermate giftig!

Met dank aan Dr. W. van Tend voor het beschikbaar stellen van numerieke gegevens betreffende de spiegel van Quebec.

# Kepler uit Newton

Hoewel Kepler oudere rechten heeft dan Newton en de wetten van Kepler hoogst bewonderenswaardig zijn, liggen toch feitelijk de wetten van Newton aan de basis van de hemelmechanica en de ruimtevaart. Zo blijken de versnellings- en attractiewet zeer elementair te zijn.

Maar, het is geen eenvoudige zaak om de wetten van Kepler uit die van Newton af te leiden. Het resultaat echter is dermate spectaculair dat we zo'n afleiding toch eigenlijk eenmaal gezien moeten hebben. Daartoe dienen wel wat wiskundige hoogstandjes geleverd te worden.

## Poolcoördinaten

Bij de analyse van satelliet- en planeetbanen werken we met poolcoördinaten (figuur 1).

De snelheidsvektor  $\vec{v}$  heeft de componenten:

$$\text{radieel: } v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$\text{tangenteel: } v_\varphi = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \dot{\varphi}$$

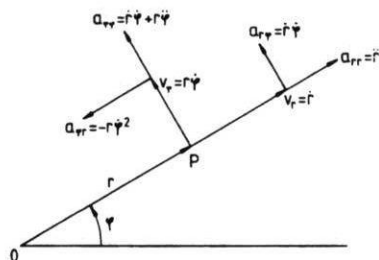
Evenzo heeft de versnellingsvektor twee componenten:

$$\text{radieel: } a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \quad (1)$$

tangenteel:

$$a_\varphi = r \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) + 2 \left(\frac{dr}{dt}\right) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \quad (2)$$

Volgens Newton werkt er in een centraal krachtveld alleen een versnelling in de  $r$ -richting. De tangentiële versnelling is er steeds nul, ofwel  $a_\varphi = 0$ . (3)



Figuur 1: snelheden en versnellingen.

De attractiewet moeten we officieel schrijven als

$$\vec{F} = - \vec{r} \left( \frac{GMm}{r^3} \right)$$

waarbij het minteken erop duidt dat de vektoren  $\vec{F}$  en  $\vec{r}$  tegengesteld gericht zijn. Immers de krachtsvektor wijst naar de centrale massa toe en de radiusvektor er juist vanaf. We schrijven daarom:

$$F = - \frac{\mu}{r^2} m \text{ waarbij } \mu = GM.$$

Uit  $F = m \cdot a$  volgt dan:

$$a_r = - \frac{\mu}{r^2} \quad (4)$$

## De tweede wet van Kepler

Schrijven we (3) en (4) verder uit, dan krijgen we:

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \quad (5)$$

$$\text{en } \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = - \frac{\mu}{r^2} \quad (6)$$

Uit (5) volgt:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \text{ ofwel } r^2\dot{\varphi} = \text{constant}$$

$$\text{zodat } r^2\dot{\varphi} = 2C \quad (7)$$

En dit is de tweede wet van Kepler, waarbij  $C$  de oppervlakte voorstelt van een per tijdseenheid doorlopen perk.

In een tijd  $dt$  wordt een perk doorlopen (zie figuur 2) ter grootte

$$\frac{1}{2} r^2 d\varphi = C \cdot dt \quad \text{ofwel } r^2\dot{\varphi} = 2C$$

## De eerste wet van Kepler

We willen nu, uitgaande van de wetten van Newton, aantonen dat de baanvorm van een satelliet of planeet een ellips kan zijn. Daartoe moeten we de relatie tussen  $r$  en  $\varphi$  trachten te vinden.

Uit (7) volgt:

$$\dot{r} = \dot{\varphi} \frac{dr}{d\varphi} = \left(\frac{2C}{r^2}\right) \frac{dr}{d\varphi} = - \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{2C}{r}\right)$$

en daartuit:

$$\ddot{r} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{r}}{d\varphi} = - \left(\frac{2C}{r^2}\right) \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{2C}{r}\right) \quad (8)$$

Substitueer (8) in (6)

$$- \left(\frac{2C}{r^2}\right) \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{2C}{r}\right) - r \left(\frac{2C}{r^2}\right)^2 = - \frac{\mu}{r^2}$$

Vermenigvuldig nu rechts en links met

$$- \frac{r^2}{2C}, \text{ dan}$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{2C}{r}\right) + \frac{2C}{r} = \frac{\mu}{2C} \quad \text{of}$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{2C}{r}\right) + \left(\frac{2C}{r} - \frac{\mu}{2C}\right) = 0 \quad (9)$$

Stel nu:

$$\frac{2C}{r} - \frac{\mu}{2C} = z \quad (10)$$

dan wordt (9):

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2} + z = 0, \text{ met als oplossing:}$$

$$z = A \cos(\varphi + \alpha)$$

Dit ingevuld in (10) geeft:

$$\frac{2C}{r} - \frac{\mu}{2C} = A \cos(\varphi + \alpha)$$

en na enige herleiding:

$$r = \frac{\frac{4C^2}{\mu}}{1 + \frac{2AC}{\mu} \cos(\varphi + \alpha)} \quad (11)$$

Schrijf:  $\frac{4C^2}{\mu} = p$  en  $\frac{2AC}{\mu} = e$

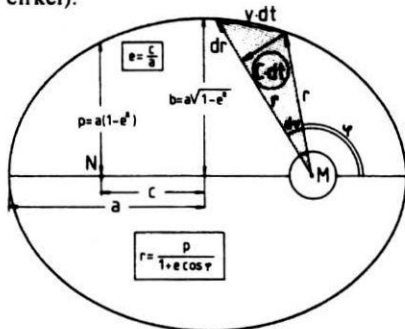
en kies  $\alpha=0$ .

Dat we  $\alpha=0$  stellen staat ons vrij, want we kunnen de stand van  $r$  waarbij  $\varphi=0$ , willekeurig kiezen.

Het resultaat wordt:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

en dat is dan de eerste wet van Kepler! Immers voor  $e < 1$  stelt dit een ellips voor (zie figuur 2) en voor  $e = 1$  een parabool en voor  $e > 1$  een hyperbool. In het geval  $e=0$  gaat de vergelijking over in  $r=p$  (een cirkel).



Figuur 2: perkeppervlakte in een tijd  $dt : \frac{1}{2} r^2 \cdot d\varphi = C \cdot dt$

De constanten  $p$  en  $e$  hebben nog een bijzondere betekenis:  $e$  is de excentriciteit (gedefinieerd als  $\frac{c}{a}$ ) en  $p$  is de lengte van het lijnstuk in het brandpunt loodrecht op de lange as (figuur 2). Zie ook NVON-maandblad 11 (1986) nr. 10 p. 24 (artikel satellietbanen).

### De derde wet van Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} \cdot a^3 \quad (14)$$

Dat gaat nu vlot. In een periode  $T$  beschrijft de voerstraal de complete ellips met oppervlakte  $\pi ab$  ( $a$  en  $b$  zijn de halve aslengten). Omdat  $C$  het per tijdseenheid doorlopen perk voorstelt, geldt:

$$CT = \pi ab \quad (13)$$

In het algemeen geldt: (vergelijk bovenvermeld artikel)

$$p = a(1-e^2) \text{ en } b = a\sqrt{1-e^2}$$

$$\text{zodat: } T\sqrt{\frac{p\mu}{4}} = \pi a \cdot a\sqrt{1-e^2} \text{ of}$$

En dat is dan de derde wet van Kepler. Opvallend hierbij is dat de omlooptijd alleen afhangt van de lengte van de lange as.



## Val-tril experiment

Een eenvoudig experiment, gemakkelijk om zelf in elkaar te zetten. U heeft er de amanuensis niet voor nodig en Deetman hoeft geen subsidie te verstrekken. Toch zit er ruimschoots meet- en denkwerk in. En... misschien nog een ideetje voor een praktisch schoolonderzoek. Het is gemakkelijk in 20-voud te maken. Welaan, dit was het reclamegedeelte.

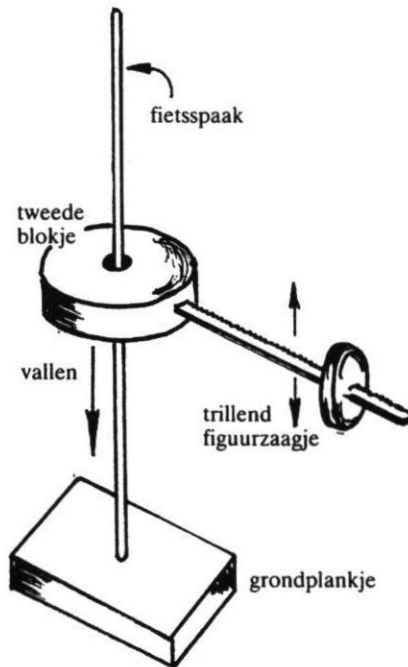
Neem een houten grondplankje, boor er een gaatje in en klem daarin een fietsspaak. Boor in een tweede blokje een zo ruim gat, dat de spaak er voldoende ruim over kan glijden. Maak een gaatje in de zijkant en steek daarin een stuk verenstaal; een figuurzaagje is erg geschikt. Bevestig aan het eind hiervan een gewichtje in de vorm van een stukje gummi of kurk (figuur 1).

Door dit extra gewicht zal het tweede blokje wat scheef gaan hangen, waardoor wrijvingskrachten in werking worden gezet en het blokje kan blijven hangen. Maar zodra het figuurzaagje in verticale trilling gebracht wordt, huppelt het blokje in een zeker ritme omlaag. Fascinerend om te zien en interessant om eraan te experimenteren. Door wat zaken te veranderen kan het val-tril experiment anders verlopen. Zo kan het gaatje in het afglijdende blokje wat ruimer gemaakt worden, het gewichtje vergroot of verkleind, of de afstand ervan tot de fietsspaak veranderd worden.

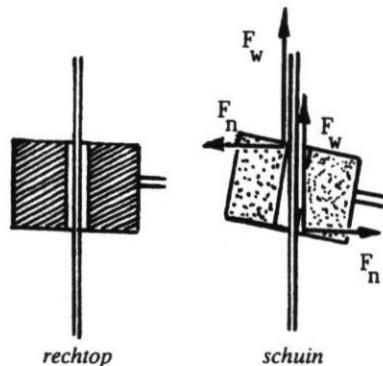
### De verklaring

Als het blokje schuin staat werken er twee horizontale drukkrachten tussen spaak en blokje. Hierdoor ontstaan vertikaal omhoog gerichte wrijvingskrachten, waardoor het blokje, bij voldoende ruwheid, niet meer afglijdt (figuur 2).

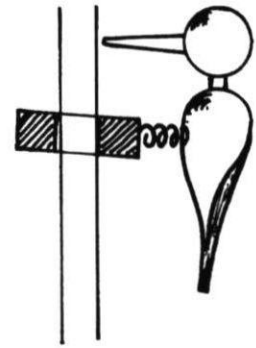
Maar, als het figuurzaagje in trilling gebracht wordt, zal het blokje ook in trilling komen en zo telkens even los raken van de spaak. Dan is er tevens even tijd beschikbaar om een stukje te zakken. En zo zal het blokje omlaaghuppelen op het ritme van het trillende figuurzaagje.



Figuur 1: De opstelling



Figuur 2: De krachten op het tweede blokje



Figuur 3: De opstelling uitgevoerd als kinderspeelgoed. De fietsspaak is vervangen door een holle metalen buis. De snavel van de specht tikt in snel ritme er tegenaan. Tevens een nieuwe mogelijkheid om de trilfrequentie te bepalen.

### Vragen

Het ogenschijnlijk simpele proefje heeft nogal wat opmerkelijke eigenschappen. Welk is de relatie tussen huppel- en trillritme? Is de afdaling eenparig? Is de daaltijd reproduceerbaar? Wat ons vooral fascineert, is de energiebalans. Het systeem verliest gaandeweg zwaarte-energie, die omgezet wordt in trillingsenergie van de veer en natuurlijk in warmte. Opvallend is dat de hoeveelheid trillingsenergie constant blijft. Immers, u zult merken dat bij het afdalen de amplitude van het figuurzaagje niet verandert. En dat is best opmerkelijk! Het doet denken aan een ouderwets slingeruurwerk. Ook daar blijft de topuitwijking van de slinger constant, zolang er tenminste nog energie-reserve in het systeem zit.

Hoe komt het eigenlijk dat die trillingsenergie constant blijft?

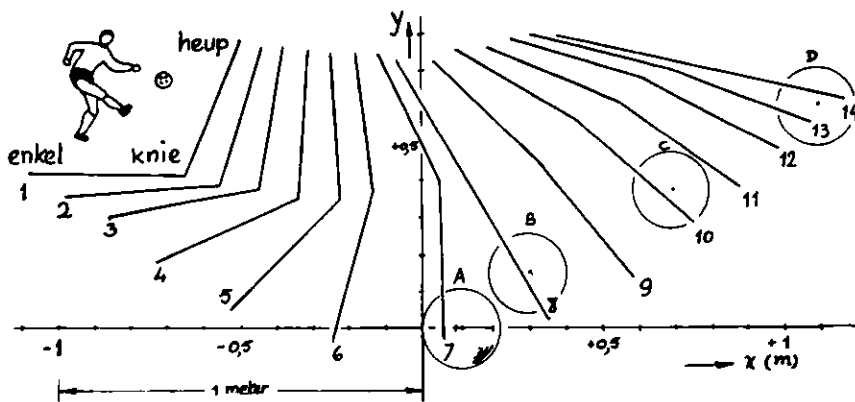
Als we beginnen met grote amplitude, neemt deze af door demping. Maar die demping gaat tot een zekere waarde! Dan wordt er kennelijk telkens een bepaald kwantum zwaarte-energie aan het afdalende blokje onttrokken, zoveel dat de trilling in tact blijft. De topuitwijking streeft naar een constante waarde. Wie heeft daarvoor een verklaring? Zit hier een model in voor de moderne kwanten-fysica?? Er gebeurt soms nog iets gek. Bij een zekere proefopstelling ging het eindpunt van het figuurzaagje een schroeflijn omlaag beschrijven. Hoe komt dat nu weer?



# Analyse van een schop

In figuur 1 staat een tekenfilm van 14 opnamen, gemaakt van een krachtige schop tegen een bal. De gebruikte gegevens zijn afkomstig van de afdeling biomechanica van de Polytechnic in Liverpool. De beenbeweging werd gefilmd met een hoge snelheid van 64 beelden per seconde. De tijd tussen twee beelden is dan 0,016 s en de totale tijd voor het schot van aanzwaai tot uitzwaai  $13 \times 0,016$  of 0,2 s. Maar in die korte tijd gebeurt er heel veel. In het zwaaiend been zijn drie redelijk exacte punten aan te geven, namelijk het heup-, het knie- en het enkelgewricht. Deze punten zijn door lijnstukken verbonden, die dus het boven- en onderbeen verbeelden. In figuur 1 is op te meten dat boven- en onderbeen hier 0,39 en 0,42 m lang zijn. We zullen speciaal een studie verrichten van de beweging van het enkelpunt.

Daar gaan we dan; misschien krijgt u net als wij ook wel een kick van deze numerieke differentiatie!



Figuur 1: Beenposities vóór en na het schot

| positie | x (m) | y (m) |
|---------|-------|-------|
| 1       | -1,09 | +0,42 |
| 2       | -0,98 | +0,37 |
| 3       | -0,87 | +0,30 |
| 4       | -0,73 | +0,18 |
| 5       | -0,52 | +0,05 |
| 6       | -0,24 | -0,04 |
| 7       | +0,06 | -0,04 |
| 8       | +0,35 | +0,02 |
| 9       | +0,59 | +0,14 |
| 10      | +0,75 | +0,29 |
| 11      | +0,88 | +0,38 |
| 12      | +0,98 | +0,49 |
| 13      | +1,09 | +0,57 |
| 14      | +1,17 | +0,62 |

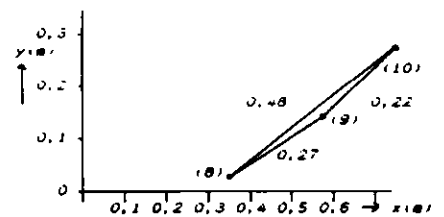
Figuur 2: Coördinaten van de enkel

## Plaats en snelheid

In figuur 2 zijn de coördinaten opgegeven voor het enkelpunt uitgedrukt in meter. We gaan daarbij uit van een assenstelsel met als oorsprong het punt van eerste balcontact. Dat moment ligt tussen positie 6 en 7.

We willen de snelheid bepalen van de enkel in de opeenvolgende standen. Voor de bepaling van de snelheid op een zeker ogenblik moeten we de tijdspanne  $\Delta t$  minimaal kiezen. Als laagste waarde kunnen we hier 0,016 s gebruiken. Stel we willen de snelheid in punt 9 be-

palen (figuur 3). Dat zou op verschillende manieren kunnen gebeuren. Bijvoorbeeld met de lengte van het stuk 8-9 of met die van het stuk 9-10. Dat is extrapolatie.



Figuur 3: Bepaling van de snelheid in positie 9 bij  $\Delta t = 0,016$  s.

In het eerste geval berust de uitkomst op gegevens uit het verleden, in het tweede op die van de toekomst. Uitgaande van de in fig. 2 gegeven coördinaten kunnen we de lengten van beide lijnstukken bepalen. We vinden 0,27 m voor het stuk 8-9 en 0,22 m voor het stuk 9-10.

Werkend met het eerste stuk vinden we:

$$v_9 = \frac{0,27}{0,016} = 17 \text{ m/s.}$$

En uitgaande van het tweede stuk:

$$v_9 = \frac{0,22}{0,016} = 14 \text{ m/s.}$$

Als we precies de snelheid in positie 9 willen weten, is de eerste uitkomst beslist te hoog en de tweede te laag. We kunnen ook interpoleren (dat is altijd secuurder) en  $v_9$  bepalen uit de lengte van het stuk 8-10. Dan komt eruit:

$$v_9 = \frac{0,48}{2 \cdot \Delta t} = \frac{0,48}{0,032} = 15 \text{ m/s}$$

en daar houden we het maar op.

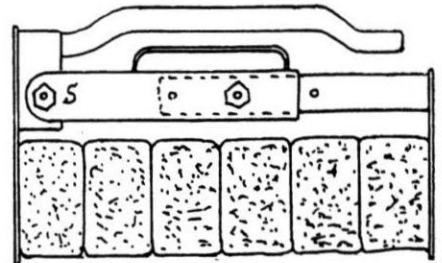
De richting van het laatste lijnstuk geeft ook beter de richting van de snelheidsvector in 9 aan, dan die van de beide eerder genoemde lijnstukken. Zo hebben we in alle punten de snelheid benaderd. Alleen in de uiterste punten 1 en 14 kunnen we alleen door extrapolatie eruit komen, omdat in 1 het verleden onbekend is en in 14 de toekomst.

## De stenenklem

Op bouwplaatsen gebruiken metselaars een stenenklem om stenen bijvoorbeeld van een pallet over te laden in een kruiwagen. De grijper is in principe een hefboom met draaipunt S.

Bepaal de minimale waarde van de wrijvingscoëfficiënt tussen stenen en eindplaten als bij optillen de stenen er niet uit mogen vallen.

Het apparaat is op schaal getekend en het gewicht van de klem is ten opzichte van dat van de stenen verwaarloosbaar. En daar moet u het dan mee doen!



**Oplossing stenenklem:  $f > 0,3$**   
Door meting in de tekening van de armlengten van de hefboom kan de krachtsverhouding bepaald worden; wij komen uit op 0,6. De minimaal benodigde  $f$ -waarde wordt dan  $0,6 \times \frac{1}{2}$  of 0,3. De factor  $\frac{1}{2}$  wordt veroorzaakt doordat twee wrijvingskrachten links en rechts de partij stenen dragen. Opmerkelijk bij dit apparaat is dat het gewicht van de stenen zelf vrijwel geen rol speelt. Immers, als de stenen zwaarder zijn, stijgen de wrijvingskrachten in dezelfde mate.

In figuur 4 is de serie uitkomsten genoteerd en in grafiek gebracht. De topsnelheid ligt op 18,5 m/s of 67 km/h!

De schoppende voet bereikt die snelheid juist voordat het eerste balcontact plaats heeft.

Tevens zijn in figuur 1 uitgaande van de filmbeelden, vier balposities A, B, C en D, ingetekend, waarbij A de rustpositie verbeeldt en B, C en D volgende momentopnamen van de filmband.

Op de boven beschreven manier kunnen ook hier uit afstanden en tijden de balsnelheden kort na het afgaan van het schot, berekend worden. De uitkomst ligt rond 28 m/s of 100 km/h! Ergens tussen stand B en C verliest de voet het contact met de bal zodat het versnellingsgedeelte in een uiterst kleine tijd plaats heeft (hooguit 0,02 s).

### Versnelling

In figuur 4 lezen we af hoe in de aanloophase tot het schot de snelheid van het schietende been eerst toeneemt en erna weer afneemt.

Zo is in positie 6 de versnelling nul, daarvoor positief, erna negatief. Uit de helling van  $t$ - $v$  grafiek kunnen versnellingen bepaald worden.

Als voorbeeld de versnelling op het traject 4-5.

$$a = \frac{v_5 - v_4}{\Delta t} = \frac{16,9 - 13,5}{0,016} = 2,10^2 \text{ m/s}^2$$

of 20g!

| n  | $v_n$ (m/s) |
|----|-------------|
| 1  | 7,2         |
| 2  | 7,6         |
| 3  | 9,9         |
| 4  | 13,5        |
| 5  | 16,9        |
| 6  | 18,5        |
| 7  | 18,4        |
| 8  | 17,4        |
| 9  | 15,2        |
| 10 | 11,7        |
| 11 | 9,4         |
| 12 | 8,7         |
| 13 | 7,2         |
| 14 | 6,1         |

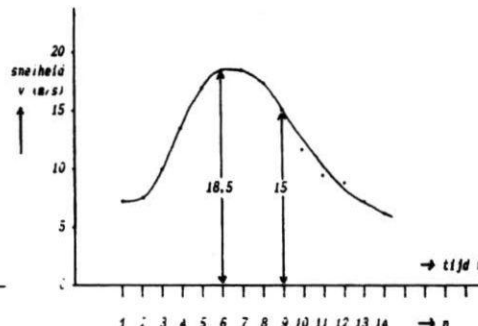
Figuur 4: Snelheidsgrafiek

### Energie-overdracht

Een schop tegen een bal is te beschrijven als een energie-overdracht waarbij een massa in rust een zekere snelheid krijgt, een snelheid met een bepaalde richting en grootte. Over effect praten we maar niet. Om de bal te versnellen maken we gebruik van spierkracht ongeveer zoals een kogelstoter doet. Misschien is de vergelijking met een speerwerper beter. Deze neemt een aanloop met arm en speer achterwaarts. Vervolgens passeren beide het lichaam. Als de hand de speer niet meer bij kan houden, wordt deze losgelaten. Zo wordt er een lange weg gemaakt waarover de spierkracht arbeid kan verrichten om de speer aan zo veel mogelijk kinetische energie te helpen.

