In het TWIN-project doet men thans ervaring op met het doorstroomprogramma MTO-HTO wiskunde. **Pieter van der Zwaart** betoogt dat de leerlingen ook op een abstract niveau wiskundig moeten leren redeneren.

Het blijven techneuten, ook in de wiskundeles

Het TWIN (Techniek Wiskunde Informatietechnologie Natuurkunde) project is inmiddels drie jaar onderweg en de afronding komt in zicht. In het project hebben de vakken wis- en natuurkunde binnen het MTO een betere aansluiting gekregen op de beroepspraktijk. Verder heeft de didactiek in beide vakken de nodige ontwikkeling ondergaan, mede onder invloed van ICT. Eerdere artikelen geven een beeld van de uitgangspunten van TWIN[1] en beschrijven ervaringen binnen het basisprogramma[2].

De plaats van het doorstroomprogramma in het MBO

Vanaf januari 1999 doorloopt een aantal leerlingen en docenten van het eerste uur van het TWIN-project het doorstroomprogramma. Dit doorstroomprogramma is bedoeld voor de leerlingen die hun opleiding willen vervolgen aan het HTO.

Het doorstroomprogramma wordt, een enkele uitzondering daargelaten, aangeboden in het zesde en het zevende semester van de vierjarige MTO-opleiding. In deze semesters, die zijn geprogrammeerd tussen de twee stageperioden, ronden de MTO-leerlingen het theoretisch gedeelte van de MTO-opleiding af. Voor het totale doorstroomprogramma staat een studielast van 600 uur met de volgende verdeling: 200 uur voor wiskunde, 200 uur voor natuurkunde en 200 uur voor algemene vaardigheden Nederlands en Engels.

Niveau en verwerkingstempo zijn aangepast aan de eisen die je aan een potentiële HTO-student kunt stellen. Voor wiskunde betekent dit dat de leerling in het doorstroomprogramma de overgang moet maken van het praktijkgerichte MTO-basisprogramma wiskunde naar een beheersingsniveau dat overeenkomt met het eindniveau HAVO wiskunde $B_{1,2}$.

De leerling in het doorstroomprogramma

Het zal duidelijk zijn dat het doorstroomprogramma niet bedoeld is voor iedere MTO-leerling. In de doorstroomgroepen vind je de leerlingen met een MAVO/VBO-achtergrond die ontdekt hebben dat zij meer aankunnen dan het MTO-niveau, maar daarnaast ook veel leerlingen die op de een of andere manier al een HAVO-achtergrond hebben. Die laatste groep is zeer gemêleerd: leerlingen die na HAVO 3 zijn overgestapt naar het MTO, leerlingen die er voor hebben gekozen om na het HAVO-examen eerst het MTO te volgen, omdat de overgang naar het HTO te zwaar leek en zelfs een enkeling die in het verleden op het HTO is afgehaakt, maar via deze weg een nieuwe kans wil wagen.

Binnen de doorstroomgroepen zijn leerlingen uit verschillende afdelingen, zoals werktuigbouw, bouwkunde en elektrotechniek te vinden. Voor de uitvoering van de wiskundeles levert dat geen directe problemen op.
Wel is het, afhankelijk van de afdeling, voor de ene leerling gemakkelijker om deel te nemen aan het doorstroomprogramma dan de andere. Bij sommige afdelingen wordt binnen het programma voor het zesde en zevende semester wel ruimte gemaakt voor het doorstroomprogramma, maar voor een aantal andere afdelingen geldt dat niet. In de praktijk betekent dit, dat een aantal leerlingen het doorstroomprogramma binnen de 1600 uur studielast voor het zesde en zevende semester kunnen doen en anderen het programma bovenop die 1600 uur moeten uitvoeren. Zeker de laatste groep moet veel over hebben voor het bereiken van de doorstroomkwalificatie.

Recente veranderingen in het doorstroomprogramma

In 1996 zijn voor ieder MBO-profiel nieuwe eindtermen voor de doorstroom van het MBO naar het HBO opgesteld, ook bekend als de derde generatie eindtermen. Deze MBO-profielen hebben dezelfde namen als de HAVO-profielen in de tweede fase en zijn ook bedoeld om doorstroming naar dezelfde HBO-opleidingen mogelijk te maken. De eerste lichting leerlingen die schoolbreed volgens de nieuwe eindtermen doorstroomt, zal in januari 2000 aan hun zesde semester beginnen. De eerste groep TWIN-leerlingen loopt hier een jaar op vooruit.

