

Boekbespreking

Meetkunde, facetten van de planimetrie en stereometrie

Waardering voor de meetkunde

Het zal een jaar of tien geleden zijn dat ik bij een conferentiemaaltijd toevallig aan dezelfde tafel zat als een bekende Nederlandse emeritus hoogleraar in de wiskunde. Hij vertelde dat hij in het laatste jaar voor zijn emeritaat een college over klassieke euclidische planimetrie en stereometrie had gegeven. Zijn collega's hadden daarop gereageerd met de opmerking dat je nu toch wel kon zien dat het voor hem tijd werd om op te stappen. Was de klassieke meetkunde in die tijd in het voortgezet onderwijs net begonnen aan een comeback, een echte wetenschapper hoorde zich daar kennelijk niet mee bezig te houden. Inmiddels is de wederopstanding van meetkunde in het voortgezet onderwijs doorgestaan. Op het HAVO werd lineaire algebra ingeruild voor ruimtemeetkunde en in het VWO verscheen in de tweede fase planimetrie als een context voor het wiskundig redeneren. Na een afwezigheid van een kleine vijfendertig jaar is de fameuze trits 'gegeven', 'te bewijzen', 'bewijs' weer helemaal terug in de school.

Ook echte wetenschappers hoeven zich kennelijk niet meer te schamen als ze zich met dit vak bezighouden. In 2000 verscheen in de Epsilon Uitgaven het boek *Meetkunde, facetten van de planimetrie en stereometrie* van de Delftse hoogleraar J.M. Aarts, dat als doel heeft: *het geven van een toegankelijke presentatie van de meest voorkomende begrippen van de vlakke meetkunde en de elementaire ruimtemeetkunde*.

En om maar direct met mijn conclusie te beginnen: voor elke wiskundeleraar die in de bovenbouw van het HAVO of het VWO les geeft, lijkt me dit boek een must. Hieronder zal ik proberen te beschrijven hoe ik tot dit standpunt ben gekomen.

Inhoud

Het boek bevat vijf hoofdstukken (Planimetrie, Transformaties, Symmetrie, Krommen en Stereometrie) die gedeeltelijk onafhankelijk van elkaar kunnen worden gelezen.

In hoofdstuk 1 (Planimetrie) vinden we de uitgangspunten die de auteur heeft gekozen. Zijn opbouw van de planimetrie is een charmant mengsel van een synthetische en een analytische benadering, dat frappeert door zijn eenvoud en helderheid. Om de lezer een idee te geven citeer ik een stukje uit het voorwoord:

'Het eerste uitgangspunt zegt dat er in het vlak een afstandsfunctie gegeven is die bij elk tweetal punten hun afstand aangeeft. Met behulp van de afstandsfunctie leggen we vast

wat rechte lijnen zijn. Vervolgens nemen we als uitgangspunt dat iedere rechte lijn een kopie van de reële rechte is. Het idee hierachter is dat bekende eigenschappen van de reële getallen kunnen worden aangewend om op een eenvoudige manier stellingen te bewijzen waarvan de traditionele afleiding vaak diepliggend of gecompliceerd is. Een volgend uitgangspunt heeft betrekking op het bestaan van evenwijdige lijnen. Verder is er een uitgangspunt betreffende het bestaan van loodlijnen; de onderlinge loodrechte stand van lijnen wordt vastgelegd met de bekende eigenschap van Pythagoras. Ten slotte is er een uitgangspunt dat vaststelt hoe je met hoeken kunt rekenen. Met deze uitgangspunten wordt de vlakke meetkunde opgebouwd.'

Op bladzijde 17 vinden we als intermezzo een korte beschouwing over de gekozen uitgangspunten, die zo genoemd worden om het verschil met de meer klassieke opbouw te benadrukken.

Hoofdstuk 2 behandelt de bekende meetkundige isometrische en gelijkvormigheids-transformaties: spiegelingen in lijn en punt, translaties, rotaties en de vermenigvuldiging ten opzichte van een punt. Zoals het in een modern boek betaamt, staan deze transformaties niet los van elkaar, maar komt ook het groeps karakter naar voren.

