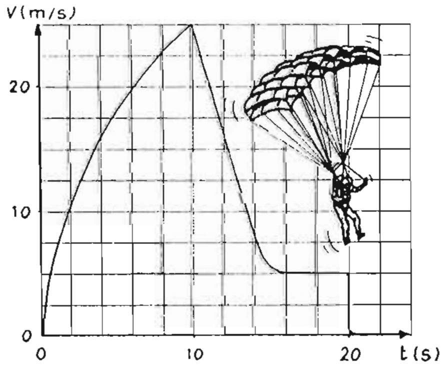
Het modelleren van bewegingen heeft historisch gezien een belangrijke bijdrage geleverd aan de ontwikkeling van de differentiaalrekening. **Michiel Doorman** onderzoekt wat dit kan betekenen voor het Tweede Fase-onderwijs.

Integratie van kinematica en differentiaalrekening

Aanleiding

In het Profi-project is de nieuwe VWO-wiskunde B voor de twee N-profielen in de Tweede Fase ontwikkeld. Hierbij was geen tijd voor een afstemming met andere vakken. Bij de differentiaalrekening is echter wel gebruik gemaakt van natuurkundige contexten. Tenslotte is deze wiskunde oorspronkelijk in een natuurkundige context ontwikkeld en bovendien bestaat reeds lang de veronderstelling dat de context van snelheid en afgelegde weg leerlingen helpt bij het leren van differentiaalrekening. Dit heeft onder meer geleid tot het eerste Profi-pakketje in de serie differentiaal- en integraalrekening.[1]
In het BPS-project[2] wordt op dit moment gewerkt aan een onderzoek naar de mogelijkheden van een afstemming tussen de bèta-vakken op het gebied van inhoud en didactiek. Mede in het kader van dit project wordt onderzocht hoe de onderwerpen kinematica en differentiaalrekening elkaar kunnen ondersteunen. Hopelijk zullen daarmee de volgende uitspraken van leerlingen naar aanleiding van een snelheid-tijd-grafiek worden voorkomen:



Uit: Scoop, vwo bovenbouw, Natuurkunde 1 deel 1. Wolters-Noordhoff, Groningen

'Na 10 sec. is hij op z'n hoogste punt en dan gaat hij dalen.'
'De valweg is ongeveer 50 hokjes. Dat is 250 cm^2.'

Wat de grafiek betekent en hoe je de grafiek kunt gebruiken, was kennelijk onvoldoende duidelijk voor deze leerlingen. Vaak is dit het gevolg van het opsplitsen van problemen in te kleine deelvragen en het te snelle richten van de aandacht op rekentechnieken.[3] Het is daarom niet alleen de vraag hoe je kinematica en differentiaalrekening kunt integreren, maar ook hoe je met zo'n integratie ervoor kunt zorgen dat leerlingen de grafieken en symbolen voldoende begrijpen.

Eerst volgen enkele aspecten uit de geschiedenis van de kinematica en de differentiaalrekening om aan te geven hoe die begrippen zijn ontstaan. Welke problemen waren de aanleiding? Hoe werden ze aangepakt? Vervolgens wordt ingegaan op het ontwerp van nieuw lesmateriaal en een experiment op een van de BPS-scholen.

Geschiedenis

De eerste ideeën over bewegingsleer komen we tegen bij Aristoteles (circa 350 v. C).[4] Hij baseert deze op ervaringen die leiden tot de veronderstelling dat objecten met een constante snelheid vallen en dat die snelheid evenredig is met het gewicht van het object. Blaadjes vallen nu eenmaal langzaam en stenen vallen snel. Het versnellen van een vallend object tijdens de eerste paar seconden is nauwelijks met het blote oog waar te nemen.
Heel lang blijven de ideeën van Aristoteles gangbaar en onaangeroerd. Het bestuderen van bewegingen en veranderingen wordt op een aantal plaatsen in Europa pas weer onderwerp van studie in de dertiende en veertiende eeuw. Men is in die tijd bezig met het bestuderen van situaties waarbij een eigenschap van een object of persoon bezig is te veranderen. Bijvoorbeeld: Wat gebeurt er als een koud voorwerp warmer wordt? Voor een belangrijk deel had deze discussie een theologische oorsprong. Als de mate van charitas in een mens afneemt, wat komt er dan voor in de plaats? Hoe kun je over die persoon oordelen als je zijn leven overziet?

