In deze aflevering van de recreatierubriek bespreekt **Aad Goddijn** de vele reacties op de opgaven uit de vorige aflevering, waaronder het verzoek om millenniumpuzzels in te sturen.

Van twee duizenden de beste

Recreatierubriek

Achteraf

Uit de kersverse bundeling *Achteraf* van tweewekelijkse bijdragen voor het *Parool* van de op 4 maart 1999 overleden Karel van het Reve:

> '.....Ik kan nu al pis- en pisnijdig worden op de journalisten, die in december 1999 stukjes zullen schrijven over de eenentwintigste eeuw, die op 1 januari 2000 zal gaan beginnen. Dan begint die nieuwe eeuw helemaal niet! Een nieuwe eeuw begint pas als de oude eeuw is afgelopen, en een eeuw telt zoals bekend honderd jaar. En het honderdste jaar van de twintigste eeuw eindigt op 31 december 2000, zoals het eerste jaar van de eerste eeuw op 31 december van het jaar 100 eindigde. Want onze jaartelling begint bij het jaar 1, niet bij het jaar nul. De volgende eeuw begint dus op 1 januari 2001.'

Gepubliceerd 4 juni 1988, toen het woord *millennium* nog ongebruikt in het woordenboek lag te suffen.
Jan Zuidhoek heeft mij vakkundig de oren gewassen wegens het gebruiken van de uitdrukking 'de laatste Wiskrant van het millennium' in opgave 194. Hij zette uiteindelijk het krachtige middel van de tijdbalk in om onnozelen als ondergetekende de bekende redenering van Van het Reve in te peperen.
En dan te beseffen dat ik het nog met allebei eens ben ook. Alleen begrijp ik de mensen wel die menen op 1 januari 2000 iets bijzonders te vieren te hebben. Op die dag klikt de jaartalteller met vier cijfers tegelijk naar de volgende stand. Spannend moment! Ooit had ik een kilometerteller op de fiets, zo een die steeds een tikje van een pennetje aan een spaak kreeg. Voor geen goud wilde ik het moment van de overgang van 999 naar 1000 missen. Er is een indeling in tijdperken – eeuwen, millennia – en er zijn opvallende markeringspunten in de manier waarop de jaren in getalvorm worden weergegeven. En die twee sporen niet perfect met elkaar.
Mag ik na deze milde samenvatting van de discussie overgaan naar het echte werk, de bespreking van de vele inzendingen naar aanleiding van de twee vorige puzzelrubrieken? En daarbij dan maar beginnen met de puzzel waarin zowel 2000 als 2001 een rol spelen?
U kunt bij deze rubriek verder per tussenkopje in- en uitstappen: de onderwerpen staan tamelijk los van elkaar.

Stambreuken met familie

De stambreuken splitsing:

$$\frac{2000}{2001} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{18533} + \frac{1}{519183462}$$

was bij opgave 189 als voorbeeld gegeven. Hier werd steeds de groots mogelijke stambreuk toegevoegd, eerst dus $\frac{1}{2}$, voor de overblijvende rest is dat $\frac{1}{3}$, enzovoorts. Dat dit proces vanzelf stopt, daarover dadelijk meer.
Jos van der Bergh liet zien dat, als je bij de derde stap – dus bij $\frac{1}{7}$ – niet het onderste uit de kan probeert te halen, het totaal van de noemers aanmerkelijk lager kan worden:

$$\frac{2000}{2001} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{29} + \frac{1}{58} + \frac{1}{69} + \frac{1}{87} + \frac{1}{276} + \frac{1}{667}$$

Som van de noemers: 1203. Een behoorlijke verbetering, die echter door E. Buissant des Amorie met steun van de computer wordt overtroffen. De som van de noemers is 355 in zijn bijdrage:

$$\frac{2000}{2001} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{58} + \frac{1}{115} + \frac{1}{145}$$

