Een van de thema's op de Nationale Wiskunde Dagen 2001 was getaltheorie. Naast de 'professionals' voelen ook veel amateurs en zelfs leken zich tot dit vakgebied aangetrokken doordat de problemen vaak zo voorstelbaar zijn. In dit artikel bespreekt **Frits Beukers** het platzakprobleem.

Het platzakprobleem

Het probleem

Stel we hebben een bepaald bedrag op zak, zeg *f* 24,93, en we willen dit bedrag in zijn geheel besteden aan postzegels van 62 en van 37 cent. Vraag: kan dat?

Ik geef direct toe dat dit probleem niet actueel is. Postzegels met dergelijke waarden hebben vroeger bestaan, maar zijn nu niet meer geldig. Ook is het maar de vraag of je al je geld aan postzegels zou willen besteden. Hoe dan ook, het voorbeeld is illustratief voor een klasse van problemen waarin we te maken hebben met een tweetal artikelen met prijzen die we a en b zullen noemen. Vraag luidt: welke bedragen n kunnen we volledig besteden aan de aankoop van deze artikelen? Aan het eind van de transactie zijn we dan platzak, hetgeen de titel van dit verhaal verklaart. Wiskundiger gesteld luidt de vraag:

Vraag 1.1. Gegeven positief gehele getallen a en b. Bij welke n bestaan er gehele getallen x, $y \geq 0$ *zó dat* $n = ax + by$?

Tegenwoordig (dat wil zeggen het jaar 2001) eindigen prijzen van artikelen vaak op een 5 of 0. Het zal duidelijk zijn dat combinaties van dergelijke artikelen een totaalprijs hebben die ook op 5 of 0 eindigt. In dit geval zijn de bedragen a en b deelbaar door 5 en hetzelfde geldt natuurlijk voor het eindbedrag. Het ligt daarom voor de hand om deze 5 uit a en b weg te delen, en het platzakprobleem voor de nieuwe getallen $\frac{a}{5}$ en $\frac{b}{5}$ te bekijken. Mochten deze twee getallen nog een gemeenschappelijke deler hebben, dan delen we die ook weg. Kortom, we nemen voortaan aan dat $ggd(a, b) = 1$, zonder daarbij ons verhaal tekort te doen. In het geval dat $a = 37$ en $b = 62$ zal het direct duidelijk zijn dat de bedragen 1, 2, 3, … , 36 niet besteedbaar zullen zijn aan onze postzegels. Maar ook het bedrag 2195 cent is niet besteedbaar. Dat is wat lastiger in te zien en de enige manier om daar achter te komen, is gewoon voor $x = 0,1,2,3,l\ldots$ proberen of $2195 - 37x$ een veelvoud van 62 is. Vanaf gegeven moment zal $2195 - 37x$ negatief worden en kunnen we stoppen met onze zoekactie. Het blijkt dat geen enkele x aan onze voorwaarde voldoet. Het zal duidelijk zijn dat een dergelijke zoekactie het beste op een computer kan worden uitgevoerd. Een dergelijk programma, in Java geschreven, staat op de webpagina www.math.uu.nl/people/beukers/frobenius. Laten we voor een groot aantal waarden in de buurt van 2195 de computer lopen, dan vinden we het resultaat op de volgende bladzijde in een tabel. De vetafgedrukte bedragen in zijn niet besteedbaar, de andere bedragen wel.

Wat opvalt is dat na 2195 alle bedragen in de tabel besteedbaar zijn, terwijl we onder 2195 meerdere niet besteedbare bedragen zien. Dat is geen toeval, het blijkt inderdaad dat er bij elke $n > 2195$ gehele x, $y \geq 0$ bestaan, zó dat $n = 37x + 62y$. Wat nog opmerkelijker is, dit gebeurt bij elke a, b. Dat wil zeggen, er bestaat een waarde die zelf niet besteedbaar is, maar waarboven alle andere waarden besteedbaar zijn door middel van a, b. Dit getal is gelijk aan $ab - a - b$. We formuleren deze eigenschap als een stelling.

Stelling 1.1
Gegeven twee positief gehele getallen a en b met $ggd(a, b) = 1$. *Er bestaat een grootste getal n, zó dat*

$$n = ax + by$$

geen oplossing heeft in gehele getallen x, $y \geq 0$.
De waarde is gelijk aan $n = ab - a - b$.

