

De eindopdracht van de Wiskunde B-dag was het schrijven van een artikel voor de Nieuwe Wiskrant<sup>1</sup> over het fenomeen van de totale zonsverduistering. Het winnende team bestond uit vier leerlingen van het Lorentz Casimir Lyceum in Eindhoven. Het resultaat van een dag hard en geïnspireerd werken vindt u hieronder.

## De maan: straks een geval apart?

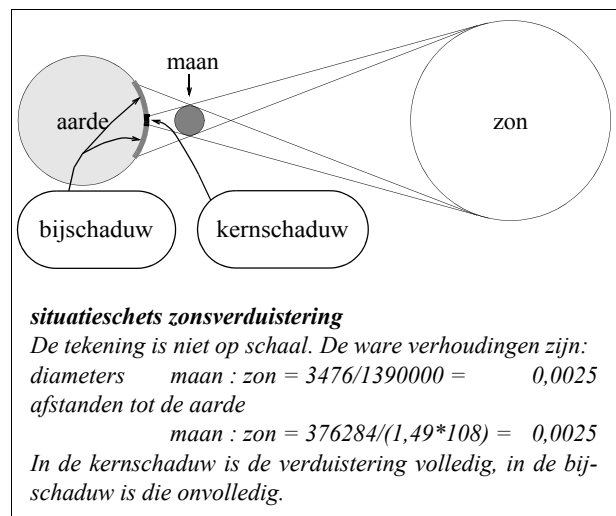
### Inleiding

Augustus 1999: een volledige zonsverduistering veroorzaakt wereldwijde opschudding. Massaal raakte men in de ban van dit spectaculaire natuurfenomeen. Tijdens het lang verwachte moment van de totale eclips vertoonde zich de machtige corona van de zon. Een diepe stilte viel. Maar men zal niet eeuwig kunnen genieten van deze indrukwekkende vertoning, want de maan is langzaam maar zeker bezig zich te verwijderen van onze Aarde.



### Een enorm toeval

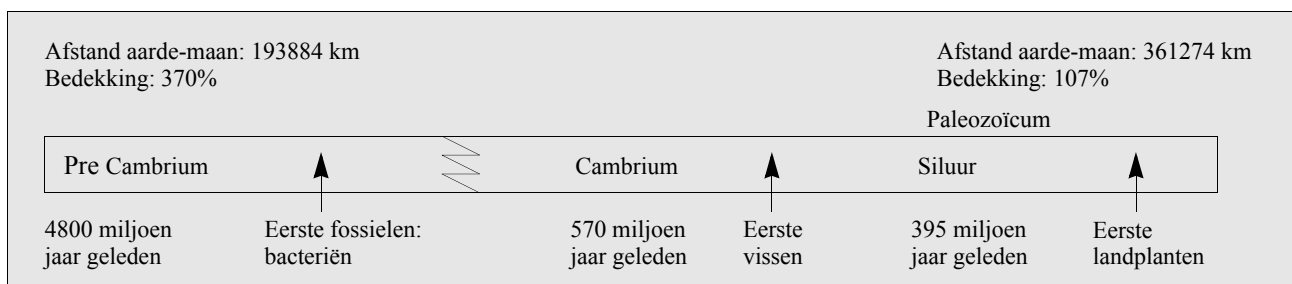
Slechts weinig mensen kennen de natuurkundige achtergronden van het verschijnsel totale zonsverduistering. Het berust namelijk op een enorme toevalligheid. De volledige bedekking is een gevolg van het feit dat de verhouding tussen de diameters van de maan en de zon praktisch gelijk is aan de verhouding tussen de afstand Aarde-maan en de afstand Aarde-zon.



Maar toevallig bevinden wij ons in de periode in de geschiedenis van de Aarde waarin volledige zonsverduisteringen voorkomen. Als over enkele miljoenen jaren deze periode eindigt, zal niemand meer kunnen genieten van de magische gloed van de eclips.

### De maan neemt afstand

De maan verwijderd zich van de Aarde met een snelheid van 3,8 centimeter per jaar. Bij het ontstaan van de Aarde, 4,8 miljard jaar geleden, draaide de maan zijn cirkels dus maar half zo ver weg van ons als nu. Toen stond de maan dus 182400 km dichterbij. Dat is ongeveer de helft van de huidige afstand van 384400 km (tussen de middelpunten).