Ook na 1996 staan de inhoudelijke en de onderwijskundige ontwikkelingen in het MBO en het HBO niet stil. Ondanks dat de auteurs van de derde generatie eindtermen voor het profiel natuur en techniek zich sterk hebben

laten inspireren door het examenprogramma wiskunde B voor het HAVO, bestaat er kritiek op een aantal inhoudelijke keuzen. Zo wordt voor het opnemen van het domein telproblemen en kansrekening geen directe steun gevonden binnen het HTO. Daarnaast wordt vanuit het HTO om ruime aandacht voor het onderhoud van algebraïsche en meetkundige vaardigheden gevraagd.
Verder groeit in het HTO de vraag naar studenten die in staat zijn om open probleemstellingen uit hun vakgebied aan te pakken, gebruik makend van geëigende methodieken uit de wiskunde en/of de natuurkunde. Ook moet een student bij het analyseren van zo'n probleemsituatie op een goede manier gebruik maken van ICT-middelen, een ontwikkeling waarmee op dit moment ook in het MBO ervaringen worden opgedaan.
De discussie rond deze zaken is aangezet vanuit het TWIN-project en is in de loop van 1998 gevoerd binnen de werkgroep Doorstroming MTO-HTO voor de vakken wiskunde en natuurkunde.[3]
De SLO heeft op basis van de nieuwe eindtermen een adviesleerplan wis- en natuurkunde opgesteld. Daarin zijn de uitkomsten van de bovengenoemde discussie verwerkt en grotendeels gehonoreerd.[4]
De documenten geven samen een goed overzicht van de eisen die aan leerlingen in het doorstroomprogramma worden gesteld en van het krachtenveld waarin het doorstroomprogramma zich op dit moment bevindt.

De doorstroomactiviteiten van TWIN

Passend in de traditie van TWIN wordt hard gewerkt aan de ontwikkeling van experimenteel lesmateriaal. Dit lesmateriaal moet aan een stevig pakket van eisen voldoen:

- Het moet de leerlingen een duidelijk beeld geven van de overgang van vooral op praktisch gebruik gerichte wiskunde, naar een meer formele en abstracte benadering van het vak.
- Het moet de leerlingen de noodzakelijke inhouden bieden om de overstap naar het HTO mogelijk te maken.
- Het werken met de grafische rekenmachine vormt een geïntegreerd onderdeel van het programma.
- Verder moet een examen voor het doorstroomtraject worden opgesteld. Het moet een examen zijn dat goed laat zien wat de eisen zijn die aan een instromer in het HTO kunnen worden gesteld, waarbij dat examen natuurlijk recht moet doen aan de activiteiten die de leerlingen hebben gedaan in de klas.

De uitvoerende docenten en de auteurs van het materiaal hebben maandelijks overleg waarin het experimenteel materiaal en de ervaringen daarmee worden besproken. Verder wordt regelmatig een les geobserveerd om van nabij te kunnen zien hoe de leerlingen met de aangeboden stof omgaan.
Belangrijke aandachtspunten bij de observaties zijn: Hoe gaan de leerlingen om met de formelere manier van werken en het abstractere niveau binnen het doorstroomprogramma en hoe maken zij daarbij gebruik van de grafische rekenmachine? Enkele ervaringen worden in de rest van dit artikel beschreven.

Enkele ervaringen uit de les

GRM-gebruik als hulp bij wiskundig redeneren

Het is 12 maart 1999. Ik ben op bezoek op het Deltion College, een ROC in Zwolle. Het Deltion College is een van de scholen waar het experimentele TWIN-materiaal wordt uitgeprobeerd. Ik kom iets te laat de klas binnen. Docent Henk Baas is net bezig met de bespreking van een van de opdrachten. De groep werkt met de eerste versie van experimenteel lesmateriaal wiskunde dat voorbereidt op de doorstroming naar het HTO. Het verschuiven en vermenigvuldigen van grafieken uit het basisprogramma is nu op een formeel en abstract niveau, transformaties van functies, aan de orde.
Henk Baas heeft de grafische rekenmachine met transviewer op de overheadprojector aangesloten.
De bespreking gaat over een complexe transformatie:

$$g(x) = 0.5 f(2x - 4) + 3$$

Op de GRM staat:
F2 = 0.5 F1(2x − 4) + 3
Met F1 = x^2

Henk loopt de transformaties na op het beeldscherm. Voor veel leerlingen is het niet duidelijk waarom de grafiek van F1 maar twee naar rechts is verschoven (er staat toch -4). De verklaring: er staat eigenlijk $2(x-2)$ wordt door de leerlingen geaccepteerd, althans er wordt niet geprotesteerd. Ik durf niet met zekerheid te zeggen of iedere leerling echt begrijpt waarom dat een antwoord op de vraag is.

Ik krijg de indruk dat de leerlingen steeds meer gewend raken aan het werken met transformaties van functies zonder een context op de achtergrond, dus als formele verbanden. Enkele gesprekjes met leerlingen wijzen wel uit dat zij zich bij het zelf uitvoeren van dergelijke operaties op verbanden nog lang niet zeker voelen. Hierbij denk ik aan Bram Lagerwerfs niveaus van zekerheid[5]:

- Een gezaghebbend persoon (de leraar) zegt dat het waar is (niveau 1).
- De leerling ziet en probeert zelf een aantal voorbeelden waarin 'het' werkt en raakt langzamerhand overtuigd (niveau 2); dit is het niveau waarop deze groep in feite bezig is.
- De zekerheid die ontstaat omdat de leerling het kan beredeneren op basis van inzicht in de wiskundige structuren (niveau 3).

Dit derde niveau is bij de meeste leerlingen zeker nog niet aanwezig. Toch zouden de leerlingen voor een redelijke doorstroomgarantie op dat laatste niveau uit moeten komen. Waarschijnlijk (hopelijk) is dit een kwestie van tijd, een aandachtspunt om het hele doorstroomprogramma vast te houden. Het lijkt echter niet reëel om van meet af aan op dat derde niveau met de klas te communiceren.

Henk typt nog enkele andere voorbeelden in voor F1. De transformaties zijn echter niet altijd even gemakkelijk terug te herkennen. Toch lijken de leerlingen met enige overtuiging (zekerheid op niveau 2?) met het huiswerk aan de slag te gaan.

Ik heb wel de indruk dat dit onderwerp de leerlingen op een juist niveau van eisen aanspreekt. Henk Baas formuleert tijdens de les dan ook: 'Jullie hebben alles eigenlijk al een keer eerder gehad. Het is nu alleen een stuk wiskundiger.' Ik merk wel dat er ook enkele leerlingen zijn die er behoorlijk aan moeten trekken om de stof te kunnen volgen.
Bijvoorbeeld: Waarom wordt bij een factor 2 horizontaal de grafiek met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd ten opzichte van de y-as?
Ik zeg naar aanleiding van die vraag tegen enkele leerlingen: 'Bij $f(2x)$ ben je, lopend langs de x-as, twee keer zo snel op dezelfde y-waarde als bij $f(x)$. Als je bij $f(x)$, $f(4)$ wilt uitrekenen, dan vul je voor x 4 in. Bij $f(2x)$ is dat al bij $x = 2$.'
Bij een leerling zie ik het inzicht bovenkomen, hij geeft met zijn handen aan dat dan de hele grafiek naar de y-as toe beweegt. Een andere leerling ziet wel wat er met dat ene punt $(x, f(x))$ op de grafiek gebeurt, maar heeft moeite dat te veralgemeniseren naar de hele grafiek. En juist dat veralgemeniseren is een voorbeeld van een niveausprong die past bij het doorstroomprogramma.

Formeel en abstract redeneren
Enige lessen later zijn Henk Baas en zijn klas aan het werk met het onderwerp logaritmen.

Op het bord staat:

Laat aan de hand van een redenering zien dat:
$^2\log(5) + 2 = {}^2\log(20)$

De eerste reactie van een leerling is: 'Ik heb het uitgerekend op de rekenmachine en het klopte, ..., maar dat zal wel niet de bedoeling zijn.'

