

Op woensdagmiddag 16 mei zaten de vwo-leerlingen van de profielen natuur&gezondheid en natuur&techniek te zwoegen op de examens wiskunde nieuwe stijl. Dit jaar werden deze examens voor de eerste keer afgenomen op de voorlopende tweede fase-scholen. **Sieb Kemme** analyseerde de opgaven en bezocht de examenbespreking in Utrecht.

## De eerste vwo-examens wiskunde B1 en B1,2

### Inleiding

De B1 en de B1,2-programma's voor het vwo horen thuis in de categorie zwaargewicht. Dat geldt zeker voor het B1,2-programma, waarvan de toppen slechts bereikbaar worden geacht voor de echte bollebozen. De nieuwe domeinen Voortgezette Meetkunde en Voortgezette Analyse reiken bijna tot in de wolken van het eerstejaars universitaire wiskundeonderwijs. Daarnaast lopen elementen als 'bewijzen', 'werken met de grafische rekenmachine', 'problemen in realistische contexten' als rode draden door beide programma's. Dit alles is voldoende reden om met meer dan gewone belangstelling naar de examens te kijken. Allereerst wordt het examen louter op inhoud geanalyseerd. Maar dit is slechts een analyse op het droge, vanachter het bureau. Uiteindelijk bepalen docenten en leerlingen of de examens de toets van de kritiek kunnen doorstaan.

### Het verschil tussen B1 en B1,2

Het programma B1,2 is een uitbreiding van het programma B1 met de domeinen Voortgezette Meetkunde en Voortgezette Analyse. Op de meeste scholen zitten de leerlingen dan ook gewoon bij elkaar in de les, waarbij de B1,2 leerlingen één of twee uur in de week aan de B1,2 uitwerkingen werken. De meeste scholen beginnen al in leerjaar 5 met deze aparte uren.

In het examen is dit verschil tussen B1 en B1,2 correct aanwezig. Het examen B1 bevat zeventien vragen en daarvan komen er twaalf ook letterlijk voor in het B1,2 examen. Examen B1,2 bevat achttien vragen waarvan er dus zes niet in B1 voorkomen. Die zes vragen gaan over vlakke meetkunde (vraag 1 en 2), webgrafieken (15 en 16) en nog eens vlakke meetkunde (17 en 18).

### Voortgezette Meetkunde

In totaal vier vragen verdeeld over twee opgaven, één opgave aan het begin van het examen en één aan het eind. Opgave 1 kan men gerust een binnenkomer noemen. Geen bewijzen, geen ingewikkelde puzzels over koor-

denvierhoeken en meetkundige plaatsen. Maar gewoon twee eenvoudige constructies met een toelichting op de werkwijze worden gevraagd. Voor de laatste opgave (met de vragen 17 en 18) geldt bijna hetzelfde. Nu wordt in vraag 17 wel een bewijs gevraagd. Maar dat is een eenvoudig congruentiebewijs in een situatie met veel rechte hoeken en veel gelijke lijnstukken. In vraag 18 wordt gevraagd te laten zien dat de baan van een punt een kwart cirkel is. Nu kan de koordenvierhoek handige diensten bewijzen, hoewel het bewijs daar ook wel zonder kan. Kortom, de Voortgezette Meetkunde is voorzichtig ingezet op dit eerste examen.

### Voortgezette Analyse

De vragen 15 en 16 gaan over webgrafieken, een splinternieuw onderdeel dat goed past bij meer recente ontwikkelingen in het wiskundig onderzoek (in tegenstelling tot de vlakke meetkunde, die vele millennia heeft overleefd). Vraag 15 vraagt naar een onderzoek naar de startwaarden waarvoor een recursieve rij convergeert. Bij dit onderzoek wordt gesuggereerd dat gebruik kan worden gemaakt van de webgrafiek. Vraag 16 vraagt naar twee voorbeelden van startwaarden waarvoor de rij divergeert. Ook hier zou de webgrafiek goede diensten kunnen bewijzen, al staat dat er niet bij. Twee korte vragen die een beroep doen op inzicht in de begrippen convergentie en divergentie. Duidelijk is dat niet het uiterste van leerlingen wordt gevraagd op dit punt.

### Bewijzen

Vragen naar een bewijs op een centraal schriftelijk eindexamen is natuurlijk een hachelijke onderneming. Als dat bewijs tenminste geen letterlijke reproductie is van een bestaand bewijs. Zo'n origineel bewijs leveren doet immers een beroep op je creativiteit en je inzicht in de situatie. En examensituaties zijn nu eenmaal niet de meest gunstige omstandigheden waaronder een dergelijke prestatie kan worden geleverd. In de eindtermen voor de voortgezette meetkunde is aan het bewijzen een belangrijke rol toegekend. Het kan dus niet anders of op het exa-

men zullen bewijzen worden gevraagd. Zo ook op dit examen. Maar de eerste bewijzen die de kandidaat in de vragen 3, 4 en 5 tegenkomt, spelen zich af in een combinatie van meetkunde, analyse en algebra waarin de kandidaat de correctheid van een formule voor de oppervlakte onder een grafiek moet bewijzen. Ook in de vragen 7 en 9 wordt naar het bewijs van de correctheid van een gegeven formule gevraagd. Het echte meetkundige bewijzen zit helemaal aan het eind bij de vragen 17 en 18. Hoewel, bij vraag 18 wordt gevraagd om een eigenschap *te laten zien* en dat is nou net een formulering die niet in de nomenclatuur voorkomt. Overigens is het gevraagde bewijs in vraag 17 een eenvoudige variatie op een koordenvierhoek met twee rechte tegenoverliggende rechte hoeken, waarvoor weinig creatief inzicht noodzakelijk is.