Rond 1360 geeft Nichole Oresme aan deze discussie een – voor ons – belangrijke bijdrage, namelijk die van de grafische voorstelling. Oresme ging het hierbij niet zozeer om wat er precies gebeurt, maar hoe je dat wat er gebeurt, kunt beschrijven. Als het bijvoorbeeld gaat om een balk die aan de ene kant warmer is dan aan de andere kant, dan kun je langs die balk een lijn denken en vervolgens op elk punt van die lijn aangeven hoe warm hij is, met een lijnstuk loodrecht op de eerste lijn. Deze lijnstukken vormen bij elkaar een vlakke figuur waarvan de vorm en de grootte een maat is voor de warmte in de balk. Bij een constante temperatuur krijg je een rechthoekige figuur, terwijl een gelijkmatige verandering wordt weergegeven door een driehoekige figuur. Met deze meetkundige figuren kon Oresme redeneren over veranderende eigenschappen (zie ook Martin Kindt, 2000[5]).

Oresme paste deze techniek ook op bewegingen toe. De bijzondere denkstap die hij hierbij maakte, was dat snelheid een eigenschap van objecten is die afhangt van de tijd. Dankzij zijn keuze worden de meetkundige figuren die de eigenschap snelheid weergeven varianten van de ons bekende snelheid-tijd-grafieken. De lijnstukken die de waarden van de momentane snelheden weergeven, vormen weer een vlakke figuur. Oresme gebruikt vervolgens de oppervlakten om bewegingen te vergelijken. Hij ziet deze oppervlakten als een maat voor de afgelegde weg en vergelijkt dus verschillende bewegingen, met behulp van de verschillen in afgelegde weg.

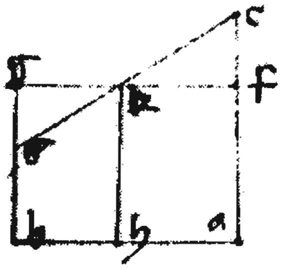
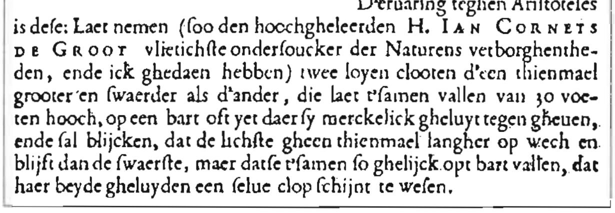


fig. 1 Uit een vijftiende eeuwse kopie van Oresme's 'De configurationibus qualitatum'

Zo is Oresme in staat om de stelling te bewijzen dat bij een eenparig versnelde beweging in een tijdsinterval evenveel wordt afgelegd als bij een eenparige beweging met de constante snelheid van het middelste moment.
De methode met de grafische voorstelling werd op vele bewegingen toegepast. Opmerkelijk is echter dat dit min of meer theoretische bewegingen betrof en zeker niet werd toegepast op de valbeweging.

Dan volgt er een periode waarin het bestuderen van de valbeweging een belangrijke positie inneemt. Zo worstelt bijvoorbeeld ook Leonardo da Vinci met vragen als: Wat is het dat iets doet vallen en hoe valt het? In die tijd probeert men grip te krijgen op begrippen als kracht, snelheid en versnelling. Een van de eerste die de veronderstelling van Aristoteles – de valsnelheid is evenredig met het gewicht – verwerpt, is Simon Stevin. In een appendix van zijn *Beghinselen der Weeghconst*[6] beschrijft Stevin een experiment dat hij samen met De Groot heeft uitgevoerd: twee loden ballen van verschillend gewicht laten vallen en het blijkt dat ze tegelijk neerkomen.



D'eruaring teghen Ariſtoteles is deſe: Laet nemen (ſoo den hoochgheleerden H. IAN CORNETS DE GROOT vlietichſte onderſoucker der Naturens verborghentheden, ende ick ghedaen hebben) twee loyen clooten d'een thienmael grooter en ſwaerder als d'ander, die laet t'ſamen vallen van 30 voeten hooch, op een bart oft yet daer ſy merckelick gheluyt tegen gheuen, ende ſal blijcken, dat de lichſte gheen thienmael langher op wech en blijft dan de ſwaerſte, maer datſe t'ſamen ſo ghelijck opt bart vallen, dat haer beyde gheluyden een ſelue clop ſchijnt te weſen.

fig. 2 Tekst uit Stevins 'Beghinselen der Weeghconst'

Bovendien wordt in deze tijd het werk van Archimedes vertaald. Zijn methoden voor zwaartepuntsbepalingen met oppervlakten blijken plotseling bruikbaar bij de redeneringen met grafieken. Isaac Beeckman is een van de eersten die de evenredigheid tussen valsnelheid en valtijd bewijst.

