Nascholingscursus Quantumwereld

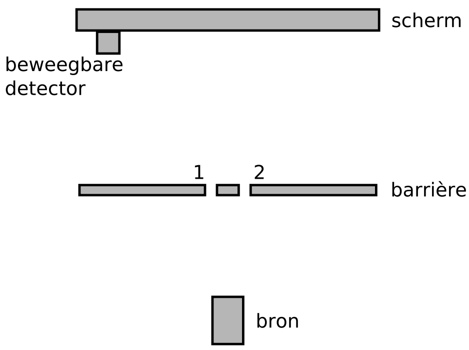
Woudschoten Natuurkunde Didactiek Conferentie 2012

Lodewijk Koopman
lkoopman@dds.nl

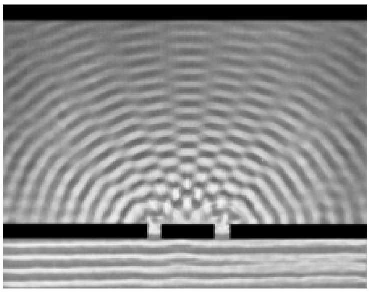
14-15 december 2012

1 Dubbel-spleet experiment

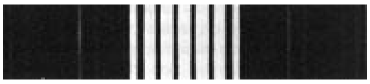
Er wordt wel eens gezegd dat elektronen interfereren. Interferentie is een verschijnsel dat we associëren met golven, niet met deeltjes. In deze en volgende opgaven gaan we voorzichtig na wat precies onze basis is om van interferentie te spreken in het geval van elektronen en in hoeverre de vergelijking met klassieke golven opgaat. Daarvoor kijken we eerst preciezer naar hoe watergolven interfereren in een dubbelspleet experiment en gebruiken onze inzichten voor analoge experimenten met licht en elektronen. De opstelling van deze experimenten is steeds zoals schematisch weergegeven in figuur 1. Het patroon dat zichtbaar is voor water, licht en elektronen is weergegeven in respectievelijk figuren 2, 3 en 4.



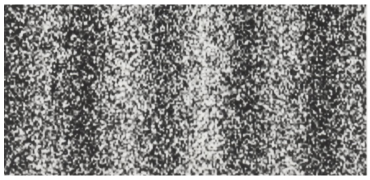
Figuur 1: Schematische weergave van de opstelling van alle dubbelspleet experimenten in deze opgave (bovenaanzicht). De twee spleten zijn genummerd met 1 en 2.



Figuur 2: Water: patroon achter de dubbelspleet (bovenaanzicht).



Figuur 3: Licht: patroon op het scherm achter dubbelspleet.



Figuur 4: Elektronen: patroon op het scherm achter dubbelspleet.

1.1 Water

Het patroon dat in figuur 2 achter de twee spleten zichtbaar is gaan we wiskundig proberen te verklaren/beschrijven. Bekijk eerst eens de situatie wanneer één van de spleten dicht wordt gehouden. Er ontstaan dan (bij benadering) cirkelvormige golven (zie figuur rechts). De uitwijking van zo'n golf wordt op een afstand r van de spleet op tijdstip t gegeven door:

$$u(r,t) = u_0 \cos(kr - \omega t)\,, \tag{1}$$

waarbij $k = 2\pi/\lambda$ het golfgetal is met λ de golflengte en $\omega = 2\pi f$ de hoekfrequentie (ook wel cirkelfrequentie) met f de frequentie. In het echt hangt de amplitude u_0 ook nog af van r, maar dat negeren we in dit geval even.

1. Beargumenteer dat $u(r,t)$ een cirkelvormige golf beschrijft. Leg bijvoorbeeld uit dat op een vast tijdstip t punten met maximale uitwijking op een cirkel liggen.

