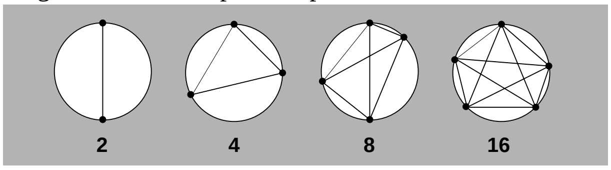
# Wat te bewijzen is

## Rubriek

De vorige rubriek ging over het maximale aantal delen waarin een cirkelschijf wordt verdeeld door de verbindingskoorden van $n$ perifere punten:




Bij het bewijs van de verrassende formule

$$G_n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

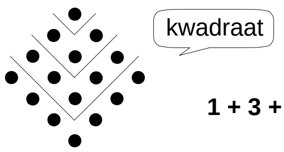
maakte ik gebruik van de bekende formule van Euler.
Lezer Gerrit de Bruijn maakte mij attent op een even fraaie als snedige redenering. Ik citeer:
*Stel je de cirkel voor als een taart. Je gaat nu de taart in stukken snijden. Je begint dan met één stuk, de taart. Elke keer dat je het mes in de taart zet begin je een stuk te splitsen. En dat geldt ook als je een al bestaande snede passeert. Aha! Zo vind je een formule*

***(maximale) aantal stukken** =*
***1 + aantal sneden + aantal snijpunten***

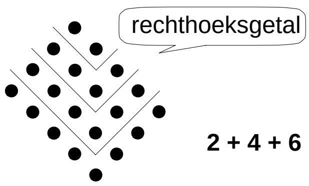
*Omdat elke snede met een tweetal en elk snijpunt met een viertal punten correspondeert (zie vorige aflevering) geldt bovenstaande formule.*
Inderdaad, Euler's formule was een te zwaar mes.

***Nikomachos' stippenpatronen***

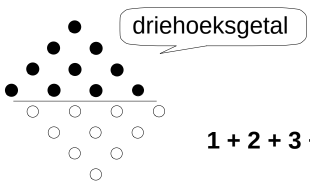
De neo-Pythagoreeër Nikomachos van Gerasa (100 na Chr.) is beroemd geworden om zijn 'veelhoeksgetallen' (zoals driehoeksgetallen). Dit stipte ik al eerder aan in de *Nieuwe Wiskrant* (*19*(1), sept. '99).




$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$




$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$$



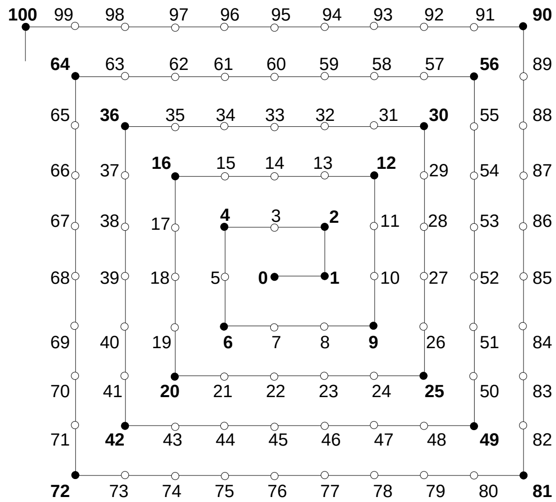

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \tfrac{1}{2}n(n + 1)$$

Kwadraten, rechthoeksgetallen en driehoeksgetallen laten zich respectievelijk schrijven als sommen van opvolgende oneven, even en natuurlijke getallen. Dat zijn mooie eigenschappen die uit de stippenpatronen direct te begrijpen zijn. Nikomachos ontdekte ook een merkwaardig verband tussen oneven getallen en 'kubusgetallen':

$$1^3 = 1$$
$$2^3 = 3 + 5$$
$$3^3 = 7 + 9 + 11$$
$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$

enzovoort.

Dit kan tamelijk direct met stippenpatronen worden aangetoond, maar het is voor een bewijs ook aardig om de voorgaande theorie (in het kader) te gebruiken.
Daarbij gebruik ik een zogenaamde getallenspiraal:




De kwadraten en de rechthoeksgetallen liggen juist op de hoeken van de spiraal. Dat dit bij voortzetting zo blijft, is gemakkelijk na te gaan door naar de tussenliggende stappen te kijken. Het getal 0 is zowel kwadraat als rechthoeksgetal. Merk op dat elk kwadraat precies in het midden ligt van twee opvolgende rechthoeksgetallen; dat volgt direct uit de stippenpatronen, maar is natuurlijk ook algebraïsch verifieerbaar.
Let nu op de sommen 1, 3 + 5, 7 + 9 + 11, ...
De termen van zo'n som passen precies tussen twee opvolgende rechthoeksgetallen! Immers, de $(n + 1)$-de som wordt voorgegaan door in totaal $1 + 2 + 3 + ... + n$ termen en zij begint dus met het getal $2k + 1$ waarbij $k$ het $n$-de driehoeksgetal is. Kortom $2k + 1 = n(n + 1) + 1$.
Evenzo is de laatste term gelijk aan $(n + 1)(n + 2) - 1$, de voorganger van het $(n + 1)$-de rechthoeksgetal.

In verband met wat er hiervoor gezegd is over de onderlinge ligging van kwadraten en rechthoeksgetallen op de spiraal, volgt nu dat de gemiddelden van de termen in 1, 3 + 5, 7 + 9 + 16, ... steeds een kwadraat is. Zo komt er:

$$3+5 = 2\times 4 = 2^3$$

$$7+9+11 = 3\times 9 = 3^3$$

$$13+15+17+19 = 4\times 16 = 4^3$$

enzovoort.