In ons voorbeeld met $a = 37$, $b = 62$ krijgen we als grootste niet besteedbare bedrag het getal

$$37 \times 62 - 37 - 62 = 2195.$$

In de volgende paragraaf zullen we uitleggen waarom Stelling 1.1 waar is.

Voor we dat gaan doen, nog enkele opmerkingen over het soortgelijke probleem met drie of meer artikelen. Stel we hebben een r-tal artikelen met prijzen $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Neem wederom aan dat hun grootste gemeenschappelijke deler 1 is. Een specifieke vraag zou zijn:

Vraag 1.2
Wat is de grootste waarde van n zó dat
$n = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_rx_r$
niet oplosbaar is in gehele getallen $x_1, x_2, \ldots, x_r \geq 0$*?*

Een andere vraag zou zijn:

Vraag 1.3
Gegeven n, is er een snelle manier om te bepalen of er gehele getallen $x_1, x_2, \ldots, x_r \geq 0$ *zijn zó dat*
$n = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_rx_r$*?*

Als r, het aantal a_i, klein is, dan kan vraag 1.3 gemakkelijk met een computer beantwoord worden. Als r echter groot is, bijvoorbeeld 500 of 1000, dan biedt ook de computer weinig soelaas. We hebben dan te maken met een probleem dat in principe wel oplosbaar is, maar waarvan de tijd om het op te lossen eeuwen in beslag kan nemen. Van dergelijke problemen wordt onder andere in de cryptografie gebruik gemaakt.
Wat betreft vraag 1.2, in het geval van twee artikelen, $r = 2$, zagen we dat $a_1a_2 - a_1 - a_2$ het antwoord is. Als $r = 3$, dan ligt de zaak een stuk ingewikkelder. Er is weliswaar een methode om de gevraagde waarde uit te rekenen, maar die is vele malen ingewikkelder dan de formule in het geval $r = 2$. Als $r > 3$, dan zijn er helemaal geen formules bekend.
In het geval van drie of meer artikelen is het leuk om speciale gevallen te nemen. Je kunt voor a_1, a_2, a_3 bijvoorbeeld drie opeenvolgende getallen k, $k + 1$, $k + 2$ nemen, en dan kijken wat het antwoord op onze vraag is. Op de computer kun je experimenteren met dergelijke simpele keuzen. Soms blijken er regelmatige patronen in het antwoord te zitten. Het is een leuke sport om te proberen die op te sporen. De volgende taak is dan deze patronen te verklaren. Hier is veel ruimte om zelf aan de slag te gaan. Als hulpmiddel kun je hierbij het bovengenoemde Java-programma gebruiken, dat voor $r \leq 4$ het antwoord op onze vraag berekent. Zoek op internet de eerder genoemde pagina en je kunt meteen beginnen.
Andere benamingen voor problemen van bovenstaand type zijn *knapzakprobleem*, *geldwisselprobleem* of *Frobeniusprobleem*, naar de Duitse wiskundige G. Frobenius (1847-1917).

Twee artikelen

In deze paragraaf laten we zien dat Stelling 1.1 waar is. We zeggen dat een getal n *positief representeerbaar* is door a en b als $n = ax + by$ een oplossing in gehele x, $y \geq 0$ heeft. Om even te wennen aan deze terminologie, volgens Stelling 1.1 is $2195 = 37 \times 62 - 37 - 62$ het grootste getal dat niet positief representeerbaar is door 37 en 62. Als eerste laten we zien:

Het getal $n = ab - a - b$ *is niet positief representeerbaar door a en b.*

Stel namelijk dat er gehele $x, y \geq 0$ bestaan zó dat $ab - a - b = ax + by$. Tel aan beide zijden $a + b$ op. We vinden dan $ab = a(x + 1) + b(y + 1)$. Twee van deze termen, ab en $a(x + 1)$, zijn deelbaar door a. Dus is ook de derde term, $b(y + 1)$, deelbaar door a. De getallen a en b hebben geen gemeenschappelijke factoren. Dus uit a deelt