Een doorslaggevende bijdrage aan de analyse van de valbeweging wordt gegeven door Galileï. Over zijn werk is enorm veel gepubliceerd. Het is zelfs mogelijk om op internet aantekeningen van Galileï te bekijken.[7]

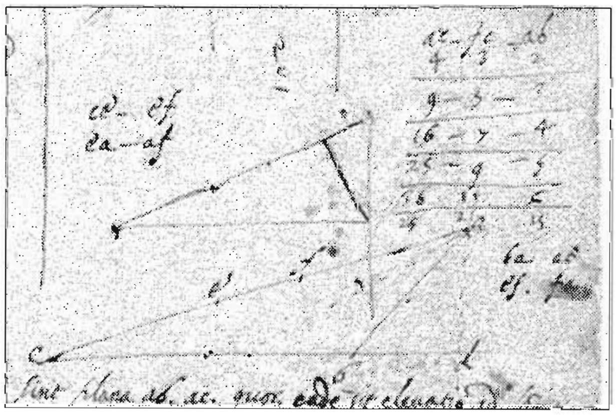


fig. 3 Detail uit aantekeningen van Galileï

Na zijn eerste veronderstelling dat de valsnelheid evenredig is met de valweg, beweert Galileï dat de valsnelheid evenredig moet zijn met de valtijd. Om het proces van versnellen te bestuderen – of beter: om zijn veronderstelling te toetsen – laat hij kogels rollen over een licht hellend vlak. Vervolgens leidt hij de zogenaamde kwadratenwet af, die stelt dat de afgelegde weg van een vallend voorwerp evenredig moet zijn met het kwadraat van de tijd.
Het vermoeden is dat Galileï voor de experimentele bevestiging van deze wet op het hellende vlak markeringen aanbracht. Bij het rollen over zo'n vlak zou vervolgens een balletje telkens evenveel tijd nodig hebben tussen de markeringen. Als bij deze markeringen het balletje een belletje zou raken, dan zou je tijdens het rollen een constant ritme horen.

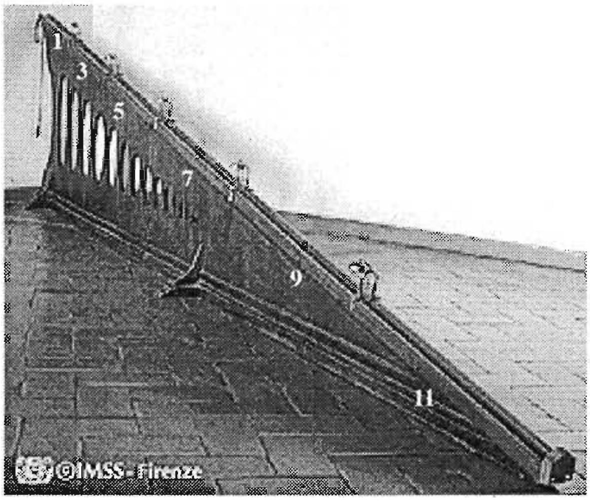


fig. 4 Een negentiende eeuws instrument voor Galileï's experimenten

Galileï komt dan nog niet tot de formulering van verbanden tussen tijd, afgelegde weg en snelheid zoals wij die kennen ($s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$). De problemen die men daarbij had, kwamen met name door tekortkomingen van de wiskundige taal. Men kon alleen over de verhouding tussen twee gelijksoortige grootheden spreken. Zo was het onmogelijk om over snelheid te spreken als verhouding van een weg tot een tijd (een quotiënt van twee verschillende grootheden).

Oresme, Beeckman en Galileï geven betekenis aan en werken met de oppervlakte onder een *v-t*-grafiek zonder dat momentane snelheid gedefinieerd is als differentiaalquotiënt. Dijksterhuis merkt op:

> 'Het is een situatie, die zich in de geschiedenis van de wiskunde herhaaldelijk heeft voorgedaan: mathematische begrippen worden vaak – men kan bijna wel zeggen: in den regel – reeds lang intuïtief gehanteerd, voordat men ze met volkomen scherpte kan omschrijven, en fundamentele stellingen worden vaak intuïtief ingezien voordat men ze strikt kan bewijzen.'

Vanaf dan ontwikkelt zich de differentiaalrekening via Newton, Leibniz en Cauchy tot de uitwerking die een basis vormt voor de onderwerpen die op school worden behandeld. Dit is vooral te danken aan Leibniz. Leibniz had zich als doel gesteld om op allerlei gebieden een symbool-systeem te ontwikkelen om redeneringen te coderen en te simplificeren.
Een citaat dat het bereiken van dit doel bij de differentiaalrekening illustreert, is:

> 'This is the genius of Leibniz's contribution. One can mechanically 'ride' the syntax of the notation without needing to think through the semantics.'[8]

De hier geschetste historische lijn kan samengevat worden in het volgende plaatje:

Tijdlijn		
ca 350 BC	*Aristoteles*	valsnelheid ~ gewicht
ca 200 BC	*Archimedes*	zwaartepunts- en oppervlaktebepalingen via opdelingen in rechthoeken
13e eeuw	*Albert van Saksen*	valsnelheid ~ valweg
14e eeuw	*Oresme*	tijd-grafiek van eenparig versnelde beweging
15e eeuw	*Leonardo da Vinci*	worsteling met begrippen als kracht, snelheid en versnelling
16e eeuw	*Simon Stevin*	proef met twee loden ballen
begin 17e eeuw	*Isaac Beeckman en vervolgens Galileo Galileï*	gebruik van Archimedes: valsnelheid ~ valtijd kwadratenwet
eind 17e eeuw	*Newton en Leibniz*	differentiaal- en integraalrekening

Centrale problemen

Het modelleren van bewegingen heeft kennelijk een belangrijke bijdrage geleverd aan de ontwikkeling van de differentiaalrekening. Een van de problemen hierbij was: hoe verloopt de valbeweging? Wij vinden het vanzelfsprekend dat de snelheid vanaf 0 toeneemt en dat de versnelling direct een constante waarde van 10 m/s^2 heeft. Dit is slechts te beredeneren vanuit een theoretisch model en pas met de techniek van stroboscopische foto's te demonstreren. Zelfs geleerden zoals Fermat konden een dergelijke veronderstelling niet accepteren.
Een ander probleem vormde het begrip momentane snelheid. Momentane snelheid werd gedefinieerd met de weg die het object zou afleggen als het met die snelheid een zeker tijdsinterval zou voortbewegen. En daarin zit een cirkelredenering, want *die snelheid* ben je juist aan het definiëren. Het probleem is dat je wilt aangeven hoe een grootheid op een zeker *tijdstip* bezig is te veranderen, terwijl het begrip verandering noodzakelijk vereist dat er een zeker *tijdsinterval* verloopt: *snelheid is, wat zij worden zou, indien zij bleef, wat zij was.*[9]

Conclusie

In de historische schets hierboven is met enorme stappen een tijdsbestek van zo'n 2000 jaar doorlopen. Dit kan de schijn wekken dat de ontwikkeling schoksgewijs is gegaan. De ontwikkeling van kinematische inzichten en de differentiaalrekening is echter een langdurig en geleidelijk proces geweest, waarvan de doorbraken gelokali-

seerd kunnen worden in het werk van enkele (geniale) personen. Grafieken speelden bij deze doorbraken een belangrijke rol. Er werd in eerste instantie een grafiek gemaakt waarbij de oppervlakten van rechthoekjes de afgelegde weg tijdens een bepaald tijdsinterval voorstellen. De grafiek is een onderdeel van de discrete benadering van een continu proces. Pas veel later is betekenis gegeven aan hellingen in bepaalde punten van de grafiek.
De grafieken komen hier eerst naar voren als *modellen van* relaties tussen afstand, tijd en snelheid van bewegende voorwerpen. Geleidelijk aan wordt in de loop van de geschiedenis de grafiek echter meer en meer een opzichzelfstaand object. Uiteindelijk functioneert de grafiek bij Leibniz als *model voor* wiskundig redeneren. In dit geval het redeneren over het differentiëren en het integreren van functies. Die functies bestaan dan helemaal los van de visuele representaties. Zo'n visuele representatie levert echter wel een goede basis voor het redeneren over dit soort limieten. Dat kan echter alleen als de grafiek meer is dan alleen een plaatje en dat is precies waar het om gaat bij de betekenis- en de activiteit-verschuiving van *model van* naar *model voor*.[10] Vermoedelijk hebben de leerlingen van de opmerkingen bij figuur 1 niet voldoende zo'n accentverschuiving meegemaakt.

De huidige schoolmethoden

Het probleem van twee gescheiden vakgebieden kinematica en differentiaalrekening is dat aan de ene kant snelheid en afgelegde weg als context dienen voor differentiaalrekening, terwijl aan de andere kant inzicht in de samenhang tussen snelheid en afgelegde weg juist kennis van differentiaalrekening vereist.
Twee schoolboeken voor de Tweede Fase van uitgeverij Thieme illustreren beiden op pagina 197 bovengenoemde problematiek treffend:

> De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het (s,t)-diagram is gelijk aan de grootte van de snelheid.
> *(Newton, vwo informatieboek 1a, p. 197)*
>
> De snelheid op $t = 20$ is de richtingscoëfficiënt van die raaklijn.
> *(Pascal, vwo informatieboek, p. 197).*

Is dit een cirkelredenering? Waar wordt nu wat uitgelegd? Het is trouwens opmerkelijk hoe verschillend de twee boeken met notaties omgaan. In het wiskundeboek wordt bijvoorbeeld een differentiequotiënt geassocieerd met een koorde en niet met de helling van een raaklijn, terwijl het natuurkundeboek het differentiequotiënt alleen gebruikt voor de het bepalen van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn.
Een ander voorbeeld is dat bij *Moderne Wiskunde* wordt gesproken over *tijd-snelheid-grafieken* en bij de natuurkunde methode *Newton* over een (v,t)-*diagram*. Het lijken misschien details, maar al met al blijkt de taal bij de twee vakken vaak behoorlijk te verschillen. Bovendien laat het zien hoeveel impliciete overwegingen achter dergelijke namen en notaties zitten (x is de onafhankelijke en y de afhankelijke variabele bij een x-y-grafiek).