   Antwoord Als we de uitdrukking op een vast tijdstip bekijken, bijvoorbeeld $t = 0$, dan is de uitwijking maximaal (positief) wanneer $kr = 2n\pi$, met $n = 1, 2, 3, \ldots$, ofwel $r = 2n\pi/k$. Dit correspondeert met punten die op een cirkel liggen. Anders gezegd: voor vaste r (dus op een cirkel met straal r) is de uitwijking constant.

2. Welke kant beweegt de golf op?

   Hint Maak een schets van de golf als functie van r, waarbij je de tijd op nul zet: $t = 0$. Maak nog een schets van de golf, maar nu op een (klein) tijdstip later; kies bijvoorbeeld $t = \pi/2\omega$.

   Antwoord De golf beweegt 'naar buiten' toe (groter wordende r). Immers: bekijken we de cosinus voor een vast argument (vaste uitwijking), dan zal bij het verstrijken van de tijd r ook toe moeten nemen. De golf loopt dus van binnen naar buiten. Dit wordt in een grafiekje ook duidelijk (hier niet getekend). Voor kleine stapjes Δt, zien we de grafiek van $u(r,t)$ naar rechts lopen. Dat komt overeen met 'van binnen naar buiten' (bedenk dat r de straal is).

De berekeningen worden eenvoudiger wanneer we de golf $u(r,t)$ als complexe e-macht schrijven: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$. In de syllabus van Calculus wordt voor wisselsignalen dezelfde methode gebruikt om een reëel signaal te schrijven met behulp van complexe e-machten (zie hoofdstuk 2, paragraaf 2.6; Toepassing). We schrijven in ons geval:

$$\begin{aligned} \hat{u}(r,t) &= u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}, \\ u(r,t) &= \mathrm{Re}\ \hat{u}(r,t). \end{aligned}$$

Om te kunnen controleren of de aanname van cirkelvormige golven beschreven door de functie $\hat{u}(r,t)$ goed werkt, berekenen we hoe het patroon er uitziet op basis van zulke golven en vergelijken dit met het waargenomen patroon. De golf die uit spleet 1 komt als spleet 2 dicht is noemen we $\hat{u}_1$ en andersom de golf die uit spleet 2 komt wanneer spleet 1 dicht is $\hat{u}_2$. De uitwijking van het water wanneer beide spleten open zijn noemen we $\hat{u}_{\text{patroon}}$.

3. Hoe hangt $\hat{u}_{\text{patroon}}$ af van $\hat{u}_1$ en $\hat{u}_2$?

   Antwoord Het effect van twee spleten open t.o.v. van een van de spleten open is dat de uitwijking van de afzonderlijke golven bij elkaar optellen: $\hat{u}_{\text{patroon}} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2$

Het patroon in figuur 2, en dus ook $\hat{u}_{\text{patroon}}$, is twee-dimensionaal. Dat is moeilijk uit te zetten in een grafiek. We zouden makkelijker kunnen uitrekenen wat de uitwijking is langs een scherm geplaatst op een afstand L van de dubbelspleet (zie figuur 1).

4. Probeer een uitdrukking voor $\hat{u}_{\text{patroon}}$ te vinden op een afstand L van de dubbelspleet als functie van de plaats x langs het scherm. Gebruik de coördinaten zoals weergegeven in figuur 5 en 6. Omdat we ook aannemen dat α klein is, mag je gebruiken: $\tan\alpha \approx \sin\alpha$.

   Hint De twee golven zijn elk cirkelvormig vanuit een ander punt. Wat verandert er aan de algemene uitdrukking voor een golf, vergelijking (1)?