Zo begint ook een voetballer meestal met een aanloop. Het been krijgt daardoor snelheid. Op zeker moment heeft de heup de hoogste snelheid bereikt en passeert het schoppende been in een zwaaibeweging. Door de kracht van de beenspieren bereikt de voet dan de maximale snelheid. Het schoppende been heeft dan een maximum aan kinetische energie, overeenkomstig massa en snelheid. Deze kinetische energie wordt voor een deel aan de bal overgedragen. Een voetbal heeft een massa 425 g en bij een gemeten snelheid van 28 m/s een kinetische energie  $\frac{1}{2}mv^2$  of 167 J.

De tijd van contact met de bal werd geschat op 0,02 s, zodat het kortstondig schoppend vermogen  $167 : 0,02$  of ruim 8 kW bedraagt!



# Cycloïde, kromme voor rollen, slingeren en vallen

Op 8 juni 1988 wordt onder koninklijke belangstelling de tentoonstelling „De glorieuze revolutie” met als ondertitel „De tijd van William en Mary” geopend in de Nieuwe Kerk in Amsterdam.

Het gaat daarbij om de zeventiende eeuw, een tijdperk van bijzondere samenwerking tussen Engeland en Nederland. Er wordt aandacht besteed aan verschillende aspecten daarvan, zoals economie, godsdienst, poli- en wetenschap. Voor de natuurwetenschap was het de tijd van Newton en Huygens, wellicht de grootste fysici van onze beide landen.

Betrokken bij de voorbereiding van de expositie, bladerde ik nog weer eens een middag in het universiteitsmuseum in Utrecht in de fraaie reproductie van de volledige werken van Huygens. En dat gaf dan weer aanleiding tot een bestudering van de cycloïdale slinger waarvan exemplaren in bovengenoemd museum staan.

Globaal is de slingertijd onafhankelijk van de amplitudo. In werkelijkheid neemt deze toe bij grotere waarde. Compensatie wordt gevonden door de slinger bij grotere uitwaai te verkorten. Zo kwam Huygens op het idee om aan weerszijden van het ophangpunt twee gebogen schilden aan te brengen. De cycloïde blijkt de ideale vorm te zijn.

De cycloïde als afrolkromme van een cirkel, is voldoende bekend. Maar wist u hoe deze opvallende kromme een rol speelt in velerlei situaties?

Christiaan Huygens construeerde er een heel bijzondere slinger mee en met de cycloïde is het mogelijk een afstand vlugger af te leggen dan langs een recht lijn.

We beginnen eerst maar de fraaie eigenschappen van de kromme op een rijtje te zetten.

## Rollen

We nemen een cirkel met middelpunt M en straal  $r$  en laten die onder langs de  $x$ -as rollen. Punt B is het contactpunt van de cirkel met de  $x$ -as bij de start in de oorsprong.

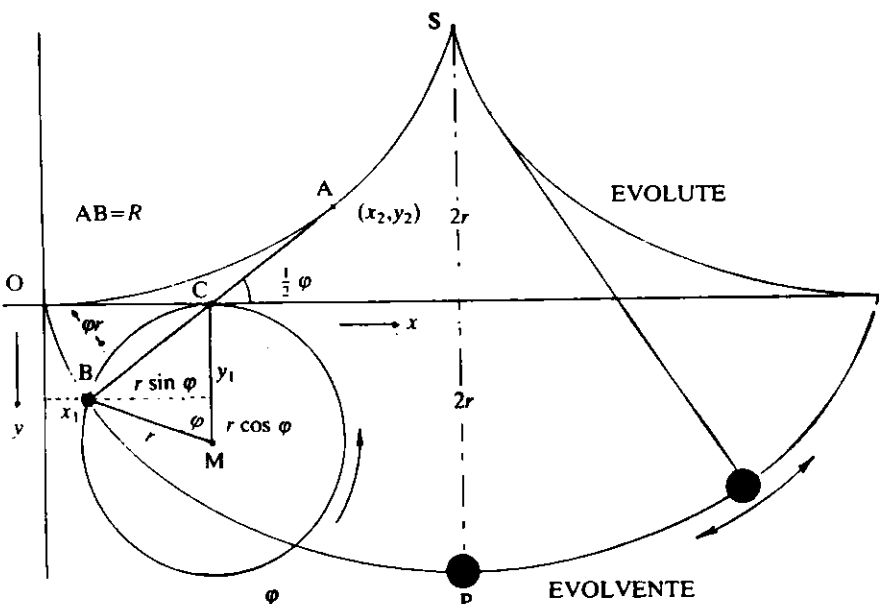
In verband met hetgeen volgt, kiezen we dit keer de positieve  $y$ -richting omlaag. Laat de cirkel één volledige omwenteling maken. Als MB over een hoek  $\varphi$  gedraaid is, is de situatie zoals in figuur 1.

De coördinaten van B zijn nu af te lezen:  
 $x_1 = r(\varphi - \sin \varphi)$      $y_1 = r(1 - \cos \varphi)$  (1)

Figuur 1: Tekening voor het afleiden van de parameter-vergelijkingen

$$x_1 = r(\varphi - \sin \varphi)$$

$$y_1 = r(1 - \cos \varphi)$$



Dit is dan de parametervoorstelling van de cycloïde. De coördinaten van het laagste punt P zijn  $(\pi r, 2r)$ .

Om opmerkelijke eigenschappen van de cycloïde te weten te komen, moeten we eerst wat differentiëren. De berekeningen worden wat summier gehouden.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \cot \frac{1}{2} \varphi \quad (2)$$

Uit de tekening volgt dat BC een hoek  $\frac{1}{2} \varphi$  maakt met de  $x$ -as. Daaruit volgt - zie (2) - dat de richting van BC juist de normaalrichting in B is.

We gaan nu de kromtestraal  $R$  berekenen voor de diverse punten van de kromme. Daartoe moeten we een tweede afgeleide bepalen.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\cot \frac{1}{2} \varphi) =$$

$$= \frac{d}{d\varphi} (\cot \frac{1}{2} \varphi) \frac{d\varphi}{dx} = \frac{-1}{4r \sin^4 \frac{1}{2} \varphi} \quad (3)$$

In het algemeen geldt:

$$R^2 = \frac{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)^3}{(\frac{d^2y}{dx^2})^2}$$

Na invulling van (2) en (3) vinden we:  
 $R = 4r \left| \sin \frac{1}{2} \varphi \right|$  (4)

We zetten het stuk  $R$  op de normaal af en vinden zo het bijbehorende kromtemiddelpunt A, zodat AB de lengte van de kromtestraal is.

We willen nu de verzameling van de kromtemiddelpunten bepalen. Daartoe moeten we de coördinaten van A ( $x_2, y_2$ ) uitdrukken in die van B ( $x_1, y_1$ ).

$$x_2 = x_1 + R \cos \frac{1}{2} \varphi \text{ en } y_2 = y_1 - R \sin \frac{1}{2} \varphi$$

Na invullen van (4) vinden we:

$$\begin{aligned} x_2 &= r(\varphi + \sin \varphi) \\ y_2 &= r(-1 + \cos \varphi) \end{aligned} \quad (5)$$

De y-coördinaten van A en B blijken steeds tegengesteld te zijn, dus AC = BC.

De beide verzamelingen van kromtemiddelpunten blijken ook weer cycloïdedelen te zijn en wel congruent met de oorspronkelijke. Dat is gemakkelijk aan te tonen.

Als u de cycloïde (1) een translatie laat uitvoeren over  $\begin{pmatrix} \pi r \\ -2r \end{pmatrix}$  krijgt u cycloïde (5). Het mag ook over  $\begin{pmatrix} -\pi r \\ -2r \end{pmatrix}$ . Ga dat zelf maar na. Een kwestie van wat invulwerk. De eerste cycloïde heet de *evolvente* en de tweede de *evolute*. Alleen bij de cycloïde zijn beide identiek. De kromtestralen zijn raaklijnen aan de evolute. Dus bijvoorbeeld: AB raakt in A de cycloïde OAS. Dit kan gemakkelijk worden bewezen.

## Slinger

Het snijpunt van de evolutetakken stellen we S. We hangen in S een kogelslinger met lengte  $4r$ . Als we deze laten slingeren, zó dat de slinger binnen de evolute blijft, zal blijken dat het eindpunt P precies over de oorspronkelijke cycloïde heen en weer slingeret. Om dat te bewijzen zouden we de lengte van een stuk cycloïdeboog moeten berekenen. We kiezen daarvoor boog OB.

Stel de lengte van een klein stuk boog  $\Delta s$ , dan geldt:

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\text{of } ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} =$$

$$= (r d\varphi - r \cos \varphi d\varphi) \sqrt{1 + \cot^2 \frac{1}{2} \varphi}$$

$$\text{of } ds = 2r \left(\sin \frac{1}{2} \varphi\right) d\varphi$$

door integratie van 0 tot  $\varphi$ :

$$\text{boog OB} = 4r \left(1 - \cos \frac{1}{2} \varphi\right) \quad (6)$$

De halve cycloïdeboog OP = OS =  $4r$  en de hele boog  $8r$ .

$$\text{Uit (6) volgt verder:} \\ \text{boog BP} = 4r \cos \frac{1}{2} \varphi. \quad (7)$$

We moeten nu nog aantonen dat boog OA even lang is als de kromtestraal AB.

## Hulpstelling

Daarvoor leiden we eerst een hulpstelling af. In figuur 2 stellen we boog BP =  $a$  en de projectie ervan op de vertikaal  $b$ . Tussen  $a$  en  $b$  geldt dan de relatie:  $a^2 = 8rb$ . Het bewijs is eenvoudig.

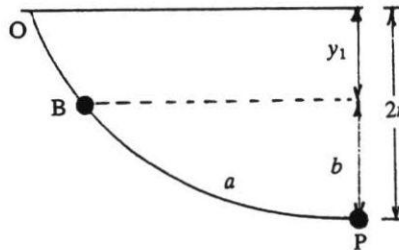
Uit (7) volgt:  $a = 4r \cos \frac{1}{2} \varphi$

verder:  $b = 2r - y_1 = r(1 + \cos \varphi)$

En dat geeft:  $a^2 = 8rb$  (8)

Nu kunnen we aantonen: boog OA =  $R$ , aldus:

$$\begin{aligned} \text{boog OA} &= \sqrt{8rb} = \\ &= \sqrt{8r \cdot r(1 + \cos \varphi)} = 4r \left| \sin \frac{1}{2} \varphi \right| = R. \end{aligned}$$



Figuur 2: Afleiding van  $a^2 = 8rb$

En hiermee is het verhaal rond: een slinger met lengte  $4r$  volgt met zijn eindpunt -keurig de eerste cycloïde als deze kunstmatig verkort wordt door aanleuningen tegen de evolutetakken.

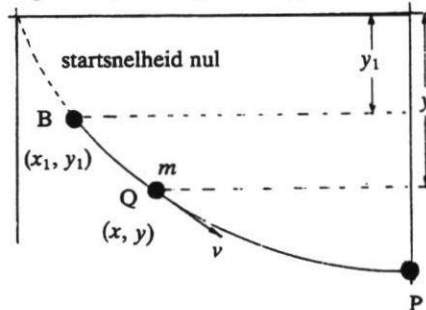
## Bepaling van de slingertijd

We zoeken nu de relatie tussen de positie van het slingerende punt Q afhankelijk van de tijd  $t$ .

Of anders gezegd: als we starten in B, in hoeveel tijd bereiken we dan P (zie figuur 3).

Bij de beweging wordt kinetische energie gewonnen uit verlies van zwaarte-energie, volgens de wet van behoud van energie.

Figuur 3: Omzetting van energie



Bij massa  $m$  en snelheid  $v$  is de bewegingsenergie  $\frac{1}{2}mv^2$  en bij daling over een afstand  $y-y_1$  de verloren zwaarte-energie  $mg(y-y_1)$  waarbij  $g$  de gravitatieversnelling ( $10 \text{ m/s}^2$ ). We stellen  $s_1$  gelijk aan de lengte van boog BP behorend bij het startpunt en  $s$  de booglengte QP voor een willekeurig moment. Wet van behoud van energie:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y-y_1) \text{ of } v^2 = 2g(y-y_1)$$

Uit (8) volgt:

$$s_1^2 - s^2 = 8r(u-y_1)$$

$$\text{of } s_1 - s = 8r \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ waarbij } v = \frac{ds}{dt}$$

De differentiaalvergelijking wordt:

$$s_1^2 - s^2 = \frac{4r}{g} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

met als mogelijke oplossing:

$$s = s_1 \cos \omega t$$

$$\text{waaruit volgt: } \frac{ds}{dt} = -s_1 \omega \sin \omega t$$

$$\text{Ingevuld: } s_1^2 (1 - \cos^2 \omega t) =$$

$$= \frac{4r\omega^2}{g} s_1^2 (\sin^2 \omega t)$$

Genoemde functie klopt inderdaad als:

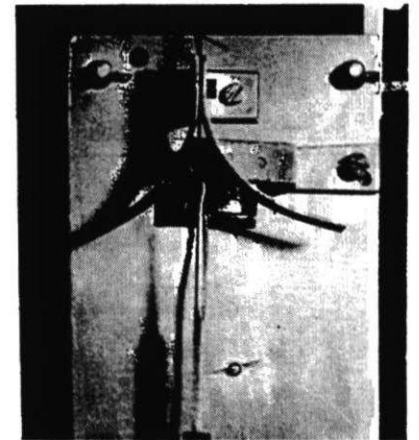
$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{r}}$$

Punt P wordt bereikt als  $s=0$  of  $\omega t = \frac{1}{2}\pi$  dus na een tijd  $\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$  of  $\frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{4r}{g}}$

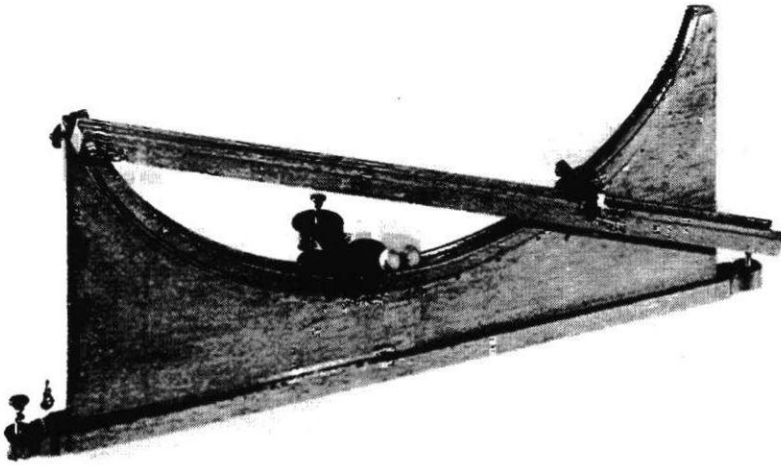
Opvallend hierbij is dat  $s_1$  in de relatie wegvalt. De trillingstijd is dus onafhankelijk van de slingerwijdte. Bij een gewone slinger (zonder cycloïde schilden) is in eerste instantie de slingertijd vrijwel onafhankelijk van de amplitudo, echter alleen voor kleine amplitudohoek. Bij verdere uitwaai gaat de trillingstijd wat teruglopen. Bij een uitwaaihoek tot  $24^\circ$  blijft de fout onder 1%. Bij de cycloïde slinger echter wordt de slinger bij de uitwaai kunstmatig verkort en de afwijking perfect gecompenseerd. Dit is dan de isochrone slinger van Huygens met een trillingstijd (volledige beweging heen en terug).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4r}{g}} \quad (9)$$

In het Universiteitsmuseum van de Rijksuniversiteit Utrecht (Biltstraat 166) is onder andere een slingeruurwerk aanwezig uit de tijd rond 1700. In figuur 4 zijn de cycloïdeboogjes duidelijk te zien.



Figuur 4: Detail van een slingerophanging met cycloïdeboogjes. Slinger uurwerk, gesignd Goudron à Paris, ca. 1700. KM 176. Foto Universiteitsmuseum Utrecht.



Figuur 5: Rechte en cycloïdale goot naast elkaar. Hiermee werd aangetoond, dat de valtijden langs de cycloïdale goot het kleinst zijn. Ongesigneerd, eikenhout, 18e eeuw.

M23 Foto: Universiteits-museum Utrecht.

### Glijden langs een goot in de vorm van een cycloïde

Een voorwerp dat langs een goot naar beneden glijdt, en daarbij dezelfde baan beschrijft als een voorwerp aan een slingerkoord, ondervindt dezelfde krachten als dat slingerende voorwerp. De tijdsduur is dan met dezelfde formules te berekenen.

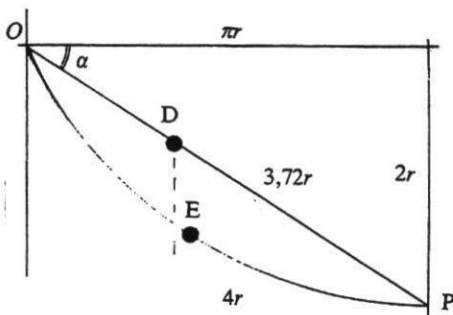
Een goot in de vorm van een cycloïde is ook te vinden in het Universiteitsmuseum (figuur 5). Maar het is aardiger zelf eerst wat te gaan rekenen. Daarom tot slot een probleem in de reeks „Natuurkunde als recreatie”.

### Krom vlugger dan recht

Tussen de punten O en P in figuur 6 zijn twee glijgoten aangebracht. De eerste is de rechte verbinding tussen O en P. De tweede heeft de vorm van een halve cycloïde. De afmetingen staan in de figuur.

Bepaal de verhouding van de glijtijden van O naar P langs beide goten (als de goten wrijvingsloos zijn).

**Oplossing hiernaast.**



Figuur 6: Wie is het eerst beneden?

### Oplossing: krom vlugger dan recht

Omdat de hellingshoek voor de rechte OP volgt uit:  $\tan \alpha = \frac{2r}{\pi r}$ ,

en dus  $\alpha = 32^\circ$ , is de versnelling  $g \sin 32^\circ$  of  $5,2 \text{ m/s}^2$ .

Voor de eenparig versnelde beweging geldt:  $OP = \frac{1}{2} (5,2)r^2$ .

Dus  $OP = 3,72 r$  ofwel  $t = 1,18 \sqrt{r}$ .

De glijtijd langs de cycloïdeboog is

$\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$  of  $1,00 \sqrt{r}$ .

En zo blijkt dat, hoewel de rechte 7 % korter is dan de boog, de glijtijd erlangs 18 % langer is.

En zo ziet u maar weer eens: de rechte weg is wel de kortste, maar niet altijd de snelste!

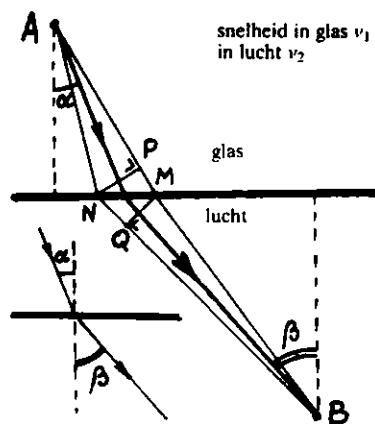
# Fermat, Bernoulli en de cycloïde

Naar aanleiding van mijn cycloïde-verhaal (NVON juni 1988), werd ik door Theo Smits geattendeerd op het boek „Die Mechanik in ihrer Entwicklung” (Leipzig 1908). Daar lezen we hoe Bernoulli het probleem van de snelste verbinding tussen twee willekeurige punten in het zwaartekrachtsveld op een geniale manier oploste door ... gebruik te maken van de bekende brekingswet van Snellius. Voorwaar een opmerkelijke prestatie.

De weg voert van Heron via Snellius en Fermat naar Bernoulli.

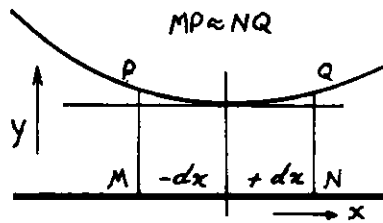
## Principe van Fermat

Een lichtstraal volgt in een homogene stof de rechte lijn, de kortste weg. Ook bij terugkaatsing tegen een spiegel kiest licht die kortste weg. Dat formuleerde Heron van Alexandrië al 2000 jaar geleden. Maar hoe is dat bij breking? Fermat verbeterde de stelling: licht volgt die weg, die de minste tijd vergt. Licht schijnt altijd haast te hebben en licht gaat al zo vlug. Vanuit dit axioma leidde hij de wet van Snellius af. Als een lichtstraal vanuit A in het eerste medium, waar de snelheid  $v_1$  is, naar B gaat in het tweede medium, waar de snelheid  $v_2$  is (stel  $v_2 > v_1$ ), dan volgt het licht die gebroken rechte die de minste tijd vergt (figuur 1).



Figuur 1: Bij breking volgt licht de snelste weg.

Hij loste dit minimum-probleem op zonder de ons vertrouwde differentieertechniek. Gebruik werd gemaakt van de redenering: voor punten rechts en links



Figuur 2: Voor punten rechts en links, dichtbij het minimum, geldt:  $MP \approx NQ$ .

vlakbij het minimum geldt:  $MP = NQ$  (figuur 2). Daarmee kan de kortste weglengte bij breking gevonden worden. Denken we ons (figuur 1) twee verbindingen AMB en ANB, de ene iets rechts en de andere iets links van minimale verbinding, dan geldt:

$AP + PM + MB = AN + NQ + QB$ .  
Hierbij zijn MQ en NP loodlijnen. Bij kleine verplaatsingen geldt:

$AP = AN$  en  $BQ = BM$ . Dus  
 $PM = QN$  of

$$\frac{NM \sin \alpha}{v_1} = \frac{NM \sin \beta}{v_2}$$

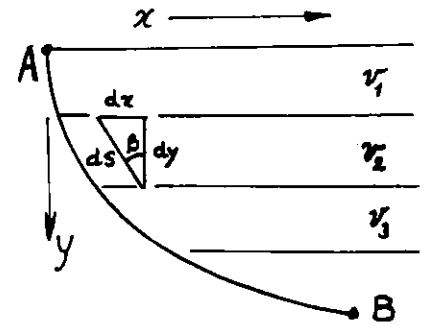
En dat is dan de wet van Snellius die we meestal schrijven als

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = n$$

## Bernoulli en de cycloïde

Nu een ander probleem: ontwerp een glijgoot van een dusdanige vorm, van A naar B, zodat de tijd voor dit traject minimaal wordt. Dit blijkt dan de cycloïde te zijn en die vergt dan minder tijd dan de rechte helling.