Hessel Pot wijst erop dat de Egyptische stambreuk-ontwikkeling een van de vele manieren is om een (niet per se rationaal) getal te schrijven als breukensom. Hij noemt onder andere de ontwikkelingen van Sylvester, Engel en Luroth.
Bij de stambreukontwikkeling van een getal α (tussen nul en één) kozen we de eerste noemer n_1 zo, dat

$$\frac{1}{n_1} \leq \alpha < \frac{1}{n_1 - 1}$$

en rekenden dan door met de (eventuele) rest. Sylvester verwisselt de relatietekens en kiest daarom soms een hogere noemer. Bij hem breekt de ontwikkeling nooit af, ook niet als gestart is met een rationaal getal α. Maar waarom gebeurt dat bij de Egyptische ontwikkeling eigenlijk wel? Dat was de vraag van opgave 188, waar de lezers van deze rubriek moeite mee hadden.

Achteraf valt het natuurlijk mee. Als α rationaal is, staat er na de eerste stap van de ontwikkeling:

$$\alpha = \frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{n_1} + \frac{a_1}{b_1}$$

Daarbij voldoet de noemer n_1 aan:

$$\frac{1}{n_1} < \frac{a_0}{b_0} < \frac{1}{n_1 - 1}$$

Uit de eerste betrekking valt af te leiden dat a_1 gelijk is aan $n_1 \cdot a_0 - b_0$ of daar een deler van is. Uit de tweede betrekking wordt – middels elementaire algebra – snel duidelijk dat deze uitdrukking kleiner dan a_0 moet zijn. De tellers van de resten van de stambreukontwikkeling dalen dus echt. En moeten dus stoppen, want ze zijn allen groter of gelijk nul.

Hessel Pot geeft ook nog een ontwikkeling, een afbrekende variant op de ontwikkeling van O. Engel, waarbij elke volgende noemer een veelvoud van de vorige is. Dat veelvoud wordt steeds zo klein mogelijk genomen om niet over de rest heen te gaan. In ons geval past na de eerste $\frac{1}{2}$, dan $\frac{1}{4}$, vervolgens $\frac{1}{8}$, enzovoort. Na tien stappen moeten we uitwijken naar de factor 3. Zo loopt dat dan en het loopt nog af ook:

$$\frac{2000}{2001} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{10} \cdot 3} + \frac{1}{2^{10} \cdot 3^2} + \frac{1}{2^{10} \cdot 3^3} + \frac{1}{2^{10} \cdot 3^3 \cdot 6} + \ldots + \frac{1}{2^{10} \cdot 3^3 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 134 \cdot 223 \cdot 334 \cdot 667}$$

Door de inzender volledig en wat compacter ook anders genoteerd:

2000/2001 = (((((((((((((((((((1/667+1)/334+1)/223+1)/134+1)/14+1)/11+1)/6+1)/3+1)/3+1)/3+1)/2+1)/2+1)/2+1)/2+1)/2+1)/2+1)/2+1)/2+1)/2+1)/2.

Vertrouw erop dat uw puzzelredacteur dit alles narekent! Deze keer moest wel op discrete wijze één paar haakjes worden toegevoegd. Zonder haakjes kan ook:

$$\frac{2000}{2001} = \cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1}{667}}{334}}{223}}{134}}{14}}{11}}{6}}{3}}{3}}{3}}{2}}{2}}{2}}{2}}{2}}{2}}{2}}{2}}{2}}{2}$$

Hessel Pot verwijst overigens terecht naar een standaardwerk op dit gebied van benaderen door breuken in allerlei vormen, waar u ook voor de zeer verwante kettingbreuken terecht kunt: *Irrationalzahlen, Oskar Perron, Berlijn, 1920.*

Opgave 195
Waarom breekt dit type ontwikkeling net als de Egyptische stambreukontwikkeling altijd af?