Het experiment

Het vermoeden is dat een integratie van kinematica en differentiaalrekening de begripsontwikkeling op beide terreinen ten goede komt en waarborgt dat de onderwerpen geen gescheiden werelden blijven. Het onderzoek waarover in de inleiding wordt gesproken, is bedoeld om dit vermoeden te toetsen.

Het experiment in het kader van het onderzoek heeft plaatsgevonden bij twee wiskunde B-groepen op KSG De Breul te Zeist. In plaats van het hoofdstuk A3 *Veranderingen* (*Moderne Wiskunde*) hebben de leerlingen gewerkt aan een alternatief hoofdstuk met verwijzingen naar enkele opgaven en samenvattingen uit het boek. Eigenlijk was het de bedoeling dat deze leerlingen ook tijdens de natuurkundelessen aan het materiaal werkten. Het relevante hoofdstuk kwam echter pas in V5 aan de orde en de docent wilde niet op voorhand in een nieuwe methode met hoofdstukken gaan schuiven.
Het hele hoofdstuk staat in het kader van het modelleren van bewegingen. Gepoogd is om leerlingen het initiatief te geven bij het ontwikkelen van de begrippen. Er is bezuinigd op het opstellen van de vergelijking van een raaklijn en op de algebraïsche complexiteit (wel oefenen, maar niet te snel op ingewikkelde functies).
In eerste instantie is gezocht naar situaties waarbij de afgelegde weg gegeven is. Als situatie is een fotoserie van Muybridge gekozen.[11] Deze fotograaf bestudeerde aan het eind van de negentiende eeuw bewegingen van mensen en dieren met behulp van fotoseries. De bewegingen werden gefotografeerd met een vaste frequentie en bovendien vaak voor een rooster waarvan de maten van mazen bekend zijn. Bij een fotoserie van een kat die gaat rennen, kregen leerlingen in eerste instantie vragen als: Hoe groot is de snelheid na 5 m? En na 10 sec?

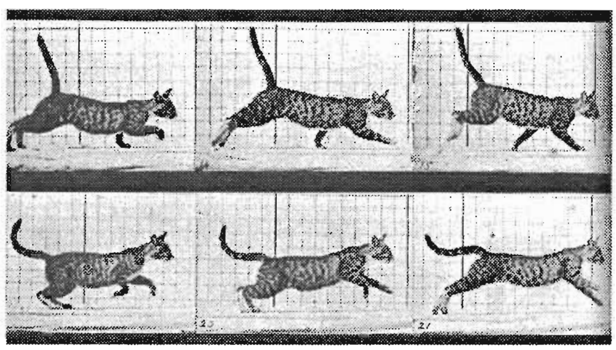


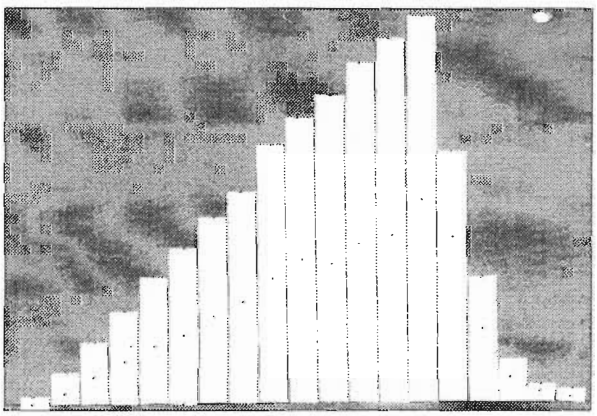
fig. 5 Fotoserie van E. Muybridge: A Catwalk[12]

Het beschrijven van de beweging van de kat geeft aanleiding tot het toenamendiagram. Verschillende toenamendiagrammen worden vergeleken. Vervolgens wordt bekeken of je preciezer kunt zijn over momentane snelheid en uiteindelijk blijkt dat die benaderd kan worden met het differentiequotiënt. Bovendien kun je daarmee de helling in een punt van een grafiek benaderen. Zo ontstaat een keten van schematiseringen vanuit de fotoserie van de kat naar het differentiequotiënt. De betekenis van iedere schakel in deze keten wordt ontleend aan activiteiten die voortkomen uit het voorgaande.