Een antwoord dat je kunt verwachten van een techneut. Als het eenvoudig kan (met de rekenmachine), waarom zou je dan moeilijk doen (met een redenering)? Als de opdracht onderdeel was geweest van een probleem uit de techniek, zou de gedachte dat je het kunt beredeneren waarschijnlijk niet eens boven komen.
Na enkele maanden doorgebracht te hebben in de doorstroomgroep is het de leerling inmiddels wel duidelijk dat in de wiskundeles de voor hem meest voor de hand liggende oplossingsmethode niet altijd de door de docent gewenste oplossingsmethode is.
De docent speelt daar dan ook op in en werkt in een klassengesprek uit wat wel de bedoeling is bij deze opgave.

Henk gaat in op het antwoord en zegt: 'Op zich heb je gelijk, maar het berekenen is hier niet voldoende. Je moet laten zien dat het klopt met behulp van de regels die in deze paragraaf aan de orde zijn geweest.'
Deze regels staan direct boven de betreffende opgave:

$\log a + \log b = \log ab$
$\log a - \log b = \log a/b$
$^p\log a = \log a^p$
$^g\log a = {}^p\log a \,/\, {}^p\log g$

Henk: 'Welke regel zou in $^2\log 5 + 2 = {}^2\log 20$ aan de orde zijn?'
Henk heeft de aandacht van een groot deel van de klas. De motivatie om erachter te komen hoe je een dergelijke opdracht met behulp van de regels aanpakt, is duidelijk aanwezig. De leerlingen zijn zich er dan ook van bewust dat ze de wiskunde op dit niveau moeten beheersen, willen ze de overstap naar het HTO kunnen maken.

In eerste instantie kunnen of durven de leerlingen nog niet hardop mee te redeneren.

Henk wacht niet af en suggereert om $\log a + \log b = \log ab$ te proberen, vanwege de plus in de opdracht: 'Dus zul je van die 2 een logaritme moeten maken.'

Op dit moment beginnen enkele leerlingen hardop mee te redeneren:
Er klinkt: 'Het moet een 2-de log worden.'
En met wat hulp van Henk wordt duidelijk dat het $^2\log 4$ moet worden, Henk vult met behulp van de klas in:

$^2\log 5 + 2 =$
$^2\log 5 + {}^2\log 4 =$
$^2\log (4 \times 5) =$
$^2\log 20$

De leerlingen geven er blijk van een en ander door te krijgen: 'Oh moet je op die manier de regels gebruiken', et cetera.

Ook hier zie je de technicus in de leerlingen de boventoon voeren. De wiskundige regels worden opgevat als gereedschap om de opdrachten mee te kunnen maken. Zij zien het vooral als een sport om die vaardigheid onder de knie te krijgen.

Dat wil overigens niet zeggen dat het 'log-begrip' voor deze leerlingen gemakkelijker aan het worden is.
In een van de volgende opdrachten staat:

Laat zien dat geldt:
$3 - {}^4\log 8 = {}^4\log 8$

Het is voor de meeste leerlingen wel duidelijk dat die 3 een 4-de log moet worden, maar zij ervaren het maken van een keuze wel als glad ijs. Als een leerling de suggestie geeft om $3 = {}^4\log 4^3$ te nemen, zegt hij er wel bij dat het voor hem ook maar een gokje is.

Als de leerlingen even later aan het werk zijn, vraag ik aan een aantal of ze zich na deze bespreking al klaar voe-

len voor het proefwerk. Nou nee, bepaald niet. Als ik hun een aantal vergelijkbare opgaven zou geven, zouden ze er wel uitkomen, denken ze, maar wel veel tijd nodig hebben.
Ook vraag ik hun of ze begrijpen waarom die regels correct en altijd toepasbaar zijn. Hier houdt de belangstelling van de leerlingen duidelijk op, waarschijnlijk ook omdat de begripsvorming erg lastig is. Zo is van een regel als:

$$^{p}\log q = {}^{a}\log q \,/\, {}^{a}\log p$$

moeilijk te begrijpen waarom die altijd juist is, mits a, p en q aan de juiste voorwaarden voldoen. Het is wel een handig regeltje om opgaven waarin logaritmen met verschillende grondtallen voorkomen op te lossen. Bijvoorbeeld om de waarde van $^{2}\log 88$ te berekenen, ook met de GRM.