   Antwoord We kunnen uitrekenen wat de uitwijking is op een afstand L van de dubbelspleet op een lijn parallel aan die dubbelspleet. We gebruiken ten eerste: $\hat{u}_{\text{patroon}} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2$ (zie vorige antwoord) en verder: $\hat{u}_1 = \hat{u}_1(r_1,t)$, $\hat{u}_2 = \hat{u}_2(r_2,t)$. De afleiding gaat als volgt:

   Aangenomen wordt dat twee cirkelvormige golven uit de twee spleten treden. De twee golven (monochromatisch en in fase) kunnen beschreven worden volgens:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(r_1,t) &= u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr_1-\omega t)}, \\ \hat{u}_2(r_2,t) &= u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr_2-\omega t)}. \end{aligned}$$

   Voor sferische golven valt de amplitude af als $1/r$, maar dat laat ik hier even buiten beschouwing. De reële golven worden dan gegeven door $\mathrm{Re}\ \hat{u}_{1,2}$, de amplitude van deze golven is dan $|u_{1,2}|$. Op een afstand L achter de dubbel-spleet, wordt dan de som van deze twee golven waargenomen. De resulterende golf wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x,t) &= \hat{u}_1(r_1,t) + \hat{u}_2(r_1,t), \\ &= u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr_1-\omega t)} + u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr_2-\omega t)}, \\ &= u_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_2}\right). \end{aligned}$$

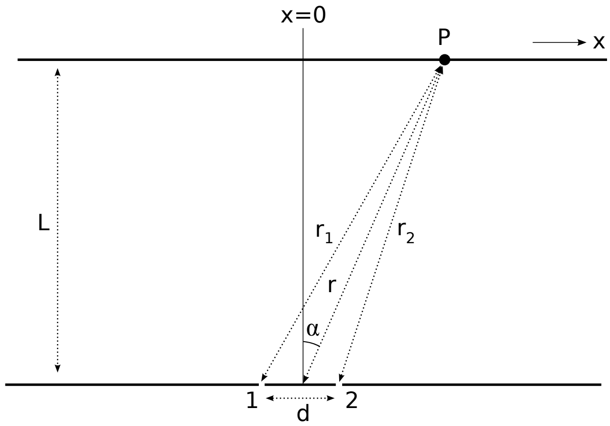
   De afstanden r_1 en r_2 kunnen worden uitgedrukt in de spleetafstand d, de afstand tot het scherm L en de plaats op het scherm x (zie ook de figuren in de opgave).

We nemen aan dat de spleetafstand klein is ten opzichte van de schermafstand; $d/L \ll 1$. De lijnen van de spleten naar een punt P op het scherm zijn dan in goede benadering parallel. Verder kijken we naar punten dicht bij de symmetrie-as zodat $\alpha \approx 0$. We vinden dan:

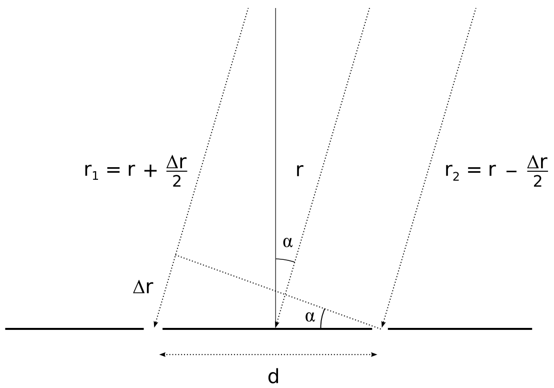
$$\begin{aligned} r_1 &= r + \frac{1}{2}\Delta r, \\ r_2 &= r - \frac{1}{2}\Delta r, \\ \Delta r &= d \sin\alpha, \\ &\approx \frac{xd}{L}, \\ r &= \sqrt{x^2 + L^2}. \end{aligned}$$

Invullen in de uitdrukking voor $\hat{u}(x,t)$ geeft:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x,t) &= u_0 \exp \mathrm{i}(k\sqrt{x^2+L^2} - \omega t) \left[\exp \mathrm{i}\frac{kd}{2L}x + \exp -\mathrm{i}\frac{kd}{2L}x \right], \\ &= 2u_0 \exp \mathrm{i}(k\sqrt{x^2+L^2} - \omega t) \cos\frac{kd}{2L}x. \end{aligned}$$



Figuur 5: Schematische tekening van de opstelling van de dubbelspleet.