Ervaringen

De opgave over de kat geeft aanleiding tot allerlei uitwerkingen. Loes maakt bijvoorbeeld een grafiek met de afgelegde weg van de kat horizontaal. Suzanne maakt alleen een tabel en rekent ook de toenamen uit. Jonas maakt een *t-s*-grafiek zoals we die zouden verwachten en Sharon meet in ieder plaatje de afstand van kop tot staart.
Dan zouden eigenlijk dergelijke uitwerkingen besproken moeten worden. Wat kun je in de ene grafiek goed zien en hoe zie je dat in de andere? Waarvoor is de tabel handig? Wat kun je met de toenamen? Helaas paste zo'n klassegesprek niet in de lessentabel.

De eerstvolgende klassikale les besteedt de docent, Albert Dorresteijn, aan het uitvoeren en bespreken van een experiment dat hij in de klas uitvoert met een tikkerband. Dat is bij natuurkunde een bekend instrument. Aan een strook papier zit een gewichtje. Als dat gewichtje valt, gaat het papier door een apparaatje dat met een vaste frequentie stippen op de strook zet. Tijdens de klassikale lessen zitten de twee B-groepen bij elkaar. De hele klas (veertig leerlingen) kijkt doodstil naar het experiment. Uiteindelijk laat de docent de strook papier zien en vertelt dat hij dezelfde proef de dag ervoor ook al heeft gedaan. De strook is bij elke tweede stip doorgeknipt, de stukken zijn naast elkaar opgeplakt en het geheel is veertig keer gekopieerd.



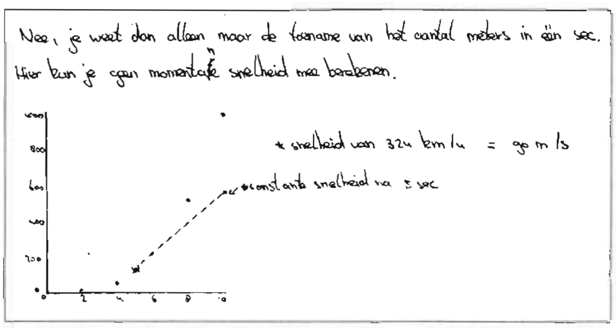
Hij deelt het uit en stelt de leerlingen de vraag: 'Wanneer is hij 1 meter gevallen en wat is dan de snelheid?'

De leerlingen krijgen tien minuten om hieraan te werken. Als die tien minuten voorbij zijn, ontstaat er een discussie met onder andere de volgende opmerkingen:

Timon: 'Eerst zoeken waar 1 meter is afgelegd door alle strookjes op te tellen. Die 1 meter zit tussen twee stippen in. Ik heb toen de afstand tussen die twee stippen berekend. Dat is 8,8 cm. Toen heb ik gewoon 1/50 = 0,02 sec ... dat is dus 440 cm per seconde.'
Loes: 'Je had (tussen de stippen waar die 1 meter zat) twee delen, het ene was 81% en het andere 19% . . . en dan 81% van 0,02 seconde = 0,002 seconde, dan weet je de tijd.'
Joris: 'Kan het zijn dat die versnelt of vertraagt? Als je 81% van de tijd neemt, dan weet je niet zeker of dat zo is, want hij kan nog versnellen.'
Suzanne: 'Ik heb het totaal gemeten, dat was 1,6 meter en de tijd was 0,76 seconde, en dan in een kruistabel.'
Een andere Suzanne: 'Maar die snelheid is niet overal hetzelfde? Dat is de gemiddelde snelheid.'
Lotte: 'Als de afstand steeds groter is, dan is de snelheid per meter weer anders.'
Rob: 'Maar waar heeft hij nu precies die 1 meter afgelegd?'

Voor een belangrijk deel komen in deze discussie punten naar voren die met de grafieken van de poes uiteindelijk ook aangestipt hadden kunnen worden.

Een van de volgende opgaven uit het lesmateriaal gaat over een 'kunstmatige' beweging volgens $s = t^3$. De bedoeling van deze opgave is om grafische redeneringen van eerdere opgaven nu te vertalen naar meer algebraïsche redeneringen, die voorbereiden op het differentiequotiënt. Loes blijft echter met de grafiek werken en ze stapt niet over op formules. De afgelegde weg op het interval [4, 5] en op het interval [5, 6] bepaalt ze met behulp van de grafiek. Volgens haar kun je de snelheid op het moment $t = 5$ sec niet bepalen met toenamen. De grafiek maakt ze echter wel goed af als gevraagd wordt hoe die eruit zou zien als de snelheid vanaf dat moment niet meer verandert.



Dit is helaas de laatste opgave van het hoofdstuk die ze gemaakt heeft. Hierna is ze aan de tussentoets uit het boek begonnen. Die gaat helemaal goed, totdat ze de helling in een punt van een grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3$ moet benaderen in het punt met x-coordinaat 1:

7-6 a) Punt Helling 10 - ? x ...

