

# Nascholingscursus Quantumwereld

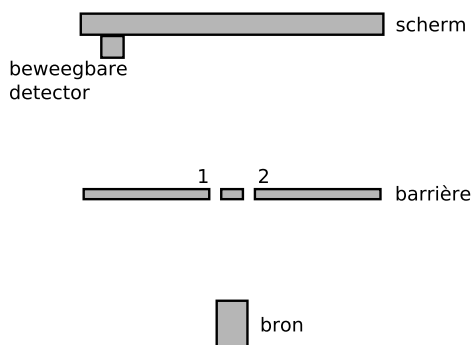
Woudschoten Natuurkunde Didactiek Conferentie 2012

Lodewijk Koopman  
lkoopman@dds.nl

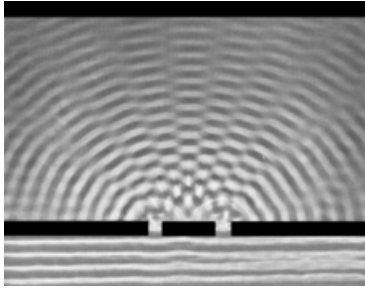
14-15 december 2012

## 1 Dubbel-spleet experiment

Er wordt wel eens gezegd dat elektronen interfereren. Interferentie is een verschijnsel dat we associëren met golven, niet met deeltjes. In deze en volgende opgaven gaan we voorzichtig na wat precies onze basis is om van interferentie te spreken in het geval van elektronen en in hoeverre de vergelijking met klassieke golven opgaat. Daarvoor kijken we eerst preciezer naar hoe watergolven interfereren in een dubbelspleet experiment en gebruiken onze inzichten voor analoge experimenten met licht en elektronen. De opstelling van deze experimenten is steeds zoals schematisch weergegeven in figuur 1. Het patroon dat zichtbaar is voor water, licht en elektronen is weergegeven in respectievelijk figuren 2, 3 en 4.



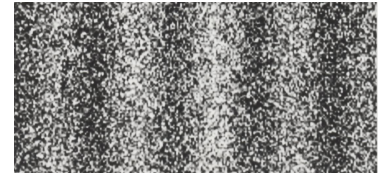
Figuur 1: Schematische weergave van de opstelling van alle dubbelspleet experimenten in deze opgave (bovenaanzicht). De twee spleten zijn genummerd met 1 en 2.



Figuur 2: Water: patroon achter de dubbelspleet (bovenaanzicht).



Figuur 3: Licht: patroon op het scherm achter dubbelspleet.



Figuur 4: Elektronen: patroon op het scherm achter dubbelspleet.

## 1.1 Water

Het patroon dat in figuur 2 achter de twee spleten zichtbaar is gaan we wiskundig proberen te verklaren/beschrijven. Bekijk eerst eens de situatie wanneer één van de spleten dicht wordt gehouden. Er ontstaan dan (bij benadering) cirkelvormige golven (zie figuur rechts). De uitwijking van zo'n golf wordt op een afstand  $r$  van de spleet op tijdstip  $t$  gegeven door:



$$u(r, t) = u_0 \cos(kr - \omega t), \quad (1)$$

waarbij  $k = 2\pi/\lambda$  het golfgetal is met  $\lambda$  de golflengte en  $\omega = 2\pi f$  de hoekfrequentie (ook wel cirkelfrequentie) met  $f$  de frequentie. In het echt hangt de amplitude  $u_0$  ook nog af van  $r$ , maar dat negeren we in dit geval even.

1. Beargumenteer dat  $u(r, t)$  een cirkelvormige golf beschrijft. Leg bijvoorbeeld uit dat op een vast tijdstip  $t$  punten met maximale uitwijking op een cirkel liggen.
2. Welke kant beweegt de golf op?

**Hint** Maak een schets van de golf als functie van  $r$ , waarbij je de tijd op nul zet:  $t = 0$ . Maak nog een schets van de golf, maar nu op een (klein) tijdstip later; kies bijvoorbeeld  $t = \pi/2\omega$ .