Figuur 6: Detail van de opstelling van de dubbelspleet.

Als we het reëele deel van $\hat{u}_{\text{patroon}}$ voor verschillende tijden in een grafiek zetten en na elkaar weergeven krijgen we een animatie. Bekijk samen de animatie.

5. Vergelijk de animatie met de functie $\hat{u}_{\text{patroon}}$ en verklaar wat je ziet. Op welke plaatsen is er constructieve en op welke plaatsen destructieve interferentie? Welk deel van de functie $\hat{u}_{\text{patroon}}$ beschrijft dit?

   Antwoord Voor een vaste x, zal de complexe e-macht er alleen voor zorgen dat de complexe vector in de tijd ronddraait. De maximale uitwijking van deze factor is 1. De cosinus is onafhankelijk van de tijd: dat is het statische beeld van het interferentiepatroon. Voor bepaalde vaste waarden van x is er destructieve interferentie, voor andere constructieve interferentie. Het interferentiepatroon wordt dus gekenmerkt door de maximale uitwijking (amplitude) van de gecombineerde golven.

6. Vergelijk vervolgens de animatie met het patroon in figuur 2. Hoe komen de twee overeen?

   Antwoord De plaatsen langs het scherm waar het water niet trilt komen overeen met bepaalde plaatsen in de animatie waar ook geen trilling te zien is. Daar tussen trilt het water sterk op en neer. De animatie is als het ware een dwarsdoorsnede langs het scherm van het patroon zichtbaar in figuur 2.

7. De golven bewegen op en neer in de tijd. De **maximale uitwijking** op een bepaalde plaats noemen we de **amplitude**. Wat is de amplitude als functie van de plaats x? Laat zien dat dit gelijk is aan:

$$A(x) = 2u_0 \left| \cos\left(\frac{kd}{2L}x\right) \right| . \tag{2}$$

   Hint Laat zien dat de amplitude van de complexe golf $\hat{u}$ gelijk is aan die van de reëele golf en dat je dit kunt schrijven als: $|\hat{u}| \equiv \sqrt{\hat{u}^*\hat{u}}$, met $\hat{u}^*$ de complex geconjugeerde van $\hat{u}$. (Zie ook de Calculus syllabus.)

   Antwoord Gebruik de hint: $|\hat{u}| = \sqrt{\hat{u}^*\hat{u}}$. De e-macht is alleen een fasefactor en valt weg, dus voor een vaste x is de maximale uitwijking:

$$2u_0 \left| \cos\left(\frac{kd}{2L}x\right) \right| .$$

8. Waarom komt in de formule voor de amplitude, vergelijking (2), de tijd niet meer voor?

   Antwoord Aangezien amplitude betekent 'maximale uitwijking' kijken we voor iedere plaats x welke maximale waarde de uitwijking in de tijd aanneemt. Dan hangt de amplitude niet meer van de tijd af. Anders gezegd: het is een maximum in de tijd.

9. Tot slot: hoort het in het algemeen bij een golf dat er een verandering in de tijd plaatsvindt? Hebben we die eigenschap nodig om interferentie te begrijpen? Gebruik eventueel de uitdrukking van $\hat{u}_{\text{patroon}}$ om hier antwoord op te geven.

   Antwoord In het algemeen is een golf een periodiek verschijnsel, zowel in de ruimte als in de tijd. We hebben het nodig gehad in bovenstaande berekening. Ten eerste omdat de watergolven in de tijd veranderen. Ten tweede is het te zien aan de uitdrukking voor $\hat{u}_{\text{patroon}}$. Als we twee statische golven bij elkaar optellen krijgen we nooit de amplitude uit vergelijking (2), maar een momentopname van de animatie.

