

Als jonge leerlingen statistiek leren met de computer moet de gebruikte software aan bepaalde eisen voldoen, zeker als een leerproces beoogd wordt waarbij de inbreng van leerlingen zoveel mogelijk benut wordt. **Arthur Bakker** laat zien hoe brugklasleerlingen statistiek leren met speciaal voor dit doel ontwikkelde statistische minitools.

Minitools om statistiek mee te leren

Er bestaan allerlei educatieve statistiekprogramma's, maar de meeste zijn niet geschikt om statistiek mee te leren. Ze bieden wel eindeloos veel mogelijkheden, maar jonge leerlingen moeten eerst de betekenis van statistische grafieken en begrippen leren voordat ze die zinnig kunnen gebruiken. Daarom is er een serie eenvoudige computertools gemaakt waarmee leerlingen van elf tot veertien jaar statistiek kunnen leren. Een van de uitgangspunten was om zoveel mogelijk aan te sluiten bij de kennis die de leerlingen al hebben en steeds hun eigen argumenten, inzichten en grafieken te gebruiken om een stap dichterbij de einddoelen te komen. Dit artikel laat zien hoe opgeven met de computertools dit proces ondersteunen.

In het schooljaar 1999-2000 heb ik samen met collega en docente Mieke Abels lesmateriaal getest in zes brugklassen van de Scholengemeenschap Brokdele, een HAVO-VWO-school in Breukelen. De verschillende lessenseries van elk ongeveer twaalf lessen gaven ons de gelegenheid allerlei opgeven uit te proberen en bij te stellen.

In dit artikel wordt eerst een overzicht van de drie minitools gegeven. Voor minitool 1 en 2 wordt een voorbeeldopgave besproken met ervaringen uit de klas. Het artikel sluit af met de didactische achtergrond, conclusies en de beschikbaarheid van de software.

Overzicht van de drie minitools

De drie minitools vertonen grafieken van toenemende moeilijkheidsgraad. In minitool 1 worden grootheden als remafstand, levensduur en spanwijdte weergegeven met horizontale staven. Deze stap van context naar grafische representatie is voor leerlingen klein. Bij het oplossen van problemen in minitool 1 concentreren leerlingen zich op de eindpunten van de staven, waardoor de staven op een gegeven moment overbodig worden. Als we de eindpunten op de horizontale as laten vallen, krijgen we een grafiek zoals die van minitool 2 in figuur 2.

In minitool 2 komt de grafische representatie al een stap dichterbij de traditionele grafieken waarin de normale verdeling er als de bekende klokvorm uit ziet. Aanvankelijk zijn alle data nog als stippen te zien, maar het is mo-

gelijk via *verberg gegevens* en bepaalde groepeeropties grafieken te maken waarbij de individuele data niet meer te zien zijn, zoals bij het histogram en de boxplot. Als de leerlingen eenmaal redelijk overweg kunnen met één variabele, kunnen ze de stap naar meerdimensionale verbanden en trends maken. Daarvoor dient minitool 3.