icannobiF-rijen

2000 1236 764 472 292 180 112 68 44 24 20 4 16

Dat is de langst mogelijke rij die met 2000 begint en zich ophoudt in de natuurlijke getallen, waarbij elk getal (op de eerste twee na) som van de twee volgende getallen is. Alle inzenders stemmen hier overeen. De mooie naam icannobiF-rij komt van E. Buissant des Amorie.
$\frac{1236}{2000}$ is een goede breukbenadering met noemer 2000 voor de gulden snede. Terecht wordt opgemerkt dat het gezochte getal gevonden wordt door eerst 2000 met het guldensnede getal te vermenigvuldigen en dan te kijken welk van de twee getallen eronder en erboven geschikt is. Bij sommige andere getallen dan 2000 moet het bovenliggende getal worden genomen, bij andere juist het onderliggende. Volledig is dit nog niet onderzocht en op een bewijs dat altijd op deze manier de langste icannobiF-rij wordt gevonden, wachten we nog.

Moois voor 2000

Velerlei 2000-ers bereikten dit adres. Voor we de omvangrijke hoeveelheid alleen-tweeërs in kaart brengen, een paar bijdragen voor de categorie vrije figuren.
Jos van de Bergh zond $4^2 \cdot 5^3$ in, wat hem niet veel tijd gekost zal hebben, maar kwam ook met een variatie op opgave 187:

$$2000 = (2+3+4+5+6)^2 + (6+7+8+9+10)^2$$

Opgave 186 werd overigens ook opgelost, door E. Buissant des Amorie:

$$1989 = (6+7+8+9)^2 + (3+4+5+6+7+8)^2$$

De eenvoudigste inzending komt van Michiel Doorman; deze kan alleen op juiste waarde geschat worden door degenen die weleens vanuit Utrecht naar het Freudenthal Instituut moeten bellen: 2611-611.

Alleen met tweeën

Met zeven tweetjes:

$$2000 = 2222 - 222$$

Of

$$2000 = \frac{\sqrt{2^{2 \times 2!}}}{2} - (2 \times 2)! \times 2$$

Aansluitend bij een vergelijkbaar type puzzel met een universele oplossing (schrijf een getal met vier vieren), wijst E. Buissant des Amorie op de drie worteltekens in:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{1/8}$$

waaruit volgt:

$$^{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}\log 2 = 8$$

De conclusie:

$$^{2}\log\left(^{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}\log 2\right) = 3$$

kan uitgebreid worden met meer, desnoods 2000, wortels. Dat wordt nog duidelijker als we in het voorbeeld de '8' van meet af aan als '2^3' hadden geschreven.
(Dit thema is al eerder in de *Nieuwe Wiskrant* aan bod geweest naar aanleiding van de nieuwjaarskaart van het Freudenthal Instituut rond het mooie jaartal 1991. Zie *Nieuwe Wiskrant 10*(3) p. 55 en *11*(1) p. 96. De diepe wortels schijnen oorspronkelijk van Dirac te komen en dateren vermoedelijk uit 1929.)
Omdat Hessel Pot ook nog komt met een voorstelling met nul tweeën, namelijk:

$$2000 = \frac{\pi + \pi}{\pi} \cdot \log^{-1}(\ln(e \cdot e \cdot e))$$

wordt het tijd de teugels strak aan te trekken. Niet alles kan worden toegestaan!

Algoritmische elegantie

We beperken ons nu verder tot de hoofdbewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen, waarbij we ook nog eisen dat alle bewerkingen natuurlijke getallen opleveren en dat alleen het getal 2 als basis dient. Buiten deze beperking ligt dus het mooie:

$$2000 = 2^{\frac{22}{2}} - 2 \cdot (2+2)!$$

maar er binnen valt:

$$2000 = \frac{(2^{2 \cdot 2 \cdot 2} - 2 - 2 - 2) \cdot 2^{2^2}}{2}$$

Beide van de pen van E. Buissant des Amorie, die deze keer wat aantal gebruikte tweeën betreft, geklopt wordt door Jos van de Berghs:

$$2000 = 2 \cdot (2 \cdot 2^2 + 2)^{2 + \frac{2}{2}}$$

Daar staat eigenlijk gewoon '2 keer 10^3' en dat brengt ons vanzelf tot het volgende, door H. Reuvers krachtig naar voren gebrachte thema: systematisch zoeken naar dergelijke voorstellingen.
H. Reuvers deelt mij op 29 oktober mee:
Ik heb gevonden dat men elk na-christelijk jaartal tot en met 2000 met hoogstens 13 tweetjes kan schrijven (zonder de decimale schrijfwijze te gebruiken). Nadere bijzonderheden volgen donderdag a.s.
Ik schrok een beetje van zoveel ijver, maar de bewuste donderdag a.s. maakte veel duidelijk: er is op geraffineerde wijze met de computer gezocht. En eigenlijk is dat niet eens een goede omschrijving voor het gedrag van het uiterst elegante programma van pakweg twintig regels dat opgestuurd werd.
Het idee is fraai en tegelijk (achteraf!) simpel. Stel u voor dat u een korte schrijfwijze voor de getallen 16 en 23 hebt, zeg met respectievelijk 3 en 6 tweeën. Dan heeft u ook een voorstelling van 49 en 368 met 9 tweeën binnen handbereik. En nu systematisch worden.
Laat daartoe de computer in een lange rij getallen bijhouden hoe lange voorstellingen voor de eerste pakweg 30000 natuurlijke getallen al gevonden zijn. Begin met een rij van bijvoorbeeld 30000 keer het getal 10000, want met 10000 tweeën (of minder) kun je elk getal van 1 tot en met 30000 zeker maken. De eerste twee getallen veranderen we in 2 en 1, omdat we 1 met twee tweeën kunnen schrijven en 2 heel eenvoudig met één twee.
Loop nu systematisch alle mogelijke optellingen van twee getallen af waarvan de som onder de 30000 ligt. Je treft al direct aan dat 3 met minder dan 10000 tweeën geschreven kan worden; de schrijfwijzen voor 1 en 2 samen hebben namelijk minder tweeën nodig, namelijk drie in totaal. Vervang dus de 10000 op de derde positie in de getalrij door een drie. Even later wordt op veld 5 dan de 10000 verbeterd, op grond van eerdere resultaten voor 2 en 3. Enzovoort! Het hindert niet dat nu nog geen optimale oplossingen worden gevonden, want er volgen nog soortgelijke slagen voor vermenigvuldigen, aftrekken, delen en machtsverheffen. Uiteindelijk wordt de hele cyclus nog een aantal keren herhaald ook.
Op deze manier kwam H. Reuvers dus tot de constatering over de dertien tweetjes die sterk genoeg zijn voor alle jaartallen 1 tot en met 2000. De dertien-eisers zijn overigens zelf met z'n dertienen: 1391, 1645, 1653, 1655, 1659, 1661, 1691, 1707, 1709, 1749, 1829, 1839, 1895.
Om Jos van de Bergh gerust te stellen nog dit: in veld 2000 laat de computer een 8 achter.
Waarom ben ik hier nu zo lyrisch over terwijl er nog geen voorstelling met tweeën van 2000 tevoorschijn is gekomen?
Wel, met een kleine toevoeging laten we het programma zo dadelijk ook de bijhorende voorstellingen ophoesten; maar eerst iets over de onderliggende gedachte.
Wie voorstellingen voor 2000 probeerde te maken, heeft na een paar minuten een hoop nutteloos kladwerk geproduceerd. Door de opgave echter over de hele range 1–30000 uit te strekken, gaat er eigenlijk geen rekenresultaat meer verloren als dat een korter antwoord oplevert, ook al is dat antwoord niet geschikt voor een vooraf bepaald doel. Door gelijke aandacht te hebben voor alle getallen in de range gaat 'iedereen' erop vooruit.
De rekentijd die het programma nodig heeft, is grofweg evenredig met het kwadraat van het aantal te onderzoeken getallen. Per getal – maar in collectief verband – is de zoektijd naar een voorstelling dus grofweg evenredig met het getal zelf. De individuele zoeker kan daar absoluut nooit tegenop.
Ik voeg deze lange uitweiding ook in omdat het gebruik van computers bij puzzels weleens wordt afgedaan als

'inzetten van brute rekenkracht'. Uiterst onterechte kwalificatie! Het componeren van een algoritme zoals hier beschreven, vereist inventiviteit en het bereiken van het resultaat is voor de maker net zo bevredigend als het vinden van een sluitend bewijs bij een mooi meetkundevraagstuk voor een andere (of dezelfde) wiskundeliefhebber.