1.2 Licht

Een dubbelspleet experiment voor licht is voor het eerst beschreven door Thomas Young in 1804. Op het scherm tegenover de dubbelspleet is een stilstaand patroon te zien. Een foto van dat stilstaande patroon zie je in figuur 3. We vergelijken het patroon van water met dat van licht (respectievelijk figuren 2 en 3 op pagina 2). Bedenk dat het waterpatroon van boven wordt getoond en het lichtpatroon op een scherm recht tegenover de dubbelspleet.

1. Hoe kan de animatie van de uitdrukking voor $\hat{u}_{\text{patroon}}$ helpen de twee patronen met elkaar te vergelijken? Beschrijf de overeenkomsten en de verschillen tussen de twee patronen.

Antwoord Figuur 2 is een bovenaanzicht van de opstelling uit figuur 1, figuur 3 toont het patroon dat op het scherm uit figuur 1 zichtbaar is. Om ze met elkaar te vergelijken hebben we dus de uitdrukking voor $\hat{u}_{\text{patroon}}$ nodig die de uitwijking voor de watergolven langs het scherm geeft. Als we de animatie vergelijken met figuur 3 dan valt op dat de animatie een beweging laat zien, die niet zichtbaar zal zijn wanneer we naar licht zouden kijken achter een dubbelspleet. Wat overeenkomt is dat er in beide gevallen plaatsen zijn waar het donker is/er geen trilling zichtbaar is. Daarnaast zijn er andere plaatsen waar het licht is/het water een maximale amplitude heeft. Verder verschillen de twee situaties in de zin dat de golf zelf (het op en neer gaande fenomeen) alleen bij water zichtbaar is en niet bij licht.

2. Waarom verschijnen er bij combinatie van twee "lichtbronnen" (de twee spleten) donkere en lichte banen op het scherm? Hoe is dit verschijnsel te begrijpen als we denken aan de opgave over het dubbelspleet experiment met water (vorige paragraaf)? Ga hiervoor systematisch na welke termen bij water en licht met elkaar corresponderen.

   Antwoord De donkere en lichte banen zijn plaatsen waar het licht versterkt wordt, of uitdooft. Dit is typisch voor interferentie. Het is te begrijpen als we aannemen dat bij licht, net als bij water golven uit de spleten komen, die beschreven kunnen worden door vergelijking (1). De uitwijkingen tellen bij elkaar op. Daar waar ze beiden positief (of negatief) zijn versterken ze elkaar, daar waar ze tegengesteld zijn, doven ze elkaar uit.

3. Zien we bij licht een beweging: iets dat in de tijd verandert? Is het nodig voor ons antwoord op vraag 2 om te veronderstellen dat er ook bij licht iets beweegt of verandert ("golft")?

   Antwoord Bij licht zien we een statisch beeld. Het is echter wel nodig aan te nemen dat er iets beweegt, zoals er ook bij water iets beweegt. Dit kan namelijk de vorm van $\hat{u}_{\text{patroon}}$ en dus het interferentiepatroon verklaren.

4. Wat zie je bij licht precies ter hoogte van het scherm? Is dat hetzelfde als de uitwijking die we berekend hebben? Geef argumenten voor, of tegen. Wat is kwalitatief de relatie tussen de amplitude $A(x)$ en de sterkte van het licht op het scherm?

   Antwoord Op het scherm kunnen we niet de uitwijking zien. Om twee redenen: de uitwijking is ook negatief en we zien alleen iets dat nul is, of groter dan nul. Ten tweede: we zien een statisch beeld, niet iets dat in de tijd verandert zoals de uitwijking.

   We zien dus iets dat te maken heeft met de amplitude van de golf; het statische beeld dat we met meer moeite in de opdracht over water konden ontdekken in het patroon. De uitwijking van de golven zelf kun je niet zien. Kwalitatief is de relatie tussen de amplitude en de lichtintensiteit: hoe groter de amplitude, hoe lichter. Daar waar de amplitude nul is, is het donker (geen licht).