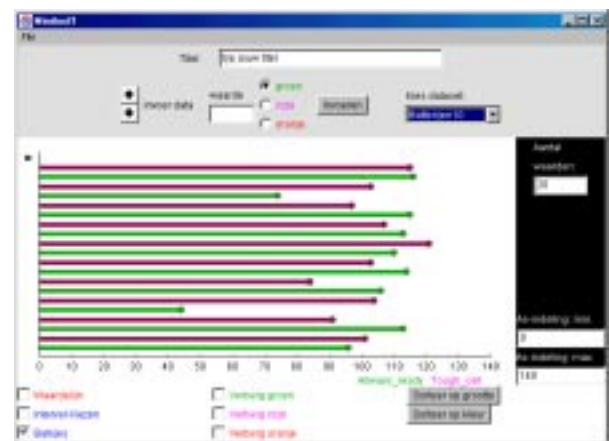


fig. 1 Staven in minitool 1. Levensduur van twee merken batterijen in uren

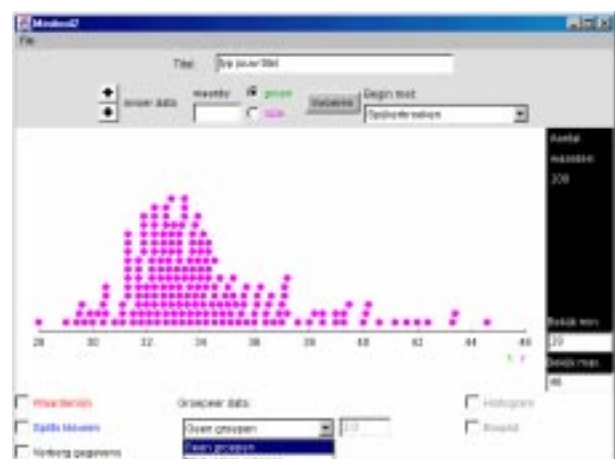


fig. 2 Stippen in minitool 2. Taillematen van 200 mannen in inches

In minitool 3 is een ‘puntenwolk’ te zien (figuur 3). Ook in deze minitool is het mogelijk de data te groeperen en te verbergen. Het is mogelijk om meerdimensionale data-verzamelingen in te voeren en de gewenste variabelen te kiezen. Deze minitool is tot nu toe niet in de brugklas gebruikt. Daarom volgen nu alleen voorbeeldopgaven bij de eerste twee minitools, aangevuld met antwoorden van leerlingen.

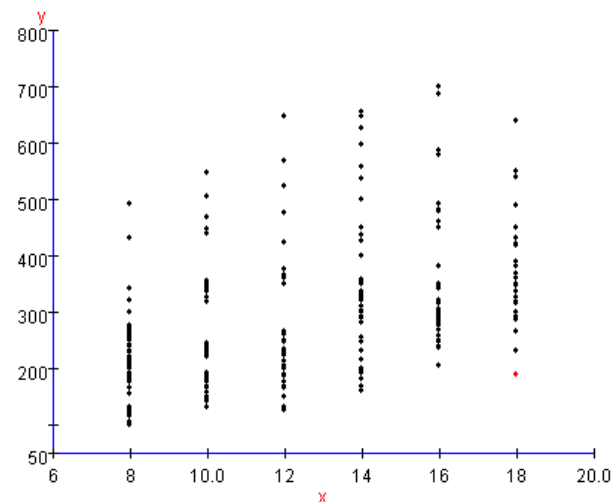


fig. 3 ‘Puntenwolk’ in minitool 3. Opleidingsjaren en maand-salaris in dollars

Batterijen in minitool 1

De Consumentenbond heeft twee merken batterijen getest. Van ieder merk hebben ze van tien batterijen de levensduur in uren gemeten. De resultaten zie je in Minitool 1. Elk staafje stelt de levensduur van één batterij voor in uren. Er is steeds hetzelfde apparaat gebruikt om de batterijen te testen.

Start Minitool 1 op en kies de dataset Batterijen10. Typ bij ‘Titel’ je naam in. De groene staafjes horen bij het merk K, de roze bij merk D. Kijk eens wat er gebeurt als je de knopjes onder de grafiek aanklikt.

Schrijf namens de Consumentenbond een verslag waarin je uitlegt welk merk beter is en waarom.

De batterijen zijn even duur en je hoeft alleen op de levensduur te letten. Gebruik ook een geschikt plaatje om je argumenten toe te lichten. Je mag het verslag in Word maken, maar zorg ervoor dat het niet te veel tijd kost.