Johann Bernoulli gaf daarvoor het volgende bewijs.



Figuur 3: Afbuiging in een niet-homogeen medium.

Het voorwerp beweegt in het zwaartekrachtsveld (figuur 3) al dalend met steeds hogere snelheid. Het doet denken aan een lichtstraal die zich beweegt door een niet-homogene stof, waarbij de dichtheid en daarmee de lichtsnelheid gaandeweg toeneemt.

Omlaag gaande neemt de snelheid volgens de wet van behoud van energie toe volgens:  $v = \sqrt{2gy}$ , als  $y$  de verticaal afgelegde weg is, uitgaande van punt A, waar  $y=0$ . In dit geval kiezen we de positieve  $y$ -richting omlaag.

Welke weg zou een lichtstraal volgen indien er een continue breking zou optreden, zoals zonlicht vertoont dat lagen van de dampkring passeert met steeds veranderende dichtheid? Een ongetwijfeld creatieve gedachtesprong!

Een lichtstraal die volgens de aangegeven snelheidsvariatie van A naar B gaat, beschrijft deze weg dan in kortste tijd en geeft tegelijk de kromme baan voor de snelste glijbeweging. Noemen we de hellingshoek van een boogelement  $ds$  ten opzichte van de verticaal,  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  en de bijbehorende snelheden  $v_1, v_2, v_3, \dots$  dan geldt (volgens Snellius!):

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2} = \frac{\sin \gamma}{v_3} = \dots = k \quad (\text{constante})$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = k^2 \cdot v^2 \text{ of } \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 2gk^2 y.$$

En omdat  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$  volgt daaruit de differentiaalvergelijking voor de gezochte kromme:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r-y}{y}} \text{ waarbij } 2r = \frac{1}{2gk^2}.$$

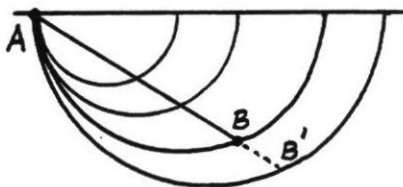
En dit is nu juist de differentiaalvergelijking van de cycloïde volgens welke een punt S, op een cirkel met straal  $r$ , beweegt, als deze rolt langs een horizontale rechte door A. Op  $t=0$  bevindt S zich in A.

Als u weet dat de parametervoorstelling van een cycloïde luidt:  $x = r(\varphi - \sin \varphi)$  en  $y = r(1 - \cos \varphi)$  dan is het niet meer moeilijk om dit na te rekenen.

### Constructie van de kromme

Tenslotte geeft Bernoulli nog een constructie-voorschrift voor de precieze kromme AB, bij gegeven positie van A en B. Om te beginnen, alle cycloïden zijn gelijkvormig.

We tekenen een cycloïde met een zekere  $r$  (keuze van de straal van de rolcirkel), met beginpunt A. Stel dat deze de rechte AB snijdt in  $B^1$  (fig. 4). Dan



Figuur 4: Constructie van de cycloïdebaan door A en B.

moeten we, om de cycloïde door B te vinden de eerste vermenigvuldigen met de factor  $\frac{AB}{AB^1}$

om de juiste te vinden. Tevens moet de straal van de rolcirkel dan worden:

$$\frac{AB}{AB^1} \cdot r.$$

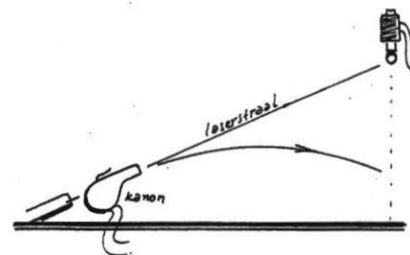
Na Johann Bernoulli hebben ook andere scherpe geesten als Leibniz, L'Hôpital, Newton en zijn broer Jakob Bernoulli zich op het probleem van de snelste verbinding gestort.

HENK MULDER  
Ulvenhout

## Natuurkunde, geen recreatie

Dit keer geen vermaak, maar een serieuze vraag. In de TELEAC-cursus „klassieke mechanica” werd een spectaculair experiment getoond. Ook veel van onze leerlingen hebben het gezien. Het is een variant op de schoolproef waarbij een horizontaal weggeschoten knikker en een, van dezelfde hoogte tegelijk losgelaten knikker, gelijk de grond bereiken.

Een glazen bolletje met aangeplakt ijzeren plaatje, was bevestigd onder een elektromagneet. Op de tafel staat een kanon dat precies op de bol gericht staat. Door middel van een laserstraal, die dwars door de loop schijnt, wordt daarop zuiver afgesteld. Kanon en elektromagneet zijn elektrisch gekoppeld, waar-

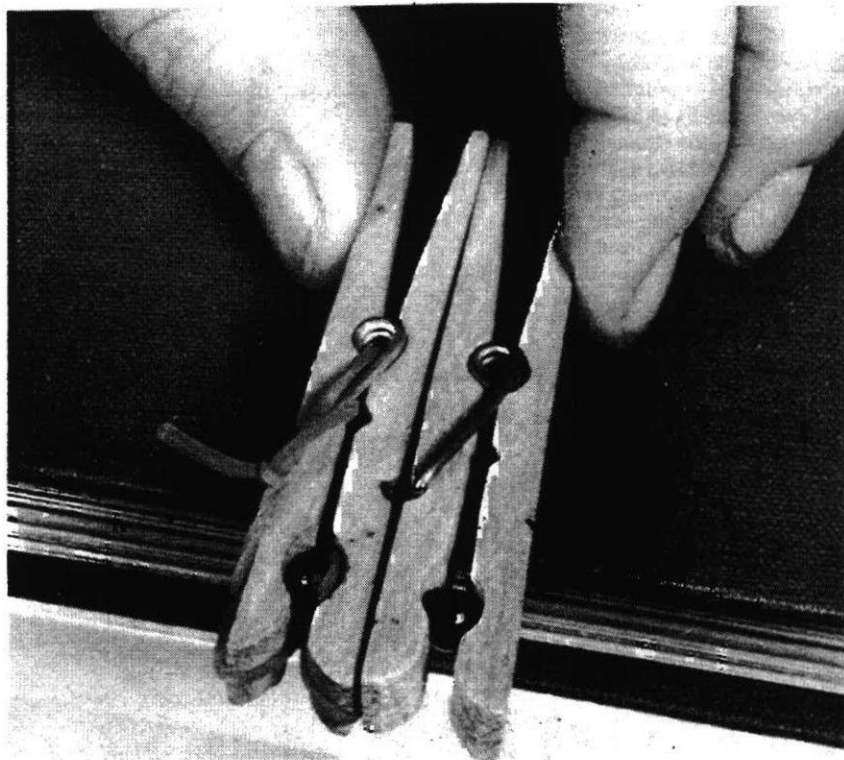


Het teleac-experiment.

door, op het moment dat het schot gelost wordt, ook het bolletje aan de vrije val begint. De kogel raakt de bal precies! Door eliminatie van de tijd in een tweetal vergelijkingen is wel aan te tonen dat kogel en bol elkaar zullen treffen. Maar zo vertel je het toch niet aan je leerlingen. Wie geeft een bewijs, zonder veel mathematische poespas, waarop in de klas met knikkend hoofd en hopelijk een glimlach gereageerd wordt?

Zie volgend artikel.

*Het bekende klasse-experiment, dit keer eens uitgevoerd met twee wasknijpers. De horizontale worp wordt gerealiseerd door middel van een elastiekje.*





# Goed gericht ... altijd raak

De kogels die elkaar raken - het experiment op bladzij 59 in nummer 2 van ons maandblad - hebben de lezers ook geraakt.

Wij ontvingen negen reacties, die laten zien hoezeer uitleggen ook een kunst is! Dank aan (in volgorde van binnenkomst) Hugo Kuiper, Bram Vrolijk, Hans Snel, J. M. Lindenberg, Fred Luider, A. I. Peynenborgh, Wim Bongenaar, Sijtze Stelwagen en J. D. A. Roeders. Hieronder staan de „oplossingen” samengevat in één verhaal.

De titel „Goed gericht ... altijd raak” (van de oplossing van de heer Peynenborgh) geeft de essentie in één zin weer. Toch hebben we wat meer zinnen nodig om die essentie te doorgronden. De meeste collega's maken daarvoor een tekening, met - haast automatisch - daarbij een assenstelsel. Hans Snel, A. I. Peynenborgh en Fred Luider kiezen hun  $x$ -as niet horizontaal, maar evenwijdig aan de richting van de beginsnelheid van de afgeschoten kogel. Het „bewijs” blijkt dan uit de tekening zelf, of er komen toch nog formules aan te pas.

Bij de formulering van - in onze ogen - de mooiste oplossing is geen tekening - en helemaal geen assenstelsel - nodig. Hieruit blijkt hoezeer wij zijn beïnvloed door de traditionele didaktiek! De berekeningen die een aantal inzenders uitvoeren komen dan neer op het „bewijzen” dat bij een eenparige beweging afstand en tijd evenredig zijn.

## Het antwoord samengevat

Bekijk de situatie vanuit de vallende kogel. De afgeschoten kogel is op de vallende kogel gericht; hun *relatieve* snelheid heeft dezelfde richting als hun *relatieve* plaatsverschil. Bij het vallen krijgen beide kogels dezelfde snelheidsverandering, zodat hun *relatieve* snelheid in de tijd dezelfde blijft. Vanuit de vallende kogel zie je *op elk moment* de andere kogel recht op je af komen!

Of zoals Bram Vrolijk het formuleerde: Doe het proefje in een vrij vallende lift. Een waarnemer in de lift, die mee valt en dus de vrije-val-component niet ziet ervaart hoe de ene kogel eenparig recht-

lijnig op de tweede afgaat en die dus treft.

De zienswijze van Wim Bongenaar is ook fraai:

Terwijl het projectiel zuiver op weg is gestuurd naar het doelwit, ondergaan de twee dezelfde neerwaartse zwaartekrachtsversnelling. Even goed kun je zeggen: terwijl het projectiel zuiver op weg is naar het doelwit, begint de aarde - de achtergrond als het ware - omhoog te versnellen. Een projectiel dat precies op weg is naar het doelwit, treft dat zeker, hoe ook de achtergrond beweegt.

Hij schrijft erbij: Vergelijk de vertoning van een western op een schommelend scherm. Dát de kogels elkaar treffen, betekent overigens een „bewijs” voor de stelling dat beide kogels op gelijke wijze door de zwaartekracht worden beïnvloed in hun bewegen.

## Bewijzen met een tekening

Natuurkunde is een visueel vak en een plaatje doet vaak meer dan een stuk tekst.

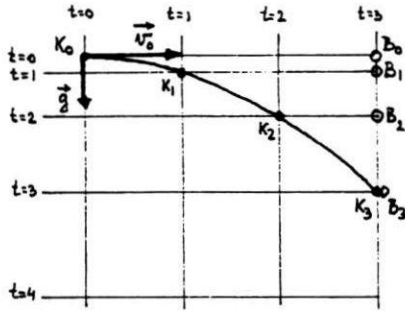
Zowel de heer Peynenborgh als Fred Luider leveren een tekening met „tijdlijnen”, die de plaatsen van de twee kogels verbinden op de tijdstippen 0, 1, 2, enzovoort. Die tijdlijnen zijn steeds evenwijdig aan de richting van de beginsnelheid (figuren 1 en 2).

Het verhaal erbij moet u nu zelf kunnen vertellen.

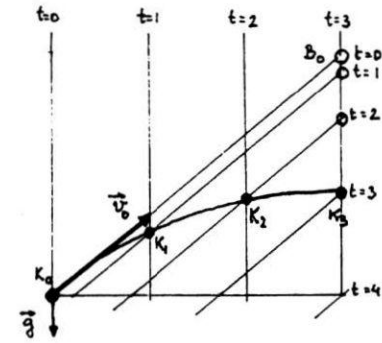
Hans Snel doet drie proeven met twee kogels (knikkers) tegelijk.

Allereerst de bekende proef van de horizontale worp (figuur 3):

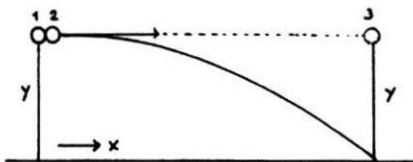
Laat knikker 1 vallen en schiet tegelijkertijd knikker 2 horizontaal weg: beide



Figuur 1: Horizontaal schot



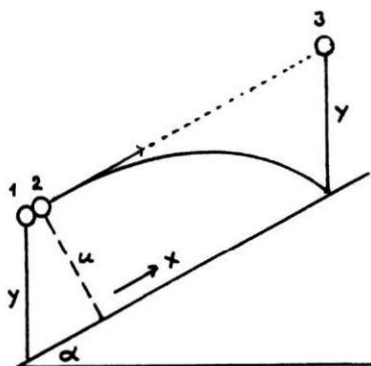
Figuur 2: Schuin omhoog gericht schot



Figuur 3: Val- en schietproef boven een horizontaal vlak

knikkers bereiken tegelijk de grond. Daarna wordt de proef gedaan boven een hellend vlak. Knikker 1 wordt losgelaten en knikker 2 wordt tegelijkertijd afgeschoten in een richting evenwijdig aan dit vlak (figuur 4). Beide knikkers bereiken het hellend vlak tegelijkertijd. Anders gezegd: de tijd  $t$  tussen loslaten en raken van het hellend vlak is onafhankelijk van de grootte van de beginsnelheid. Bij een begin-afstand  $u$  ten opzichte van het hellend vlak geldt de formule

$$u = \frac{1}{2} (g \cos \alpha) t^2.$$



Figuur 4: Val- en schietproef boven een hellend vlak

De derde proef is dan het Teleac-experiment. In plaats van knikker 1 laat men op  $t = 0$  nu knikker 3 los. Knikker 3 valt over dezelfde hoogte  $y$  als knikker 1 en doet er dus even lang over. 2 en 3 zullen elkaar raken.

Het hellend vlak van Hans Snel heeft dezelfde functie als de „tijdlijnen” in figuur 2. Het tijdstip van ontmoeting wordt bepaald door snelheid en afstand tussen 2 en 3 in de  $x$ -richting.

Het werken met een scheef-hoekig assenstelsel is voor velen nog niet vertrouwd. Hugo Kuiper en Sijtze Stelwagen werken liever met de bekende  $x$ -as horizontaal en  $y$ -as verticaal. Ze bewijzen dan dat voor de afgeschoten kogel geldt:

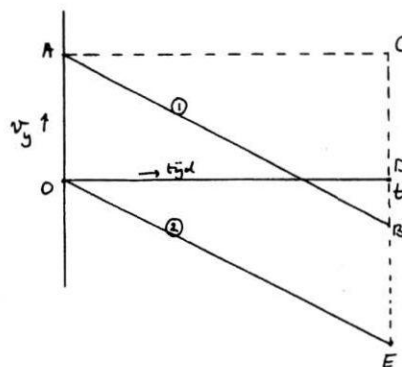
$$\frac{s_x}{v_x} = \frac{s_y}{v_y} (= t)$$

Hugo Kuiper maakt verder een diagram waarin de verticale snelheid van de twee kogels is uitgezet tegen de tijd (figuur 5). De (verticale) verplaatsing is dan te bepalen als oppervlakte onder de grafiek. Om te zien wat dat betekent is figuur 6 getekend.

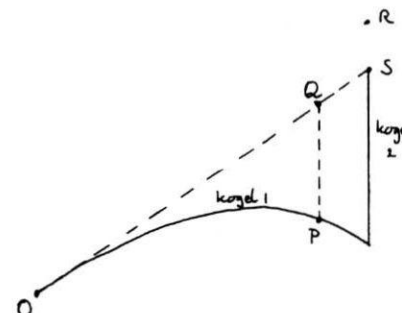
Zou kogel 1 rechtdoor bewegen, dan zou deze op tijdstip  $t$  bijvoorbeeld in punt Q zitten; hij zit dan echter in P.

Uit figuur 5 volgt dan: afstand PQ = oppervlakte van driehoek ABC = oppervlakte van driehoek OED = valweg van kogel 2 op tijdstip  $t$ .

Dus de afstand die kogel 1 onder de lijn OS zit is op ieder tijdstip even groot als de valweg van kogel 2. Dit betekent dat beide kogels even ver onder het begin-



Figuur 5: Verticale snelheid uitgezet tegen de tijd



Figuur 6: De banen van de kogels

punt van kogel 2 zitten op het moment dat kogel 1 de verticaal van kogel 2 passeert: ze botsen.

Op deze manier is ook makkelijk te zien hoever ze elkaar missen als je het kanon verkeerd richt. Mik je bijvoorbeeld op punt R, dan zullen ze elkaar (verticaal gezien) missen op een afstand RS.

## De moraal (van dit ...)

Wij leraren hebben vaak moeite met het uitleggen van een evident verschijnsel omdat we - net als onze leerlingen! - herkenning zoeken in een vertrouwde oplossingmethode. Dit voorbeeld heeft velen bezig gehouden en uiteindelijk een eenvoudig antwoord opgeleverd.

Bij dit probleem blijkt het gebruik van een orthogonaal assenstelsel geen voordeel maar juist een nadeel te zijn om inzicht te verkrijgen. Ook bij onze lespraktijk blijkt vaak dat een eerder geleerde regel later begrip kan blokkeren. In de mechanica willen zwakke leerlingen energievraagstukken het liefst oplossen met de kinematische formules.

Het zou dan ook een grote opluchting zijn als formules als

$$s(t) = v(0) \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$$

uit het programma zouden verdwijnen. Dan hebben we het nog niet eens over de leerlingen die vraagstukken over de horizontale worp met die formule zouden willen oplossen.

Met het basisprincipe: verplaatsing is (gemiddelde) snelheid maal tijdsduur kunnen we de meeste verplaatsingsproblemen oplossen.

De bedoeling van dit verhaal is om inspiratie te stimuleren en niet om de waarde van jarenlange ervaring aan te tasten. Begrijp ons goed!

In een volgend nummer zullen wij u een nieuw probleem aanbieden.

# De intelligente veer

## Techniek in het practicum

Elke avond vertrekt uit de Noorse havenstad Bergen om 20 uur een gecombineerde vracht- en passagiersboot, die heel de kust afvaart tot langs de Noordkaap naar de Russische grens. De maatschappij functioneert al 90 jaar en heeft elf schepen in dienst. De reis naar het Noorden duurt, dag en nacht varen, een week. Hierbij worden 35 havens aangedaan. Het transport is kleinschalig. Voor die klant een partij dozen, daar een andere een stel oliedrums. Ook de post gaat mee.

Voor het laden en lossen wordt gebruik gemaakt van een kraan, waaraan een hefvork hangt.

Als er geen bijzondere voorziening was getroffen, zou de onbelaste vork in een andere stand aan de kabel hangen dan de belaste.

Immers het zwaartepunt is dan wat opgeschoven. Maar, voor praktisch gebruik zou de werkvloer in beide gevallen vrijwel horizontaal moeten blijven. Want bij landing op de kade of op het scheepsdek is dat het gemakkelijkst werken in het geval de vork onder een pallet moet worden geschoven of eronder weggetrokken.

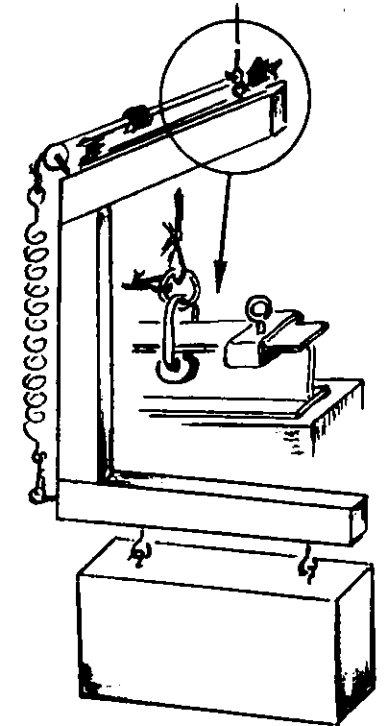
Daartoe is de hefvork aan de bovenzijde uitgerust met een dubbel ophangpunt, een voor de onbelaste en een voor de belaste toestand. In plaats van met de hand het ophangpunt telkens te verstellen, zorgt een veer, te zien op de rechter foto, voor een automatische verschuiving.

Aan de veer worden bijzondere eisen gesteld. Als de vork onbelast op de grond staat (figuur 1a), rust het ophangpunt in A tegen een nok. De veer heeft nu al een zekere spanning. De positie van A is recht boven het zwaartepunt  $Z_1$  gekozen. Als de lege vork nu wordt opgetakeld (figuur 1b), moet de veer nog zoveel spanning hebben dat het oog in A blijft. Dan immers behoudt de vloer de horizontale stand. Nu zetten we een voldoende grote massa erop. Het zwaartepunt van de combina-

tie komt nu iets meer naar buiten te liggen ( $Z_2$ ). Bij hijsen verschuift het oog nu automatisch naar het eindpunt B en wordt daar gestopt. In het ideale geval moet punt B recht boven  $Z_2$  komen (figuur 1c).

Maar om dat allemaal zo goed mogelijk te benaderen, moet wel de goede veer met de juiste lengte en voorspanning gekozen worden.

Voor de bovenbouw zit hierin een aardige werkopdracht. We hebben een tweedimensionaal houten model ge-

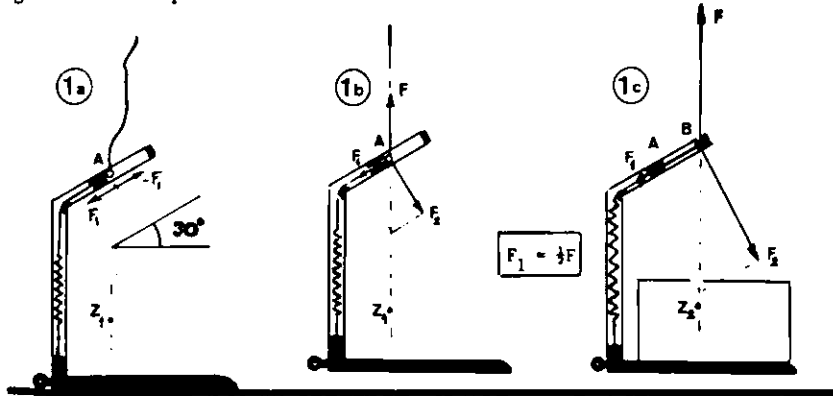


Figuur 2. Experimenteel model.

maakt met een glijdend ophangpunt (figuur 2). Dan komt daarop een dusdanig zware massa, dat het zwaartepunt zich duidelijk verplaatst. Om wat ervaring met de problematiek op te doen, kan eerst wat met elastiekjes geknutseld worden. Dan moet er een keuze worden gemaakt voor een veer en bijbehorende lengte.