De 'tastbare' resultaten zijn de congruentie- en gelijkvormigheidskenmerken. Als smaakmaker treedt hier voor het eerst de negenpuntscirkel op, terwijl de uitsmijter van het hoofdstuk een helder verhaal is over de dimensie en maat van fractale figuren: het vloerkeed van Sierpinsky heeft dimensie $^3\log 8$ en de spons van Menger heeft de dimensie $^3\log 20$ (zie figuur 1). Je vindt deze getallen door uit te gaan van het idee dat de maat van een n -dimensionale figuur wordt vermenigvuldigd met $\left(\frac{1}{k}\right)^n$ als de figuur wordt vermenigvuldigd met $\frac{1}{k}$.

fig. 1 Vloerkeed van Sierpinsky (links) en spons van Menger (rechts)

Hoofdstuk 3 gaat over symmetrie. Hier vinden we waardevolle informatie over de grote nieuwe mode in de

schoolmeetkunde, te weten de Voronoi-diagrammen en over de kegelsneden als conflictlijnen. Speciale aandacht is er ook voor Voronoi-cellen in een rooster (zie figuur 2).

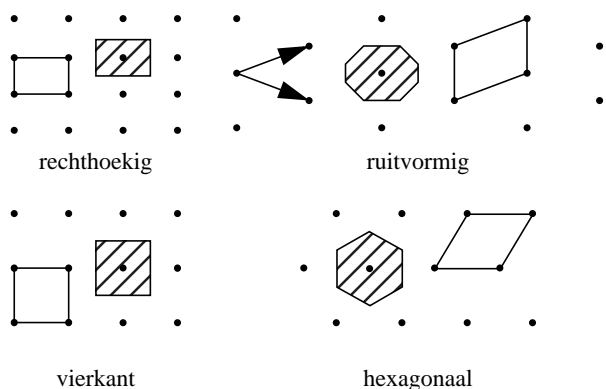


fig. 2 Roosters met nog meer regelmaat. De Voronoi-cellen zijn gearceerd, de basisparallellogrammen niet.

Wist u overigens dat er maar zeven typen decoratiestroken en zeventien typen periodieke vlakvullingen zijn? En wie zich wel eens heeft afgevraagd welke relatie Voronoi-diagrammen kunnen hebben met het onderzoek van kwadratische vormen, kan het antwoord vinden op bladzijde 138 van het boek van Aarts.

Hoofdstuk 4 heeft een omvang van 124 bladzijden. De paragraaftitels zijn:

- (19) Cirkels, macht en koordenvierhoek
- (20) Goniometrische functies. Poolcoördinaten
- (21) Het vlak binnenstebuiten gekeerd
- (22) Kegelsneden. Planeetbanen
- (23) Homogene coördinaten. Poolverwantschap
- (24) Parametervergelijking van een kromme
Cycloïden.

Ze geven al aan dat hier heel wat voorbij komt. Vooral de cirkel komt niets tekort. Wie zich voor het meetkunde-programma van het VWO nog wat achtergrondinformatie wil verschaffen over omtrekshoeken en koordenvierhoeken, komt hier ruimschoots aan zijn trekken. Kegelsneden worden opnieuw gedefinieerd, nu met behulp van brandpunt, richtlijn en excentriciteit. In een intermezzo vinden we een prachtig verhaal over de ellips als planeetbaan. Voor de tweede maal ontmoeten we de negenpunts-cirkel nu in zijn relatie met de omhullende van de *lijnen van Simson*, die ook wel de *lijnen van Wallace* genoemd worden. (Misschien is een korte toelichting hier op zijn plaats: laat je uit een punt P van de omgeschreven cirkel van een driehoek de loodlijnen neer op de drie zijden van de driehoek, dan liggen de voetpunten op één lijn, die de *lijn van Simson* of de *lijn van Wallace* heet. Als P over de omgeschreven cirkel beweegt, bewegen de simsonlijnen natuurlijk mee. De omhullende van het stelsel van alle simsonlijnen is een deltoïde. De negenpunts-cirkel raakt aan die deltoïde (zie figuur 3).

fig. 3 De lijnen van Simson van een driehoek omhullen een deltoïde. Dit is uitgebeeld in de bovenste figuur. In beide figuren zijn de driehoek en zijn hoogtelijnen getekend. De onderste figuur laat de onderlinge positie zien van de negenpunts-cirkel, de omgeschreven cirkel en de deltoïde. Ook de keerraklijnen van de deltoïde zijn aangegeven.

In het slot van hoofdstuk 4 wordt ons uitgelegd hoe Huygens het probleem van de harmonische oscillator oploste. Omdat de trillingstijd afhankelijk is van de amplitude van de slinger, krijg je met een gewone (mathematische) slinger geen gelijkmatig lopend uurwerk. Door bij het ophangpunt gebruik te maken van een cycloïde verandert de lengte van de slinger tijdens de slingering zo, dat de trillingstijd wel onafhankelijk wordt van de amplitude.