Opgave 1: Batterijenprobleem met minitool 1

Batterijen in minitool 1

Met verschillende opties kunnen de leerlingen de data sorteren en onderzoeken. *Sorteer kleur* en *sorteer grootte* kunnen de aanvankelijke chaos iets overzichtelijker ma-

ken (vergelijk de figuren 1 en 4). Met de *waardelij*n kan de waarde afgelezen worden. Deze waardelijjn was ook bedoeld om het visueel schatten van het gemiddelde of de mediaan te ondersteunen. De leerlingen kwamen bij een geschikt gekozen opgave zelf met het idee om de waardelijjn te gebruiken bij het schatten van gemiddelden.

Het batterijenprobleem, het eerste in de serie opgaven met de computer, bleek veel aanknopingspunten voor het vervolg op te leveren. Op een heel concreet niveau hadden de leerlingen het al over allerlei statistische begrippen zoals gemiddelde, mediaan, meerderheid, uitschieters, spreiding en verdeling. Uiteraard gebruikten ze deze technische termen toen nog niet, maar als wij dachten dat de leerlingen eraantoe waren, vertelden wij dat er een statistische term was voor datgene waar de leerlingen het zelf al over hadden.

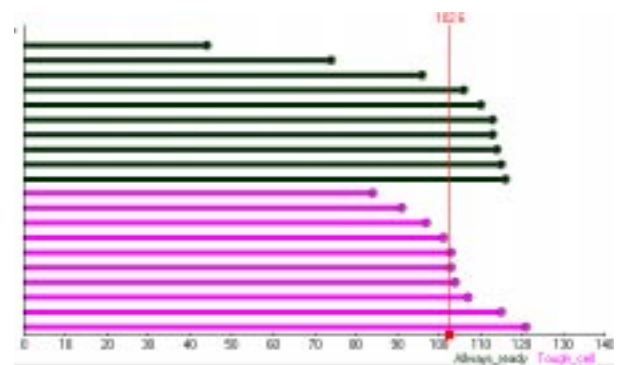


fig. 4 De levensduur in uren van tien batterijen van merk K (boven) en merk D (onder) met de waardelijjn op het gemiddelde van merk D

Leerlingen kwamen met uiteenlopende argumenten:

1. ‘Merk D is het beste want hij heeft de hoogste waarde.’

Kennelijk lette deze leerling alleen op de maximale waarde en overzag hij niet het geheel. Uit dergelijke opmerkingen concludeerden we dat er in de lessenserie ook aandacht moest zijn voor steekproeven. Daarom hebben we besloten om voortaan bij de klassikale introductie van een probleem meer tijd te besteden aan de vraag hoe de data verzameld zijn (Cobb 1999). Dit bleek ook te helpen.

2. ‘Merk K heeft meer goeie batterijen.’

Deze leerlingen letten op de meerderheid van de data. Anderen wierpen tegen dat er ook slechte uitschieters zijn. Dit zijn concrete aspecten van verdelingen. In dit geval had de meerderheid een hoge waarde en waren er een paar lage uitschieters. Later wordt een dergelijke verdeling scheef genoemd.

3. ‘Merk D heeft een hoger gemiddelde.’

Het gemiddelde werd voor de leerlingen een maat voor hoe goed een merk batterijen was.

4. ‘Merk D is betrouwbaarder.’

Dit was een opmerking waar we op geanticipeerd en gehoopt hadden. Als leerlingen eenmaal een kleine spre-

ding zien als een teken van betrouwbaarheid, kunnen ze later de stap naar spreiding in het algemeen maken.

5. 'Het hangt ervan af waar je die batterijen voor nodig hebt.'

Een enkele slimmerik merkte op dat je voor iets heel belangrijks misschien wel merk D zou kiezen, maar als het verder niet veel uitmaakt, is de kans op een goede batterij bij merk K groter.

Over het algemeen was ongeveer de helft van de klas voor merk D en de andere helft voor merk K. Dit leverde veel discussiestof op voor klassikale gesprekken. Het vijftal argumenten laat zien dat leerlingen van verschillend niveau tegelijkertijd aan hetzelfde probleem kunnen werken. In gemengde brugklassen kan dit een groot voordeel zijn.