1.3 Elektronen

Een dubbelspleet experiment met elektronen is voor het eerst uitgevoerd door Claus Jönsson in 1961. Figuur 4 op pagina 2 toont het patroon dat zichtbaar is wanneer eletronen door een dubbelspleet worden gestuurd. Net als bij licht staat dit patroon stil.

1. Hoe kunnen we het patroon in figuur 4 vergelijken met dat van water en licht (figuren 2 en 3). Gebruik hierbij eventueel de animatie van $\hat{u}_{\text{patroon}}$. Beschrijf de overeenkomsten en verschillen tussen de verschillende patronen.

Antwoord Ook nu valt op dat er plaatsen zijn waar geen elektronen terecht komen (corresponderend met plaatsen waar we geen water zien trillen) en er zijn plaatsen waar veel elektronen te zien zijn (corresponderend met plaatsen waar het water sterk trilt). Het verschil is ook weer dat we de golf zelf niet zien; we zien niet iets op en neer gaan, alleen een aantal elektronen.

2. Waarom verschijnen er bij combinatie van twee "elektronenbronnen" (de twee spleten) banen met veel, danwel weinig elektronen op het scherm? Hoe is dit verschijnsel te begrijpen als we denken aan de opgave over het dubbelspleet experiment met water (vorige paragraaf)? Ga hiervoor systematisch na welke termen bij water en elektronen met elkaar corresponderen.

   Antwoord Dit is te begrijpen door aan te nemen dat er bij elektronen ook een golf is zoals bij water en licht. Uit elk van de twee spleten komt zo'n golf die elkaar versterken en uitdoven.

3. Zien we bij elektronen een beweging: iets dat in de tijd verandert? Is het nodig voor ons antwoord op vraag 2 om te veronderstellen dat er ook bij elektronen iets beweegt of verandert ("golft")?

   Antwoord Bij elektronen zien we geen beweging: alleen een statische patroon. Dat patroon is te verklaren door de tijdafhankelijke golven zoals beschreven door vergelijking 1.

4. Welk verband zou er kunnen bestaan tussen de amplitude en de waargenomen elektronen?

   Antwoord Het patroon dat we waarnemen bij elektronen heeft de eigenschappen van een interferentiepatroon, dus kunnen we postuleren dat er een golf is die dit veroorzaakt. Het verband tussen de amplitude van deze golf en de waargenomen elektronen (per oppervlak) zal zijn: hoe groter te amplitude, hoe meer elektronen, daar waar de amplitude nul is vinden we geen elektronen.

2 Interpretatie van de golffunctie

In de opgave over de dubbelspleet hebben we interferentie van water, licht en elektronen bekeken. Het interferentiepatroon van elektronen was gemaakt door een bundel elektronen op een dubbelspleet te richten. In deze opgave bekijken we preciezer hoe het patroon van elektronen wordt opgebouwd. Er is weer een dubbelspleet, maar nu worden er heel weinig elektronen afgevuurd: 1000 per seconde. De bron versnelt de elektronen met een spanning van $V_0 = 50$ kV.

1. Hoeveel tijd zit er tussen twee opeenvolgende elektronen? Welke snelheid hebben de elektronen? Dus wat zou hun afstand zijn als ze ongehinderd kunnen voortbewegen?

   Hint de kinetische energie van de elektronen wordt bepaald door de spanning V_0 waarmee ze versneld worden.

   Antwoord De tijd tussen de elektronen is $\Delta t = 1/1000$ s. De snelheid wordt bepaald door de kinetische energie die ze krijgen door de versnelspanning van 50 kV: $E_{\text{kin}} = eV_0$. Omdat algemeen $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ (we beschouwen de elektronen niet-relativistisch), geldt voor de snelheid van de elektronen: $v = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$. De afstand is dus:

$$\Delta x = v\Delta t = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}\Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\ 50\ \text{kV}}{9.1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}}\ 1/1000\ \text{s} = 130\ \text{km}.$$

2. Welke conclusie kun je trekken uit het vorige antwoord over hoeveel elektronen er zich op één moment in het apparaat bevinden? Maak een (grove) schatting van de lengte van het apparaat.