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	**2009**	**2010**	2011	2012	2013	2014	2015
2016	2017	2018	2019	2020	2021	**2022**	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030
2031	2032	2033	**2034**	2035	2036	2037	2038	2039	2040	2041	2042	2043	2044	2045
2046	**2047**	2048	2049	2050	2051	2052	2053	2054	2055	2056	2057	2058	**2059**	2060
2061	2062	2063	2064	2065	2066	2067	2068	2069	2070	**2071**	2072	2073	2074	2075
2076	2077	2078	2079	2080	2081	2082	2083	**2084**	2085	2086	2087	2088	2089	2090
2091	2092	2093	2094	2095	**2096**	2097	2098	2099	2100	2101	2102	2103	2104	2105
2106	2107	2108	2109	2110	2111	2112	2113	2114	2115	2116	2117	2118	2119	2120
2121	2122	2123	2124	2125	2126	2127	2128	2129	2130	2131	2132	**2133**	2134	2135
2136	2137	2138	2139	2140	2141	2142	2143	2144	2145	2146	2147	2148	2149	2150
2151	2152	2153	2154	2155	2156	2157	**2158**	2159	2160	2161	2162	2163	2164	2165
2166	2167	2168	2169	2170	2171	2172	2173	2174	2175	2176	2177	2178	2179	2180
2181	2182	2183	2184	2185	2186	2187	2188	2189	2190	2191	2192	2193	2194	**2195**
2196	2197	2198	2199	2200	2201	2202	2203	2204	2205	2206	2207	2208	2209	2210
2211	2212	2213	2214	2215	2216	2217	2218	2219	2220	2221	2222	2223	2224	2225
2226	2227	2228	2229	2230	2231	2232	2233	2234	2235	2236	2237	2238	2239	2240
2241	2242	2243	2244	2245	2246	2247	2248	2249	2250	2251	2252	2253	2254	2255
2256	2257	2258	2259	2260	2261	2262	2263	2264	2265	2266	2267	2268	2269	2270
2271	2272	2273	2274	2275	2276	2277	2278	2279	2280	2281	2282	2283	2284	2285
2286	2287	2288	2289	2290	2291	2292	2293	2294	2295	2296	2297	2298	2299	2300

$b(y + 1)$ volgt dat a een deler is van $y + 1$. Samen met het feit dat $y + 1 > 0$, volgt hier weer uit dat $y + 1 \geq a$. Maar nu komen we in de problemen.
De ongelijkheden $y + 1 \geq a$ en $x + 1 \geq 1$ impliceren dat $a(x + 1) + b(y + 1) \geq a + ab > ab$. Maar $a(x + 1) + b(y + 1)$ had gelijk moeten zijn aan ab. We hebben een tegenspraak gekregen en concluderen dat $ab - a - b$ niet positief representeerbaar is door a, b.

Om Stelling 1.1 helemaal aan te tonen, moeten we ook laten zien dat elk getal $n > ab - a - b$ wél positief representeerbaar is door a en b.
In het bijzonder zou $ab - a - b + 1$ positief representeerbaar moeten zijn. Maar de bijbehorende waarden van x en y zijn absoluut niet duidelijk. In het voorbeeld $a = 37$, $b = 62$ zouden er gehele $x, y \geq 0$ moeten zijn zó dat $2196 = 37x + 62y$. Weinig mensen zien hier meteen een oplossing voor. In de rest van deze paragraaf gebruiken we dit voorbeeldprobleem ter illustratie.
Om verder te kunnen, doen we eerst als het ware een stapje terug, om later een grotere sprong te kunnen maken. We zeggen dat een getal n *representeerbaar* is door a en b als er gehele x, y bestaan zó dat $n = ax + by$. Bij het begrip representeerbaar laten we de eis dat $x, y \geq 0$ voorlopig even vallen. We bewijzen nu de volgende stelling.

Stelling 2.1
Zij a, b een tweetal positief gehele getallen met ggd(a, b) = 1. Dan is elk geheel getal representeerbaar door a en b.

Om deze stelling aan te tonen, gaan we laten zien dat het getal 1 altijd representeerbaar is. Met andere woorden, er bestaan gehele x, y zó dat $1 = ax + by$. Als we dit eenmaal hebben, zijn we klaar. Immers uit $1 = ax + by$ volgt $n = a(nx) + b(ny)$ voor elke gehele n.
Laat d het kleinste positieve gehele getal zijn dat geheel representeerbaar is door a en b. Zij n een willekeurig positief representeerbaar getal. Dat wil zeggen, er zijn gehele x, y, x', y' zó dat

$$n = ax + by$$
$$d = ax' + by'.$$

Stel dat n gedeeld door d gelijk is aan 'k rest r'. Trekken we k maal de tweede gelijkheid van de eerste af, dan vinden we

$$r = n - kd = a(x - kx') + b(y - ky').$$

Met andere woorden, de rest r is ook representeerbaar door a en b.
Aangezien $0 \leq r < d$, r representeerbaar en d het kleinste positieve geheel representeerbare getal is, kunnen we alleen maar concluderen dat $r = 0$. Met andere woorden, het kleinst representeerbare getal d deelt elk ander representeerbaar getal n. In het bijzonder zijn $a = a \cdot 1 + b \cdot 0$ en $b = a \cdot 0 + b \cdot 1$ representeerbaar en dus ook deelbaar door d. We hadden echter aangenomen dat a en b geen gemeenschappelijke delers hebben, behalve 1. Conclusie: $d = 1$. Het getal 1 is dus representeerbaar door a en b.