Dan worden de posities van de punten A en B gefixeerd, zodat in belaste en onbelaste toestand de vloer horizontaal blijft. De eerste opgave is dus: laat de zaak werken!

Figuur 1. Kracht op de veer.



### Fysische analyse

Allereerst worden belaste en onbelaste vork gewogen. Dan moet een constructie gemaakt worden van de krachten die in de drie gevallen op het ophangpunt werken (zoals in figuur 1). Dan proberen we nog met een grafiek een en ander toe te lichten.

Als voorbeeld kiezen we nu getallen zoals bij de Noorse rederij. De vork heeft daar een massa van 100 kg en we nemen als



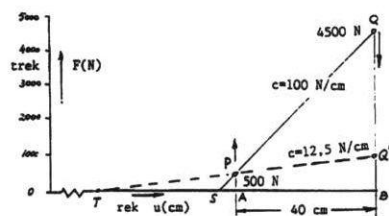
Kabel onbelast.



Kabel belast.

last 800 kg. De verplaatsing AB is daarbij 40 cm. De hoek tussen vloer en ophangstang is  $30^\circ$  (figuur 1a). Bij een gewicht van 1000 N moet in geval 1b de trek van de veer *minimaal*  $F_1 = 500$  N zijn.  $F_1$  is hier de veerkracht verminderd met een eventuele reactiekracht van nok A in de richting van de rail.  $F_2$  is de reactiekracht van de rail loodrecht op de eerste richting.

In geval 1c moet  $F$  *maximaal*  $F_1 = 4500$  N zijn.  $F_2$  is hier de som van de veerkracht en de eventuele reactiekracht. Ga eerst na waarom de woorden *minimaal* en *maximaal*. In figuur 3 zijn P



Figuur 3. Veer karakteristiek.

en Q de betreffende meetpunten; de grensgrafiek loopt door P en Q. De veerconstante:

$$C = \frac{BQ-AP}{AB} = 100 \text{ N/cm.}$$

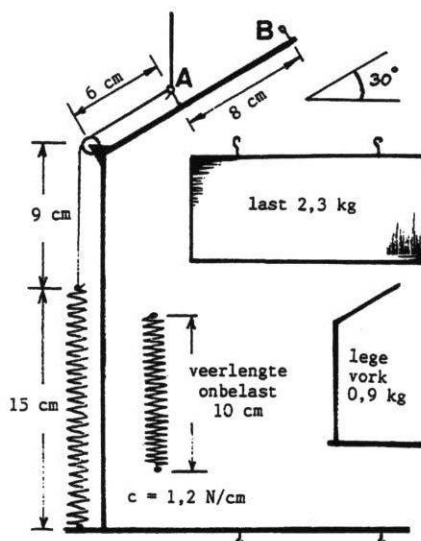
SA is de rek van de veer bij onbelaste vork, ongeveer 4,5 cm. Het gewicht van de vork zelf is constant en daarmee de ligging van P.

Kiezen we voor grafiek PQ dan zal het oog dus pas in B komen als de last minimaal 800 kg is. Maar in de praktijk wisselt de last voortdurend in grootte.

We handhaven daarom punt P, maar kiezen Q veel lager. Neem bijvoorbeeld  $BQ^1 = 1000$  N. Dan  $C = 12,5$  N/cm, hetgeen overeenkomt met een veel slappere veer.

Ga zelf na dat het oog nu al tot B doorschuift bij een last van slechts 100 kg. Maar dat betekent wel, zie grafiek, dat de rek in onbelaste toestand  $TA = 40$  cm moet zijn. En dat lijkt nogal veel in verband met de beschikbare ruimte binnen de vork.

Merk verder op dat dan voor lasten onder 100 kg het oog ergens tussen A en B komt. Dat is allemaal keurig in de grafiek af te lezen. Het lijkt trouwens toch verstandig niet teveel te rekenen, maar vooral grafisch af te lezen. Samenvat-



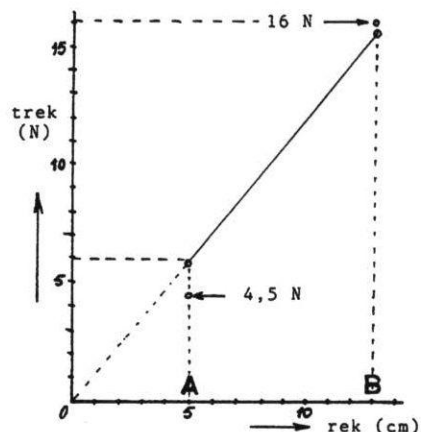
Figuur 4. Afmetingen van het model.

tend: kies een vrij slappe veer met voldoende voorspanning.

## Werkmodel

In figuur 2 is een houten model getekend. Het schuifmechaniek bestaat uit een stuk gordijnrail, gemonteerd op de schuine draagbalk. Twee eindstukjes kunnen op de juiste plaatsen op de rail worden vastgezet, als nokken om aan weerszijden het oog te stoppen. Voor het gemak is de last onder aan de „pallet” gehangen.

Bij ons model heeft de vork (zonder last) een massa 0,9 kg. De gebruikte veer heeft in onbelaste toestand een lengte van 10 cm en een veerconstante 1,2 N/cm. Als last nemen we een baksteen van 2,3 kg. Een touwtje van 15 cm lengte verbindt de veer met het ophangoog. Voor verdere lengtematen zie de figuren 4 en 5. Hieronder wordt aangetoond dat de lege vork inderdaad in A blijft hangen en bij de gegeven belasting in B.



Figuur 5. Veer karakteristiek van het model.

Bij 5 cm rek heeft de veer een trekkracht  $5 \times 1,2$  of 6 N. Om de lege vork met een gewicht 9 N in A te houden, zou dus minstens een veerkracht van 4,5 N nodig zijn. Er is 6 N beschikbaar, dus voldoende.

Bij  $5 + 8$  of 13 cm rek trekt de veer met  $13 \times 1,2$  of 15,6 N. Om de belaste vork met een totaal gewicht 32 N in B te houden, zou de trekkracht van de veer maximaal 16 N mogen zijn. De trekkracht is slechts 15,6 N, dus niet te hoog. In figuur 5 is dit alles nader toegelicht.

Het interessante van het onderzoek is dat het voortkomt uit de praktijk, waar vaak randvoorwaarden en benaderingen meespelen.

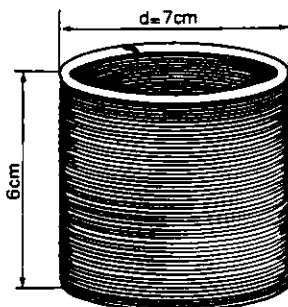
Eigenlijk is het experiment met de veer vrij elementair, stof voor tweede klassers. Maar in deze vorm naderen we met dezelfde veer eindexamenniveau!

# Versnelde spoed

We laten een lange veer (slinky) vertikaal vrij uithangen. Bij veerproeven is het gebruikelijk de veer van onderen te belasten en het gewicht van de veer zelf te verwaarlozen. We hangen er nu juist niets onderaan en daardoor is de vervorming enkel het gevolg van het eigen gewicht. De veer is op te vatten als een serieschakeling van elementaire veren: de afzonderlijke windingen. Hoe hoger, des te meer wordt zo'n winding uitgerekt door het gewicht van alle eronder hangende windingen samen.

Eerste vraag: welke is de wetmatigheid in de onderlinge afstanden? Naar boven gaande nemen die afstanden toe, maar hoeveel?

We werken met een slinky met een massa 215 g en 7 cm diameter (figuur 1). Van de 100 windingen gebruiken we er 88 over een lengte van 2 m. Naast de veer plaatsen we een meetlat waarop de posities van de achtereenvolgende ringen zijn af te lezen (figuur 2).



100 windingen

Figuur 1 Pakketje van 100 windingen

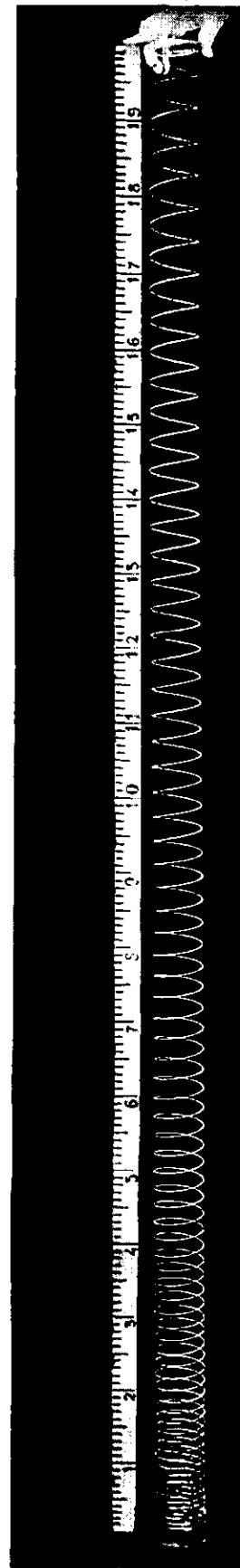
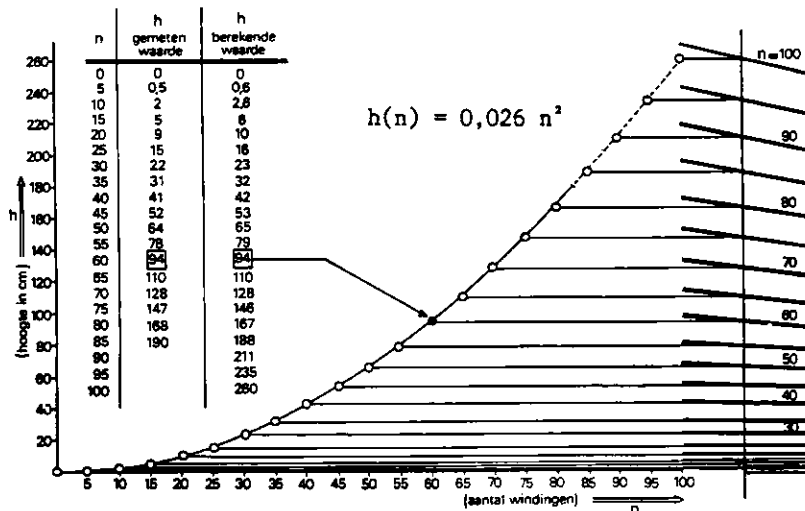
We nemen het onderste punt als nulpunt en bepalen, om praktische redenen, telkens een punt vijf ringen hoger. Daartoe zijn de ringen om de vijf van een plastic strookje voorzien.

In figuur 3 zijn de gemeten waarden in tabel en grafiek aangegeven. Horizontaal het rangnummer  $n$ , verticaal de hoogte  $h$ . De verzameling meetpunten is, zoals te verwachten, geen rechte. Misschien een parabool? Laten we een gokje wagen. Kies ergens halverwege het punt met  $n=60$  en  $h=94$  cm. De kwadratische relatie luidt:  $h = p \cdot n^2$ . Vullen we de gemeten combinatie in, dan vinden we:  $p = 0,026$ . Als er dus een parabool door de meetpunten zou gaan, wordt de vergelijking:

$$h(n) = 0,026 n^2 \quad (1)$$

Vervolgens gaan we nu voor  $n=5$ ,  $n=10$ , ...  $n=100$ , de waarden van  $h$  berekenen en de uitkomsten vergelijken met

Figuur 3 Grafiek en formule

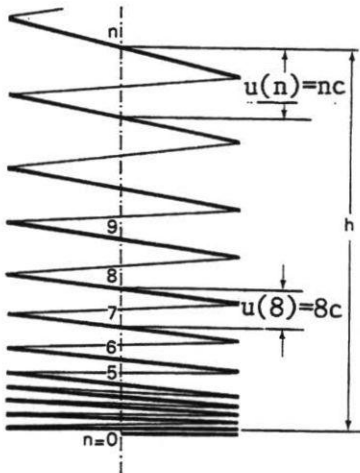


Figuur 2 Uithangen slinky

de gemeten waarden. Het verschil blijkt gering. Het is niet verwonderlijk dat speciaal bij kleinere waarden van  $n$  fout relatief groter is. U kunt natuurlijk ook horizontaal  $n^2$  uitzetten en verticaal  $h$ . Dan verschijnt een rechte.

### Afleiding

Elke winding is een aparte veer met aanvankelijke lengte en uitrekking nul. De slinky heeft geen voorspanning en de dikte van de ringen verwaarlozen we. Als de veer uithangt, vertoont elke winding een rek die volgens Hooke, evenredig is met het gewicht van alle die eronder hangen. De uitzakking loopt dan evenredig met het rangnummer  $n$  op en wel van 0 tot  $Cn$ .



Figuur 4 Toename van de rek

Zo heeft (figuur 4) de achtste winding een uitrekking  $8C$  en zo verder. De gemiddelde rek voor de eerste  $n$  windingen is dus:  $\frac{1}{2}(0 + Cn) = \frac{1}{2}Cn$ . De hoogte van de  $n$ -de winding volgt dan uit:

$$h(n) = \frac{1}{2}Cn \cdot n = \frac{1}{2}Cn^2. \quad (2)$$

Als we  $\frac{1}{2}C = 0,026$  stellen hebben we de slinkyformule. Het is niet noodzakelijk voor  $n$  alleen hele getallen te kiezen; we kunnen net zo goed  $2\frac{1}{2}$  of  $70,3$  nemen.

### Analogie

De formule  $h(n) = \frac{1}{2}Cn^2$  lijkt sprekend op die bij de versnelde beweging:  $s(t) = \frac{1}{2}at^2$ . Zoals bij de veer de rek per winding telkens met eenzelfde bedrag toeneemt, stijgt ook bij de eenparig versnelde beweging met eenzelfde bedrag per tijdseenheid de snelheid. Dat bedrag noemen we daar de versnelling. Zullen we in analogie

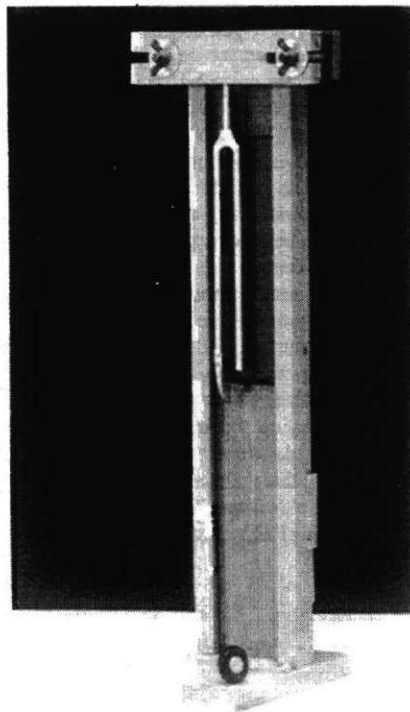
daarmee de spoedtoename per winding  $C$  maar de spoedversnelling noemen. De analogie is verder door te trekken. Zo volgt in het geval van een eenparig versnelde beweging met beginsnelheid:  $s(t) = v(0)t = \frac{1}{2}at^2$ . Zo'n formule krijgen we ook bij de lange veer, als we onderaan er een bepaald gewicht aanhangen. Hoe zal  $h$  dan afhangen van  $n$ ? Wel, u raadt het al:  $h(n) = bn + \frac{1}{2}Cn^2$ . Probeer u dat maar eens af te leiden. Wiskundig gezien is het niet meer dan wat verschuiving van de assen. Natuurkundig gezien, zou u de eerste serie windingen als belasting van de overige kunnen opvatten. Wat zou de factor  $b$  voorstellen? En kunt u die in ons geval uitrekenen?

### Verdere fantasieën

In het bovenstaande is er meer dan een formule-overeenkomst. Als u een golflijn in de vorm van een sinus ziet, waar denkt u dan aan? De kromme is op te vatten als een tweedimensionale grafiek, bijvoorbeeld het verband aangevend tussen tijd en uitwijking. Maar ze is ook op te vatten als het zijaanzicht van een driedimensionale schroef.



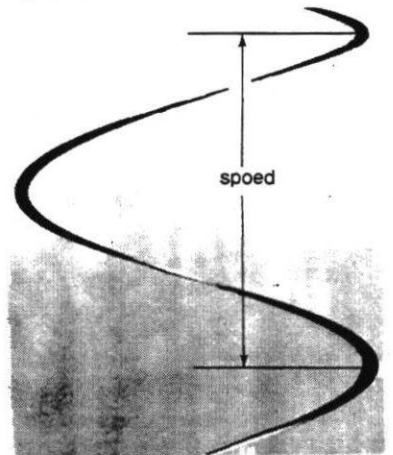
Figuur 5 Grafiek of voorwerp?



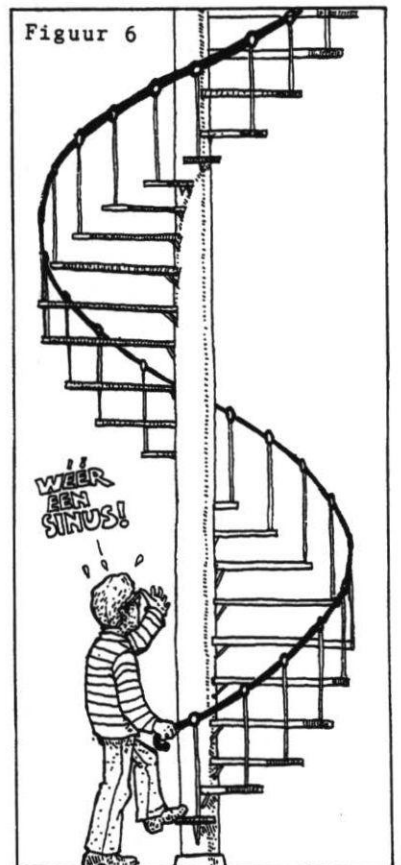
Figuur 7 Valmachine voor versnelde golflijn

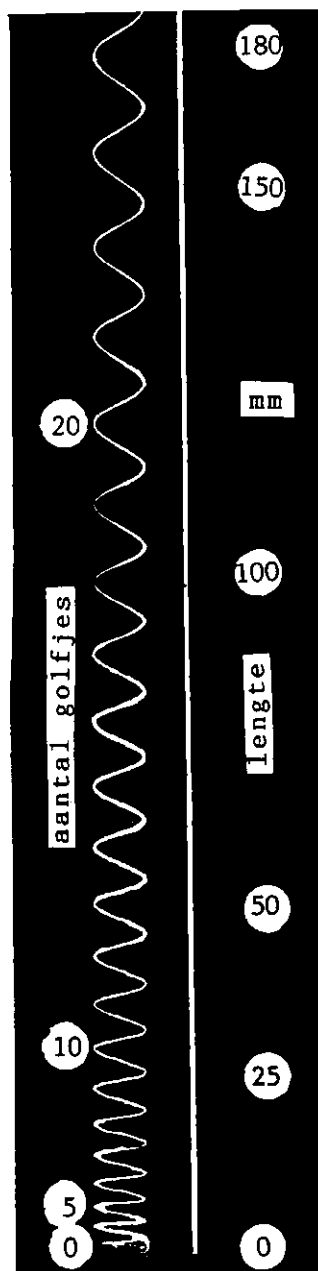
Zo levert de kraspen van een aangeslagen stemvork, die we eenparig over een roetplaat trekken een normale sinus (figuur 5), maar het zijaanzicht van een wenteltrap ziet er net zo uit (figuur 6). In het eerste geval is de golflengte constant, in het tweede geval de spoed. Met de valmachine van figuur 7 kunnen we een roetplaat versneld laten vallen en daarop de grafiek van figuur 8 laten krassen. Maar is dat nu juist niet hetzelfde plaatje als het zijaanzicht van de uitgehangen veer? We moeten er dan wel recht tegen aankijken, zoals ongeveer ter hoogte  $h = 130$  cm in figuur 2. We beschouwen het hiermee voor de leerlingen als gezien, maar wie nieuwsgierig is, vermoedt nog meer interessants.

Figuur 6



Figuur 6





Figuur 8 Versnelde sinus op roetplaat ( $f = 125 \text{ Hz}$ )

### Golfsnelheid

Als we de slinky aan de onderkant een horizontale tik geven, gaat er een trilling versneld omhoog. Hoe snel? De formule voor de transversale voortplantingssnelheid ( $v$ ) van golven in een veer luidt:

$$v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}}$$

waarbij de breuk  $\frac{m}{l}$  de massa per lengte-

eenheid voorstelt. In ons geval, waarbij deze verhouding van punt tot punt verandert, vervangen we deze door het diffe-

rentiaalquotient  $\frac{dm}{dh}$ , zodat

$$v = \sqrt{F \cdot \frac{dh}{dm}} \quad (3)$$

Omhooggaande neemt  $v$  dus toe en wel om twee redenen:

$F$  stijgt en  $\frac{dh}{dm}$  evenzo. Sorry, even wat

rekenwerk.

Stel de massa per winding  $\mu$ .

Dan  $F = n\mu g$  en

$$\frac{dh}{dm} = \frac{dh}{\mu dn} = \frac{Cn}{\mu} \quad (4)$$

Ingevuld volgt:

$$v = n \sqrt{Cg} = n \sqrt{\frac{2hg}{n^2}} \text{ of } v = \sqrt{2hg}$$

Een hoogst merkwaardige uitkomst: de vrije-val-formule!

Dat betekent dat de beweging van de trilling omhoog het spiegelbeeld is van de vrije val en, wat nog meer verbaast, onafhankelijk van de veereigenschappen als veerconstante, aantal windingen, massa...

En uit dat alles volgt direct dat de versnelling omhoog gewoon  $g$  is en daaruit ten slotte:

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad (5)$$

Die laatste formule geeft dan aan hoe ver de trilling na een zekere tijd gevorderd is, vanaf het moment van de stoot beneden.

### Staande Golf

We kunnen nu bepalen in hoeveel tijd de trilling tot boven wordt doorgegeven. Ingevuld in (5):

$$1,9 = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2 \text{ of } t = 0,6 \text{ s.}$$

Als we in de veer een staande golf willen realiseren, kunnen we beginnen met de grondfrequentie, waarbij de veerlengte is een kwart golflengte;

$$\text{dus } T = 4 \times 0,6 = 2,5 \text{ s of } f_0 = 0,4 \text{ Hz.}$$

Willen we „de eerste boventoon” dan

$$f_1 = 3 \times 0,4 = 1,2 \text{ Hz.}$$

Volgens het schema buik/knoop/buik/knoop, is de veerlengte dan  $\frac{3}{4}$  golflengte.