De berekeningen worden eenvoudiger wanneer we de golf  $u(r, t)$  als complexe e-macht schrijven:  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . In de syllabus van Calculus wordt voor wissel signalen dezelfde methode gebruikt om een reëel signaal te schrijven met behulp van complexe e-machten (zie hoofdstuk 2, paragraaf 2.6; Toepassing). We schrijven in ons geval:

$$\begin{aligned} \hat{u}(r, t) &= u_0 e^{i(kr - \omega t)}, \\ u(r, t) &= \text{Re } \hat{u}(r, t). \end{aligned}$$

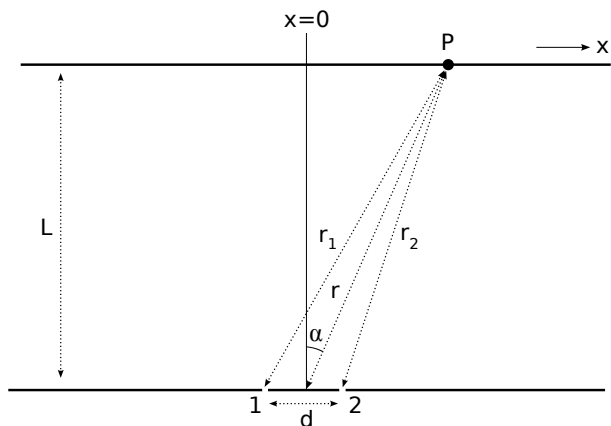
Om te kunnen controleren of de aanname van cirkelvormige golven beschreven door de functie  $\hat{u}(r, t)$  goed werkt, berekenen we hoe het patroon er uitziet op basis van zulke golven en vergelijken dit met het waargenomen patroon. De golf die uit spleet 1 komt als spleet 2 dicht is noemen we  $\hat{u}_1$  en andersom de golf die uit spleet 2 komt wanneer spleet 1 dicht is  $\hat{u}_2$ . De uitwijking van het water wanneer beide spleten open zijn noemen we  $\hat{u}_{\text{patroon}}$ .

3. Hoe hangt  $\hat{u}_{\text{patroon}}$  af van  $\hat{u}_1$  en  $\hat{u}_2$ ?

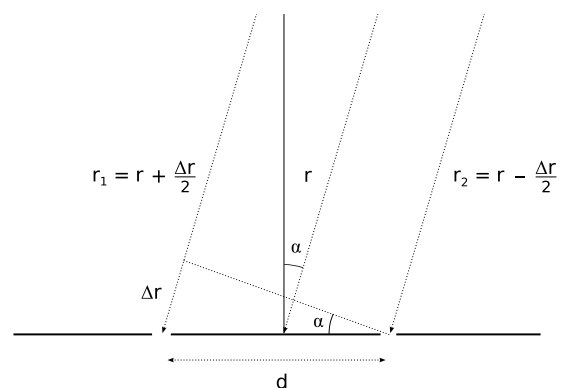
Het patroon in figuur 2, en dus ook  $\hat{u}_{\text{patroon}}$ , is twee-dimensionaal. Dat is moeilijk uit te zetten in een grafiek. We zouden makkelijker kunnen uitrekenen wat de uitwijking is langs een scherm geplaatst op een afstand  $L$  van de dubbelspleet (zie figuur 1).

4. Probeer een uitdrukking voor  $\hat{u}_{\text{patroon}}$  te vinden op een afstand  $L$  van de dubbelspleet als functie van de plaats  $x$  langs het scherm. Gebruik de coördinaten zoals weergegeven in figuur 5 en 6. Omdat we ook aannemen dat  $\alpha$  klein is, mag je gebruiken:  $\tan \alpha \approx \sin \alpha$ .

**Hint** De twee golven zijn elk cirkelvormig vanuit een ander punt. Wat verandert er aan de algemene uitdrukking voor een golf, vergelijking (1)?



Figuur 5: Schematische tekening van de opstelling van de dubbelspleet.



Figuur 6: Detail van de opstelling van de dubbelspleet.

Als we het reële deel van  $\hat{u}_{\text{patroon}}$  voor verschillende tijden in een grafiek zetten en na elkaar weergeven krijgen we een animatie. Bekijk samen de animatie.

5. Vergelijk de animatie met de functie  $\hat{u}_{\text{patroon}}$  en verklaar wat je ziet. Op welke plaatsen is er constructieve en op welke plaatsen destructieve interferentie? Welk deel van de functie  $\hat{u}_{\text{patroon}}$  beschrijft dit?
6. Vergelijk vervolgens de animatie met het patroon in figuur 2. Hoe komen de twee overeen?
7. De golven bewegen op en neer in de tijd. De **maximale uitwijking** op een bepaalde plaats noemen we de **amplitude**. Wat is de amplitude als functie van de plaats  $x$ ? Laat zien dat dit gelijk is aan:

$$A(x) = 2u_0 \left| \cos \left( \frac{kd}{2L} x \right) \right|. \quad (2)$$

**Hint** Laat zien dat de amplitude van de complexe golf  $\hat{u}$  gelijk is aan die van de reële golf en dat je dit kunt schrijven als:  $|\hat{u}| \equiv \sqrt{\hat{u}^* \hat{u}}$ , met  $\hat{u}^*$  de complex geconjugeerde van  $\hat{u}$ . (Zie ook de Calculus syllabus.)