Bovenstaand bewijs is een voorbeeld van een *existentiebewijs*. We laten zien dat een oplossing voor $1 = ax + by$ in gehele x, y bestaat (existentie), maar geven geen methode om deze te bepalen. Dergelijke bewijzen komen vaak voor in de wiskunde en veelal geeft zo'n existentiebewijs geen enkele aanwijzing om te komen tot een daadwerkelijke constructie van de oplossing. Gelukkig geeft het fundamentele idee in bovenstaand bewijs ons wel een aanwijzing hoe eventuele x, y te vinden. We lichten dit toe aan de hand van de vergelijking $1 = 37x + 62y$ in x, y geheel. Ervan uitgaand dat niemand meteen een oplossing ziet, gaan we als volgt te werk. Van de voor de hand liggende gelijkheid

$$62 = 37 \cdot 0 + 62 \cdot 1$$

trekken we 1 maal de gelijkheid

$$37 = 37 \cdot 1 + 62 \cdot 0$$

af. We vinden

$$25 = -37 \cdot 1 + 62 \cdot 1.$$

Trek deze 1 maal van de voorgaande af. We vinden

$$12 = 37 \cdot 2 - 62 \cdot 1.$$

Trek deze 2 maal van de voorgaande af. We vinden

$$1 = -37 \cdot 5 + 62 \cdot 3.$$

We zien de oplossing $x = -5$, $y = 3$ van $1 = 37x + 62y$ te voorschijn komen.
Hopelijk wordt uit dit voorbeeld duidelijk hoe je in het algemeen een gehele oplossing x, y van $1 = ax + by$ vindt. De methode staat bekend als het *algoritme van Euclides*, naar de beroemde Griekse wijsgeer en wiskundige Euclides (365 v. Chr.-300 v. Chr.).
Ons getal 2196 is nu ook representeerbaar. Vermenigvuldig $1 = 37 \cdot (-5) + 62 \cdot 3$ aan beide zijden met 2196. We vinden

$$2196 = 37 \cdot (-10980) + 62 \cdot 6588.$$

In ieder geval is 2196 representeerbaar. We wilden echter laten zien dat dit getal *positief* representeerbaar is. Daarvoor hebben we nog één extra idee nodig.
Als we een gehele oplossing x_0, y_0 van $n = ax + by$ hebben, dan is dit niet de enige oplossing. Immers $x_0 + b$, $y_0 - a$ is ook een oplossing, zoals we uit $a(x_0 + b) + b(y_0 - a) = ax_0 + by_0 = n$ zien.
Evenzo zien we

$$n = ax_0 + by_0 = a(x_0 + b) + b(y_0 - a) = a(x_0 + 2b) + b(y_0 - 2a) = a(x_0 + 3b) + b(y_0 - 3a) = \ldots$$

Met andere woorden, als x_0, y_0 een oplossing van $n = ax + by$ is, dan is $x_0 + kb, y_0 - ka$ dat ook voor elke keuze van k. De waarde van y in de oplossing kan met stapjes ter lengte a verschoven worden. Door k juist te kiezen, kunnen we er dus voor zorgen dat $0 \leq y - ka \leq a - 1$. Met behulp van deze opmerking kunnen we Stelling 2.1 nog iets verfijnen.

Stelling 2.2
Zij a, b een tweetal positief gehele getallen met ggd(a, b) = 1. Dan zijn er bij elk geheel getal n gehele getallen x, y te vinden zó dat n = ax + by en 0 ≤ y ≤ a – 1.