Maar... de eerste knoop ligt niet zoals bij een horizontale homogene veer op één derde deel van het eind, maar... het leek bij de meting meer op 10% van de veerlengte! Zou het misschien op één negende deel van het eind liggen? Mijn zoon die met mij aan de proef werkte, merkte op: het zou mij niet verbazen als die knoop op één derde deel van het totaal aantal windingen ligt! Hoe komen we daar achter?

### Spiegelbeeld

Zou het experiment met de roetplaat ons misschien aan ideeën kunnen helpen?

Zouden de zaken misschien nog verder parallel lopen?

Wel, in figuur 8 is de tijdsduur per golflengte steeds gelijk en wel de trillingstijd  $T$  van de stemvork. Is er analogie bij de veer??

Combineert u eens de formules (2) en (5). Door gelijkstelling volgt:

$$\frac{1}{2}Cn^2 = \frac{1}{2}gt^2 \text{ of } t = n\sqrt{\frac{C}{g}} \quad (6)$$

Dat betekent dat de stijgtijd evenredig is met het windingsgetal. Of anders gezegd: de tijdsduur voor de trillingen om van een winding bij de volgende te komen is

$$T = \sqrt{\frac{C}{g}}$$

We noemen dit de passeertijd en die is in ons geval ongeveer 0,07 s. Ook de omgekeerde grootheid heeft fysische zin:

$$f_0 = \sqrt{\frac{g}{C}} \quad (7)$$

Dit is de passeerfrequentie of het aantal gepasseerde windingen per seconde.

Bij de veer zal de tijdsduur van voortplanting tussen elke buik en naburige knoop gelijk moeten zijn en dus ook het aantal windingen. Dat betekent in het geval van de eerste boventoon  $\frac{1}{2}$  deel van het totaal en... dat komt dan voor het onderste stuk overeen met  $\frac{1}{2}$  deel van de totale lengte.

Diezelfde relatie komt u ook tegen bij de beroete plaat (figuur 8). Totaal staan er 24 golven op 180 mm afstand. Op 20 mm ( $\frac{1}{9}$  deel van de totale lengte) zijn daar 8 golven te tellen ( $\frac{1}{3}$  deel van het totale aantal)!

### Natuurkunde als recreatie

En zo heeft een simpele uitgehangen veer onze leerlingen een stuk practicum bezorgd en mij en mijn collega een aantal uren verwondering, ploeteren en... nog veel vragen!

1. Vindt u ook als algemene formules

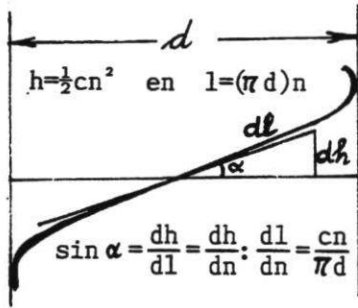
$$f_0 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{g}{2H}}; f_1 = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{g}{2H}} \text{ enz.}$$

Hierbij is  $H$  de totale lengte van de uitgehangen veer.

2. Kunt u bewijzen dat de helling aan de voorzijde van de veer bij  $n=80$  bijvoorbeeld  $11^\circ$  is (zie figuur 3)? De methode van berekening vindt u in figuur 9.

3. Herkent u ook dat de met een extra gewicht belaste veer overeenkomt met figuur 8, waar we onderaan een stuk afknippen?

4. Probeer u eens met behulp van de aangegeven werkwijze aan te tonen dat in een verticaal vrijhangend touw de voor-



Figuur 9 Bepaling van de hellingshoek

plantingsversnelling  $\frac{1}{2}g$  wordt! In dat geval is

$\frac{dm}{dh}$  constant.

5. Heeft u ook ontdekt dat de diameter van de windingen bovenaan kleiner is dan beneden? Is dat soms analoog met de amplitudo-afname door demping bij de stemvork? Of slaan we nu al te veel op hol?

**Kunst**

Een spreekwoord zegt: „haastige spoed” is zelden goed. Hoe zal het dan met „versnelde spoed” zijn? De kunstenaar die de schoorsteen (figuur 10) op het terrein van de Hoovercraftcorporation beschilderde, had het een stuk gemakkelijker. Voor hem was versnelde spoed alleen maar mooi; hij hoefde niets te bewijzen!



Figuur 10 Versnelde kunst op schoorsteen in Calais

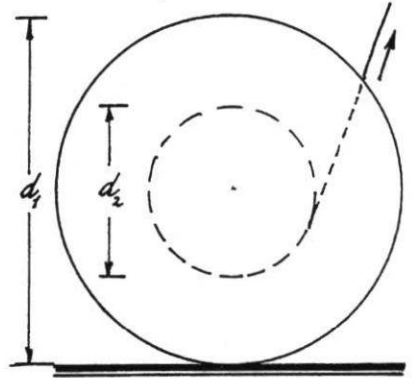
**De geheimzinnige garenklos**

Als we een garenklos onder een hoek van  $54^\circ$  met het tafelblad via de draad wegtrekken, gaat deze naar links rollen. Doen we het onder  $52^\circ$  dan naar rechts. Vanwaar dit vreemd gedrag? De binnen- en buitendiameter verhouden zich als eenvoudige gehele getallen. Bepaal die verhouding. Eerst zelf proberen.

**Oplossing: de geheimzinnige garenklos**

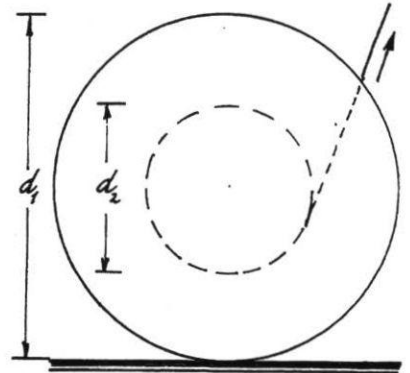
Het draaipunt bij rollen is het contactpunt van klos en tafelblad. Wanneer de werklijn van de trekkracht dit punt rechts passeert (zie figuur 1), gaat de klos linksom draaien en omgekeerd. Gaat het verlengde van de trekdraad precies door dat punt, dan gaat het klosje schuiven. Voor de trekrichting geldt dan:

$\cos \alpha = d_2/d_1$ .  
 Omdat  $\cos 54^\circ = 0,588$  en  $\cos 52^\circ = 0,616$  zal uit de tussenliggende eenvoudige verhouding wel 0,6 komen, zodat  $d_1:d_2 = 5:3$ .  
 Opmerking: het is een aardige klasproef. Het bevestigt waar het draaipunt bij rollen ligt, het illustreert wat een positief en wat een negatief moment is. Het laat ten slotte ook zien dat de arm van de kracht de loodrechte afstand van draaipunt tot werklijn is. Het verdient overigens aanbeveling de klos veel groter uit te voeren en in plaats van garen een

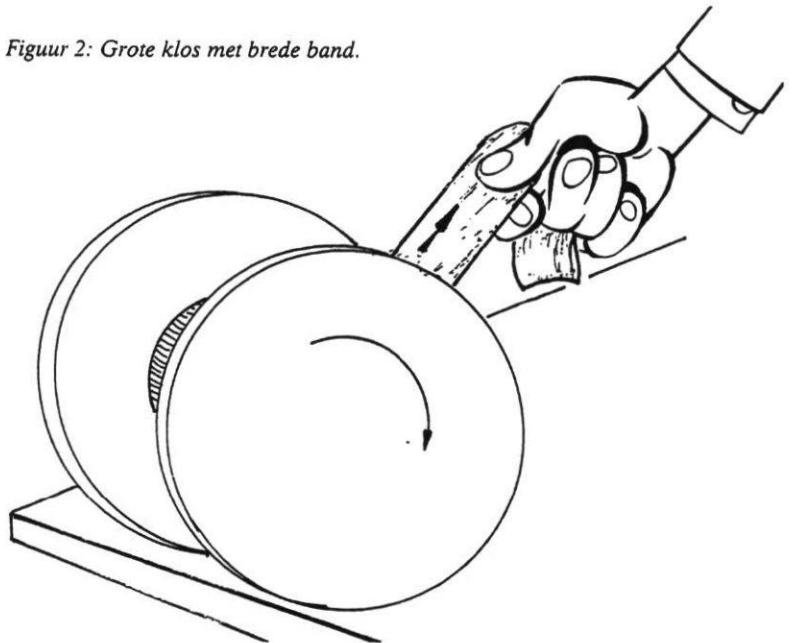


strook soepel band om de klos te wikkelen (figuur 2); dan gaat deze tijdens het trekken tenminste niet zijwaarts wegschuiven.

Figuur 1: Werklijn van de trekkracht gaat rechts langs het contactpunt tussen klos en tafel.



Figuur 2: Grote klos met brede band.





# Zweefvliegen

Tot een vast onderwerp in de mechanica hoort het blok op een hellend vlak. Eerst gaan we uit van een wrijvingsloze toestand en onderzoeken versneld afglijden. Dan analyseren we in geval van wrijving de mogelijkheid van rust. Moeilijker wordt het als het blok eenparig versneld of gewoon eenparig omlaag komt. In dat geval zakt de interesse versneld weg; de zaak wordt schijnbaar te theoretisch en lijkt weinig spannend. Het is mogelijk de problematiek wat op te frissen. Een slee op een sneeuwheiling blijkt het al beter te doen. De vorm van een mini-zweefvliegcurcus lijkt nog aantrekkelijker.

## Krachten

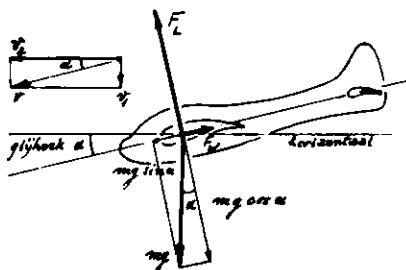
In figuur 1 zijn de krachten getekend op een zweefvliegtuig dat onder een glijhoek  $\alpha$  met constante snelheid schuin omlaag komt. Door de luchtstroming langs de vleugel ontstaat loodrecht daarop een opwaarts gerichte liftkracht  $F_L$  en langs de vleugel de weerstandskracht  $F_W$ . De eerste is afhankelijk van het vleugelprofiel, de tweede van de ruwheid ervan. Beide zijn evenredig met de vleugeloppervlakte en met de snelheid ten opzichte van de lucht in het kwadraat.

De krachten  $F_L$  en  $F_W$  maken evenwicht met de beide componenten van de zwaartekracht. We veronderstellen hierbij even dat het aangrijpingspunt van de combinatie  $F_L$  en  $F_W$  samenvalt met het zwaartepunt van het toestel.

In figuur 1 is tevens aangegeven hoe de daalsnelheid  $v_1$  gecombineerd met de voorwaartse snelheid  $v_2$  resulteert in de eindsnelheid  $v$ .

Lees af:

$$\frac{\text{afstand verticaal}}{\text{afstand horizontaal}} = \frac{v_1}{v_2} = \tan \alpha = \frac{F_L}{F_W} \quad (\text{bij windstil weer})$$

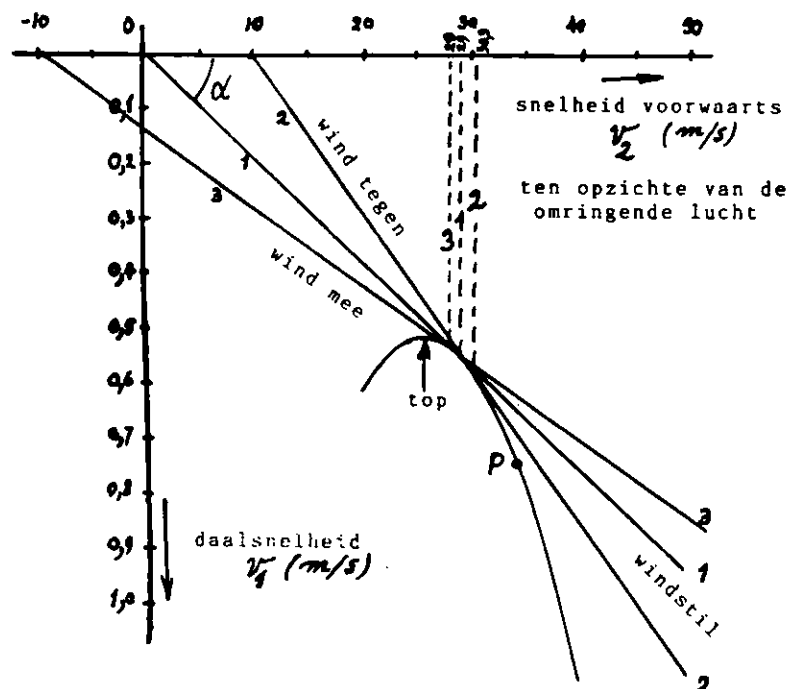


Figuur 1: Krachten op een zweefvliegtuig.

Voor een modern vliegtuig kan de glijhoek gemakkelijk  $1^\circ$  zijn en dus  $\tan \alpha$  ongeveer  $\frac{1}{50}$ . Dat betekent dat de machine dalend over 1 km in zo'n glijvlucht 50 km zal afleggen.

## Kromme

Zweefvliegers maken gebruik van een experimentele kromme (fig. 2) om de glijhoek en het vliegbereik af te lezen. Als je de daalsnelheid  $v_1$  uitzet tegen de



Figuur 2: Bepaling van de glijhoek en de afstand.

voorwaartse snelheid  $v_2$  dan krijg je een parabolachtige kromme. De punten op deze curve geven mogelijke combinaties van vliegsnelheid en daalsnelheid bij een rechte glijvlucht met constante snelheid. Bij kleine glijhoek maakt het weinig verschil of we over voorwaartse snelheid of „de snelheid” spreken. Het bovenste punt geeft de minimale daalsnelheid aan. We willen zo langzaam mogelijk dalen en zijn dus geïnteresseerd in de glijhoek. Die volgt uit het trekken van raaklijnen. Het hangt er daarbij wel van af of we bij windstil weer vliegen, bij wind op kop of wind in de rug.

## Wind of geen wind

1. Bij windstil weer moet de raaklijn getrokken worden vanuit de oorsprong. De bijbehorende vliegsnelheid wordt dan 29 m/s en de daalsnelheid 0,55 m/s. De verhouding is dan 53 : 1. Als je dus op 1 km hoogte start kom je zo 53 km ver.
2. Waait er echter een tegenwind van bijvoorbeeld 10 m/s dan moet raaklijn 2 getrokken worden vanuit punt (10,0) op de horizontale as. Deze rechte gaat de kromme raken in het

punt (30,3/0,59). De verhouding van beide snelheden wordt nu:

$$\frac{0,59}{30,3 - 10} = \frac{1}{34}$$

Het vliegbereik vermindert dus met 19 km.

3. Ten slotte het geval van een wind in de rug van 10 m/s. Nu dient de raaklijn getrokken te worden vanuit (-10,0). Ga maar na dat de verhouding nu 72 : 1 wordt. En nu komen we weer een beetje verder.

Merk op dat de glijhoek niet rechtstreeks uit de grafiek is op te meten, omdat de schalen met opzet ten dienste van de nauwkeurigheid verschillend gekozen zijn.

Ga zelf eens na dat de glijhoeken in graden in de drie gegeven gevallen respectievelijk 1,1° en 1,7° en 0,8° zijn. De vliegtijden bij een start van 1000 m hoogte worden dan een half uur, 20 minuten en drie kwartier.

De experimentele kromme geeft een goede oefening in werken met een grafiek. Er zijn allerlei aardige opgaven mee te bedenken, die gezien het onderwerp zweefvliegen, nog al aanspreken. Een voorbeeld: een zweefvlieger wordt opgetrokken door een motorvliegtuig en op 1,5 km hoogte losgekoppeld. Na 33 minuten komt het toestel aan de grond. Bepaal de verdere gegevens van de vlucht.

**Oplossing:** In 33 minuten wordt 1,5 km gedaald, zodat de daalsnelheid  $1500 : 33 \times 60 = 0,76$  m/s. Zoek in de grafiek de bijbehorende voorwaartse snelheid (punt P). Aflezen: 34 m/s. Trek in dit punt de raaklijn. Lees af: tegenwind-snelheid 20 m/s.

Hieruit volgt de verhouding:

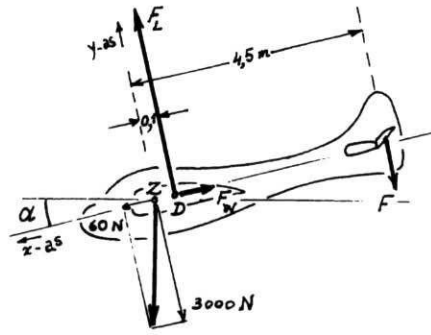
$$\frac{0,76}{34 - 20} = 0,054 \text{ of } \frac{1}{18} \text{ of glijhoek } 3,1^\circ.$$

Voorwaarts is dan afgelegd  $18 \times 1,5$  of 27 km.

## Hoogteroer

Het aangrijpingspunt van de resultante van  $F_L$  en  $F_W$  heet het drukpunt D. In het algemeen valt dit niet samen met het zwaartepunt Z. Als ze samenvallen bevindt het toestel zich in indifferent evenwicht (figuur 1).

Ligt het zwaartepunt vóór het drukpunt dan heeft het vliegtuig de neiging om te duiken, ofwel met de neus omlaag en met de staart omhoog te gaan (figuur 3). Immers er werkt nu een linksdraaiend moment. Deze beweging is te corrigeren met het hoogteroer. Door dit roer wat omhoog te draaien, wordt de staart weer omlaag gedrukt en de neus omhoog, zodat het juiste evenwicht weer hersteld is. Daar is een aardig rekenvoorbeeld van te maken.



Figuur 3: Werking van het hoogteroer.

## Voorbeeld

Stel het zweefvliegtuig heeft 300 kg massa

en dus 3000 N gewicht. De vlieghelling is 1 : 50. De afstand  $DZ = 10$  cm. Bereken kracht  $F$  op het hoogteroer als dit 4,5 m achter  $Z$  ligt. Voor de rechtlijnige vlucht met constante vliegsnelheid moeten krachten en momenten elkaar in evenwicht houden.

We kiezen de  $x$ -as in de vliegrichting en de  $y$ -as loodrecht daarop. Omdat  $\tan \alpha = 0,02$  wordt  $\sin \alpha = 0,02$  (ongeveer) en  $\cos \alpha = 1$  (vrijwel). De componenten van het gewicht zijn dan 60 N en 3000 N. Er moeten gelden:

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ofwel } F_D = 60 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \text{ ofwel } F_L = 3000 + F$$

$$\Sigma m_Z = 0 \text{ ofwel } 0,10 F_L = 4,5 F$$

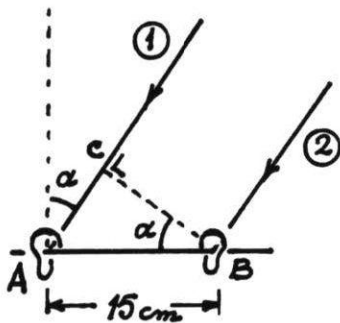
Uit deze laatste vergelijkingen zijn  $F_L$  en  $F$  te bepalen. Dit komt eruit:  $F_D = 60$  N,  $F_L = 3068$  N en de kracht van het hoogteroer  $F = 68$  N.

# Richting horen

Zoals we met twee ogen diepte kunnen zien, kunnen we met twee oren bepalen vanuit welke richting een geluid komt. Paarden kunnen daarbij hun oren nog draaien, dat is nog gemakkelijker.

Het berust op het tijdsverschil in aankomst voor de beide geluidssignalen, die onze oren bereiken. Hoe schuiner de aankomende golf, des te groter dat tijdsverschil. Een eenvoudige berekening leert dat zo'n tijdsverschil maximaal 0,5 ms zal zijn en die uiterst kleine waarden kunnen de hersens nog verwerken! Met een eenvoudig apparaat zijn deze zaken te testen.

We beschouwen geluidsstralen die van enige afstand van een bron komen als evenwijdig. Als A en B onze beide oren voorstellen (figuur 1), dan zal geluidsstraal 1 een langere weg afleggen dan straal 2. Het wegverschil is AC. Als de richting van waaruit het geluid komt met  $\alpha$  wordt aangegeven, geldt:  $\sin \alpha = AC/AB$ .

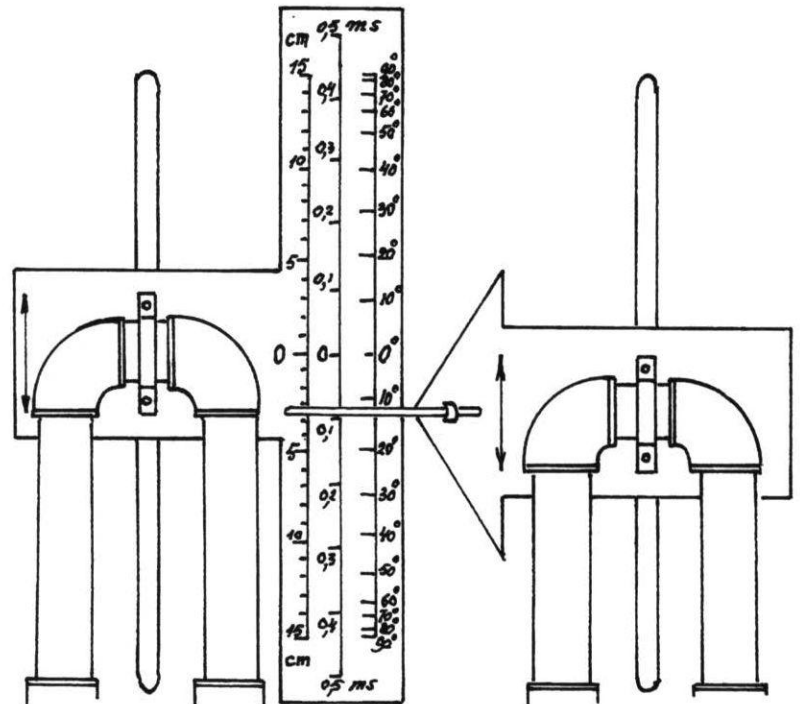
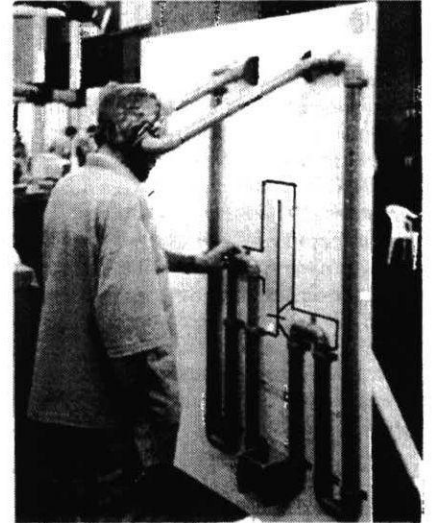


Figuur 1  
Wegverschil en richting.

