De recreatierubriek gaat deze keer over het 'gewone getal', dat volgens **Aad Goddijn** toch eigenlijk ook wel heel bijzondere eigenschappen heeft.

Gewone getallen bestaan niet

Geen getal zonder eigenschappen

Een gewoon natuurlijk getal telt eigenlijk niet mee. Je moet toch minstens priem zijn, een macht van twee zijn of daar vlak naast liggen, de som van je eigen delers zijn, op twee manieren in drie vijfde machten gesplitst kunnen worden om een kansje te maken in de officiële boeken voor te komen.

Deze rubriek neemt het nu eens op voor het gewone onbekende getal, het natuurlijke getal zonder eigenschappen als het ware. Theoretici ontkennen pertinent het bestaan van dit getal. 'Stel', zeggen ze in hun karakteristieke tongval, 'dat er een natuurlijk getal zonder eigenschappen bestaat. Dan bestaat er een kleinste natuurlijk getal zonder eigenschappen. Dat getal heeft een bijzondere eigenschap, namelijk dat het het kleinste natuurlijk getal zonder eigenschappen is. Tegenspraak!'

Dergelijke op paradoxen gebaseerde praatjes lappen we vandaag aan onze laars. Mocht het waar zijn dat er geen getal zonder eigenschappen is, dan moet het gewone getal met zíjn bijzonderheden maar eens in het zonnetje gezet worden. Aan de slag!

Wist u dat van 6174?

Onder de 9000 getallen die met vier cijfers worden genoteerd, valt 6174 niet bijzonder op. Even? Daar zijn er 4500 van. Vier verschillende cijfers? Dat zijn er maar liefst 4536. Maar laten we eens twee nieuwe getallen maken door de cijfers van 6174 van groot naar klein en van klein naar groot te rangschikken. Twee verschillende getallen ontstaan met als verschil:

$$7641 - 1467 = 6174$$

Allemachtig, wat bijzonder is die 6174 ineens!

Probeer het eens met een ander getal. Bij voorbeeld 5108.

$$8510 - 0158 = 8352$$

Niet echt bijzonder, maar waarom niet 8352 op zijn beurt net zo behandeld?

$$8532 - 2358 = 6174.$$

Laten we het proces maar de GK-KG-operatie noemen.

Het herhalen van de GK-KG-operatie vanuit 7173 levert een langer rijtje op, maar ook hier verschijnt uiteindelijk toch weer 6174, waarna we natuurlijk stoppen.

$$7731 - 1377 = 6354$$
$$6543 - 3456 = 3087$$
$$8730 - 0378 = 8352$$
$$8532 - 2358 = 6174$$

Toeval? Nee!

Opgave 201

Toon aan dat elk getal van vier cijfers dat niet uit gelijke cijfers bestaat, op deze manier naar het bijzondere getal 6174 leidt.

Typisch een opgave waar uw computer in zijn digitale haast vlot uitsluitsel zou kunnen geven. Maar 6174 heeft recht op meer persoonlijke aandacht. Zoek dus een strategie waarbij zo weinig mogelijk gevallen moeten worden nagerekend.

Maar 11 kan vermeden worden!

Van de getallen 9, 10, 11, 12 en 13 is 11 zonder meer het bijzonderst. Middelste van de vijf, gelijke cijfers, deler van 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55, priem, noem maar op. Daarom een puzzel waarin de arrogante 11 vermeden moet worden.

Hier is om te beginnen een willekeurige greep van 55 stuks uit de getallen (1, 2, 3, ... , 100):

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 14, 15,
17, 18, 19, 20, 21, 27, 28, 29, 31, 35, 36,
39, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 51, 53, 54, 55,
56, 57, 59, 61, 66, 67, 68, 73, 74, 75, 76,
77, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 89, 91, 94, 98.