Samenvattend komen drie niveau's naar boven:
- Uitrekenen op de rekenmachine is het niveau waar de meeste leerlingen zich lekker bij voelen: intypen en zien dat het klopt. Een niveau dat past bij het basisprogramma van het MTO.
- Gebruik maken van de regels wordt in de doorstroomgroep als minimaal niveau nagestreefd: Met behulp van de eigenschappen van logaritmen laten zien dat het gelijkteken op zijn plaats is. Het functioneren op dit niveau komt dan ook overeen met de instroomeisen voor het HTO.
- Aan het doorgronden van de regels en deze op basis van dat begrip gebruiken, komen de meeste leerlingen niet toe. Spijtig voor de wiskundedocent, die toch het een en ander van het eigen vak over probeert te dragen. De vraag is echter of je op dat niveau je wiskunde moet beheersen om een goed technicus te zijn? Blijkbaar kun je niet op ieder moment dat hoogste niveau van zekerheid nastreven.

Wiskunde als studie van structuren of als hulpmiddel
In de ontwikkelgroep binnen TWIN kwam de volgende overweging boven: Het lijkt wel alsof er twee vormen van algebra zijn (wie wil kan in plaats van algebra, wiskunde lezen). Enerzijds is er de algebra van de wiskundige, waarin de structuren van getallen (eventueel uitgedrukt in variabelen) centraal staat. De vragen die je je daarbij stelt, worden ingegeven door de algebraïsche structuren. Deze vragen hoeven binnen toepassingen geen enkele relevantie te hebben. Denk maar aan de vraag of een uitspraak over rationale getallen ook voor irrationale getallen geldt.
Anderzijds is er de algebra van de gebruiker. Daarin staan situaties centraal die je beschrijft aan de hand van een wiskundig model. De vragen die je je daarbij stelt, worden ingegeven door de probleemstellingen binnen de situatie. Deze vragen hoeven wiskundig gezien helemaal niet interessant te zijn.

In de doorstroomgroep is de confrontatie tussen deze twee manieren om met wiskunde om te gaan niet te vermijden. De doorstroomleerlingen hebben tot dusverre wiskunde geleerd die zichtbaar te gebruiken is in technische situaties. Maar om een redelijke kans te maken binnen het HTO, zullen deze leerlingen de vaardigheid moeten ontwikkelen om op abstract niveau binnen wiskundige structuren te kunnen redeneren.
De lessen zijn er dan ook op gericht om de leerlingen te laten ervaren of zij dit niveau aankunnen.

De ervaringen met de groep op het Deltion College laten zien dat in de loop van de tijd het vermogen om de formelere en abstractere wiskunde te hanteren bij de leerlingen toeneemt. Zij blijven in staat de op dit gebied steeds meer eisende opdrachten uit te voeren. Ik zie ook dat de leerlingen die het doorstroomniveau aankunnen, in toenemende mate plezier krijgen in het op dit niveau bezig zijn met wiskunde.

Eind 1999 weten wij zeker meer. Dan laten de leerlingen op het examen hun kunnen zien.

Pieter van der Zwaart, TWIN-consortium, SLO, Enschede

Literatuur

[1] Kooij, H.van der (1997). 'Wiskunde in het MTO: het TWIN-project'. *Nieuwe Wiskrant 16*(3), pp. 23-27.
[2] Temme, C. (1997). 'Zo raken jouw spaken behoorlijk in de war'. *Nieuwe Wiskrant 17*(2), pp. 18-21.
[3] Zie het rapport van de werkgroep Doorstroming MTO-HTO voor de vakken wiskunde en natuurkunde. Uitgave consortium TWIN (december 1998). Utrecht: Freudenthal Instituut.
[4] Adviesleerplan wis- en natuurkunde voor het doorstroomdeel van de lange MTO-opleidingen Bouwkunde, Werktuigbouwkunde, Elektrotechniek. Enschede: SLO, 1998. Bestelnummer AN B.302.7894.
[5] Lagerwerf, B. (1983). 'Niveaus van zekerheid'. *Nieuwe Wiskrant 3*(2), pp. 16-26.