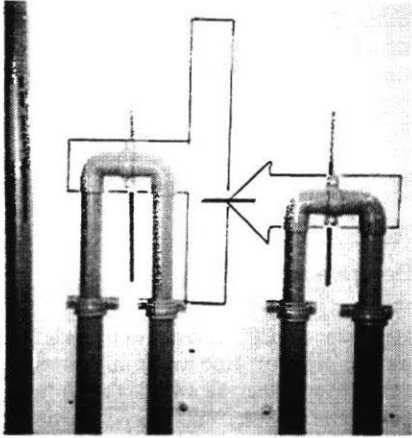
Eerst een voorbeeld. Stel de afstand tussen onze trommelvliezen 15 cm. De geluidssnelheid is 340 m/s. Veronderstel eens dat er tussen beide signalen een tijdsverschil van 0,2 ms zit. In 0,2 ms legt geluid in lucht een weg af van  $0,2 \times 10^{-3} \times 340$  m of 7 cm. Daaruit volgt dan  $\sin \alpha = 7/15$  of  $\alpha = 28^\circ$ . Het geluid komt dus bij 0,2 ms tijdsverschil onder een hoek van  $28^\circ$  (in dit geval van rechts) binnen. Zo hoort bij elk tijdsverschil een zekere hoek. De grootste hoek is  $90^\circ$ . Daar geldt:  $AC=AB=15$  cm. Daarbij hoort een tijdsverschil  $0,15/340$  of ruim 0,4 ms. Ga na dat er in het algemeen uitkomt:  $\alpha = \arcsin 2267 t$ .

## Meetapparaat

In figuur 2 staat de complete tabel. Links het weglengteverschil in cm, in het midden het overeenkomstige tijdsverschil en rechts de hoek van waaruit het golf front komt. Als we uit blijven gaan van een oorafstand 15 cm, hoort daar dus  $90^\circ$  bij. De onderhelft van de tabel geldt voor het geval het geluid van rechts komt, de bovenhelft voor de linker richting. Het is mogelijk voor deze theorie een meetapparaat te ontwerpen. Vanuit een kleine speaker wordt een toon uitgezonden en langs twee aparte buizensystemen resp. naar linker en rechter oor gevoerd. Op een kunstmatige manier wordt er een weglengteverschil voor beide golven gemaakt. Daartoe zijn in de beide wegen uitschuifbare stukken aangebracht, die onafhankelijk van elkaar verlengd of verkort kunnen worden. De beide signalen bereiken zo de twee helften van de koptelefoon, zodat de waarnemer met het linker oor het geluid via het linker kanaal en met het rechter dat van het

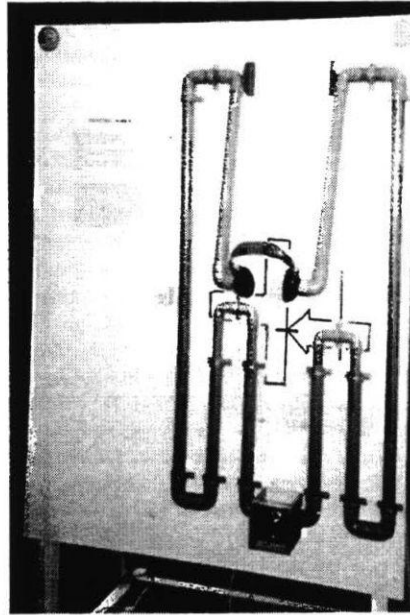


Figuur 2: Het meetgedeelte van het twee-kanalenstelsel.



rechter kanaal ontvangt. Als de proefpersoon de ogen sluit en gevraagd wordt om het geluid van „recht voor” te laten komen, zullen beide buizenstelsels vrijwel even lang ingesteld worden. De wijzer staat dan vrijwel op nul.

In de situatie zoals in figuur 2 aangegeven, zal de toehoorder aangeven dat het geluid iets schuin van rechts komt, immers in figuur 2 is de linker weg langer dan de rechter. Het complete apparaat is gemakkelijk na te bouwen met pvc-buis, gebruikt bij afvoer van de waterleiding. Verbindingen worden gemaakt met haakse bochten. De foto's zullen verder voor zichzelf spreken. De beide buizen die naar de koptelefoon voeren, zijn aan de bovenkant draaibaar.



HENK MULDER  
*Ulvenhout*

## Drijvende krachten

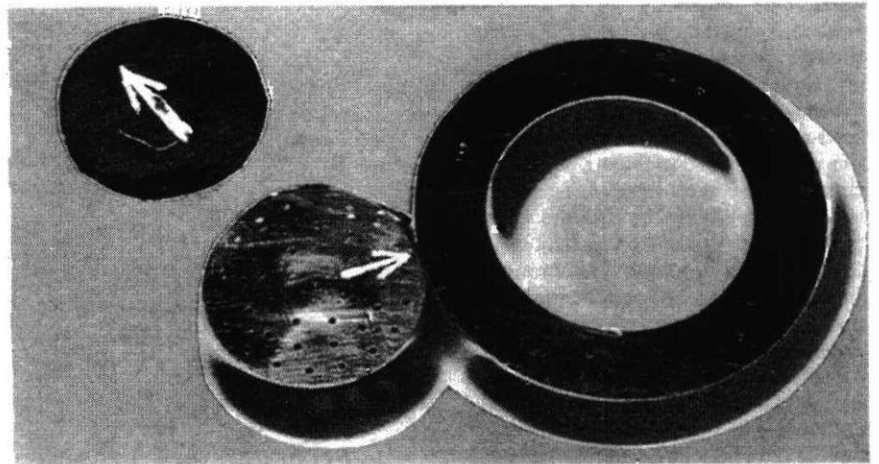
In een bak water leggen we voorzichtig op het oppervlak twee dunne ronde plaatjes aluminium.

Een derde van hout wordt eerst goed ondergedompeld, zodat ook de bovenkant voldoende nat is. Daarna leggen we het naast de twee andere te drijven.

Tot onze verrassing gaan de aluminium plaatjes naar elkaar toe, maar het houten drijft weg.

Ongetwijfeld een activiteit van de oppervlaktespanning.

Als we de kleine aluminium schijf laten drijven binnen de aluminium ring, dan is opmerkelijk dat een concentrisch beeld ontstaat. De alzijdige aantrekking is nu niet van afstoting te onderscheiden. Er

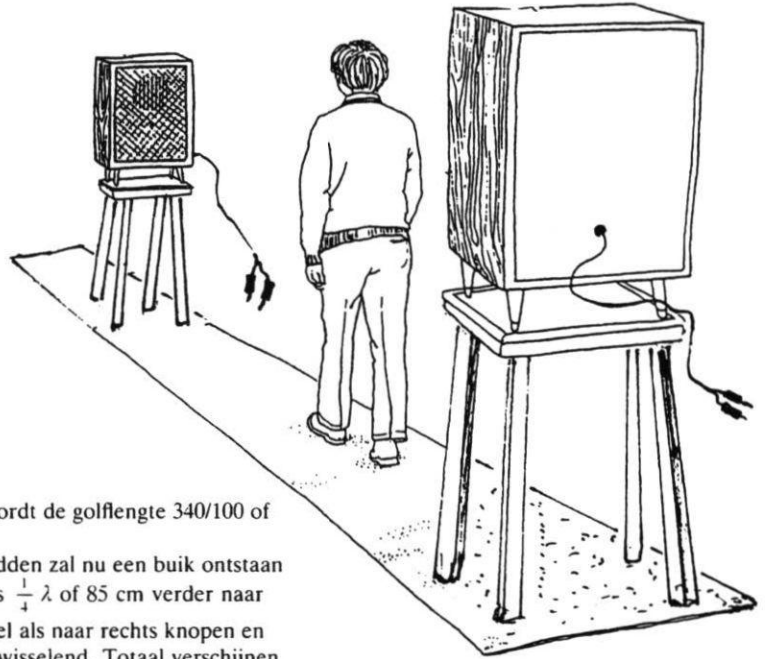


ontstaat rondom een overal even brede watergoot.

Wie geeft een verklaring?

# Experiment 117

Naast beroemde musea als het „science museum“ in Londen, het „palais de la découverte“ in Parijs, „das Deutsches Museum“ in München, trekt steeds meer de aandacht het „Exploratorium“ in San Francisco. Daar staat op plaats 117: het experiment met de twee speakers.



Door zwevingen lopen.

## Knopen tellen

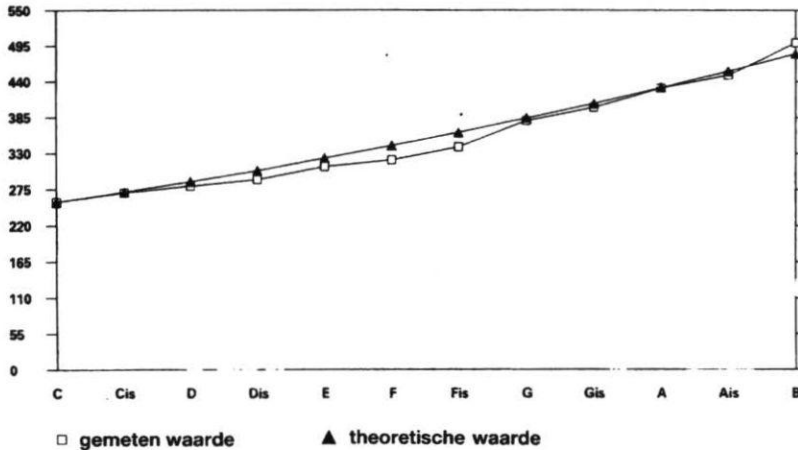
Twee grote 12 inch 8 ohm luidsprekers staan op een afstand van ongeveer 6 m tegenover elkaar. Beide worden gevoed met een 100 Hz frequentie. Ze zijn daar bij parallel gekoppeld. De signalen zijn even sterk en in fase. Volgens de formule

$\lambda = v/f$  wordt de golflengte 340/100 of 3,4 m.

In het midden zal nu een buik ontstaan en telkens  $\frac{1}{4} \lambda$  of 85 cm verder naar links zowel als naar rechts knopen en buiken afwisselend. Totaal verschijnen er zo vier knopen, punten van stilte. Tel dat zelf maar na. Wanneer de signalen in tegenfase gezet worden (bij één spea-

ker de stekkertjes omkeren), ontstaat in het midden de knoop en telkens links en rechts weer afwisselend buiken en knopen. Nu zijn er drie punten van stilte. In het midden en 170 cm links en rechts ervan. Zou de afstand tussen de speakers minder dan 170 cm zijn en beide in fase, dan zouden er helemaal geen stiltepunten meer zijn.

Grafiek 1: Verband tussen toon en frequentie.



De afwijkingen die er in de grafiek te zien zijn, kunnen een gevolg zijn van: meetfouten bij het bepalen van de frequentie en het vullen van de flesjes, en een eventuele verplaatsing van de drukknop. Deze hoeft namelijk niet precies bij het aanblaaspunt te liggen maar ligt er waarschijnlijk iets boven.

## flesje = half-open cilinder?

Wanneer we de luchtkolom behorende bij de C, zouden uitrekenen volgens (1) dan vinden we voor  $h_{\text{luchtkolom}}$  33,5 cm. (met  $c = 343$  m/s) Uit het onderzoek blijkt dat de hoogte bij het flesje voor diezelfde C slechts 15,7 cm is.

Het flesje gedraagt zich dus niet als een half-open cilinder. Een verklaring hiervoor is mogelijk te vinden in de theorie van de Helmholtz-resonator. Dit komt in het kort op het volgende neer: T.g.v. de nauwe opening kan de in trilling gebrachte luchtmassa in de fles niet vrijuit trillen maar zal het volume van de fles in haar geheel adiabatische drukveranderingen ondergaan. Dit zal zich uiten in een lagere frequentie. Verder is, zoals reeds eerder gezegd, de plaats van de drukknop niet precies bij het aanblaaspunt. Een goede correctie voor de cilinder is dat de knop 0,67 keer de diameter van de hals hoger ligt. Deze factor is echter ook afhankelijk van de frequentie.

## Door zwevingen lopen

Eén van beide speakers wordt nu gezet op 101 Hz; de andere blijft 100 Hz. Als we ons nu tussen beide luidsprekers opstellen, horen we een zweving met een frequentie 1 Hz. Immers de zweving-frequentie is het verschil der frequenties. Als we gaan lopen in de richting van de hoogfrequente zal volgens het dopplereffect het ontvangen signaal van deze nog hoger worden en dat van de laagfrequente nog lager. De zwevingfrequentie zal dus toenemen. Interessanter wordt het als we ons in tegenovergestelde richting verplaatsen. Dan zal de zwevingfrequentie juist dalen. Het is mogelijk dat deze zelfs nul wordt. Bij nog harder lopen stijgt deze weer. Bij welke loopsnelheid verdwijnen de zwevingen?

$$101 - 101(v/340) = 100 + 100(v/340) \\ \text{ofwel } v = 1,7 \text{ m/s.}$$

Het is nu ook gemakkelijk om uit te maken welke speaker de hoge frequentie heeft. Door van die af te lopen, verdwijnt immers het zwevingverschijnsel. Het idee voor dit experiment ontstond toen een passagier op een veerboot heen en weer liep tussen de beide uitlaatpijpen van de twee aandrijfmachines.

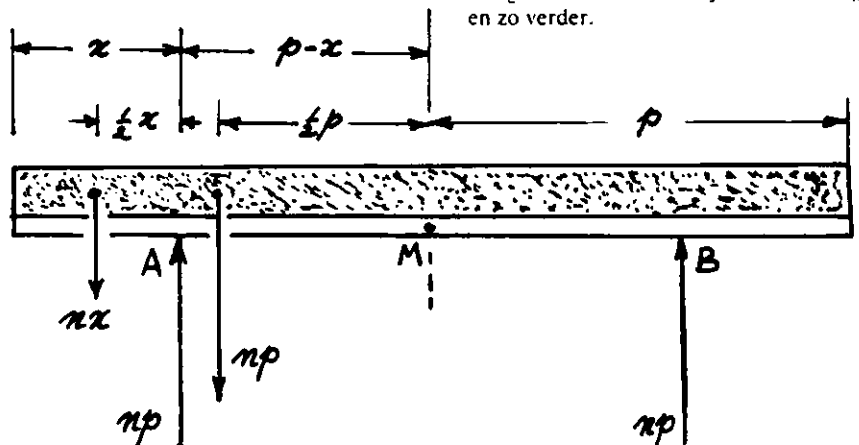
## Alles gelijk kapot

Als we praten over milieuproblematiek hebben we het meestal over vervuiling van lucht en water, lawaaioverlast en het ozongat. Minder in de picture ligt de verkwisting van grondstoffen. We praten wel over recycling, maar denken dan uitsluitend aan het terugwinnen van elementaire stoffen. De energie die dat allemaal kost lijkt minder belangrijk. Onze consumptieve impuls daagt ons uit artikelen snel naar de vuilnishoop te brengen; goed voor de economie en de werkgelegenheid, zeggen ze. Voor mensen in ontwikkelingslanden is het onbegrijpelijk dat wasmachines en auto's naar de afvalberg verhuizen. In zo'n wasmachine zit dan nog een prima elektromotor, die nog wel een wasmachineleven lang mee zou kunnen. In armere landen laten ze een autowrak gewoon in de tuin staan: een supermarkt voor reserve-onderdelen.

Als we aan een nieuwe fiets toe zijn, zou het plezierig zijn als alle onderdelen gelijkmatig versleten waren. Wanneer de fietsbel nog goed in het chroom zit en de velgen verroest zijn, is of de bel te duur geweest of de velgen te goedkoop. Technische producten zijn kwalitatief slechter als sommige onderdelen te goedkoop zijn uitgevoerd, maar evenzo als andere onderdelen in verhouding tot de rest te duur zijn. De meest ideale situatie, uit milieutechnisch oogpunt, is eigenlijk, dat bij weggooien alle vitale delen in gelijke mate zijn versleten. Want: een ketting is even sterk als de zwakste schakel. Een ketting met alle schaklen even sterk lijkt daarom optimaal. We nemen een praktisch voorbeeld, waarbij er een mogelijkheid is om een optimale constructie te maken.

### Evenveel kans op breuk

We stellen ons voor een bank te fabriceren, die bestaat uit een lange plank op



twee ondersteunen. De vraag is: waar plaatsen we de poten? We zijn geneigd te zeggen: op een kwart van de totale lengte. Is dat nu de ideale oplossing? Laten we eens aannemen dat de bank gebruikt wordt bij een voetbalwedstrijd en volbezet is met supporters, mannetje aan mannetje. In meer technische taal: een gelijkmatige gewichtsverdeling ofwel homogene belasting.



Als er op de bank zoveel mensen zitten, zou de plank kunnen breken. De plaatsen waar we de breuk kunnen verwachten, zijn het midden M en de punten A en B bij de ondersteuning. De voorwaarde voor een ideale constructie zou dus kunnen luiden: de kans op breuk bij M moet even groot zijn als die bij A of B.

### Niet op een kwart

We willen nu de ideale positie voor de punten A en B berekenen. Stel de afstand van A (of B) tot een einde  $x$ , de lengte van de plank  $2p$  en de homogene belasting (in de tekening aangegeven als een plak zand)  $n$  N/m. In die belasting is het eigen gewicht van de plank meegerekend.

Breuk in de plank ontstaat door een te groot moment. De kans op breuk bij M is dus even groot als bij A (of B) wanneer het moment bij M even groot is als bij A of B.

We geven het moment bij M aan met  $m_M$  en zo verder.

De vergelijking wordt dan:

$$m_M = m_A = m_B.$$

Omdat een moment gelijk is aan kracht maal afstand, de belasting op het uitstekende deel bij A  $nx$  en de afstand van het aangrijpingspunt van deze kracht tot punt A en grootte  $\frac{1}{2}x$  heeft, geldt:

$$m_A = (nx) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right).$$

De reactiekracht in A en B heeft een grootte  $np$ .

Zodoende wordt:

$$m_M = (np)(p-x) - (np)\left(\frac{1}{2}p\right).$$

De absolute waarden van deze momenten moeten gelijk zijn, dus:

$$(np) \cdot (p-x) - (np) \cdot \left(\frac{1}{2}p\right) = \pm (nx) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)$$

Dit levert de vierkantsvergelijkingen:

$$\pm \frac{1}{2}x^2 - px + \frac{1}{2}p^2 = 0$$

Hiëruit volgt als enige praktische oplossing:

$$x = p(-1 + \sqrt{2}) \text{ ofwel } x = 0,41 p.$$

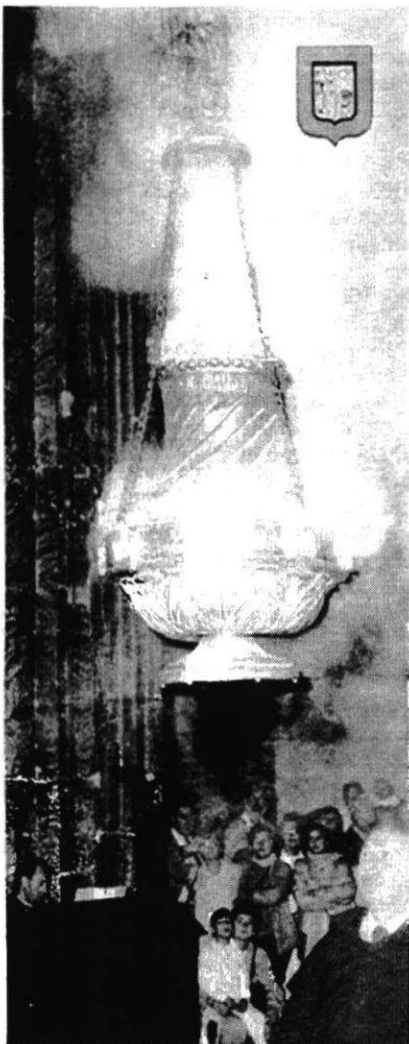
En dit betekent dat de ideale plaats voor ondersteuning niet op een kwart van de einden ligt maar meer op 20%! Op die afstanden zijn de punten A en B in de figuur aangegeven.

## Botafumeiro

In de kathedraal van Santiago de Compostela in Spanje hangt een zilveren wierooksvat, het grootste ter wereld, de botafumeiro.

Het vat is met een lang dik touw opgehangen aan een centraal punt in de koepl. Het loopt daar over een katrol en kan zo opgehesen worden. Op hoge feestdagen zwaaien ze ermee door het dwarschip en ze weten, door op het juiste moment het vat met man en macht op te trekken, de amplitudo van de slinger steeds verder te vergroten. Het is ongetwijfeld een spectaculair gezicht, maar ... welk is de fysische verklaring? Je kunt natuurlijk zeggen: arbeid gaat over in slingerenergie, maar dat is te mager.

Wie geeft een meer verantwoorde verklaring?



## Opzet van de slinger

Naar aanleiding van het verhaal van Henk Mulder over het slingerende wierookvat in een Spaanse kathedraal, heeft de redactie reacties gekregen van Thijs Berkx uit Vlissingen, Wim Bongenaar uit Leiderdorp en Hans Jordens uit Haren. Bovendien is Henk Mulder ook rechtstreeks benaderd, onder andere met de suggestie, dat de oplossing was te vinden in een nummer van de Scientific American van enige jaren geleden. Hans Jordens droeg ook literatuur aan: een boek uit 1938 van The American Association

HENK MULDER  
Ulvenhout

## Botafumeiro (2)

In de kathedraal van Santiago in NW-Spanje wordt sinds 700 jaar een 60 kg zwaar zilveren wierooksvat door het dwarschip gezwaaid. Het vat hangt aan een stevig touw dat over een 20 m hoger wiel loopt. De zwaaitijd is bijna 3 s. Onder aan het touw staat een groep mannen die de beweging regelen. Na een forse duw wordt er steeds meer energie in het vat gepompt door op de juiste momenten het vat een stuk op te trekken. Bij het passeren van het laagste punt van de boog, korten ze de lengte van het ophangkoord ongeveer 3 m in. Op het hoogste punt laten ze het touw dan geleidelijk weer 3 m vieren.

De mannen voeren energie toe op het moment dat ze de slingerlengte verkorten en wel tegen zwaartekracht en centrifugaal effect in. Dit gebeurt twee keer per volledige beweging. Na ongeveer 17 keer hijsen, na ruim een minuut, heeft het slingerend vat een amplitudehoek van 80° bereikt. Het komt dan ongeveer 1 m onder het gewelf van de kerk uit. Als het vat met grote snelheid de laagste stand passeert, wordt de gloed in de wierook sterk aangeblazen en dat geeft dan veel rook en geur tot verbazing van de talloze pelgrims.