We zoeken nu bepaalde verschillen tussen getallen uit deze greep. 9, 10, 11, 12 en 13 zijn gauw gevonden:

$$21 - 12 = \mathit{9}$$
$$53 - 43 = \mathit{10}$$
$$77 - 66 = \mathit{11}$$
$$86 - 74 = \mathit{12}$$
$$94 - 81 = \mathit{13}$$

Dat lijkt niet zo verbazingwekkend, bij zoveel keus kun je die verschillen 9, 10, 11, 12, 13 immers vast niet ver-

mijden? Maar zo eenvoudig ligt het niet.
Twee opgaven die bij elkaar horen, brengen het verschijnsel in kaart.

Opgave 202
*Laat zien dat in elke greep van 55 verschillende getallen uit (1, 2, 3, ... , 100) twee getallen voorkomen die **9** verschillen, twee die **10** verschillen, twee die **12** verschillen en twee die **13** verschillen.*

Heb ik 11 niet vergeten? Nee, *want 11 kan vermeden worden.*

Opgave 203
Geef 55 getallen uit (1, 2, 3, ... , 100) aan waarin geen twee getallen voorkomen die 11 verschillen.

Een Sumerische zuster van 6174?

Bij de opgave over 6174 gebruikten we steeds de decimale voorstelling van getallen. De bijzondere eigenschappen van 6174 zijn daarom niet helemaal eigen aan het getal zelf, maar worden veroorzaakt door onze bijzondere schrijfwijze.
Ik heb gebruik van computers na opgave 201 een beetje in een somber daglicht gezet, maar de volgende opgave – waarbij flink in het 60-tallig stelsel moet worden gerekend – zou ik niet graag zonder programmeren aanpakken.

Opgave 204
Onderzoek of de Sumeriërs een zuster van 6174 kennen. Dat wil zeggen: onderzoek of er in het 60-tallig stelsel gelijksoortige of geheel andere verschijnselen optreden bij het herhalen van de GK-KG-operatie.

Het probleem rond het vermijden van 11 had het bezwaar van de notatieafhankelijkheid niet, ook al ging het om specifieke getallen zoals 100, 55, 11.
Problemen als die rond 6174 zijn een beetje 'not done' in de getaltheorie. Een wat hogere status hebben vragen die met representatie in talstelsels in het algemeen te maken hebben, zoals het repeteren van cijfers achter de komma en dergelijke. Of problemen waarbij bijzonder fraaie methoden te pas komen, die ook elders bruikbaar zijn. Dat is bijvoorbeeld het geval bij het bepalen van decimalen van π. Ook de vraag of er een macht van twee is die met zeven zevens begint, kan door de beugel, omdat het bewijs oplevert dat de zeven zevens eigenlijk niets bijzonders zijn, omdat elke cijferrij als beginstuk blijkt te kunnen voorkomen in de rij der machten van twee.
De volgende problemen worden weliswaar uitgedrukt in het tientallig stelsel, maar zijn makkelijk generaliseerbaar. Ook gaat het bij deze twee problemen niet om één specifiek getal in diens speciale decimale outfit, maar meer om de vraag of die outfit het algemene modebeeld is of juist niet.

Velen heilig, weinigen eerstbijzonder

Over zevens gesproken: 7 is een heilig getal; dat is in vele culturen zo. De Bijbel legt de verbinding tussen '7' en 'heilig' vlak na het eerste scheppingsverhaal:

> *En God zegende de zevende dag en heiligde die, omdat Hij daarop gerust heeft van al het werk, dat God scheppende tot stand had gebracht. [Gen. 2:3].*

In de volgende opgave is elk getal dat in de tiendelige schrijfwijze een of meer zevens nodig heeft ook een beetje heilig. De andere getallen noemen we heilloos. Dat er oneindig veel heilloze getallen zijn, is duidelijk. Pessimisten zeggen nu: zie je wel. Maar vanuit een positievere instelling kunt u ook aantonen dat de 'meeste' getallen minstens een beetje heilig zijn.

Opgave 205
De heilloze getallen zijn zo ver in de minderheid dat deze reeks convergeert:

$$\sum_{n \text{ is heilloos}} \frac{1}{n}$$

Een verwante, maar toch wat lastiger vraag gaat over een andere selectie van de natuurlijke getallen, de rij B der eerstbijzondere getallen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 44, 45, ...