Antwoorden voor de komende jaren

Door het programma niet alleen bij te laten houden welke voorstellingslengte mogelijk is, maar ook hoe die uit de opbouwende tussenuitkomsten wordt verkregen, kunnen we ook de uitdrukkingen zelf in beeld brengen.
Voor de komende tien jaar bent u uit de brand met:

```
( 8)  2000  = ((((2+2)*2)+2)^(2+(2:2)))*2)
(10)  2001  = (((((2+2)*2)+2)^(2+(2:2)))*2)+(2:2))
( 9)  2002  = (((((2+2)*2)+2)^(2+(2:2)))*2)+2)
(11)  2003  = ((((((2+2)*2)+2)^(2+(2:2)))*2)+(2:2))+2)
( 9)  2004  = (((((2+2)*2)+2)^(2+(2:2)))+2)*2)
(11)  2005  = ((((((2+2)*2)+2)^(2+(2:2)))+2)*2)+(2:2))
(10)  2006  = ((((((2+2)*2)+2)^(2+(2:2)))+2)*2)+2)
(11)  2007  = (((((2^(2+2))-(2:2))^2)-2)*((2+(2:2))^2))
(10)  2008  = ((((2^((2+2)*2))-(2+2))*2)-2)*(2+2))
(12)  2009  = ((((((2+2)+2)^2)+((2+(2:2))^2))^2)-
              (2^(2+2)))
(11)  2010  = (((2^(((2+2)+2)*2)):2)-((((2+2)+2)^2)+2))
```

Dan nog enkele jaren waarin puzzelrubrieken in wiskundetijdschriften dit onderwerp weer zullen aansnijden:

```
(10)  2020  = (((((2^((2+2)*2))-(2+2))*(2+2))+2)*2)
( 9)  2112  = (((2^((2+2)+2))+2)*((2^(2+2))*2))
(12)  2222  = (((((((2+2)+2)^2)*2)+2)*(((2^(2+2))*2)-
              2))+2)
```

Voor wie het hoopt mee te maken alvast:

```
(11)  2100  = ((((((2+2)*2)*((2+2)+2))-2)^2)-(2^(2+2)))
```

(Andere uitwerkingen voor de jaren voor 18000 kunnen op verzoek kosteloos per e-mail worden geleverd.)

De computer meldt ook nog:

```
(12)  3641  = (((((2^((2+2)*2))+2)+2)*((2^(2+2))-
              2))+(2:2))
```

Maar dat kan veel korter, namelijk zo:

```
( 9)  3641  = ((2^(2^(2^2)))+2):((2^(2+2))+2)
```

Dat brengt ons tot het volgende.

De mitsen en maren van een algoritme

Rekenen we de laatste voorstelling van 3641 door, dan wordt duidelijk wat er aan de hand is. Een van de tussenuitkomsten in de berekening is 65536 en als we de computer beperken tot de range 1–30000, kan die voorstelling dus nooit gevonden worden. H. Reuvers brengt dit ook direct naar voren. Het betekent wel dat het niet echt zeker is dat u met de aangegeven voorbeelden de records in handen hebt! Met de huidige stand van de techniek werkt het algoritme alleen op een eindige reeks en dat zal het volgende millennium nog wel zo blijven.

Maar het is toch wel heel onwaarschijnlijk dat het vermoeden over '13' als het maximaal benodigde aantal tweeën voor de jaartallen 1–2000 nog zal sneuvelen.
Maar het record van acht tweeën voor 2000 is dus (heel) misschien tijdelijk.
Er is een uitweg ..... Omdat we geen langere voorstellingen dan met acht tweeën hoeven te onderzoeken, weten we dat alle tussenuitkomsten kleiner of gelijk (2^(2^(2^(2^(2^(2^(2^2))))))) zijn en kunnen we dus de zoekrange tot die grens beperken. Ik voorspel dat dit qua rekentijd niet lukt in het volgende millennium, al duurt dat tot 3003.

