

Op 26 april 1999 promoveerde Ed de Moor op het proefschrift *Van vormleer naar realistische meetkunde*. Jan van Maanen las het en ontdekt meerdere lagen in dit knap geschreven historisch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan vier- tot veertienjarigen.

Doe tijdig 'meetkunde ... op aanschouwing gegrond'!

Van sommige boeken weet je niet meteen wat je eraan hebt. Die leg je weg om ze na een tijdje nog eens ter hand te nemen. Meestal pleit dat voor het boek. In de vertelling zitten dan meerdere lagen, of een persoon die aanvankelijk een ondergeschikte rol in het verhaal leek te spelen, blijkt toch een sleutelfiguur te zijn. Zoiets realiseer je je achteraf, als de grote slag al hoog en breed geslagen is.

Van vormleer naar realistische meetkunde, de 708 pagina's waarop Ed de Moor op 26 april 1999 in Utrecht promoveerde, is zo'n boek. De ondertitel zegt dat het 'Een historisch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw' betreft, en als je begint te lezen, geloof je dat ook echt. Ik wel tenminste, en zoals nog zal blijken, niet zonder reden. Het woord 'onderzoek' is, nadat het boek een tijdje gelegen heeft, het eerste waar mijn oog en gedachten blijven hangen. Want dat woord is een vlag die de lading niet helemaal dekt. De Moor onderzoekt weliswaar uitgebreid en grondig, maar hij doet dat niet alleen omdat hij iets aan de weet wil komen over het aanvankelijk meetkundeonderwijs in het verleden. Hij doet het ook omdat hij iets wil bereiken voor heden en toekomst, namelijk een versterking van de rol van de meetkunde voor jonge kinderen. De slotzin van de *Epiloog* (p. 623) spreekt op dit punt boekdelen: "Meetkunde moet, ook op de basisschool, al is het alleen maar, om nog eenmaal met Freudenthal te spreken: 'omdat je de kinderen zoveel moois niet mag onthouden!'" Een politiek pamflet is het net niet, daarvoor is het te dik en daarvoor richt De Moor zich ook niet direct genoeg tot diegenen die de genoemde verschuiving in het basisschoolprogramma zouden moeten bewerkstelligen, maar het scheelt niet veel. Het is tijd om aan deze stelling enige evidentie toe te voegen.

De historische component

Eerst maar even terug naar de eerste indruk die het boek maakt, en die is stellig historisch. In 1857 werd bij wet op de lagere scholen in Nederland

het vak 'Vormleer' ingevoerd. Daar was het nodige aan voorafgegaan. Aan het begin van de negentiende eeuw wees de beroemde Zwitserse pedagoog Pestalozzi (1746-1826) op het belang voor het onderwijs van 'Aanschouwing'. Door concrete waarneming van figuren vormen kinderen zich mentale beelden, die weer de basis zijn voor het verder ontwikkelen van meetkundige kennis. Vooral in het Duitse taalgebied gingen anderen op deze gedachte door, onder meer de filosoof Herbart, die met *Pestalozzis ABC der Anschauung* (1802) zorgde voor de verbreiding van de ideeën, die hij bovendien operationeler formuleerde. Ook verschenen er uitwerkingen in de vorm van leerboeken. In Nederland had het boek *Die Elemente der Form und Grösse* (1809) van Joseph Schmid, een van Pestalozzi's medewerkers, invloed.