***Een fantastische formule***

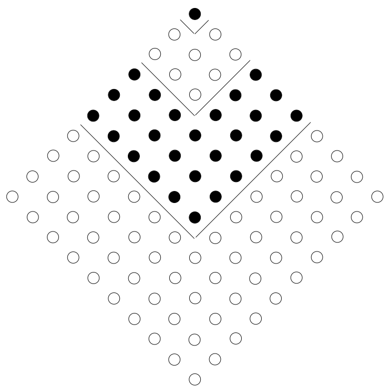
Een wiskundige formule waar je warm van wordt, is:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2$$

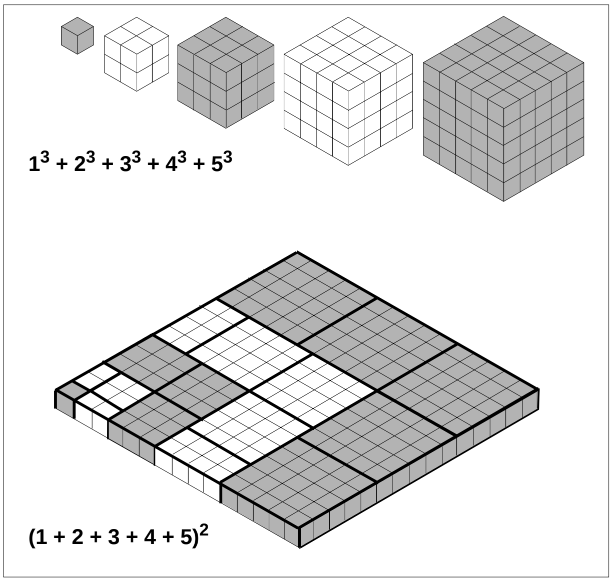
Die houdt direct verband met de ontdekkingen van Nikomachos! Uit het voorgaande volgt bijvoorbeeld dat de som van de eerste vier derde-machten gelijk is aan de som van de eerste tien oneven getallen en dat is juist het kwadraat van vierde driehoeksgetal:

$$1+3+5+\ldots+19 = 10^2 = (1+2+3+4)^2$$

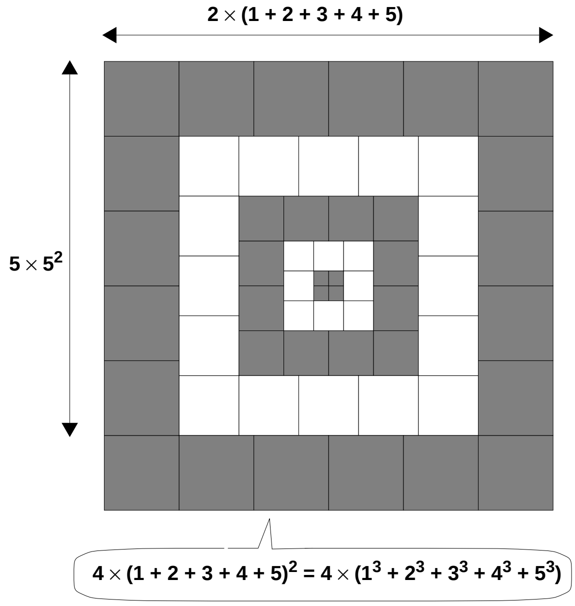
Je ziet dit ook mooi in onderstaand stippenpatroon:



Van die formule bestaan tal van ‘plaatjesbewijzen’. Een met ‘echte’ kubusgetallen staat op een poster die Harrie Broekman ooit uit Polen meebracht:

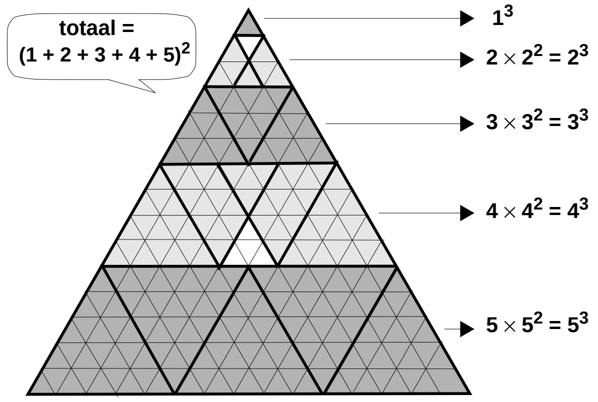



Hier komen nog een paar plaatjesbewijzen:




Merk op dat hierbij op grappige wijze gebruik wordt gemaakt van de commutativiteit van de vermenigvuldiging (5 vierkantjes van 4 bij 4 maken bijvoorbeeld dezelfde lengte als 4 vierkantjes van 5 bij 5).

Waar je niet zo gauw aan denkt, is dat het ook met tegeltjes in de vorm van gelijkzijdige driehoeken kan:




De tegels in de oneven (donkergrijze) stroken doen het mooier dan die in de even (lichtgrijze). In een even strook wordt de overlap van de driehoeken in het midden gecompenseerd door een met de overlap congruent driehoekig ‘gat’.

Nikomachos heeft een *Inleiding tot de Aritmetica* geschreven. Van der Waerden zegt daarover in zijn *Ontwakende Wetenschap* dat dit werk over de ‘wonderbaarlijke en goddelijke eigenschappen van de getallen’ zeer onderhoudend is, maar dat nuchtere bewijzen ontbreken. Die zouden de lezers maar vervelen en bovendien zou dan veel van het geheimzinnige verloren gaan!

Ook komt de formule voor de *som* van kubusgetallen niet voor in het boek, zelfs niet zonder bewijs. Vreemd genoeg, want het lijkt vrijwel ondenkbaar dat Nikomachos die niet zou hebben gekend.

*Martin Kindt, martin@fi.uu.nl*