21 komt er niet in voor; die is na 12 niet zo bijzonder meer om de eenvoudige reden dat de cijfergreep (1, 2) al eerder gebruikt is. Daarom komt 32 ook niet voor, want 23 is al geweest. 156704 is ook niet eerstbijzonder, 104567 gaat er namelijk aan vooraf. We kijken dus alleen naar het eerste voorkomen van een bepaalde cijfersamenstelling, waarbij (in tegenstelling tot de 6174-puzzel) geen beginnullen worden gebruikt.
Het beginstuk van de rij der eerstbijzondere getallen geeft de indruk dat er helemaal niet zoveel getallen uitvallen. Maar dat is schijn, want de volgende opgave toont aan dat betrekkelijk weinig getallen eerstbijzonder zijn. Dat wordt op drie manieren uitgedrukt in onderdelen a, b en c. a volgt uit b en b uit c; maak dus een eigen keus.

Opgave 206
Laat b_1, b_2, b_3, ... de rij der eerstbijzondere getallen zijn. Dan gelden:

a. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_n}{n} = \infty.$

b. De reeks $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$ *convergeert.*

c. Er bestaan positieve constanten m en M, m < 1 < M, zó, dat voor alle n geldt:

$$m \cdot 10^{(n \cdot 9!)^{1/9}} < b_n < M \cdot 10^{(n \cdot 9!)^{1/9}}$$

Als we ons (in onderdeel *c*) in plaats van op 'alle *n*' op staartgedrag richten, dus op '*n* groter dan zeker N_0', dan kunnen we *m* en *M* dichter bij elkaar kiezen naarmate N_0 groter is. Ik denk dat er wel een positieve ondergrens voor $M - m$ blijft bestaan.

Wat niet daalt, cu-cumeleert terug

De volgende opgaven gaan over rijen van niet-negatieve gehele getallen, waarvan de enige te gebruiken eigenschap is, dat ze niet dalen. Verder mag alles. De rij mag aarzelend beginnen met dertig nullen en dan in stappen van honderd naar duizend springen en vervolgens op 1001 blijven hangen. Of gewoon braaf de rij der even getallen zijn, of in tabelvorm er zo uitzien:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	..
$f(n)$	0	3	3	4	6	6	9	9	10	12	..

Kijk nu eens hoeveel getallen *m* er in de tabelregel met *f* staan met $f(m) < 8$. We noteren dat aantal als $f^*(8)$; er geldt in het voorbeeld: $f^*(8) = 6$.

Algemeen: $f^*(n)$ is de rij der cumulatieve frequenties. De tabel uitgebreid met f^* begint zo:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	..
$f(n)$	0	3	3	4	6	6	9	9	10	12	..
$f^*(n)$	1	1	1	3	4	4	6	6	6	8	..

Nog niets bijzonders te zien. Dat zou je ook niet verwachten, van *f* zelf weten we immers al niets bijzonders te vertellen! Maar pas de $*$-operatie nu eens op f^* toe. f^{**} geeft dan de cumulatieve frequenties van f^*. In de volgende tabel zijn de eerste waarden aangegeven, voor zover te vinden uit de eerdere gegevens.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	..
$f(n)$	0	3	3	4	6	6	9	9	10	12	..
$f^*(n)$	1	1	1	3	4	4	6	6	6	8	..
$f^{**}(n)$	0	3	3	4	6	6	9	9	..	..	..

Niet te geloven! Maar wel te bewijzen:

Opgave 207
Toon aan dat als f niet dalend is, inderdaad geldt: $f = f^{**}$.

Nu tellen we tot slot de bovenste regel van de tabel (n) bij de regels voor $f(n)$ en $f^*(n)$ op.
Een nieuwe verrassing ontstaat. Die twee onderste rijen vullen verbazingwekkend genoeg elkaars gaten op:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	..
$n + f(n)$	1	5	6	8	11	12	16	17	19	22	..
$n + f^*(n)$	2	3	4	7	9	10	13	14	15	18	..