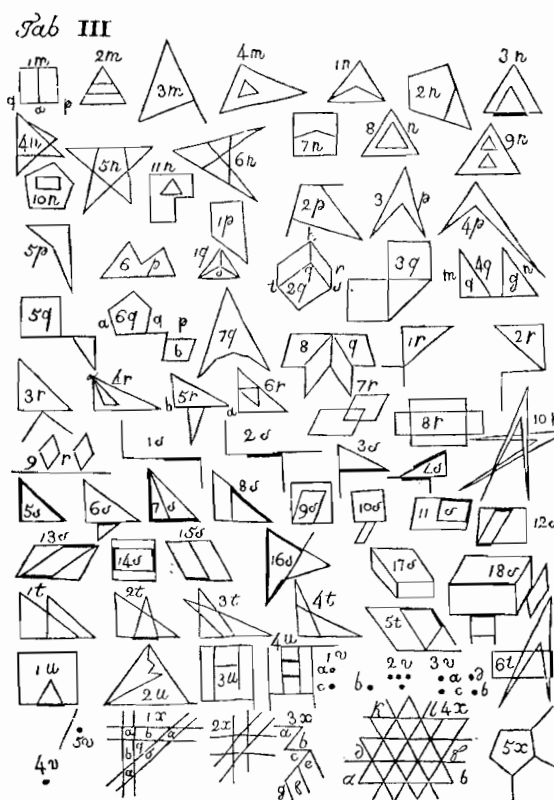


fig. 1 Figuren-tabel III uit Schmid's 'Elemente' (1809)

Schmid besteedt veel aandacht aan gevalsonderscheiding en aftellen van mogelijkheden. Op hoeveel manieren, vraagt hij bijvoorbeeld, kunnen 5, 6, 7, ... lijnstukken, waaronder evenwijdige mogen voorkomen, liggen? Schmid's derde plaat met figuren laat zien dat er ook met driehoeken en vierhoeken heel wat aan de hand kan zijn. Dit aftellen van gevallen werd gedaan omdat het mooie stof tot redeneren bood.

De combinatoriek waarin het later in de eeuw in sommige boeken onttaardt, heeft echter niet tot de populariteit van de vormleer bijgedragen. In 1889 moest het vak van de ene op de andere dag het veld ruimen ten gunste van tekenonderwijs. Een van de mooie dingen van De Moors boek is dat hij het niet laat bij deze mededeling, maar ook een beschouwing geeft over het tekenonderwijs na 1850 en over de discussie in de Tweede Kamer die tot de afschaffing leidde. Dat is kenmerkend voor de opbouw en de volledigheid van het boek.

De opkomst en neergang van de vormleer is in het boek uitvoerig gedocumenteerd. De invloed van de overheid en van individuele auteurs, de inhoud van de boeken, de opleiding van de onderwijzers, de discussies over de inhoud van het vak, al deze aspecten komen bij De Moor ruimschoots aan bod. Opvallend is de positieve belangstelling die in het begin van de eeuw bij de onderwijsinspectie voor het werk van Pestalozzi bestond en die leidde tot uitzending naar Zwitserland van twee jonge onderwijzers die zich op rijkskosten in het werk van Pestalozzi konden verdiepen. Het vormleerboek uit 1820 van Van Dapperen, één van de twee Zwitserlandgangers, heeft belangrijk tot de introductie van de vormleer bijgedragen. Verder is opmerkelijk dat de ontwikkelingen in Duitsland hun sporen hebben nagelaten. Na Herbart hebben onder andere Diesterweg, Grassmann en Fröbel het Nederlandse onderwijs beïnvloed, doordat hun pedagogische ideeën navolging hebben gevonden, of doordat leerboeken als voorbeeld hebben gediend.

Met Fröbel en de opkomst van het Fröbelonderwijs in Nederland, dankzij de inzet van Elise van Calcar, begint het tweede van de vijf delen van het boek, dat doorloopt tot de jaren '70 van de twintigste eeuw. Uitgebreide aandacht is er voor de discussie aan het begin van de eeuw of de meetkunde nu axiomatisch (logisch-deductief) of empirisch (intuïtief) ingevoerd moet worden. De hoofdrolspelers zijn bekend: Dijksterhuis en Ehrenfest-Afanassjew, maar De Moor kijkt veel gedetailleerder en beschrijft het praktische en theoretische werk van een rij van auteurs, waarbij de empirici duidelijk de overhand hebben (Versluys, Reindersma, Van der Ley, Wolda en anderen).

Een interessante en nieuwe beschouwing wijdt hij aan de Russische wiskundige en pedagoog Sjochor'-Trotskij, wiens *Meetkunde in Opgaven* uit 1908 frappante overeenkomsten vertoont met de *Übungensammlung* (1931) van Mw. Ehrenfest.