B1 (1,1 , 2,1) 6,74 - -2,29 = 9,03

B2 (1,01 , 2,01) 7,24 - -2,48 = 9,72

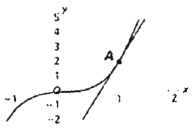
B3 (1,001 , 2,001) 8,02 - -2,50 = 9,52

De benaderde helling is ongeveer 8

Wellicht heeft ze zichzelf proberen te redden met een voorbeeld in de samenvatting van het boek. Alleen heeft ze de tabel met de benaderingen verkeerd geïnterpreteerd. In haar berekening benadert ze het interval [1, 2] en rekent bij die benadering de functiewaarden uit.

VOORBEELD

Benader de helling in ***A*** (1, 2) op de grafiek van $f(x) = 2x^3$.

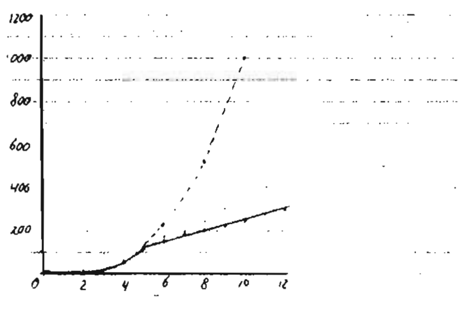


De helling is ongeveer 6

Punt	Helling
B_1 (1,1; 2,662)	6,62
B_2 (1,01; 2,0606)	6,06
B_3 (1,001; 2,006006)	6,006

De helling is bij benadering 6

De laatste klassikale les kon iedereen vragen formuleren. Toen heeft Loes ook haar probleem naar voren gebracht met de vraag hoe dat zit met raaklijn en momentane snelheid. Tijdens die les zal haar probleem als laatste behandeld worden. Helaas gaat vlak voordat haar probleem aan de orde is iets mis als de docent wil laten zien hoe de grafische rekenmachine kan worden gebruikt. Dit kost tijd en dan gaat de bel. Het probleem van Loes is niet goed afgehandeld. In het proefwerk blijkt ook dat ze precies die vragen over momentane snelheid niet goed beantwoordt.
Suzanne werkt bij de opgave over $s = t^3$ in eerste instantie goed met de formule. Alleen onderdeel c over de snelheid op het moment $t = 5$ sec gaat bij haar mis. Ze berekent de afgelegde weg en deelt die door de verlopen tijd, te weten 5 seconden. Als dan de vraag naar de grafiek komt indien de snelheid na 5 seconden niet meer verandert, tekent ze de volgende grafiek.



Jonas heeft het nog weer anders aangepakt. Zijn antwoord op de vraag bij onderdeel c van $s = t^3$ is:

4.) Hen TRACE 5 ENTER

Het is duidelijk dat hij iets met de grafische rekenmachine heeft gedaan, maar wat precies, is niet af te leiden. Bij het proefwerk blijkt echter dat hij het allemaal goed in de vingers heeft. Hij illustreert daar zijn antwoorden met grafiekjes en uitgebreide beschrijvingen van het gebruik van de grafische rekenmachine.

Reflectie

Het bleek dat veel leerlingen problemen hadden bij de overgang in het lesmateriaal van grafische redeneringen naar het limietproces met het differentiequotiënt. Zo heeft Loes kennelijk het probleem niet begrepen waarvoor het werken met differenties een oplossing is.

Probleemstellend

De opgaven in het lesmateriaal hebben waarschijnlijk niet voldoende duidelijk gemaakt waarom het differentiequotiënt geïntroduceerd wordt. Er zijn teveel kleine en – vanuit het leerlingenperspectief – ongerichte vragen. Teveel vragen die voor Loes geen duidelijk doel hebben. In het BPS-project hebben we gemerkt dat in veel van de bèta-schoolboeken dergelijke ongerichte vragen voorkomen. In de huidige situatie met het studiehuis zijn de gevolgen hiervan erger dan voorheen. Leerlingen kunnen vaak zelfstandig werkend een eind komen in zo'n vragenreeks. En dat is nu juist het verraderlijke. Ze hebben zelf niet in de gaten dat ze eigenlijk niet begrijpen waar het over gaat. Dat is in dit experiment ook nog niet voldoende opgelost.