   Antwoord Het is zinnig aan te nemen dat de opstelling een lengte heeft in de orde van meters. Op elk moment is er dus maximaal één elektron in het apparaat. Zou dat niet zo zijn, dan zou hun onderlinge afstand veel kleiner zijn 130 km.

Van de opbouw van het patroon van elektronen is een video gemaakt. Bekijk de video op `http://rdg.ext.hitachi.co.jp/rd/moviee/doubleslite.wmv` De video is het resultaat van een experiment uitvoevoerd door Akira Tonomura.

3. Wat valt je op aan de manier waarop het patroon wordt opgebouwd?

   Antwoord Er verschijnen één voor één elektronen op het scherm in willekeurige volgorde. Pas als er voldoende elektronen gedetecteerd zijn, kunnen we een patroon zien dat op een interferentiepatroon lijkt. Het interferentiepatroon is dus een eigenschap van veel elektronen. Het is niet zinnig te spreken van interferentie bij enkele elektronen.

4. Welke aspecten van wat je in de film ziet kunnen we verklaren door de golffunctie uit de opgave over interferentie?

   Antwoord Het patroon kunnen we verklaren, niet waar een elektronen op het scherm terecht komt. Dus de kans het elektron ergens aan te treffen kunnen we voorspellen.

5. Bij water zeggen we wel dat de watergolven interfereren en een interferentiepatroon geven. Geef aan in hoeverre je kunt zeggen dat elektronen interfereren.

   Antwoord De elektronen interfereren niet met elkaar; daarvoor zit er te veel afstand tussen. Toch lijkt er sprake te zijn van interferentie. De golven interfereren.

6. In welke zin zegt de golffunctie iets over één individueel elektron? Wat is (kwalitatief) het verband tussen de amplitude $A(x) = |\hat{u}|$ en het aantal elektronen dat rond een bepaald punt wordt gemeten?

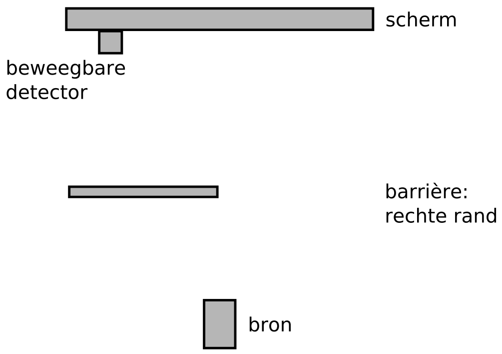
   Antwoord Een golffunctie zegt alleen iets over de kans dat één elektron ergens wordt aangetroffen.

7. Er wordt wel eens gesproken over de golf–deeltje dualiteit in de kwantummechanica. Zou je op basis van de opgaven over interferentie daar iets over kunnen zeggen?

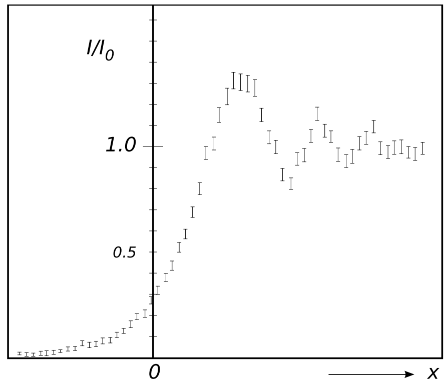
   Antwoord Er is enerzijds sprake van golfgedrag: er is een interferentiepatroon zichtbaar. Anderzijds nemen we nog steeds individuele elektronen waar.

3 Elektronen langs een rechte rand

In de opgave over de dubbelspleet en de interpretatie van de golffunctie hebben we gezien dat de deeltjesdichtheid op het scherm een stijgende functie moet zijn van de amplitude van de golf. De vorm van deze functie kennen we echter nog niet. Daarvoor bekijken we een experiment waarbij de dubbelspleet is vervangen door een rechte rand in het midden van de elektronbundel (zie figuur 7). Achter de rand wordt op verschillende plaatsen langs het scherm gemeten hoeveel elektronen er terecht komen.