Hoofdstuk 5 geeft een beknopt beeld van de ruimteteetkunde. Om de zaak netjes te kunnen opbouwen, kiest de auteur ook hier weer een aantal zogenaemde uitgangspunten. Vermeldenswaard vind ik hier vooral de stukken

over de projectiemethoden (Wat zie ik?), over de regelmatige veelvlakken en over de halfregelmatige veelvlakken (dat zijn veelvlakken waarvan de zijvlakken niet noodzakelijk gelijke regelmatige veelhoeken zijn, terwijl er in elk hoekpunt evenveel zijvlakken samenkomen, zie figuur 4).

fig. 4 De bucky ball: een 32-vlak dat wordt begrensd door twaalf regelmatige vijfhoeken en twintig regelmatige zeshoeken

Vorm en stijl

Elk hoofdstuk begint met een inleidende tekst waarin de auteur in journalistieke taal uiteenzet wat hij in dat hoofdstuk wil gaan behandelen. De grote lijn en de opbouw komen daardoor duidelijk naar voren. De stijl vind ik uiterst prettig. Ik houd ervan als in een wiskundeboek de auteur probeert ‘gewone’ taal te gebruiken en bewijzen en redeneringen in de vorm van een verhaal presenteert. Op bladzijde 127 lees ik ‘*We moeten natuurlijk nog duidelijk maken wat precies de afstand van het punt X tot de verzameling U is.*’ En even verder: ‘*Maar de definitie werkt goed in de door ons beschouwde situaties.*’ Ook zinnen als ‘*Maar zover zijn we nog niet*’ en ‘*We komen hier zo dadelijk op terug*’ geven je het idee aanwezig te zijn bij een verteller die probeert zijn gehoor mee te nemen op een verrassende ontdekkingsstocht. De openingszinnen ‘*In dit boek wil ik iets gaan vertellen over meetkunde. Maar hoe te beginnen?*’ zetten fraai de toon van het boek. Er is een uitgebreide literatuurlijst, waarnaar in de tekst op vele plaatsen wordt verwezen. Goed vind ik het dat er dan bijstaat wat je kunt verwachten. Bijvoorbeeld: een interessante en heldere inleiding is [36]; het standaardwerk is [21] op dit gebied ..., enzovoort.

Eerder noemde ik al de zogenaamde intermezzo’s. Ze onderbreken even de gang van het betoog, maar geven daarover toch weer interessante informatie. Het zijn stijlkenmerken die ik erg waardeer.

Hoe kun je omgaan met het boek?

Hoewel ik al meer dan veertig jaar omga met wiskundige teksten, heb ik bij het lezen van wiskundeboeken nog vaak het gevoel niet erg snugger te zijn. Vaak is dat een gevolg van de verwachtingen die de auteur op flap of achterzijde wekt. Hij geeft dan aan dat je met weinig voorkennis het boek goed kunt begrijpen, terwijl dat in werkelijkheid niet het geval is. Wiskundigen hebben blijkbaar niet zo’n goed beeld van wat makkelijk of moeilijk is.

Voor dit boek wordt als ingangsniveau opgegeven: VWO met wiskunde. Ik denk dat de argeloze VWO-abituriënt die eraan begint toch niet zo ver komt. Vooral de stukken in hoofdstuk 2 over de structuur in de verzameling van de afstandsbewarende afbeeldingen is, mede door de noodzakelijke notaties, niet met de benen op tafel te lezen. Hetzelfde geldt voor het betoog over de mogelijke periodieke vlakvullingen.

Voor wiskundeleraren en studenten wiskunde lijkt het me allemaal buitengewoon goed te doen. Maar ik denk dat ook voor hen zal gelden: om het te kunnen verwerken moet je ervoor gaan zitten met pen en papier bij de hand. Ten slotte nog een paar opmerkingen van technische aard:

Op pagina VI vind je een stroomschema waarmee je allerlei verkorte routes door het boek kunt ontwerpen. Je kunt daarmee een deel van de door mij genoemde hobbels omzeilen. Erg prettig vind ik het dat de paragrafen over de hoofdstukken door zijn genummerd. Als ergens wordt terugverwezen, hoef je niet eindeloos te zoeken in welk hoofdstuk je ook weer moest zijn, want er is maar één paragraaf 20. Hetzelfde geldt voor de voorbeelden en stellingen.

Het boek bevat ruim tweehonderd opgaven. Een aantal daarvan heb ik gemaakt en die waren goed te doen. En ook dat is vaak niet het geval.

Wim Groen, *Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit, Amsterdam*

Titel: *Meetkunde, facetten van de planimetrie en stereometrie*
Epsilon uitgaven nr. 47
Auteur: J.M. Aarts
Uitgever: Utrecht: Epsilon uitgaven
ISBN 90-5041-060-X
Prijs: f 52,50