Opgave 196

a. Hoeveel cijfers (tientallig uitgeschreven) zijn voor dat getal nodig?
b. Wat is de rest als we dit getal delen door 2000?

Nieuwe 2000-opgaven

Daar ging het allemaal om!
Van H. Reuvers, aansluitend bij het voorgaande:

Opgave 197

Bedenk een algoritme dat ook de getallen 22, 222 en 2222, 22222, enzovoort als bouwstenen gebruikt en rapporteer de resultaten.

Van Hessel Pot:

Opgave 198

Bepaal de Engel-ontwikkeling (zie boven) voor het irrationale e-2. Verklaar het resultaat!

In de informatie van Hessel Pot staat ook dat het voor velen welbekende drie-deuren-probleem in gegeneraliseerde vorm in de *American Mathematical Monthly* van maart 1999 wordt besproken met gebruikmaking van speciale Engel-ontwikkelingen. Zijn bijbehorende opgaven vat ik samen in:

Opgave 199

Vergelijk de typische eigenschappen van de verschillende ontwikkelingen van stambreuken voor geschikte getallen (ook irrationaal met elkaar). Onderzoek bijvoorbeeld wanneer de noemers sterker of minder sterk oplopen. Bedenk ook variaties, door bijvoorbeeld de Engel-ontwikkeling te veranderen op de manier van Sylvester bij de Egyptische stambreukontwikkeling.

Van H. Reuver nog een opgave met inleiding.

Nederland anno 2000 is de 'uitkomst' van een reeks historische feiten. Onder die feiten zijn er drie die een zeer bijzondere impact hebben gehad: de inval van Oranje in 1568, die der Fransen in 1795 en die der Duitsers in 1940.
Schrijft men 2000 als (ruim opgevat) 'gewogen gemid-

delde' van de drie getallen 1568, 1795 en 1940 met als wegingscoëfficiënten drie gehele getallen p, q en r met $p + q + r = 1$, dan 'weet' men welk der drie jaartallen het 'grootste gewicht' heeft voor het jaar 2000.

Opgave 200

a. *Bewijs dat dit niet kan met het meetkundig gemiddelde. (Dat wil zeggen $2000 = 1568^p 1795^q 1940^r$.)*

b. *Doe het met het rekenkundig gemiddelde. (Dat wil zeggen $2000 = p1568 + q1795 + r1940$.)*

c. *Schrijf het 'winnende' jaartal op oneindig veel manieren als (beperkt opgevat) rekenkundig gemiddelde van de twee verliezende jaartallen en 2000 zelf. (Dat wil zeggen met als coëfficiënten drie positieve breuken die samen 1 zijn.)*

Arbelossen

De aflevering over de arbelos (*Nieuwe Wiskrant 18/4*) heeft bij enkele specialisten nog reacties opgeroepen. Floor van Lamoen wees mij twee nieuwe Archimedische cirkels aan. Hij verwijst ook naar Thomas Schoch, die ook reageerde en een fraaie website over de arbelos vertoont op:
http://www.biola.edu/academics/undergrad/math/woopy/arbel2.htm.
Schoch en anderen schreven een uitvoerige artikel voor de *Mathematics Magazine* van juni 1999:
Those Ubiquitous Archimedean Circles; Clayton W. Dodge, Thomas Schoch, Peter Y. Woo and Paul Yiu.

Dick Klingens heeft naar aanleiding van de messen de arbelos aan zijn website toegevoegd: http://www.pandd.demon.nl/arbelos.htm.

Tot slot

Veel puzzelplezier wordt u toegewenst voor de rest van het millennium. U kunt uiteraard zelf kiezen hoe lang dat nog duurt.

Aad Goddijn, Freudenthal Instituut