Zo'n stel rijen heet complementair. Aansluitend bij de gegevens over *f* en f^*:

Opgave 208
Toon aan dat elk natuurlijk getal N precies op één manier is voor te stellen, ofwel als $N = p + f(p)$ *voor zekere p, ofwel als* $N = q + f^*(q)$ *voor zekere q, maar nooit op beide manieren.*

Willekeurige rondedans krijgt ritme

Na de oneindige rijen nu de eindige; maar nu mag alles, als de getallen in de uitgangsrij maar geheel zijn. Een voorbeeld bij rijlengte vijf:

22 7 16 25 13

We bepalen de absolute verschillen van de rij, waarbij we aan het eind het verschil tussen eerste en laatste getal nemen. We werken dus cyclisch:

22 7 16 25 13 (22)

15 9 9 12 9

Enzovoorts, in een paar kolommen vanwege de ruimte:

6 0 3 3 6	3 0 0 0 3	0 3 3 0 0	0 0 0 3 3
6 3 0 3 0	3 0 0 3 0	3 0 3 0 0	0 0 3 0 3
3 3 3 3 6	3 0 3 3 3	3 3 3 0 3	0 3 3 3 3
0 0 0 3 3	3 3 0 0 0	0 0 3 3 0	....
0 0 3 0 3	0 3 0 0 3	0 3 0 3 0	....
0 3 3 3 3	3 3 0 3 3	3 3 3 3 0	....

Het draait op periodiciteit uit. Natuurlijk, want het aantal mogelijke rijtjes is beperkt en als je eenmaal één keer een zelfde rijtje als eerder tegenkomt, herhaalt het verhaal zich geheel. Vanaf het moment waarop de periodiciteit begint, bestaan de rijtjes uit slechts twee getallen, in dit geval 0 en 3; dat is opmerkelijk.
Een rijtje met lengte vier levert een ander gezicht op:

23 45 6 21	0 0 0 0	0 0 0 0
22 21 45 2	0 0 0 0	0 0 0 0
1 24 43 20	0 0 0 0	....
23 19 23 19	0 0 0 0	....
4 4 4 4	0 0 0 0	....

Ook periodiek, jawel. Maar hoe!

De volgende opgave omschrijft het verschijnsel uitvoerig

Als we ons (in onderdeel c) in plaats van op 'alle n' op staartgedrag richten, dus op 'n groter dan zeker N_0', dan kunnen we m en M dichter bij elkaar kiezen naarmate N_0 groter is. Ik denk dat er wel een positieve ondergrens voor $M - m$ blijft bestaan.

Wat niet daalt, cu-cumeleert terug

De volgende opgaven gaan over rijen van niet-negatieve gehele getallen, waarvan de enige te gebruiken eigenschap is, dat ze niet dalen. Verder mag alles. De rij mag aarzelend beginnen met dertig nullen en dan in stappen van honderd naar duizend springen en vervolgens op 1001 blijven hangen. Of gewoon braaf de rij der even getallen zijn, of in tabelvorm er zo uitzien:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	..
$f(n)$	0	3	3	4	6	6	9	9	10	12	..

Kijk nu eens hoeveel getallen m er in de tabelregel met f staan met $f(m) < 8$. We noteren dat aantal als $f^*(8)$; er geldt in het voorbeeld: $f^*(8) = 6$.

Algemeen: $f^*(n)$ is de rij der cumulatieve frequenties. De tabel uitgebreid met f^* begint zo:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	..
$f(n)$	0	3	3	4	6	6	9	9	10	12	..
$f^*(n)$	1	1	1	3	4	4	6	6	6	8	..

Nog niets bijzonders te zien. Dat zou je ook niet verwachten, van f zelf weten we immers al niets bijzonders te vertellen! Maar pas de $*$-operatie nu eens op f^* toe. f^{**} geeft dan de cumulatieve frequenties van f^*. In de volgende tabel zijn de eerste waarden aangegeven, voor zover te vinden uit de eerdere gegevens.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	..
$f(n)$	0	3	3	4	6	6	9	9	10	12	..
$f^*(n)$	1	1	1	3	4	4	6	6	6	8	..
$f^{**}(n)$	0	3	3	4	6	6	9	9	..	..	..