8. Waarom komt in de formule voor de amplitude, vergelijking (2), de tijd niet meer voor?

9. Tot slot: hoort het in het algemeen bij een golf dat er een verandering in de tijd plaatsvindt? Hebben we die eigenschap nodig om interferentie te begrijpen? Gebruik eventueel de uitdrukking van  $\hat{u}_{\text{patroon}}$  om hier antwoord op te geven.

## 1.2 Licht

Een dubbelspleet experiment voor licht is voor het eerst beschreven door Thomas Young in 1804. Op het scherm tegenover de dubbelspleet is een stilstaand patroon te zien. Een foto van dat stilstaande patroon zie je in figuur 3. We vergelijken het patroon van water met dat van licht (respectievelijk figuren 2 en 3 op pagina 2). Bedenk dat het waterpatroon van boven wordt getoond en het lichtpatroon op een scherm recht tegenover de dubbelspleet.

1. Hoe kan de animatie van de uitdrukking voor  $\hat{u}_{\text{patroon}}$  helpen de twee patronen met elkaar te vergelijken? Beschrijf de overeenkomsten en de verschillen tussen de twee patronen.
2. Waarom verschijnen er bij combinatie van twee “lichtbronnen” (de twee spleten) donkere en lichte banen op het scherm? Hoe is dit verschijnsel te begrijpen als we denken aan de opgave over het dubbelspleet experiment met water (vorige paragraaf)? Ga hiervoor systematisch na welke termen bij water en licht met elkaar corresponderen.
3. Zien we bij licht een beweging: iets dat in de tijd verandert? Is het nodig voor ons antwoord op vraag 2 om te veronderstellen dat er ook bij licht iets beweegt of verandert (“golft”)?
4. Wat zie je bij licht precies ter hoogte van het scherm? Is dat hetzelfde als de uitwijking die we berekend hebben? Geef argumenten voor, of tegen. Wat is kwalitatief de relatie tussen de amplitude  $A(x)$  en de sterkte van het licht op het scherm?

## 1.3 Elektronen

Een dubbelspleet experiment met elektronen is voor het eerst uitgevoerd door Claus Jönsson in 1961. Figuur 4 op pagina 2 toont het patroon dat zichtbaar is wanneer elektronen door een dubbelspleet worden gestuurd. Net als bij licht staat dit patroon stil.

1. Hoe kunnen we het patroon in figuur 4 vergelijken met dat van water en licht (figuren 2 en 3). Gebruik hierbij eventueel de animatie van  $\hat{u}_{\text{patroon}}$ . Beschrijf de overeenkomsten en verschillen tussen de verschillende patronen.
2. Waarom verschijnen er bij combinatie van twee “elektronenbronnen” (de twee spleten) banen met veel, danwel weinig elektronen op het scherm? Hoe is dit verschijnsel te begrijpen als we denken aan de opgave over het dubbelspleet experiment met water (vorige paragraaf)? Ga hiervoor systematisch na welke termen bij water en elektronen met elkaar corresponderen.
3. Zien we bij elektronen een beweging: iets dat in de tijd verandert? Is het nodig voor ons antwoord op vraag 2 om te veronderstellen dat er ook bij elektronen iets beweegt of verandert (“golft”)?
4. Welk verband zou er kunnen bestaan tussen de amplitude en de waargenomen elektronen?

## 2 Interpretatie van de golffunctie

In de opgave over de dubbelspleet hebben we interferentie van water, licht en elektronen bekeken. Het interferentiepatroon van elektronen was gemaakt door een bundel elektronen op een dubbelspleet te richten. In deze opgave bekijken we preciezer hoe het patroon van elektronen wordt opgebouwd. Er is weer een dubbelspleet, maar nu worden er heel weinig elektronen afgevuurd: 1000 per seconde. De bron versnelt de elektronen met een spanning van  $V_0 = 50$  kV.

1. Hoeveel tijd zit er tussen twee opeenvolgende elektronen? Welke snelheid hebben de elektronen? Dus wat zou hun afstand zijn als ze ongehinderd kunnen voortbewegen?

**Hint** de kinetische energie van de elektronen wordt bepaald door de spanning  $V_0$  waarmee ze versneld worden.

2. Welke conclusie kun je trekken uit het vorige antwoord over hoeveel elektronen er zich op één moment in het apparaat bevinden? Maak een (grove) schatting van de lengte van het apparaat.