Spijkerbroeken in minitool 2

Minitool 2 heeft meer mogelijkheden om de data te groeperen dan minitool 1. Behalve sorteren op grootte en kleur kunnen leerlingen nu ook eigen groepen maken, vaste groeps grootte en vaste intervalbreedte kiezen, en twee of vier even grote groepen vormen. De vaste intervalbreedte bereidt voor op het histogram en de vier even grote groepen op de boxplot.

Spijkerbroeken

Kledingfabrikanten en winkeliers moeten precies weten hoeveel kledingstukken van iedere maat ze moeten maken of inslaan, anders houden ze bepaalde maten over of komen ze andere tekort. Om te weten te komen hoeveel spijkerbroeken een fabrikant moet maken is van 200 mannen de taille gemeten in inches. Een inch is 2,54 cm.

Open in Minitool 2 de dataset Spijkerbroeken en onderzoek de verdeling van de maten.

Schrijf een verslag voor de fabrikant en leg daarin precies uit welke statistische methoden je gebruikt hebt om uit te vinden hoeveel procent van de spijkerbroeken welke maat moet zijn. Maak een overzichtelijke tabel van de maten en de percentages.

Zoals bij elke opdracht geldt ook hier: je advies mag je in Word typen, maar zorg dat dat niet al te veel tijd kost, want we zijn alleen geïnteresseerd in goede argumenten, niet in mooie lay-out. Een duidelijk plaatje bij je advies is wenselijk.

Opgave 2. Spijkerbroekenopgave in minitool 2

Een voorbeeldopgave met minitool 2 is het spijkerbroekenprobleem (opgave 2). Over het algemeen kwam dit probleem aan bod tijdens de negende les, na drie lessen met minitool 1 en één lesuur met minitool 2, afgewisseld door vier lessen zonder computer. Het doel van deze opgave was om leerlingen te laten inzien dat het zin kan hebben om data in gelijke intervallen in te delen. We

hoopten hiermee een stap dichterbij het histogram te komen, waarmee leerlingen verdelingen aanschouwelijk kunnen maken.

In eerste instantie waren de leerlingen geneigd om een globaal antwoord te geven, soms ondersteund met een grafiek als die van figuur 5. Een typerend antwoord was 'Kies veel van maat 32 en 34 en minder van de rest.' Als we dan vroegen of de fabrikant blij zou zijn met zo'n advies, was het antwoord steevast: 'Ik denk niet echt'. De hint om nog eens wat opties te proberen was meestal genoeg om ze later met de vaste intervallen te zien werken. Een voorbeeldreactie waarbij de optie *vaste intervalbreedte* gebruikt is: 'Doe vaste intervallen. Deel de getallen door twee om percentages te krijgen.'

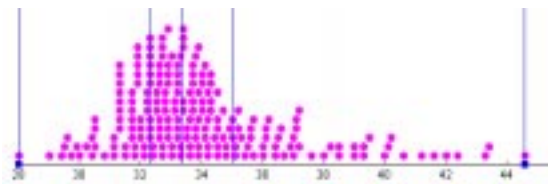


fig. 5 Vier even grote groepen in minitool 2

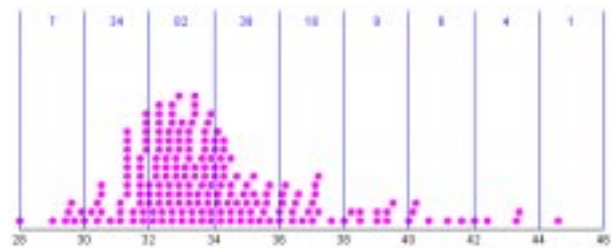


fig. 6 Vaste intervalbreedte in minitool 2

Vaak bleek een klassikale bespreking nodig te zijn om het probleem helder te krijgen of ervoor te zorgen dat leerlingen niet bleven hangen op een te globaal antwoord. We lasten dan een korte bespreking in. Door deze klassikale momenten werden leerlingen bewuster van hun eigen en andermans ideeën en strategieën.