LEERPLAN voor eene lagere school van zes leerjaren.

VERDEELING DER UREN.

Eerste leerjaar.

<i>Arbeid</i> : bouwen	2	halve uren per week
papier vouwen en scheuren	4	" " " "
kleiarbeid	2	" " " "
teekenen en schrijven	4	" " " "
gymnastiek en spel	6	" " " "
samen per week	18	halve uren

<i>Kennis der omgeving</i> : (voorwerpen, de woonplaats, planten, dieren, bedrijven der menschen)	8	" "
<i>Tellen en meten</i> :	8	" "
<i>Taal</i> (lezen, vertellen, zingen)	18	" "

In het geheel per week . . . 52 halve uren.

Tweede leerjaar.

<i>Arbeid</i> : vouwen, plakken, knippen of snijden	4	halve uren
kleiarbeid	4	" "
teekenen en schrijven	6	" "
gymnastiek en spel	6	" "
samen per week	20	halve uren.

Per transport . . . 20 halve uren.

<i>Kennis der omgeving</i> (voorwerpen, de plaats der inwoning zelve, planten, dieren, bedrijven der menschen)	8	" "
<i>Rekenen en meten</i> :	8	" "
<i>Taal</i> (lezen, vertellen, zingen)	16	" "

In het geheel per week . . . 52 halve uren.

Derde en vierde leerjaar.

<i>Arbeid</i> : kartonarbeid	per week	2 uren
kleiarbeid	"	1 "
teekenen	"	2 "
gymnastiek en spel	"	2 "
samen per week	7	uren

<i>Zaakonderwijs</i> : (aardrijkskunde, geschiedenis, planten, dieren, bedrijven der menschen, levenloze natuur)	per week	7 uren
<i>Meten en rekenen</i>	"	4 "
<i>Taal</i> (lezen, stijl, taal, vertellen, schrijven, zingen)	"	5 "

In het geheel per week . . . 26 uren.

Vijfde en zesde leerjaar.

Kartonarbeid	per week	1 uur
kleiarbeid	"	1 "
teekenen	"	3 uren
gymnastiek en spel	"	2 "
tuinarbeid, plantkunde, dierkunde, bedrijven der menschen	"	3 "
kennis der levenloze natuur	"	2 "
aardrijkskunde	"	2 "
geschiedenis	"	2 "
meten en rekenen	"	6 "
lezen, taal, stijl, schrijven en zingen	"	10 "
In het geheel per week	32	uren.

fig. 2 Leerplan van Van der Ley (1896)

§ 33. 1. Precies in het midden van een vierkant, donker vertrek, staat een brandende kaars, en daarom heen beweegt zich—op dezelfde hoogte als de vlam—een vlieg in een cirkelvormige baan. Wat is de weg, dien haar schaduw op de wanden beschrijft?

§ 44. 1. A B is een schip, dat zich over de rivier R R in de richting van het pijlje voortbeweegt met een eenparige snelheid $\text{---}a\text{---}$ per sec. Een jongen klimt met eenparige snelheid $\text{---}b\text{---}$ per sec. in den mast. Construeer den weg, dien de jongen door de ruimte beschrijft.



Schets ongeveer den weg, als de jongen sneller gaat klimmen; of als het schip sneller gaat. Ook die, welke hij beschrijft als hij halverwege 3 seconden blijft rusten. Welken weg beschrijft de jongen als hij in 't geheel niet klimt, of als hij wel klimt maar het schip stil ligt?

fig. 3 Opgaven uit Wolda's meetkundecursus (1921)

Na de Tweede Wereldoorlog gaat de discussie over de meetkunde en over de wiskunde meer in het algemeen onverminderd voort en het gedachtengoed van de Van Hiele's en van Freudenthal passeert de revue, evenals de transformatiemeetkunde, die bij de invoering van de Mammoetwet in 1968 de klassieke planimetrie verving. Tevens is er in dit deel een beschouwing over de vormen-de waarde als legitimering van het wiskundeonderwijs. De opvattingen schommelen de hele eeuw door heen en weer.