### Energietoevoer

Door hijsen en vieren wordt er periodiek energie in de slinger gepompt, waardoor de amplitude toeneemt. Is eenmaal de vereiste uitzwaai bereikt dan moet deze

of Physics Teachers met als titel 'Demonstration Experiments in Physics'. De aangedragen oplossingen zijn verwerkt in het bijgaande (tweede) artikel van Henk Mulder.

Bij deze bedanken wij de inzenders voor hun reacties.

Voor actieve lezers heeft Theo van Welie een nieuwe opdracht klaar liggen, en die 'didactiekpuzzel' genoemd.

Nu kunnen wij u wel bezighouden, maar misschien heeft u zelf eerder een vraag dan een antwoord.

Schrijf op, wat u bezig houdt, en stuur dat naar de redactie. Juist kleine stukjes verlevendigen uw blad, en vergroten het plezier in het vak.

energie de wrijvingsverliezen compenseren.

Het vat weegt 600 N. Als we uitgaan van een zwaaihoek van 60°, dan zal het slingergewicht aan het 20 m lange touw, maximaal  $h = 10$  m dalen (figuur 1).

Met behulp van  $v = \sqrt{2hg}$  vinden we voor de hoogste snelheid bij het passeren van het laagste punt:  $v = 14$  m/s.

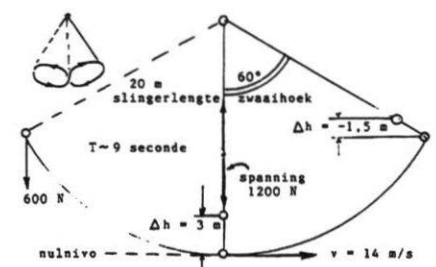
De centripetale kracht zal daar volgens

$$m \frac{v^2}{r} \text{ eveneens gelijk worden aan}$$

600 N. De spanning in het koord is dus 1200 N.

Op dat moment trekken ze het gewicht 3 m op en dat kost dan aan arbeid  $1200 \times 3$  ofwel 3600 J.

Bij het bereiken van de uiterste stand laten ze het touw weer 3 m vieren, maar dat betekent een effectieve daling voor het gewicht van maar 1,5 m. Het gewicht verliest daardoor weer aan zwaartenergie  $600 \times 1,5$  ofwel 900 J. ▶



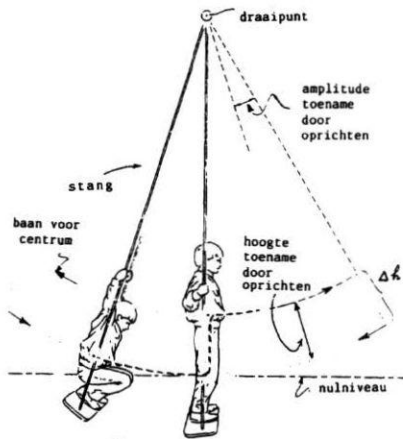
Figuur 1.  
De hobbende slingerbaan.

De toegevoerde energie per halve periode bij 60°-zwaai is dus slechts 3600-900 ofwel 2700 J.

Wie liever een algemene formule ziet:  $3mgh(1-\cos a)$ .  
Vul maar in.

## Schommel

Het verschijnsel kun je vergelijken met de beweging van een schommel in een speeltuin (figuur 2). Daarbij moet je



Figuur 2. Schommelen.

beurtelings hurken en strekken om steeds hoger te komen en ten slotte om wrijving en luchtweerstand de baas te blijven. Je houdt de zaak aan de gang door het lichaamszwaartepunt beurtelings hoger en lager te brengen. Dit moet synchroon lopen met de schommelfrequentie, die weer afhangt van de lengte. Je moet je telkens oprichten als je het laagste punt passeert en weer gaan hurken in de hoogste stand. Stel dat je uiterst links gehurkt zit. Je hebt dan alleen potentiële energie, waarvan de grootte afhangt van de hoogte van je massamiddelpunt boven een zeker afgesproken nulniveau. Laten we zeggen: we starten 2 m boven dit niveau. Afdalend wordt de potentiële energie omgezet in kinetische: je wint snelheid.

In de laagste stand strek je jezelf waardoor je zwaartepunt bijvoorbeeld 0,5 m hoger komt. De hoeveelheid beweging in de laagste stand bepaalt hoe hoog je in de tweede helft van de beweging komt. Als je van 2 m hoogte vertrekt, kun je dus weer op 2 m hoogte aan de andere kant uitkomen, verliezen daar gelaten. Maar met die 0,5 m extra, kun je op 2,5 m hoogte eindigen! Als je dan weer terugslingert zul je met meer snelheid dan eerst het laagste punt passeren. Door dit periodiek te herhalen, zullen snelheid en tophoogte steeds groter worden.

Na het passeren ga je weer door de

knieën. Daardoor gaat je zwaartepunt weer omlaag en verlies je hoogte aan het eind van de boog. Maar je verliest minder, dan je eerst gewonnen hebt. Immers in de buitenste stand maakt het touw een hoek met de verticaal. Je verplaatst je massamiddelpunt langs een schuine lijn en daardoor is de verticale component kleiner dan bij eenzelfde verplaatsing langs een verticale lijn.

Door deze werkwijze kun je niet boven 90° uitkomen. We hebben ons in het bovenstaande beperkt tot een schommel met twee rechte stangen; bij gebruik van touwen of kettingen wordt de zaak nog gecompliceerder.

## Traagheidsmoment

Er is wellicht de illusie gewekt dat bij het oprichten in de verticale positie de snelheid niet verandert. Maar... door je op te richten breng je het massamiddelpunt dichter naar het draaipunt en dat blijkt de hoeksnelheid te verhogen.

Als je normaal iets optilt, bijvoorbeeld jezelf als je opstaat, voer je de bewegingsenergie niet op. Alleen de zwaarte-energie wordt verhoogd.

Maar wanneer een schaatsenrijder om haar as draait en dan plots haar armen intrekt, gaat ze sneller tollen. Dat heeft te maken met de verandering van het traagheidsmoment. Dat wordt nu kleiner, omdat er massa dichter bij het draaipunt komt. Vermindering van het traagheidsmoment veroorzaakt toename van de hoeksnelheid.

Iets soortgelijks gebeurt als je bij de schommelbeweging overeind komt bij het passeren van de laagste stand. Door je op te richten vermindert het traagheidsmoment omdat je dichter bij het draaipunt komt. Ik heb dit effect ook wel eens opgemerkt bij het uitrollen van een lange loper. Je hoeft hem vaak maar een klein zetje te geven en het lijkt wel of hij dan verder voor zichzelf zorgt. Heeft dat ook niet te maken met straalverkleining?

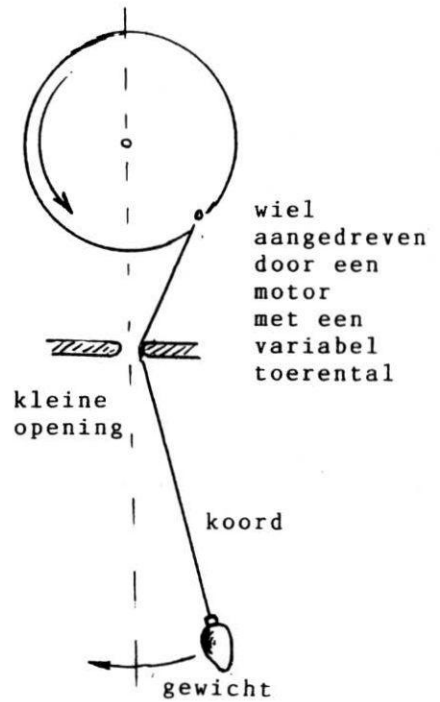
## Schuin

Wellicht vraagt u zich af: hoe kunnen krachten die schijnbaar loodrecht op een beweging staan, een versnellende werking hebben?

Wel, bij het wierooksvat en ook bij de schommel staan ze niet loodrecht op elkaar. De baan van het zwaartepunt is geen zuivere cirkel meer.

## Open onderzoek

Kunnen onze leerlingen er misschien ook



Figuur 3. Proefopstelling.

iets mee? Het is mogelijk, ten dienste van het open onderzoek, hen een model aan te bieden (figuur 3).

Een slingergewicht wordt via een lang koord bevestigd aan een punt op de rand van een wiel, dat in een verticaal vlak, door een motortje met regelbare toeren wordt rondbewogen. Onder het wiel zit een klein rond gat waar een touwtje door loopt, waaraan een gewicht hangt. Als je de zaak een zetje geeft, wordt de slingerfrequentie bepaald door de draadlengte.

Stel de motor zo af dat de frequentie waarmee het wiel draait, twee keer de eigen frequentie van de slinger is. Zelfs zonder enige duw kan de slinger al in beweging komen, enkel door de rotatie van het wiel.

In het begin wiebelt de zaak alleen maar; echter gaandeweg neemt de slingerenergie toe. ■

## Literatuur

Jearl Walker - the amateur scientist -  
M. Minnaert - natuurkunde van het vrije veld -



# *Bibliografie*

## **Inleiding**

Ter afronding van deze bundel geven we hier een volledige lijst van de artikelen van Henk Mulder in Faraday en het NVON-maandblad, met vermelding van jaar, jaartal, nummer en bladzijde(n). Als 'toegift' volgt dan nog een lijst van zijn bijdragen aan Archimedes. Uitbreiding tot andere tijdschriften - Euclides, Pythagoras, De Jonge Onderzoeker - vonden we buiten het bestek van deze bundel vallen.

Archimedes, natuurkunde-, scheikunde- en sterrenkundetijdschrift voor jongeren, is in 1964 opgezet door uitgeverij Wolters in samenwerking met Velines. Vanaf de tweede jaargang maakte Henk Mulder deel uit van de redactie. Om te weten welke artikelen hij schreef waren we gedeeltelijk op zijn persoonlijk archief aangewezen, want in de oudere jaargangen van Archimedes staat bij de bijdragen van redactieleden niet aangegeven wie de auteur is.

Wij hebben de lijst van Archimedes-artikelen opgenomen om te herinneren aan dit deel van Henk Mulders werk en om te stimuleren dat ook dit materiaal bekend en in gebruik blijft in ons natuurkundeonderwijs.

## Artikelen in Faraday

jaar, jaargang, nummer, bladzijde(n), titel

> voor de titel betekent: niet in deze bundel opgenomen

- |      |    |      |         |  |
|------|----|------|---------|--|
| 1957 | 27 | (1)  | 1-2     | > Boyle - Hooke                              |
| 1959 | 28 | (7)  | 127-130 | > Kogel in draaiende kom als toerenteller    |
|      | 29 | (4)  | 64-65   | > Spiegels uit lenzen                        |
| 1960 | 29 | (6)  | 106-108 | Brug van Wheatstone voor water               |
|      | 30 | (3)  | 34-38   | > Valbeweging bij kantelen                   |
| 1961 | 30 | (5)  | 74-77   | > Vereffeningsverschijnselen                 |
|      | 30 | (6)  | 86-89   | > Slippen bij kantelende massa's             |
|      | 30 | (9)  | 150     | > Pleidooi voor een $\pm$ teken              |
|      | 30 | (9)  | 155     | > Krachten tussen elektronenstralen          |
|      | 31 | (1)  | 8-10    | > V-vormig golffront                         |
|      | 31 | (4)  | 86-87   | > Soortelijke verlenging                     |
| 1962 | 31 | (7)  | 156-158 | > Het veld van een vlakke condensator        |
|      | 31 | (8)  | 164-166 | > Valbeweging bij een jo-jo                  |
|      | 31 | (8)  | 167-169 | Continu experiment *)                        |
| 1963 | 32 | (5)  | 172-176 | > Doppler-effect bij lineaire beweging       |
|      | 32 | (6)  | 190-193 | > Doppler-effect bij cirkelbeweging          |
|      | 33 | (1)  | 14-15   | 15 ideeën voor het natuurkunde-lokaal        |
|      | 33 | (2)  | 26-29   | Figuren van Lissajous                        |
| 1964 | 34 | (1)  | 22      | > Vier in een                                |
|      | 34 | (4)  | 89      | Valkoord                                     |
| 1965 | 34 | (7)  | 153-154 | > Gravitatie                                 |
|      | 34 | (8)  | 179-180 | De exacte slingerformule                     |
|      | 35 | (1)  | 7-8     | De kroon van koning Hiëro                    |
| 1970 | 40 | (3)  | 78-79   | > Lenzenformule                              |
| 1971 | 41 | (3)  | 64-65   | > Beeldschrift                               |
|      | 41 | (4)  | 75-76   | Natuurkunde onder de douche                  |
| 1972 | 41 | (5)  | 102-103 | Boyle en de K.L.M.                           |
|      | 41 | (7)  | 138-139 | > Volgende kandidaat, alstublieft            |
|      | 41 | (8)  | 156     | > Gaat U zitten                              |
|      | 41 | (9)  | 183-185 | > Duiken naar je spiegelbeeld                |
|      | 42 | (4)  | 75-76   | Van 0 tot 100, een lange weg                 |
| 1973 | 43 | (2)  | 27-29   | > De seismografische slinger                 |
|      | 43 | (4)  | 77-79   | Slinger van Foucault                         |
| 1974 | 43 | (8)  | 166-170 | Een analoge werkwijze                        |
|      | 44 | (3)  | 66-69   | 'g' met 8 decimalen                          |
| 1975 | 44 | (10) | 235     | > Vloeistof- en luchtlenzen                  |
|      | 45 | (1)  | 9-11    | Centripetaal                                 |
|      | 45 | (2)  | 46-51   | Natuurkunde in blik                          |
| 1976 | 45 | (4)  | 85      | Motivatie                                    |
|      | 45 | (4)  | 98-99   | Labiël evenwicht                             |
|      | 45 | (6)  | 133-135 | Centripetaal? ... Wij doen het zo!           |
|      | 45 | (7)  | 161-164 | Breking in een bol                           |
|      | 45 | (7)  | 165-168 | > Werken met kleinste kwadraten              |
|      | 45 | (7)  | 168-169 | > Bij ons gaat het kwik eruit...             |
| 1977 | 46 | (1)  | 19-22   | Druk, Boyle, Gay-Lussac, zonder kwik         |
|      | 46 | (1)  | 34-35   | Vloeistofoerenteller                         |
|      | 46 | (5)  | 134-136 | Wat willen ze eigenlijk weten?               |
|      | 46 | (6)  | 195-199 | Luchtdruk                                    |
| 1978 | 47 | (4)  | 164-166 | De helling af                                |
|      | 47 | (6)  | 270-273 | > Wegglijden bij twee wrijvingscoëfficiënten |

|      |    |     |         |   |
|------|----|-----|---------|---|
| 1979 | 48 | (1) | 11-15   | > Bepaling van de gravitatie met een vallende plaat         |
|      | 48 | (2) | 67-70   | Draaien + schuiven = rollen                                 |
|      | 48 | (3) | 105-107 | De golflengte van licht meten ... met een schuifmaat        |
| 1980 | 49 | (3) | 118,122 | Wrijvingscoëfficiënt  |
|      | 49 | (4) | 148-149 | Slingertijd bij veranderlijke g                             |
|      | 49 | (4) | 150-151 | De vergeetachtige zandloper                                 |
|      | 49 | (5) | 193,196 | Langs het hellend vlak                                      |
|      | 49 | (6) | 234     | Nederland, land van Jan Modaal                              |
| 1981 | 50 | (2) | 81-83   | De platbolle lens   |
|      | 50 | (2) | 83-84   | > Akoustisch geheimschrift                                  |
|      | 50 | (2) | 84,92   | Hoe schuin?   |
|      | 50 | (4) | 156-157 | Kleurverschuiving bij Jupiter                               |
|      | 50 | (5) | 223     | > Natuurkunde in Moskou (met T. Bennik)                     |
|      | 50 | (5) | 224-225 | De helling af II  |
|      | 50 | (6) | 272,276 | > Integreren in de speeltuin                                |
|      | 50 | (6) | 273-275 | De zweefmolen   |
| 1982 | 51 | (2) | 45-46   | Straalaandrijving   |
|      | 51 | (3) | 96-100  | De lange veer   |
|      | 51 | (3) | 111,112 | Een luik opentrekken  |
|      | 51 | (4) | 129-133 | Ontwerp voor een nieuw type zonnespiegel (met H. Biezeveld) |
|      | 51 | (5) | 181     | > Natuurkunde als recreatie - de ruimte-goot                |
| 1983 | 52 | (1) | 28-30   | De perfecte parabool  |
|      | 52 | (2) | 41-42   | Kogelstoten onder ... 42°                                   |
|      | 52 | (3) | 95-96   | De 100 meter-lopers   |

\*) Het na dit artikel in deze bundel opgenomen voorbeeld is ontleend aan:  
H.M. Mulder, Continu Experiment, instructie- en werkschrift voor  
natuurkunde, deel 7. Groningen, P. Noordhoff, 1965.

## Artikelen in het NVON - maandblad

jaar, jaargang, nummer, bladzijde(n), titel  
> betekent: niet in deze bundel opgenomen

|      |    |      |         |   |
|------|----|------|---------|---|
| 1985 | 10 | (3)  | 19,53   | > Doorhangend touw  |
|      | 10 | (9)  | 33      | Dobber in fles  |
|      | 10 | (10) | 10,13   | De bascule, een combinatie van hefbomen   |
|      | 10 | (11) | 32      | Een balans zonder armen   |
|      | 10 | (12) | 36-38   | Drijvende blokken *)  |
| 1986 | 11 | (1)  | 26,30   | Zolderluik  |
|      | 11 | (5)  | 27,28   | Drijvende cilinders   |
|      | 11 | (10) | 24-27   | Satellietbanen, rekenen en tekenen  |
|      | 11 | (12) | 16-17   | Planetaire reizen: retourtje Mars   |
|      | 11 | (12) | 17,21   | Wachttijd op Mars   |
| 1987 | 12 | (5)  | 208-210 | Periodiek of eenmalig: een kwestie van plus of min  |
|      | 12 | (7)  | 308-309 | Roterende kwikspiegel   |
|      | 12 | (8)  | 366-367 | Kepler uit Newton   |
|      | 12 | (10) | 414-415 | Analyse van een schop   |
| 1988 | 13 | (1)  | 13      | Val-tril-experiment   |
|      | 13 | (5)  | 168-170 | Cycloïde, kromme voor rollen, slingeren en vallen   |
| 1989 | 14 | (1)  | 24-25   | Fermat, Bernoulli en de cycloïde  |
|      | 14 | (2)  | 72-73   | De intelligente veer  |
|      | 14 | (5)  | 192-195 | Versnelde spoed   |
|      | 14 | (7)  | 313,316 | De stenenklem   |
| 1990 | 15 | (2)  | 59      | Natuurkunde, geen recreatie   |
|      | 15 | (2)  | 60-61   | Zweefvliegen (met R. Ducastel)  |
|      | 15 | (4)  | 148-149 | Goed gericht ... altijd raak (met P.J. Wippoo)  |
|      | 15 | (7)  | 267,275 | De geheimzinnige garenklos  |
|      | 15 | (8)  | 312-313 | Richting horen  |
|      | 15 | (8)  | 325     | Superelastische botsing   |
| 1991 | 16 | (3)  | 70      | Drijvende krachten  |
|      | 16 | (4)  | 133     | Experiment 117  |
| 1992 | 17 | (1)  | 18-19   | Waar grijpt de opwaartse kracht aan?  |
|      | 17 | (3)  | 140     | Alles gelijk kapot  |
|      | 17 | (8)  | 360     | Een proef op straat   |
|      | 17 | (9)  | 437     | Botafumeiro   |
| 1993 | 18 | (1)  | 30-31   | Botafumeiro (2)   |
|      | 18 | (2)  | 50,61   | > Prettig zagen   |
|      | 18 | (7)  | 259     | > Waarom weersvoorspellingen zo matig zijn<br>(bewerking van een lezing van J.O. Indekeu) |

\*) Het na "Drijvende blokken" in deze bundel opgenomen artikel van B.A. Wilking, met dezelfde titel, is gepubliceerd in 1991, NVON-maandblad 16 (5), 162-164.

## Artikelen in Archimedes

Voor elke titel staat het nummer van de aflevering en van de (begin)bladzijde. Achter de meeste titels staat een aanduiding van het niveau: ° voor lagere klassen, °° voor hogere klassen, °°° pittige stof.

### Jaargang 2, 1965/66

- 1 6 Valkoord°°
- 1 8 Vertalen°
- 1 15 Kantelende lat°
- 2 25 Beroete platen°°
- 2 34 Kantelende lat°
- 2 39 Klepslinger°°
- 3 46 Pleidooi voor een minteken°°
- 3 49 Onze taal en natuurkunde°
- 3 52 Foto Prinses Margaret°
- 3 53 Oplossing klepslinger°°
- 3 58 Formules I°
- 3 59 Knikker in draaiende kom°°
- 4 62 Meetcapriolen°
- 4 67 Formules II°°
- 4 70 Onze taal en natuurkunde°
- 4 73 Ruimtevaart in miniatuur°
- 4 77 Uitspraak inzake min-teken kwestie°
- 4 78 Meetcapriolen: antwoorden°

### Jaargang 3, 1966/67

- 1 11 Onze taal en natuurkunde°
- 1 14 Stromingsverschijnselen°°°
- 1 16 Sterk verhaal°
- 2 23 Een vreemde stuiter°
- 2 35 Spiegels uit lenzen°
- 2 37 Doppler-formules°°
- 2 38 Stabiliteit bij schepen°
- 3 47 Als je van de trap afvalt, ...°°
- 4 62 Volgt licht de kortste weg?°
- 4 67 Grap Fahrenheit
- 4 68 De brug van Wheatstone en het deltaplan°°
- 4 73 Mensen als spijkertjes°
- 4 78 Stemmerteller°
- 5 99 Grapjes
- 5 100 Zonnewijzers paters

### Jaargang 4, 1967/68

- 1 4 Proeven met elektroscopen°
- 1 6 Letter-cijfer-puzzel°°°
- 1 7 Onweer, vluchten of kijken°
- 1 8 PTT als vadertje tijd°
- 2 22 1 kilo lood of 1 kilo veren?°
- 2 28 de maan gaat met ons mee°
- 2 31 Onverslijtbaar°
- 2 37 Heb je al eens elektriciteit zien stromen?°°
- 2 38 We meten de aardstraal°°
- 5 82 Een flits zon uit de Antillen°
- 5 89 We maken zelf een elektromotor°
- 5 94 Met ring en deksel°°
- 5 97 Haltertjes en zwaartepunten°°

### Jaargang 5, 1968/69

- 1 9 Een handje helpen°
- 1 16 Biljarten en construeren met de spiegelwet°
- 2 23 Drie, getal van stevigheid°
- 2 27 Lood smelten met zonlicht°
- 2 35 Een veranderende weerstand en houd de dief!°°
- 2 39 Per boekenkast of vliegtuig°°
- 4 74 Krachten in touwen°
- 4 85 Mens als motor°
- 4 94 Bericht van verhindering
- 4 95 Evenredig en lineair°°

### Jaargang 6, 1969/70

- 1 15 Valbeweging bij jojo°°
- 2 24 Elektronenstralen°°
- 2 30 Ruimtearchitectuur°
- 2 31 Lood om oud ijzer
- 2 34 Geleiding, stroming en straling ook bij elektriciteit°°
- 2 35 Een plakbandtoren°
- 3 51 Doppler en de cirkelbeweging°°°
- 3 53 Weet jij het? (Weegt vis in water mee?)°
- 3 54 Natuurkunde aan de Rijn°°
- 3 58 12-experimentenpuzzel°°°
- 4 62 Breuken en mobielen°
- 4 68 Elektroscopprobleem°°
- 5 95 Baby's koelen sneller af dan grote mensen°°
- 5 100 Weet je wat een U-buis is?