Niet te geloven! Maar wel te bewijzen:

Opgave 207
Toon aan dat als f niet dalend is, inderdaad geldt: $f = f^{**}$.

Nu tellen we tot slot de bovenste regel van de tabel (n) bij de regels voor $f(n)$ en $f^*(n)$ op.
Een nieuwe verrassing ontstaat. Die twee onderste rijen vullen verbazingwekkend genoeg elkaars gaten op:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	..
$n + f(n)$	1	5	6	8	11	12	16	17	19	22	..
$n + f^*(n)$	2	3	4	7	9	10	13	14	15	18	..

Zo'n stel rijen heet complementair. Aansluitend bij de gegevens over f en f^*:

Opgave 208
Toon aan dat elk natuurlijk getal N precies op één manier is voor te stellen, ofwel als $N = p + f(p)$ voor zekere p, ofwel als $N = q + f^*(q)$ voor zekere q, maar nooit op beide manieren.

Willekeurige rondedans krijgt ritme

Na de oneindige rijen nu de eindige; maar nu mag alles, als de getallen in de uitgangsrij maar geheel zijn. Een voorbeeld bij rijlengte vijf:
22 7 16 25 13
We bepalen de absolute verschillen van de rij, waarbij we aan het eind het verschil tussen eerste en laatste getal nemen. We werken dus cyclisch:

22 7 16 25 13 (22)

15 9 9 12 9

Enzovoorts, in een paar kolommen vanwege de ruimte:

6 0 3 3 6	3 0 0 0 3	0 3 3 0 0	0 0 0 3 3
6 3 0 3 0	3 0 0 3 0	3 0 3 0 0	0 0 3 0 3
3 3 3 3 6	3 0 3 3 3	3 3 3 0 3	0 3 3 3 3
0 0 0 3 3	3 3 0 0 0	0 0 3 3 0	....
0 0 3 0 3	0 3 0 0 3	0 3 0 3 0	....
0 3 3 3 3	3 3 0 3 3	3 3 3 3 0	....

Het draait op periodiciteit uit. Natuurlijk, want het aantal mogelijke rijtjes is beperkt en als je eenmaal één keer een zelfde rijtje als eerder tegenkomt, herhaalt het verhaal zich geheel. Vanaf het moment waarop de periodiciteit begint, bestaan de rijtjes uit slechts twee getallen, in dit geval 0 en 3; dat is opmerkelijk.
Een rijtje met lengte vier levert een ander gezicht op:

23 45 6 21	0 0 0 0	0 0 0 0
22 21 45 2	0 0 0 0	0 0 0 0
1 24 43 20	0 0 0 0	....
23 19 23 19	0 0 0 0	....
4 4 4 4	0 0 0 0	....

Ook periodiek, jawel. Maar hoe!

De volgende opgave omschrijft het verschijnsel uitvoerig en uiteraard moet bewezen worden dat deze verschijnselen in het algemeen inderdaad optreden.

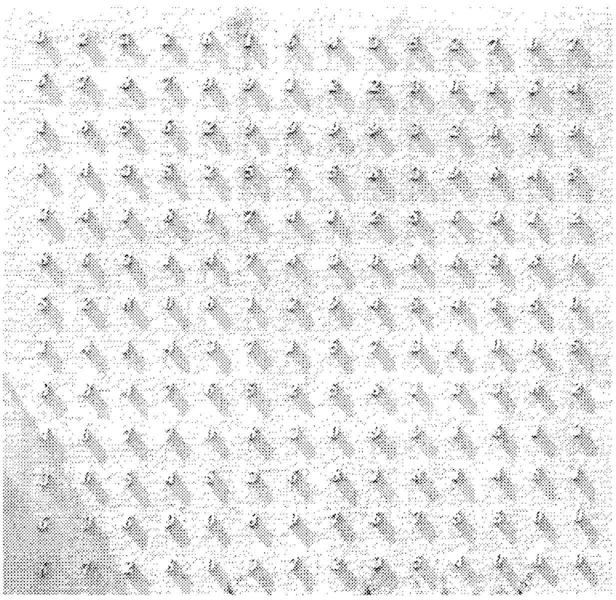
Opgave 209
Toon aan dat bij het beschreven proces van het nemen van cyclisch absolute verschillen van eindige rijen gehele getallen:

a. ongeacht de rijlengte altijd periodiciteit ontstaat
b. dat er, als de periodiciteit is ingezet, er
   - *ofwel twee getallen optreden, waarvan er één nul is*
   - *ofwel verder alleen nullen voorkomen*

c. dat in het geval het uitgangsrijtje een lengte heeft die gelijk is aan een macht van twee, er op den duur zeker alléén nullen optreden.