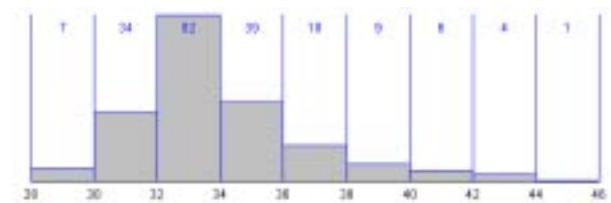


fig. 7 Optie histogram bij vaste intervalbreedte

Achteraf gezien had ik beter kindermaten kunnen nemen dan talle maten in inches, want voor de meeste kinderen had deze context met inches weinig betekenis.

Verder had ik gehoopt dat tijdens de klassikale introductie meer leerlingen aan steekproeven zouden denken. Meestal stelden ze heel pragmatisch voor om gewoon iets te proberen en dan op grond van de ervaring de aantallen voor het volgende jaar bij te stellen. De conclusie was dat de spijkerbroekencontext aangepast moest worden en dat er in de lessenserie meer aandacht moest komen voor de notie van steekproeven. Dit laatste punt kwam namelijk ook al bij de bespreking van minitool 1 naar voren.

Minitool 3

Bij de experimenten is minitool 3 niet gebruikt, maar één anekdote laat zien dat de overgang van minitool 2 naar minitool 3 ook door leerlingen zelf gemaakt kan worden. De leerlingen moesten rond de tiende les voor een ballonvaarder gewicht- en lengtedata van de hele klas in een duidelijke grafiek weergeven. Eén leerling had toen een puntenwolk gemaakt van lengte tegen gewicht (zie figuur 8). Hij bleek zonder enige moeite een verband te zien en een lijn te kunnen trekken die dit verband globaal weergaf.

Uiteraard is dit slechts één voorbeeld, maar het geeft wel aan dat de overgang van minitool 2 naar 3 ook door leerlingen gemaakt kan worden. In de meeste klassen zal deze stap echter goed voorbereid moeten worden.

Overigens komen puntenwolken en tweedimensionale data-analyses niet meer voor in het Nederlandse wiskunde-examenprogramma. Dit is vreemd, omdat er in de meeste wetenschappen veelvuldig gebruik gemaakt wordt van dergelijke grafieken.

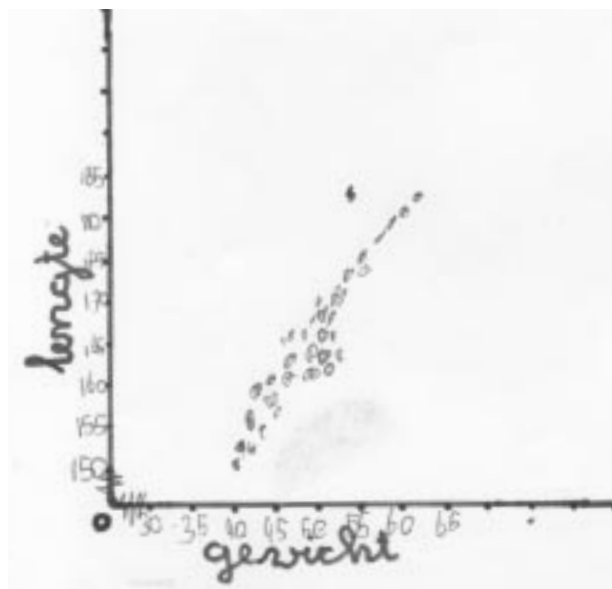


fig. 8 Grafiek van een leerling: lengte tegen gewicht

Didactische achtergrond

De theorie van het realistisch wiskundeonderwijs, met name het idee van geleid heruitvinden, functioneerde als

leidraad bij het ontwerp van de minitools en het lesmateriaal. Het doel was om zo goed mogelijk aan te sluiten bij de kennis die de leerlingen al hebben en steeds hun eigen argumenten, inzichten en grafieken te gebruiken om een stap dichterbij de einddoelen te komen. Er zijn dus drie elementen van het leertraject waar goed over nagedacht moet worden:

1. *Beginpunten*. Wat kunnen en weten de leerlingen al en wat zijn hun intuïties waar we op aan kunnen sluiten?
2. *Einddoelen*. Wat willen we dat de leerlingen kunnen en weten aan het eind van het leertraject?
3. *De leerroute*. Hoe kunnen we van de beginpunten bij de einddoelen komen?

Beginpunten

Over het algemeen weten Nederlandse leerlingen in de brugklas nog weinig van statistiek. Ze kunnen gemiddelden berekenen en ze kennen een aantal typen grafieken. Dit betekent niet dat leerlingen het gemiddelde zien als een representant van een groep data. Uit de onderzoeksliteratuur is bekend dat leerlingen in eerste instantie losse data zien; ze zien een dataverzameling nog niet als een geheel dat bepaalde eigenschappen heeft zoals centrummaten, scheefheid en uitschieters. Daarom wilden wij hun aandacht richten op de vorm van de verdeling in de grafieken (Gravemeijer 1999).

Einddoelen

Een belangrijk einddoel van de lessenserie was het begrip verdeling in combinatie met grafieken. Grafieken als het histogram en de boxplot zijn nuttig bij het aanschouwelijk maken van verdelingen. Het begrip verdeling is tevens een verbindende schakel tussen allerlei andere statistische begrippen zoals gemiddelde, mediaan, spreiding, uitschieters, want die kunnen we zien als eigenschappen van verdelingen. Helaas worden die nu vaak als losse begrippen onderwezen. Uiteraard streefden wij niet naar formele definities, maar naar informeel en concreet begrip. Een voorbeeld hiervan is te vinden in de paragraaf 'Batterijen in minitool 1'. Op een heel concreet niveau redeneerden leerlingen daar al over de scheefheid van het ene merk en over de spreiding van het andere merk, alleen gebruikten ze daarvoor woorden als meerderheid, uitschieter en betrouwbaarheid.

De leerroute

Het ontwerpen en bijstellen van de leerroute is voor leraren en ontwerpers van lesmateriaal het meest arbeidsintensief. Voor elke activiteit moeten we namelijk voorstellen wat leerlingen gaan bedenken en hoe we dit kunnen gebruiken om verder te komen. De leerroute moet tijdens en na elke lessenserie bijgesteld worden, maar hoe meer ervaring we ermee hebben, des te beter kunnen we voorspellen wat leerlingen doen en hoe dit hen dichterbij de einddoelen brengt. Soms blijken de beginpunten of

eindoelen bijgesteld te moeten worden. Het gehele leertraject blijft altijd hypothetisch, omdat geen klas hetzelfde is. Daarom is de term 'hypothetisch leertraject' in zwang geraakt (Simon 1995).

Een belangrijk kenmerk van de statistische minitools is dat hun ontwerp gebaseerd is op een hypothetisch leertraject. Het eerste hypothetische leertraject en de eerste versie van de minitools zijn ontwikkeld door Gravemeijer, Cobb en McClain. Deze onderzoekers van de Vanderbilt University in Nashville (VS) hebben de minitools ingezet bij twee onderwijsexperimenten in een eerste en een tweede klas (zie Cobb 1999 en Cobb et al. 2001). Mijn onderzoek is een vervolg op dat van hen en dient meer inzicht te verschaffen in de rol van computertools in het statistiekonderwijs. Dit promotieonderzoek maakt deel uit van een groter project 'Wiskunde en ICT', waarvan Gravemeijer projectleider is.