Hoe zag een zonsverduistering er toen uit? De maan bedekte toen de zon niet alleen volledig, maar overlapte die zelfs. Zodra de middelpunten van zon en maan gelijk vielen, was de corona niet meer te zien.

Bij het ontstaan van de Aarde was de afstandsverhouding:

$$\frac{376284 - 182400}{1,49 \times 10^8} = 0,00130$$

De straal van het bedekte oppervlak was toen dus:

$$\frac{0,00250}{0,00130} = 192\%$$

van de straal van de zon. Het bedekkingspercentage was dus:

$$1,92^2 = 370\%$$

Dit is de grootste waarde in de geschiedenis van de Aarde. Die waarde is sindsdien continu gedaald tot het bedekkingspercentage van de ongeveer 100% van nu. En die waarde daalt nog steeds. Want de maan blijft zich verwijderen en over een lange tijd zal een totale eclips niet meer tot de mogelijkheden behoren.

## Op weg naar een nieuwe kalender

Het einde van de zonsverduistering is niet het enige gevolg van het wegtrekken van de maan.

De zogenaamde *siderische omlooptijd* van de maan, dat is de tijd die de maan nodig heeft om een volledige omwenteling rond haar eigen as te maken ( $T_{sid}$ ), neemt toe. Dat heeft weer tot gevolg dat er minder volle manen in een jaar zullen voorkomen. Het zou kalendertechnisch gesproken goed uitkomen als er precies twaalf volle manen in een jaar voorkwamen, zodat elke maand precies een maan beslaat. Om te berekenen wanneer dat is, hebben wij de derde wet van Kepler nodig:

$$T_{sid}^2 \text{ (in dagen)} = 13,14 \times R^3 \text{ (} R \text{ in } 10^5 \text{ km)}$$

De *synodische omlooptijd* is de tijd tussen twee volle manen, vanaf de Aarde gezien dus. Tussen beide omlooptijden bestaat het volgende verband:

$$\frac{1}{T_{sid}} - \frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{J}$$

Hierin is  $J$  de lengte van het aardjaar ( $J = 365,243$  dag).

De siderische omlooptijd berekenen wij met behulp van de synodische omlooptijd (met als voorwaarde twaalf manen in een jaar):

$$J = 12 \times T_{syn}$$

$$365,243 = 12 \times T_{syn}$$

$$T_{syn} = 30,44 \text{ dagen}$$

$$\frac{1}{T_{sid}} - \frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{J}$$

$$\frac{1}{T_{sid}} - \frac{1}{30,40} = \frac{1}{365,243}$$

$$T_{sid} = 28,10 \text{ dagen.}$$

Volgens Kepler:

$$28,10^2 = 13,14 \times R^3$$

$$R = 391687 \text{ km}$$

Het verschil met nu:

$$391687 - 384400 = 7287 \text{ km.}$$

Met 3,8 cm verwijdering per jaar wordt dat:

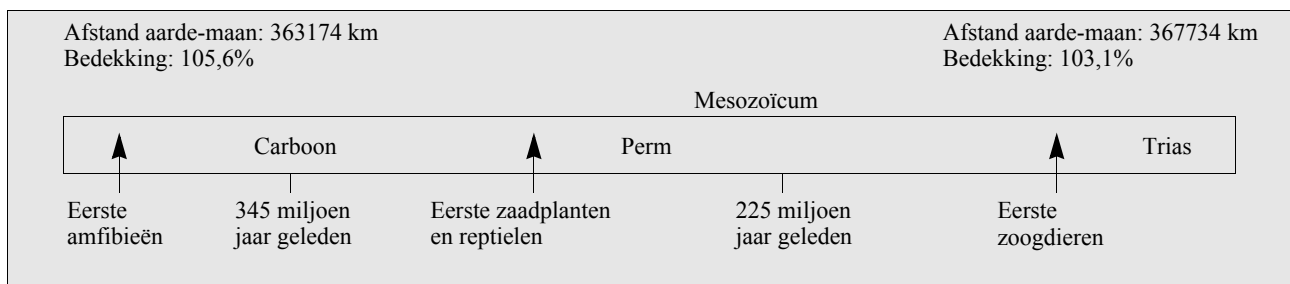
$$\frac{7287}{3,8 \times 10^{-5}} = 1,92 \times 10^8 \text{ jaar.}$$