Getallen zonder titel in Almere

Vlakbij het NS-station Almere Muziekwijk is een dode gevelwand versierd met stenen cijfers. Vanaf het perron zie je dit tableau van 13 bij 14 cijfers op de zijkant van het eerste huis aan het Muzenplein:



De cijfers zijn daar in 1992 zo geplaatst door Ben Raayman. Het werk heeft geen titel en dat is precies wat we in deze rubriek nodig hebben: volslagen onbekende getallen.
De NS geeft soms ruim de tijd je leeftijd, je geboortedatum, al je telefoonnummers en je schoenmaat tussen deze grijze stenen op te zoeken, maar soms vraag je je af:

Opgave 210
Zou er toch meer achter zitten? En wat dan?

Want: gewone getallen, nee, die bestaan niet.

Bronnen

Opgaven 201, 202, 207, 208 en 209 vond ik – in andere vorm – in twee boeken van Ross Honsberger, die uitgegeven worden door de Mathematical Association of America: *Ingenuity in Mathematics* en *More Mathematical Morsels*. Honsberger geeft in plaats van 209 alleen de 'traditionele' opgave met rijlengte 4. De generalisatie in opgave 209 kan tot een fraaier, minder ad hoc bewijs leiden dan Honsberger geeft.
Opgave 207 en 208 zijn oorspronkelijk van Lambek en Moser; zie eventueel de *American Mathematical Monthly* van 1954. Honsberger geeft een bewijs van vier bladzijden, maar de lezer wordt uitgedaagd een grafisch beeld te gebruiken bij de notie dat f^* een soort 'inverse' is van f om een aanmerkelijk korter en eleganter bewijs te vinden van vooral 208.
Opgave 205 is ooit als Olympiade-opgave gebruikt en stamt oorspronkelijk van Freudenthal.
Opgave 206 is voor deze gelegenheid gemaakt.
Bij de gevelwand in Almere geef ik voor de zekerheid nog de volgende ter plekke genoteerde transcriptie van de foto:

0	2	3	2	6	1	6	4	3	5	2	7	0	7
6	7	8	7	9	9	1	2	2	3	0	1	6	4
1	8	5	6	2	9	9	9	9	3	2	0	6	9
1	4	3	5	2	5	7	5	8	3	9	8	4	5
3	4	1	8	0	7	4	1	2	5	6	3	1	2
8	6	3	1	4	7	4	3	0	6	8	3	8	0
5	2	8	0	8	1	2	9	4	5	4	1	5	0
1	4	1	4	3	7	1	5	7	3	1	0	0	5
8	8	4	7	6	5	2	5	8	1	3	3	8	2
4	0	7	7	0	8	3	0	9	9	1	6	1	3
3	0	5	4	5	3	6	8	1	8	1	4	5	1
6	3	6	9	0	8	9	7	6	7	5	5	0	0
6	7	2	8	0	3	7	2	3	5	4	0	0	0

Aad Goddijn, Freudenthal Instituut, Utrecht

Centrum van de Stichting Vrouwen en Exacte Vakken

Het Centrum van de Stichting Vrouwen en Exacte Vakken is sinds kort ondergebracht bij het Freudenthal Instituut, vakgroep van de faculteit Wiskunde & Informatica van de Universiteit Utrecht.
Het nieuwe adres is:
Stichting Vrouwen en Exacte Vakken
p/a Freudenthal Instituut, Postbus 9432
3506 GK Utrecht

tel 030 261 16 11, fax 030 266 04 30
e-mail: veex@fi.uu.nl
internet-adres: http://home.svm.nl/veex/index.htm