Figuur 7: Opstelling van het experiment met rechte rand.



Figuur 8: Aantal gemeten elektronen achter de rechte rand (barrière), langs de x-as.

1. Beredeneer hoe je, analoog aan de opgave van de dubbelspleet, zou kunnen berekenen wat de uitwijking van de golf is ter hoogte van de detector (zie figuur 7)? Probeer dit in woorden uit te drukken.

   Antwoord Bij de dubbelspleet telden de twee golven uit de twee spleten bij elkaar op. Nu hebben we niet één spleet, maar als het ware een hele reeks spleten aaneengeschakeld: elk punt is een spleet waar vanuit een cirkelvormige golf ontstaat. Die tellen allemaal op. Dit is Huygens principe. Dus de uitwijking van de golf op een bepaald punt langs het scherm is de som van de uitwijking van alle bijdragende golven.

2. Hoe groot denk je dan dat de amplitude (maximale uitwijking) is van de golf heel ver naar links (achter de rand) en heel ver naar rechts (ver van de rand)? Druk dit uit in termen van A_0: de amplitude die je verwacht zonder rand. Wat zou de amplitude zijn precies in het midden van opstelling, dus recht achter de rand?

   Antwoord Met een rechte rand in de opstelling zijn er de helft minder bronnen (zie vorig antwoord). Als we de bronnen paarsgewijs symmetrisch rond $x = 0$ bekijken, dan valt voor elke bron op afstand x de bron op afstand $-x$ weg. Omdat elke bron van een paar een gelijke afstand heeft tot het midden van de opstelling, zal het effect zijn dat de uitwijking gehalveerd wordt. Dus op $x = 0$ is de amplitude recht achter de rand dus $\frac{1}{2}A_0$. Helemaal links zullen geen elektronen kunnen komen, de verwachte amplitude is daar dan nul. Helemaal rechts is het effect van de rand te verwaarlozen. Daar is het alsof er geen obstakel is, dus de amplitude zal daar gelijk zijn aan A_0.

We vergelijken de verwachte amplitudes (van de veronderstelde golf) uit vraag 2 nu met de daadwerkelijk waargenomen elektronen. Zie daarvoor figuur 8. Op de verticale as staat het aantal gedetecteerde elektronen I als verhouding van het aantal elektronen dat zonder rand gemeten zou zijn (I_0). Op de horizontale as staat de positie van de detector: $x = 0$ is het midden van opstelling, $x < 0$ is achter de rand en $x > 0$ is in de bundel. De elektronen zijn gemeten door steeds voor een vaste tijd de detector op een andere locatie langs de x-as te zetten.

3. Wat is het aantal gemeten elektronen helemaal links ($x \ll 0$), in het midden ($x = 0$) en helemaal rechts ($x \gg 0$) ter hoogte van het scherm? Zet deze waarden, samen met de amplitudes uit vraag 2 in een tabel:

	$x \ll 0$	$x = 0$	$x \gg 0$
A/A_0			
I/I_0			

Formuleer je conclusie: wat is het verband tussen het aantal elektronen en de (veronderstelde) amplitude? Leg uit hoe je aan je conclusie komt.

Antwoord Recht achter de rand worden ongeveer $I/I_0 = 0.25$ elektronen gemeten. Het verband tussen I en A lijkt dan te zijn: $I/I_0 = (A/A_0)^2$. Ook voor de punten geheel links en rechts gaat dat dan goed. Algemeen zou je verwachten dat het verband tussen de amplitude van de golf en de dichtheid van de elektronen gegeven wordt door $I \propto A^2$. De evenredigheid zit hem er in dat de eenheid van deze twee grootheden anders is. Ook heeft dit te maken met de normering van Ψ.