## Algebraïsche vaardigheden

De zorg over het gebrek aan algebraïsche vaardigheden in het nieuwe programma is een voortdurend punt van discussie. Zeker in combinatie met de invoering van de grafische rekenmachine. Men zou dus kunnen verwachten dat hiermee in het examen rekening is gehouden. Toch blijkt dat niet uit het huidige examen. Wat bijvoorbeeld te denken over het bewijs dat de formule:

$$\frac{1}{2} \left( (c_0 + c_n) + \sum_{p=1}^{n-1} c_p \right) \cdot \Delta t$$

de oppervlakte onder een grafiek voorstelt. Hoewel, het is een kwestie van lezen en goed kunnen uitschrijven. Veel gereken zit er niet bij.

Ook in de gonio-opgave over machten van sinus en cosinus wordt een beroep gedaan op de algebraïsche vaardigheden. Maar erg ver gaat die niet. Differentiëren van machten van sinus en cosinus en het omwerken naar een gegeven formule.

In vraag 14 van de opgave ‘Een functie en een rij’ lijkt op het eerste gezicht een pittige integraal te moeten worden uitgerekend, gevolgd door een vergelijking met logaritmen. Maar een nieuwe stijl leerling zal ook bij het berekenen van de integraal naar de grafische rekenmachine grijpen.

Kortom: op het eerste gezicht lijkt inderdaad dat algebraïsche vaardigheden een minder belangrijke rol spelen om het examen met succes te kunnen afronden.

## Realistische contexten

In het B-programma zal realistische wiskunde een rol gaan spelen. Op het examen kunnen we voor de N-profielen opgaven in een realistische context verwachten. Dat is voor de examens van 2001 al direct zichtbaar in de omvang. Het B1-examen telt vijf pagina’s, het B1,2-examen heeft er zes, terwijl het B-examen oude stijl er twee heeft (zonder voorblad en zonder bijlage gerekend).

Bij het B1,2-examen is het in de eerste opgave al direct

raak. In een cirkelvormig meer liggen twee puntvormige eilandjes waarvan eilandje M precies in het middelpunt ligt. In zo’n meer vaart een bootje in een rechte lijn naar M. Realistisch? Nou nee.

De tweede opgave is verpakt in een situatie over concentraties geneesmiddel in het bloed. Een onderzoeksbureau heeft metingen verricht en de resultaten zijn in een grafiek uitgezet. Opvallend is dat in de getekende grafiek geen getalswaarde voorkomt, maar dat de punten zijn aangegeven met letters. In het vervolg van het verhaal wordt aangenomen dat de afname van het geneesmiddel in het bloed verloopt volgens een exponentieel model. De vraag is dan in hoeverre de oppervlakte van de gemeten grafiek afwijkt van de ‘werkelijke oppervlakte’, dat is de oppervlakte onder de exponentiële grafiek. Hier worden model en werkelijkheid wel erg gemakkelijk verwisseld. Echt mooi is de context van de vierde opgave over de kwaliteit van mineraalwater in café’s. In een krantenartikel staan de meningen van de Consumentenbond en het Bedrijfsschap Horeca lijnrecht tegenover elkaar. De kansrekening biedt uitkomst in deze discussie. Deze context is niet alleen authentiek, maar ook uitdagend en geeft wiskunde op een vanzelfsprekende wijze functie en betekenis.

## Wat vonden docenten van het examen?

Daags na het examen vond in een bomvol zaaltje in het Jaarbeursgebouw te Utrecht de door de NVvW georganiseerde examenbespreking van deze examens plaats. Algemene stemming: een te groot verschil in niveau tussen de vragen. Sommige vragen waren niet te doen, andere waren zo gemakkelijk dat alle leerlingen die vrijwel goed zullen hebben.

Natuurlijk is uitvoerig over het gebruik van de grafische rekenmachine gedebatteerd. Voor een antwoord dat louter de toetsaanslagen opsomt bestaat weinig waardering. Ook al omdat zoiets door een tweede corrector met een ander type rekenmachine niet valt te beoordelen. Algemeen criterium is: de docent moet kunnen beoordelen of de leerling met de GR de juiste wiskundige stappen heeft gezet. De opgave met het sigma-teken wordt volledig afgekraakt. ‘Nooit meer doen.’ ‘Onnodig moeilijk doen.’

In vraag 18 komt de uitdrukking ‘laat zien’ voor. Dit geeft veel verwarring. Wordt hier naar een bewijs gevraagd? Is ‘laat zien’ een synoniem voor ‘toon aan’? Het correctiemodel geeft alleen maar punten voor een bewijs. In een later stadium zal de normering op dit punt worden bijgesteld.

De opgave over het mineraalwater wordt ‘schandelijk gemakkelijk’ genoemd. Niemand zegt iets over de prachtige kwaliteit van de context.

*Sieb Kemme, Lettelbert*

*De examens zijn te downloaden via de site van de NVvW: <http://www.nvww.nl>*