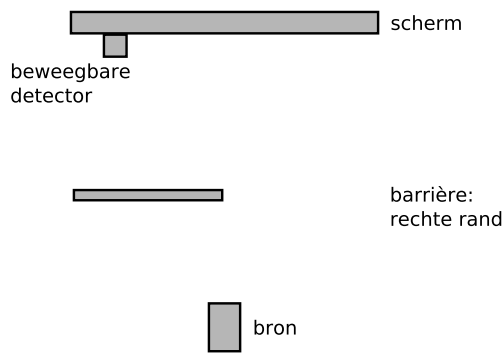
Van de opbouw van het patroon van elektronen is een video gemaakt. Bekijk de video op <http://rdg.ext.hitachi.co.jp/rd/moviee/doubleslite.wmv> De video is het resultaat van een experiment uitgevoerd door Akira Tonomura.

3. Wat valt je op aan de manier waarop het patroon wordt opgebouwd?
4. Welke aspecten van wat je in de film ziet kunnen we verklaren door de golffunctie uit de opgave over interferentie?
5. Bij water zeggen we wel dat de watergolven interfereren en een interferentiepatroon geven. Geef aan in hoeverre je kunt zeggen dat elektronen interfereren.
6. In welke zin zegt de golffunctie iets over één individueel elektron? Wat is (kwalitatief) het verband tussen de amplitude  $A(x) = |\hat{u}|$  en het aantal elektronen dat rond een bepaald punt wordt gemeten?
7. Er wordt wel eens gesproken over de golf-deeltje dualiteit in de kwantummechanica. Zou je op basis van de opgaven over interferentie daar iets over kunnen zeggen?

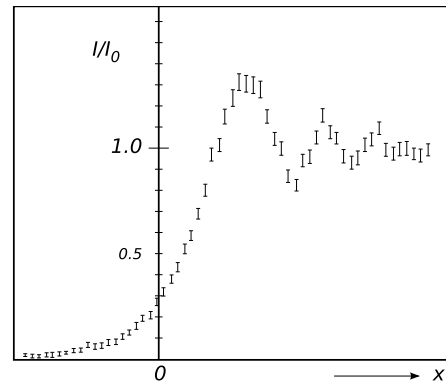
## 3 Elektronen langs een rechte rand

In de opgave over de dubbelspleet en de interpretatie van de golffunctie hebben we gezien dat de deeltjesdichtheid op het scherm een stijgende functie moet zijn van de amplitude van de golf. De vorm van deze functie kennen we echter nog niet. Daarvoor bekijken we een experiment waarbij de dubbelspleet is vervangen door een rechte rand in het midden van de elektronbundel (zie figuur 7). Achter de rand wordt op verschillende plaatsen langs het scherm gemeten hoeveel elektronen er terecht komen.

1. Beredeneer hoe je, analoog aan de opgave van de dubbelspleet, zou kunnen berekenen wat de uitwijking van de golf is ter hoogte van de detector (zie figuur 7)? Probeer dit in woorden uit te drukken.



Figuur 7: Opstelling van het experiment met rechte rand.



Figuur 8: Aantal gemeten elektronen achter de rechte rand (barrière), langs de  $x$ -as.

2. Hoe groot denk je dan dat de amplitude (maximale uitwijking) is van de golf heel ver naar links (achter de rand) en heel ver naar rechts (ver van de rand)? Druk dit uit in termen van  $A_0$ : de amplitude die je verwacht zonder rand. Wat zou de amplitude zijn precies in het midden van opstelling, dus recht achter de rand?

We vergelijken de verwachte amplitudes (van de veronderstelde golf) uit vraag 2 nu met de daadwerkelijk waargenomen elektronen. Zie daarvoor figuur 8. Op de verticale as staat het aantal gedetecteerde elektronen  $I$  als verhouding van het aantal elektronen dat zonder rand gemeten zou zijn ( $I_0$ ). Op de horizontale as staat de positie van de detector:  $x = 0$  is het midden van opstelling,  $x < 0$  is achter de rand en  $x > 0$  is in de bundel. De elektronen zijn gemeten door steeds voor een vaste tijd de detector op een andere locatie langs de  $x$ -as te zetten.

3. Wat is het aantal gemeten elektronen helemaal links ( $x \ll 0$ ), in het midden ( $x = 0$ ) en helemaal rechts ( $x \gg 0$ ) ter hoogte van het scherm? Zet deze waarden, samen met de amplitudes uit vraag 2 in een tabel:

	$x \ll 0$	$x = 0$	$x \gg 0$
$A/A_0$			
$I/I_0$			

Formuleer je conclusie: wat is het verband tussen het aantal elektronen en de (veronderstelde) amplitude? Leg uit hoe je aan je conclusie komt.