Om de vragen beter te richten, helpt een aanpak die de laatste jaren bij natuurkundedidactiek op de Universiteit Utrecht wordt gehanteerd: probleemstellend onderwijs.[13] Centraal staat daarbij de kernvraag van het hoofdstuk. Die is een globale motivering van de leergang. Zorg vervolgens dat duidelijk is hoe de opgaven je verder helpen bij het beantwoorden van de kernvraag (lokale motieven). Het beantwoorden van een opgave uit de leergang moet bij leerlingen, denkend aan de kernvraag, het volgende probleem oproepen dat moet worden opgelost.
Wat is in deze lessenreeks de kernvraag? Het nader expliciteren van snelheid? Nee. De afgeleide van $y = 2x^3$ in (1 , 2)? Nee. Van toenamegrafiek naar de oorspronkelijke grafiek? Zit er wel in, maar is niet de kernvraag. Uitgaande van afstandsgegeven iets zeggen over snelheid? Maar over snelheid hebben ze al allerlei intuïties. Dus waarom? Wat zijn de motieven?

Vervolg

Het zoeken naar een kernvraag blijft de belangrijkste opgave voor verbetering. Die kernvraag was tenslotte voor de historische figuren ook altijd helder. Het lijkt aannemelijk dat die kernvraag afwisselend natuurkundig en meer wiskundig van karakter zal zijn (voor zover je hier over twee verschillende vakgebieden kunt spreken). We denken aan de volgende kernvraag: Hoe kunnen we veranderingsprocessen beschrijven, begrijpen en voorspellen?
Als voorbeelden van dergelijke processen worden vervolgens bewegingen bestudeerd. Uiteindelijk moeten dan de wiskundige instrumenten die bij het bestuderen van bewegingen naar voren komen, weer worden gegeneraliseerd over allerlei veranderingsprocessen.[14] De valbeweging neemt hier een centrale positie in bij het zoeken naar de samenhang tussen afgelegde weg en snelheid. Wat kun je over de afgelegde weg zeggen als je vermoedt dat de snelheid evenredig met de tijd toeneemt? Het redeneren met de oppervlakte onder een *t-v*-grafiek gaat dan vooraf aan het preciezer benaderen van snelheid met behulp van gegevens over de afgelegde weg. De geschiedenis steunt ons in het vermoeden dat het redeneren met de oppervlakte intuïtiever is en uiteindelijk het inzicht in de betekenis van het differentiequotiënt ondersteunt.

We hopen dat we met deze benadering de voordelen van het studiehuis kunnen benutten en de nadelen van het zelfstandiger werken met reeksen van kleine vragen, kunnen minimaliseren. De probleemstellende benadering met een logische verbinding tussen globale en lokale motieven heeft vermoedelijk twee voordelen. Het moet daarmee beter mogelijk zijn om klassengesprekken in het studiehuis te verbinden met de leergang. Bovendien zou deze benadering ervoor moeten zorgen dat leerlingen begrijpen voor welke problemen het werken met differenties een oplossing is. Met volgende experimenten proberen we over deze veronderstellingen uitsluitsel te krijgen.

Michiel Doorman, Freudenthal Instituut, Utrecht

Noten

[1] Kindt, M. (1997). *Som & verschil, afstand & snelheid.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

[2] Project Bèta Profielen in het studiehuis. www.fi.nl/bps

[3] Voor een vergelijkbare opmerking zie: Moerlands, F. (2000). Bespiegelingen op papier. *Nieuwe Wiskrant 19*(3), 16-19.

[4] De beschrijving van de geschiedenis is met name gebaseerd op: Dijksterhuis, E.J. (1950). *De mechanisering van het wereldbeeld.* Amsterdam: Meulenhoff.

[5] Kindt, M. (2000). Wat te bewijzen is. *Nieuwe Wiskrant 19*(4), 17-18.

[6] Stevin, Simon (1955-1966). *The Principal Works of Simon Stevin.* Edited by E. J. Dijksterhuis. Amsterdam: Swets en Zeitlinger.

[7] http://www.mpiwg-berlin.mpg.de/Galileo_Prototype/index.htm

[8] Uit: Kaput, J.J. (1994). Democratizing Acces to Calculus: New Routes to Old Roots. In: Alan H. Schoenfeld (Ed). *Mathematical Thinking and Problem Solving.* Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

[9] Uit: Beth, H.J.E. (1928). Het experimenteel georienteerde onderwijs in mechanica. *Euclides 5*, 49-60.

[10] Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron. *Nieuwe Wiskrant 5*(1), 60-67.

[11] Geïnspireerd door een artikel van Speiser, B. & C. Walter (1994). Catwalk: First-Semester Calculus. *Journal of Mathematical Behavior 13*, 135-152.

[12] Uit: Muybridge, E. (1985). *Horses and Other Animals in Motion.* New York: Dover Publications.

[13] Zie bijvoorbeeld het artikel van Vollebregt, M. e.a. (1999). Leerlingen motiveren via probleemstellend onderwijs. *NVOX*, september.

[14] Zie voor een dergelijke introductie van dit onderwerp: Devlin, K. (1998). *Wiskunde, Wetenschap van patronen en structuren.* Beek: Natuur en Techniek.