De ontwikkeling van de realistische meetkunde sinds 1970, waaraan De Moor zelf als ontwerper binnen het Wiskobas-team meewerkte, vult het derde deel van het boek. In een mengeling van eigen ervaringen van De Moor, informatie uit interviews met collega's en analyses van in deze periode ontwikkelde leerlingenteksten en officiële stukken, zien we het ontwikkeltraject van nieuwe schoolwiskunde in volle gang. Aanhoudend zijn er insi-de-details, waarbij voor mij wel de kroon spande hoeveel moeite het in 1989 kostte om de meetkunde te handhaven in de eindtermen voor de basisschool (p. 457), gedocumenteerd tot en met door Treffers gevoerd 'indringend telefonisch overleg'. "De historische vraag", stelt De Moor, "of persoonlijke interventies belangrijke beslissingen kunnen beïnvloeden, is voor dit geval duidelijk te beantwoorden."

Een deel over de huidige staat van het meetkundeonderwijs op de basisschool (de vertaling van kerndoelen in toetscategorieën en de resultaten van de Pimbo-toetsen – Pimbo staat voor Project Innovatie Meetkunde BasisOnderwijs – staan centraal) en een deel met slotbeschouwingen besluiten het boek, even afgezien dan van de 65 pagina's met literatuur, bronnen en register van personen en de drie los bijgevoegde tijdbalken.

Vrolijke meetkunde

Het beeld tot op heden is knap historisch. Ik geef het graag toe, het is historisch, en knap opgeschreven. Maar op allerlei plaatsen hoor je tegelijkertijd de docent en leerstofontwikkelaar De Moor enthousiast zijn als hij in de oude boekjes een stukje van de legpuzzel vindt die als resultaat goed meetkundeonderwijs moet opleveren. Een voorbeeld is het vormleerboek van Bakkes (1865), dat volgens hem bijzondere aandacht verdient. De doelen die Bakkes voor de vormleer omschrijft, hebben duidelijk zijn instemming:

1. Het kind leert *bepaald zien* en het schoone in de regelmaat der vormen opmerken.
2. Het verkrijgt ongemerkt eenige *meetkundige kennis*, die in het leven, of bij verdere of latere beoefening der wetenschap voorzeker niet schaden zal, en
3. Oefent zich in 't *lijntekenen*, dat mede niet zonder voordelige gevolgen zal zijn. [Bakkes 1865, zoals geciteerd in proefschrift, p. 79.]

En ook de uitwerking draagt goedkeuring weg, getuige deze woorden over de stof voor de hoogste (= derde) klas:

Bij de cirkel wordt het verschijnsel van de zonne-eclips besproken [wat zijn oude boeken toch altijd actueel, JvM], zo^l als telkens praktische voorbeelden aangehaald worden. Dit geldt ook voor het laatste deel van het boek, waarin de bekende ruimtelijke lichamen bestudeerd worden. Geen trucmatige formules voor de inhouden, maar aanwijzingen voor manieren om door het overgieten van water een idee van het begrip inhoud te ontwikkelen. We besluiten de bespreking van dit bijzondere boek, dat ons inziens ook vandaag de dag nog de moeite van het bestuderen waard zou zijn, met een aantal voorbeelden: [zie figuur 5].

Construeren ($p = 50$)

Een geit zit aan een lijn van 3 meter. Het einde van deze lijn kan over een draad van 6 meter schuiven.

Als de geit alles afgraast, hoe ziet dat stuk er dan uit?
Zet een rondje om de letter bij het goede antwoord.