De minitools zijn geprogrammeerd als Java-applets, wat impliceert dat ze via internet gebruikt kunnen worden, maar dat er niet mee bewaard of afgedrukt kan worden. Helaas zijn deze applets nogal traag en is het niet op alle scholen mogelijk een goede verbinding met internet te krijgen. Daarom zijn de applets uitgebreid tot stand-alone applicaties waarmee wel kan worden bewaard en afgedrukt.

Conclusies

De statistische minitools zijn een voorbeeld van computertools waarvan het ontwerp gebaseerd is op een hypothetisch leertraject. Ik verwacht dat er steeds meer educatieve software op deze manier ontwikkeld zal worden. Voor een goed resultaat is het noodzakelijk dat didactici, leraren en programmeurs nauw samenwerken en regelmatig de klas ingaan om de software en het lesmateriaal te testen.

In dit artikel werden twee voorbeeldopgaven met de minitools gegeven met argumenten van leerlingen. Er is beschreven hoe de inbreng van leerlingen benut werd om een stap dichterbij de einddoelen te komen. Het blijkt mogelijk om brugklassers vrij geavanceerde statistische begrippen en grafieken te leren zolang het op een vrij concreet en informeel niveau blijft.

Het ontwerp van de minitools heeft als voordeel boven de meeste andere educatieve software dat ook voor jonge leerlingen begrippen en grafieken steeds betekenis kunnen blijven houden. Zelfs als ze op een gegeven moment vergeten zijn wat bijvoorbeeld een boxplot precies is, dan hebben ze toch nog de ervaring van het verdelen in vier

even grote groepen in bepaalde situaties. Ditzelfde geldt ook voor het histogram. Als leerlingen weten hoe data gestructureerd moeten worden om een histogram te krijgen, verwarren ze hopelijk ook minder snel de hoogte van de staven met bijvoorbeeld de lengte van mensen.

Als het hypothetisch leertraject goed functioneert, dan kunnen argumenten en methodes van leerlingen zelf worden benut om steeds een stap dichterbij de formele begrippen en traditionele grafieken te komen. Daarbij moeten we de overgang niet onderschatten van de grafieken waarbij ieder gegeven een eigen staaf of stip heeft naar grafieken waarbij veel data tot een staaf of box gereduceerd worden. Er schuilt dan ook een gevaar in het inzetten van standaardsoftware bij jonge kinderen.

De minitools zijn natuurlijk maar een klein onderdeel bij het hele leerproces. Belangrijke vragen zoals 'Hoe moet je een klassendiscussie leiden waarbij de inbreng van de leerlingen maximaal benut wordt?' bleven in dit artikel noodzakelijkerwijs buiten beschouwing. Wel wil ik opmerken dat het zelfstandig werken met de computer minder dan de helft van de tijd in beslag nam. Niveauverhoging bleek pas tijdens klassikale gesprekken bereikt te worden onder de strikte leiding van de docent. Hiervoor ruimden we dan ook veel tijd in.

Leraren die de minitools en het ontwikkelde materiaal eens willen zien of zelfs proberen, kunnen terecht op verschillende websites. Vanaf www.fi.uu.nl/~arthur valt het een en ander te downloaden. De minitools staan ook op het wisweb (www.fi.uu.nl/wisweb) als Java-applets en voor meer informatie kunt u ook een e-mail sturen aan A.Bakker@fi.uu.nl.

Arthur Bakker, Freudenthal Instituut, Utrecht

Literatuur

- Cobb, P. (1999). Individual and Collective Mathematical Development: The Case of Statistical Data Analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(1).
- Cobb, P., K. McClain & K.P.E. Gravemeijer (in press). Learning about Statistical Covariation. *Cognition and Instruction*.
- Gravemeijer, K.P.E. (1999). ICT in dienst van het heruitvinden van statistische concepten en representaties. Paper gepresenteerd op de ORD 1999.
- Simon, M.A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.