### Jaargang 7, 1970/71

- 1 16 Resonantie 1°
- 1 17 Resonantie 2°
- 1 18 Amsterdam-New York een uur°°
- 1 21 We meten de valversnelling°°
- 2 30 Als een lineaal omvalt...°
- 4 80 Druk, trek en torsie°
- 4 90 Edison op straat°
- 4 94 Wrijving, vriend of vijand?°
- 5 115 Remmen, een vreemde bezigheid°
- 5 121 Waarom valt de toren van Pisa niet om?°

### Jaargang 8, 1971/72

- 2 30 Tweemaal ingesteld op oneindig
- 2 38 Zweving in kippegaas°
- 2 42 In het fasen-gebergte van Boyle-Gay Lussac°°°
- 2 44 Ideale arm-en beenbewegingen bij verspringen.
- 4 93 Schakelspel°

### Jaargang 9, 1972/73

- 4 73 We maken een seismograaf°
- 4 80 Hoe bestaat het?°

- 4 95 Van 0 tot 100, een lange weg voor het atoom nummer°
- 4 97 Zo bestaat het!°
- 5 114 Negatief posttarief

*Jaargang 10, 1973/74*

- 1 3 Meet je reactiesnelheid°
- 1 12 Trekt een magneet aluminium aan?°°
- 1 22 Waarom hier zo en daar zo?°
- 2 26 Van Syracuse naar Rijswijk°
- 2 39 Doppler als verkeersagent°°
- 2 43 Lawaai: modern misdrijf°
- 2 48 Water koken in een papieren bakje°
- 3 49 Vacantie op luchtdruk°°
- 4 73 Bergetappe, fietsen of lopen?°°°
- 4 76 Het rubbervel, een fysisch model°°
- 4 92 Door de bomen het bos...°°
- 4 95 Gegeven-gevraagd-oplossing°°
- 5 111 Daar zit muziek in...°°°
- 5 119 De eerste elektromotor°

*Jaargang 11, 1974/75*

- 1 1 Grand gala du Gram°
- 1 3 Bepaling van g met een tuinslang°°
- 1 8 Fotograferen zonder fototoestel, chemie of fysica°
- 1 17 Weerstandpuzzel°°
- 1 18 Meetinstrumenten thuis: de watermeter°
- 2 31 Fietsen in de regen°°
- 2 45 De waterklok uit het science-museum°
- 2 47 Meetinstrumenten thuis: de gasmeter°
- 4 73 Het 'brandglas' van Archimedes°
- 4 81 Klimmen in de bergen°°°
- 4 90 Achterruit-verwarming°°
- 5 97 Watergolven 1°°
- 5 99 Watergolven 2°°
- 5 104 Op eens of geleidelijk°°°
- 5 114 Nog eens fietsen in de regen
- 5 117 Meetinstrumenten in de auto: de tachograaf°

*Jaargang 12, 1975/76*

- 1 1 Experimenteren met waterlenajes°
- 1 11 Doen alsof (analogie warmtestroom door weerstand)°°°
- 1 16 Thomas Young en de golftheorie°
- 1 19 Natuurkunde onder de douche°°
- 1 21 Letter-cijfer-puzzel°°
- 1 23 Thuis experimenteren: stroming van lucht en water°
- 2 30 De zonneshijmeter°°
- 2 32 De meter - 100 jaar°
- 2 41 Zelf doen: microfoon en telefoon
- 2 47 Thuis experimenteren: met luchtdruk°
- 3 49 Hete-lucht ballonnen°
- 3 70 Thuis experimenteren: met evenwichten°
- 4 73 Energie van zon en wind°°
- 4 87 Een proef met uitstromend water°
- 4 96 Rijst stampen, een 3-fasenverschijnsel°°
- 5 99 Klokkspel met vectoren°°
- 5 116 Schrijven met elektronen, zand en licht°

*Jaargang 13, 1976/77*

- 1 13 In Parijs groeit het gras schuin°
- 1 16 Plaatjes maken en kijken°
- 1 24 Een elektrische meetpuzzel°°
- 2 48 Zwartkijker; black-box voor licht°°°
- 3 59 De Middellandse Zee als supergolfbak°
- 4 76 Botsende treintjes°
- 4 85 Water oppompen met water°°
- 4 91 De zin van autogordels°°
- 4 96 Natuurkundepuzzel°°
- 4 96 Oplossing van de puzzel: black-box voor licht

*Jaargang 14, 1977/78*

- 1 1 Hoe ontstaat de regenboog?°
- 1 13 Water uit de dode zee°°
- 1 20 Hoe werkt een lachspiegel
- 2 38 Frekwentie meten met water°°°
- 2 40 Windkrachtpuzzel
- 2 46 Techniek in de oudheid°
- 2 47 Celsius en zijn temperatuurschaal°
- 2 49 Oplossing van de windkrachtpuzzel
- 3 51 Een optische micrometer°
- 3 54 Schuiven, kantelen of rollen°°
- 3 63 Schietproef met twee wasknijpers°°
- 3 65 Onweer°°
- 3 71 Stroomt lucht van hoog naar laag?°°
- 3 72 Schakelpuzzel°°°
- 4 73 De sprongredder°°
- 4 86 Luchtdrukverdeling bij versnelling°
- 4 89 Tweemaal breking
- 5 100 Vuurwerk een spektakel van parabolen°°°
- 5 112 Hoe werken brandmelders?°°
- 5 113 Zilveren ringen°°
- 5 116 De fles van marionette°

*Jaargang 15, 1978/79*

- 1 1 Klimmen met wrijvingskrachten°
- 1 15 Het ideale punt°
- 2 25 Schuim, bizarre schoonheid
- 2 28 Rollend de helling af°°
- 2 30 Een glas kapot zingen°
- 2 44 De bierschuimformule°°
- 3 55 Tweemaal breking°
- 3 57 Holle spiegel als tenniswand°°
- 3 64 Itereren, een methode in de natuurkunde°°
- 3 71 Zijn spiegelbeeld en origineel wel gelijk°
- 3 72 Natuurkundepuzzel, de driepunter°
- 4 73 Kammen als pianotoetsen°
- 4 76 Het bijzondere achter de boot
- 4 77 Spelen met eenheden°°
- 4 77 Achter de boot°
- 4 83 Von Guericke was (g)een sufferd
- 4 85 Een kromme redenering°°
- 4 94 Oplossing van een kromme redenering
- 4 95 Naamkaartjespuzzel
- 5 110 Evenwichten bij magnetische dobbers°
- 5 113 Met gekruiste degens°°
- 5 115 Een bolle lens als meetinstrument°°
- 5 120 Oplossing van de puzzel "driepunter"

*Jaargang 16, 1979/80*

- 1 7 Dansende dobber
- 1 11 De wandelende paperclip°
- 1 21 Oplossing de wandelende paperclip°
- 2 25 Luchtdruk meten met een tuinslang°
- 3 69 Rollen zonder slippen
- 4 89 Contrast°
- 4 97 Puzzel 4
- 5 107 Uitrollen van de levenslijn

*Jaargang 17, 1980/81*

- 1 21 Minilab thuis
- 2 36 Wat is efficiënter: duwen of trekken?
- 2 41 Kameleon, kampioen bij het tonguitsteken
- 2 44 Karretjes in evenwicht
- 2 48 Het voorwiel heeft er moeite mee°
- 2 49 Puzzel 7
- 3 62 Waarom aarden?°
- 3 70 Houdt 2 seconden afstand°
- 4 81 Oplossing puzzel
- 5 108 Glasdiktemeter

*Jaargang 18, 1981/82*

- 1 4 Mijn buurman en ik
- 1 23 Foto's van magnetische veldlijnen
- 2 30 Bellen meten in het water°
- 2 48 Puzzel 12
- 3 49 Frequentie meten°
- 4 85 De logaritmische schaal
- 4 90 Oplossing puzzel 12
- 4 97 Puzzel 14°°
- 5 115 Doe meer met de rekenmachine

*Jaargang 19, 1982/83*

- 1 8 Prijsvraag: energiedichtheid°
- 1 9 Een nieuw type zonnecollector°
- 1 13 5-0
- 1 21 Fiets en auto in de bocht°°
- 1 25 Oplossing puzzel 14
- 2 25 De watercirkel°
- 2 42 De helling is belangrijk
- 2 44 Rotameter°
- 2 47 Puzzel 17
- 3 61 Warmtemeter°°
- 3 69 Puzzel: balans°°°
- 3 72 Verklaring van de problemen bij de balans
- 4 73 Hoe komen ruimtetoetsen naar de aarde?°
- 4 83 Oplossing puzzel 17
- 4 93 Treinwielen°
- 4 95 Met balletjes en belletjes°°
- 5 102 Zwart gat
- 5 103 Meten aan de zon°°
- 5 106 Uitslag prijsvraag energiedichtheid

*Jaargang 20, 1983/84*

- 1 3 Mechanica in de atletiek: kogelstoten°°
- 1 12 Een proef met effect°°°
- 1 25 Experiment: doorbuigende lat
- 2 25 Mechanica in de atletiek: polsstokhoogspringen°°
- 2 29 Puzzel 22: sterrenbeelden
- 2 32 Aan de wind zeilen°°

- 2 43 Puzzel: boomstam weggrollen°°°
- 2 48 Doorbuigende lat: oplossing
- 2 49 Venturi-buis III°
- 3 65 Mechanica in de atletiek: kogelslingeren°°
- 3 68 Een variant: discuswerpen°
- 3 75 Puzzel: brugschakeling
- 3 82 Sneller, met minder kracht°°
- 3 84 Oplossing puzzel boomstam weggrollen
- 3 84 Een lichtstraal die krom gaat
- 4 88 Wie won, Moser of de computer?
- 4 93 Oplossing puzzel brugschakeling
- 4 102 Zwaartekracht vallen of zweven
- 4 110 Mechanica in de atletiek: verspringen°°
- 4 112 De 100-meter loop°°

*Jaargang 21, 1984/85*

- 1 1 Vuurwerk°°
- 1 7 Per kabelbaan over de rivier°°
- 1 8 Versnelling als kermisattractie I°°
- 1 24 rrrrrrr de specht is aan het werk°°
- 1 35 220 Volt, waarom?°
- 1 37 Per kabelbaan over de rivier: oplossing
- 1 37 Omkeringsprijsvraag
- 2 39 Versnelling als kermisattractie°°
- 2 40 De treklamp°°
- 2 43 Fonogram°
- 2 50 Stoken voor de burens°
- 2 52 Problemen bij het passeren van het gele licht°°
- 2 63 Oplossing de treklamp
- 3 65 Over files en groene golf°°
- 3 76 Versnelling als kermisattractie°°°
- 3 84 Onzin in diepvries°
- 3 85 Hoe sterk is een mastworp?°°°
- 3 87 Commentaar op onzin in diepvries
- 3 97 Puzzel 27: schakeling van meetinstrumenten°°
- 3 98 Boyle en de kurkedrukker°
- 4 112 Versnelling als kermisattractie°°

*Jaargang 22, 1985/86*

- 1 13 Onweer als spelbreker°°
- 1 18 Waarom geen konijn op wielen of een auto op poten°
- 1 26 Met gesloten vizier°°
- 2 4 De letter e°
- 2 9 Viesica°
- 2 12 De regenbui van 7 oktober 1930°
- 2 24 Puzzel: de vrije zaterdag van Erik
- 2 34 Te zwaar of te licht°
- 3 1 Werken met de metaaldetector°°
- 3 11 Tanker in de bocht°
- 3 12 Beter per fiets°
- 3 13 Eenheden of geenheden
- 3 15 Halley dichtbij°
- 3 29 Slapen, hoe lig je goed?°°
- 4 22 Banen van satellieten°°°
- 4 30 Oplossing puzzel de vrije zaterdag van Erik
- 4 30 Eenheden puzzel°
- 4 31 Hallo, met wie?°°
- 4 34 In de schijnwerpers°
- 5 1 De ramp bij Tsjernobyl°°
- 5 14 In de ban van de ringen°
- 5 20 Cafeïne in koffie°

- 5 22 Doorstraling, veilig of niet°
- 6 1 Platforms moeten tegen een stootje kunnen°°
- 6 8 Trekken en duwen°°
- 6 16 Ontwerp voor energie-opslag°
- 6 24 De verdampingsmeter°°
- 6 32 Oplossing eenhedenpuzzel

*Jaargang 23, 1986/87*

- 1 1 De ruimtebrommer°
- 1 4 De Jif-dop°°
- 1 18 Fase, gelijk en tegengesteld°
- 1 19 Een eeuw uitvindingen
- 2 10 Het telefoonnet°
- 2 12 Lenzenpuzzel
- 3 5 Puzzel: taal en kleur°
- 3 7 Illusie, hol of bol?°
- 3 28 Postcode°
- 4 8 Lenzenpuzzel oplossing
- 4 9 Stereo-foto's°
- 4 16 Verkorting in water°°
- 4 18 Puzzel met schakelingen
- 4 22 De aarde ons ruimteschip°°
- 5 5 Gelijktijdig vallen°
- 5 6 Zo kan het ook°
- 5 7 Kleurenpuzzel, uitslag°
- 5 12 Opgelet voor ultraviolet°°
- 5 15 Sterrenhorloge voor 's nachts°
- 5 23 De waterkrik°°
- 5 30 Puzzel: KID
- 6 4 Radioactiviteit in huis°°
- 6 7 Spoken in het toilet
- 6 21 Trekpuzzel°°
- 6 26 'Cola-light' blijft drijven°
- 6 27 Oplossing trekpuzzel

*Jaargang 24, 1987/88*

- 1 6 De haren van Claire
- 1 7 Puzzel bewegingen
- 1 8 Elektronisch knutselen°
- 1 9 Kleurcodering voor weerstanden°
- 1 10 Puzzelen met schakelingen, oplossing
- 1 11 Puzzel KID oplossing
- 1 19 Als je woont in...°
- 1 23 Stuntvlieger
- 1 26 De schommel°
- 1 28 Kunstmanen°
- 2 8 Puzzel: snelheidstransformator°°
- 2 9 Van Maagdenburg tot Veldhoven°
- 2 18 Vliegen op hoogte nul°
- 2 22 De lineaire motor°°°
- 2 30 Interessant experiment om zelf te doen°
- 3 11 Puzzel: wie zit waar?°
- 3 22 Dateren met jaarringen°
- 3 32 Oplossing puzzel bewegingen
- 4 6 Parijs-Amsterdam, in een half uur°
- 4 21 Zonsondergang
- 4 27 Oplossing zonsondergang
- 4 31 Eenhedenpuzzel°
- 4 31 Oplossing puzzel snelheidstransformator
- 5 1 Daniel Blom en zijn aluinkristal°
- 5 16 Oplossing puzzel wie zit waar
- 5 22 Discussiëren in Venlo°

- 5 43 Glorieuse Revolutie°
- 6 12 Nucleaire winter°
- 6 24 Stuurstabiliteit°°
- 6 32 Oplossing eenhedenpuzzel

*Jaargang 25, 1988/89*

- 1 3 Hoe harder we rijden, hoe meer files°°
- 1 7 Opgave maximum of minimum°
- 1 31 Willem en Mary°
- 2 13 Puzzel: affiche°
- 2 14 Poolcirkel°
- 2 18 Oplossing wie van beide?
- 2 31 Eenhedenpuzzel°°
- 2 31 Oplossing puzzel affiche
- 3 1 Een vliegtuig in je rugzak°°°
- 3 6 Oplossing eenhedenpuzzel
- 3 14 Paardesprongpuzzel°
- 3 15 Gelaste stalen buis°
- 3 22 De geschiedenis van de fjorden
- 4 1 Een poster uit de ruimte°
- 4 30 Oplossing paardesprongpuzzel
- 5 7 Europa 1992°
- 5 7 Balletjes vast
- 5 11 Balletjes los
- 5 18 Vogelgeluiden°°
- 5 21 Een merkwaardig experiment°°
- 5 28 Metaal puzzel
- 6 16 Doet ie het of doet ie het niet
- 6 16 Letter-cijfer-puzzel°
- 6 26 Evenwicht trucs
- 6 28 Oplossing doet ie het

*Jaargang 26, 1989/90*

- 1 4 De stenenklem°°
- 1 5 Oplossing letter-cijfer-puzzel
- 1 5 Oplossing metalen puzzel
- 1 25 Wegstreep-puzzel°
- 1 27 Lift°
- 1 31 Oplossing lift
- 2 1 Waarom valt de toren van Pisa niet om?°°
- 2 4 Oplossing wegstreep-puzzel
- 2 4 Kantelende lat°
- 2 24 Extra lawaai geeft meer stilte°°
- 2 30 Amsterdam-New York in een uur°°
- 3 6 Kantelende lat°°
- 3 9 Dubbele schaduwen°
- 3 15 Wat is efficiënter: duwen of trekken°°
- 3 16 12-experimenten puzzel°
- 3 22 Onderzoek van gassen°°
- 3 32 Oplossing schaduwen
- 4 2 Gemiddelde snelheid°°
- 4 3 Omhoog rollen
- 4 9 Spiegelpuzzel
- 4 20 Breking°°
- 4 23 Rebus
- 4 32 Oplossing gemiddelde snelheid°°
- 4 32 Oplossing rebus
- 5 10 Puzzel: elektrische krab°°
- 5 16 Karretjes in evenwicht°°
- 5 20 Eratosthenes op herhaling°°
- 5 24 De trace gulden
- 5 32 Oplossing 12-experimenten puzzel°°



- 6 8 Eieren in de koelkast°°
- 6 9 De elektrische kam°°
- 6 13 Meten aan de kWh-meter°°
- 6 14 We meten de valversnelling°°
- 6 20 Vooruitkijkspiegels°°
- 6 32 Oplossing eieren in de koelkast

*Jaargang 27, 1990/91*

- 1 1 Schuine wielen°°
- 1 13 De verkeerde kant uit°
- 1 14 Door zwevingen lopen°°
- 1 15 Oplossing elektronische krab
- 1 16 Benzinedamp terug in de tank°°
- 1 17 Van twee naar een°°
- 1 22 Oplossing spiegelpuzzel
- 1 25 De magnus-rotor°
- 2 12 Een merkwaardig motortje°°
- 2 13 Puzzel: de geheimzinnige garenklos°°
- 2 22 Schip op Jupiter°°
- 2 23 Een luchtkanon°
- 2 29 Vallende aardappelen°
- 2 30 De geleide raket
- 3 11 Oplossing de garenklos
- 3 11 Fietsen over een kabel°
- 3 12 Een aansteker door luchtdruk°
- 3 13 Koning weg°
- 3 13 Symbolen puzzel°
- 3 16 Parabolische spiegels°°
- 3 21 Lagere valversnelling°°
- 3 26 Een waterparabool als paraplu°
- 4 1 De zwaartekracht als gaspedaal°°
- 4 3 Experiment met twee touwtjes°°
- 4 4 Puzzel: de instortende kathedraal°°
- 4 6 Serveren°°
- 4 12 Brugconstructie°°
- 4 16 Vallende schoorstenen
- 4 23 Oplossing brugconstructie
- 4 32 Experiment met twee touwtjes°°
- 5 1 Fietsica (inleiding)°
- 5 5 Met de tijdtikker°°
- 5 9 Bergetappe, fietsen of lopen°°°
- 5 14 Fiets en auto in de bocht°°
- 5 19 Mens als motor°°
- 5 22 Het voorwiel heeft er moeite mee°
- 5 25 Wie won, Moser of de computer?°°°
- 5 28 Vakantie op luchtdruk°°
- 5 32 Meet je reactiesnelheid°
- 5 34 Per fiets door de lucht°
- 6 1 Magdeburg in Zaanstad°
- 6 2 Legpuzzel: weerstandsmeting°°
- 6 11 Frisse zeebries°
- 6 20 Puzzel: wadlopen°°
- 6 21 Spookgeld°
- 6 31 Oplossing symbolen puzzel°°

*Jaargang 28, 1991/92*

- 1 10 Puzzel tijdgenoten°
- 1 11 Oplossing kathedraal°°°
- 3 1 Bergbeklimmer°
- 3 6 Oplossing weerstandsmeting
- 3 7 Oplossing puzzel wadlopen
- 3 8 Platte bellen blazen°

- 3 16 Rookpluimen°
- 3 19 Spijkerevenwicht°°
- 3 21 Boomstam weggrollen°°°
- 3 25 Oplossing puzzel tijdgenoten
- 4 6 Ontkurken°
- 4 10 Richting horen°°
- 4 12 Boomstam weggrollen: oplossing
- 4 13 Twee knikkers, één tik°°
- 4 21 Colablikje°
- 4 26 Oplossing groothedenpuzzel°°
- 4 29 Luisterspiegels°
- 5 3 Een simpel reactiemotortje°
- 5 7 Gezichtsbedrog
- 5 15 Licht in het oog of uit het oog°
- 5 22 Satellietverbinding°
- 5 27 Reactiekracht°
- 6 12 Val-tril-experiment°°
- 6 21 Schakelpuzzel°°

*Jaargang 29, 1992/93*

- 1 21 In een grote zeeschelp hoor je de zee
- 3 10 Elektriciteit uit water
- 3 11 Trek en druk
- 3 23 Herkenbaarheid
- 4 2 Kruiwagen
- 4 4 Nat ei
- 4 14 Hoekspiegel
- 4 16 Voetveer over de IJssel
- 4 23 Futuroscope
- 4 27 Planeten op suikerklontjes
- 5 4 Sjouwen met een balk
- 5 9 De wankel ladder
- 5 12 Het kan goedkoper...
- 5 15 Schuivende blokken
- 5 19 Carnavalsfiets
- 5 22 Waarom 220 volt
- 5 22 Oplossing: schuivende blokken
- 5 24 Oplossing: carnavalsfiets
- 5 26 Alomtegenwoordig
- 5 28 Oplossing: alomtegenwoordig
- 6 10 Zandlopers
- 6 17 Zandlopers: oplossing