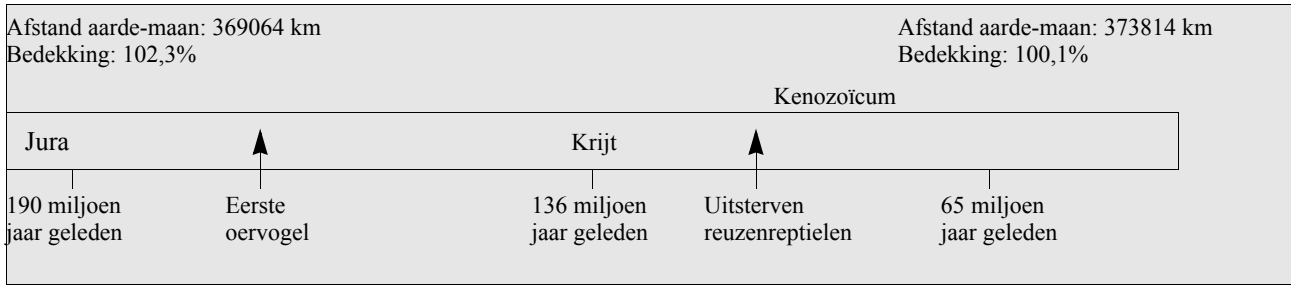
Op die kalenderhervorming kunnen we dus nog wel even wachten.



Wat ook handig zou zijn voor een kalenderhervorming is een jaar van 360 dagen, zodat men twaalf maanden van dertig dagen kan maken.

Voor het berekenen van het tijdstip van dit verschijnsel





heeft men een ander astronomisch fenomeen nodig. Per eeuw wordt de dag 1,5 milliseconde langer door de vertraging van de draaiing van de Aarde om haar eigen as. Ook dit gebeurt onder invloed van de maan. Eerst berekenen we het aantal secondes in een jaar:

$$365,243 \times 24 \times 3600 = 31556995,2 \text{ s}$$

Delen we dat door 360, dan krijgen we zo het aantal secondes in een dag van het nieuwe soort jaar. Dat is 87658,32 s.

Trekt men daarvanaf het aantal secondes in een dag nu (86400), dan betekent dat dat een dag 1258,32 s langer moet worden, 1258320 s.

Deelt men dit door 1,5 ms, dan ziet men dat het nog 838880 eeuwen duurt voordat men deze kalender kan gebruiken.



## De Aarde in het jaar $192 \times 10^6$

Laten wij eens kijken naar het bedekkingspercentage van een zonsverduistering op het moment dat er precies twaalf volle manen in een jaar zijn, dus over 192 miljoen jaar. De afstand Aarde-maan (tussen de oppervlaktes!) is dan  $3,836 \times 10^5$ .

Wij berekenen eerst de afstandsverhouding:

$$\frac{383600}{1,49 \times 10^8} = 0,0026.$$

Het straalpercentage is dus:

$$\frac{0,00250}{0,00257} = 97,3\%$$

En ten slotte het bedekkingspercentage:

$$0,973^2 = 94,7\%$$

De zon is dan dus niet meer volledig bedekt en de maan zal dan slechts een cirkel binnenin de zon verbergen. Zijn dit de enige gevolgen van het veranderen van de verhoudingen in de ruimte? Nee, natuurlijk niet! Mede door de aantrekkingskracht van de maan ontstaan de getijden van eb en vloed op Aarde. Die getijden veroorzaken wrijving en dus warmteverlies. En dat is weer de oorzaak van de verwijdering van de maan. Het gevolg daarvan is weer dat het verschil tussen eb en vloed ook zal verminderen.

Al deze verschijnselen zullen zich voordoen op de zeer lange termijn. De veranderingen gaan zo langzaam, dat nooit iemand het tijdens zijn leven zal merken. Slechts met berekeningen valt hier iets over te zeggen.

*Jesse van Bekkum, René van Hoorn, Grigori Kodentsov en Martijn Kropman, Lorentz Casimir Lyceum, Eindhoven*

## Noot

[1] De complete opdracht 'Nooit meer een totale zonsverduistering' van de wiskunde B-dag van 24 november 2000 is te vinden op <http://www.fi.uu.nl/wisbdag>