Dit is een stap in de richting van positieve representeerbaarheid. We kunnen de waarde van y immers positief krijgen. Laten we dit schuifprincipe toepassen op ons voorbeeld $2196 = 37 \cdot (-10980) + 62 \cdot 6588$. Merk op dat 6588 gedeeld door 37 gelijk is aan 178 rest 2. Trek 178 maal 37 van 6588 af en tel 178 maal 62 bij -10980 op. We vinden

$$2196 = 37 \cdot 56 + 62 \cdot 2,$$

waarmee we zien dat 2196 positief representeerbaar is. Door y tussen 0 en 36 te kiezen, hebben we een gratis bonus gekregen, namelijk een positieve waarde van x. Het aardige is dat dit altijd werkt. We laten nu zien:

Elk getal $n > ab - a - b$ is positief representeerbaar door a en b.

Stel $n > ab - a - b$. We weten op grond van Stelling 2.2 dat er gehele getallen x, y bestaan zó dat $n = ax + by$ met $0 \leq y \leq a - 1$.
Uit de laatste ongelijkheid volgt dat $by \leq ab - b$. Omdat $n > ab - a - b$ betekent dit dat

$$ax = n - by > (ab - a - b) - (ab - b) = -a.$$

En dus $x > -1$. Maar omdat x geheel is, impliceert $x > -1$ dat $x \geq 0$. Het getal n is positief representeerbaar. Daarmee is Stelling 1.1 bewezen.

Een beetje experimenteren met de Java-applet brengt nog een aantal feiten aan het licht die met bovenstaande theorie te verklaren zijn. Hier zijn er een paar. Kijk of je ze experimenteel ziet gebeuren en geef een verklaring. Van a, b veronderstellen we dat $ggd(a, b) = 1$ en $a < b$.

1. $ab - 2a - b$ is niet positief representeerbaar.
2. Als $a > 1$ dan is $ab - a - b - 1$ positief representeerbaar.
3. Als $a > 1$ dan zijn $ab - a - b - 1$, $ab - a - b - 2$, …, $ab - 2a - b + 1$ positief representeerbaar.

Behalve het bovengenoemde kun je zelf misschien ook nog andere regelmatigheden observeren.

Frits Beukers, Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht, beukers@math.uu.nl

Vakantiecursus CWI 2001 Experimentele wiskunde

De Vakantiecursus Wiskunde voor leraren in de exacte vakken in VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden is een initiatief van de Nederlandse Vereninging van Wiskundeleraren. De cursus wordt sinds 1946 jaarlijks gegeven op het Centrum voor Wiskunde en Informatica te Amsterdam en aan de Technische Universiteit Eindhoven.

Ook in 2001 organiseert het CWI een Vakantiecursus. Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit. Voor geïnteresseerden is een nascholingscertificaat beschikbaar. Degene die daarop prijs stelt, gelieve het betreffende formulier in de brochure in te vullen of dit via het elektronisch registatieformulier aan te geven.

Data

Eindhoven:	24 en 25 augustus
Amsterdam:	31 augustus en 1 september

Plaats

Eindhoven: LaPlace-gebouw TU Eindhoven, Den Dolech 2
Amsterdam: CWI, Kruislaan 413

Programma

Vrijdag 24 augustus

15.00-15.25	Ontvangst, koffie
15.25-15.30	Opening
15.30-16.15	F. Beukers. *Experimentele getaltheorie*
16.15-16.45	Pauze
16.45-17.30	A. Doelman. *Het begrip dimensie*
17.30-18.30	Warme maaltijd
18.30-19.15	J.A. van Maanen. *Uitputting en evenwicht*
19.15-19.45	Pauze
19.45-20.30	H.A. van der Vorst. *Snel oplossen is een experiment waard*

zaterdag

10.00-10.45	A.J. Goddijn. *Experimenten met Cabri*
10.45-11.15	Pauze
11.15-12.00	H.C. Tijms. *De wondere wereld van de Poisson-kansverdeling*
12.00-13.00	Lunch
13.00-13.45	Oefeningen met de grafische rekenmachine (o.l.v. H.C. Tijms en M. Kindt)
13.45-14.15	Pauze
14.15-15.00	R.D. van der Mei. *Netwerkplanning*
15.00-15.05	Sluiting

Cursusgeld

Het cursusgeld bedraagt *f* 150,-. De syllabus en de maaltijden zijn hierbij inbegrepen.

Informatie

Voor nadere informatie over de Vakantiecursus of voor het aanvragen van de brochures kunt u zich wenden tot:
Centrum voor Wiskunde en Informatica, t.a.v. Wilmy van Ojik (Wilmy.van.Ojik@cwi.nl), Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam, tel. 020-592 40 09
Meer informatie en online aanmelden:
http://www.cwi.nl/conferences/VC2001/