A

B

C

D

fig. 4 Opgave uit Pimbo-toets 1995

- Waar zou een lanternen geplaatst moeten worden, om 3 huizen even *sterk* te verlichten? (p. 76)
-
- Op een ijsveld stonden, in de rondte, 5 tenten. Als 't nu gesneeuwd heeft en er overal van tent tot tent eene baan geveegd wordt, hoeveel banen heeft men dan? Hoe zou men daar de geheelen middag kunnen rijden, zonder eene enkele tent aan te doen? (p. 76)
-
- Teekent een gelijkbeenigen, rechthoekigen driehoek. Maakt 2 symmetrische helften. Van de helft weder 2 symmetrische helften; enz. Zegt nu, hoe dikwijls dat zou kunnen herhaald worden. (Tot in het oneindige). Wij willen de stukken eens opschrijven. Zie hier: $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32$ enz. enz. Hoeveel is dat alles te zamen? (Eén) (p. 79)
-
- Snijdt de bol eens midden door. Doet dat ook met den eikel en het ei in de lengte. Welke doorsnijdingsvlakken ziet gij daar? (p. 105).

fig. 5 Voorbeelden uit het vormleerboek van Bakkes (1865)

Hier, en op verschillende andere plaatsen, bekent De Moor kleur. Een voetnoot bij de passage over Bakkes gaat over diens tekenopdrachten op roosterpapier. De Moor schrijft: 'Het werken op roosterpapier hoort tot de methode van Fröbel. Het heeft voordelen, maar het kan ook verstarrend en blokkerend werken.' De eerste zin is historisch van aard, hoewel je je kunt afvragen of die een aparte voetnoot rechtvaardigt. De tweede zin is er een van een ontwerper die kleur bekent.

Afweging

Ed de Moor heeft een stevig boek geschreven, zowel wat de omvang als wat de kwaliteit betreft. Die stevigheid dankt het aan een combinatie van nieuwsgierigheid en eigen opvattingen, memoires soms bijna. Soms is het iets te intern gericht. Het project *Belvia* bijvoorbeeld, deed ik zelf met brugklasleerlingen toen het in 1978 door het Wiskundig Genootschap over de scholen verspreid was als cadeautje ter gelegenheid van zijn 200-jarig bestaan. De ontwerpen leefden niet alleen in de hoofden en kamers van de ontwerpers. Maar wat mij betreft heeft De Moor zijn slag wel geslagen: een puik pleidooi voor de aanvaarding van meetkunde als vak voor de basisschool in samenhang met aanschouwelijkheid en de heuristische werkwijze (p. 621).

De cirkel tussen Pestalozzi en Pimbo is rond. Zoals het een goede cirkel betaamt.

Literatuur

Moor E.W.A. de (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde*. Utrecht: CD-β Press 1999. ISBN 90-73346-40-1. Prijs: f 70,- (exclusief verzendkosten).

De handelseditie is nummer 33 in de reeks CD-β Wetenschappelijke Bibliotheek en te bestellen bij Ank van der Heiden, Freudenthal Instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.

E-mail: A.vanderHeiden@fi.uu.nl

Nationale Wiskunde Dagen 2000

Op 4 en 5 februari worden voor de zesde keer de Nationale Wiskunde Dagen gehouden in Congrescentrum de Leeuwenhorst te Noordwijkerhout. Kosten: f 565,- all in.

Deelname aan de NWD kan door de school betaald worden uit nascholings- en professionalisingsgelden.

De thema's voor deze NWD zijn:

- wiskunde en beeldanalyse
- wiskunde en verkeer
- wiskunde, uitdaging en stimulans
- wiskunde en aardwetenschappen
- wiskunde en architectuur
- wiskunde en verwantschappen.

Gratis naar de NWD?

U kunt ook zelf een voorstel voor een workshop indienen (vóór 1 november). Uit de inzendingen worden door een deskundige jury maximaal twee bijdragen geselecteerd. Er wordt gelet op aspecten als originaliteit, wiskundige inhoud en bruikbaarheid in de klas. De beloning is gratis deelname aan de NWD.

De programmaprocedure met aanmeldingsformulier is begin september naar de scholen gestuurd.

Bovendien ontvangen de deelnemers van de afgelopen NWD een folder op naam op hun huisadres.

Inlichtingen: Ank van der Heiden, Freudenthal Instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.

Tel: 030 2611611, fax: 030 2660430, e-mail: nwd@fi.uu.nl, url: <http://www.fi.uu.nl/nwd>

