Praktische opdrachten en profielwerkstukken – hoe moet je ze bij de wiskunde invullen? **Jan van de Craats** draagt ideeën aan voor werkstukken en projecten rond de kettinglijn.

Hoe hangt een ketting?

De schoolborden in gebouw Euclides van de Universiteit van Amsterdam hebben standaardafmetingen: precies één meter hoog en twee meter breed. Dat komt goed uit als je iets wilt vertellen over kettinglijnen, dat wil zeggen over de vorm waarin kettingen hangen. Ik maakte voor een masterclass voor scholieren een ketting van paperclips, hing hem op aan de twee bovenste hoekpunten van het bord, en zorgde ervoor dat hij zo lang was, dat het laagste punt precies op het midden van de onderrand van het bord viel. In coördinaten uitgedrukt, met 1 meter als lengte-eenheid: ik zorgde ervoor dat de ketting door de punten (-1,1), (0,0) en (1,1) ging.

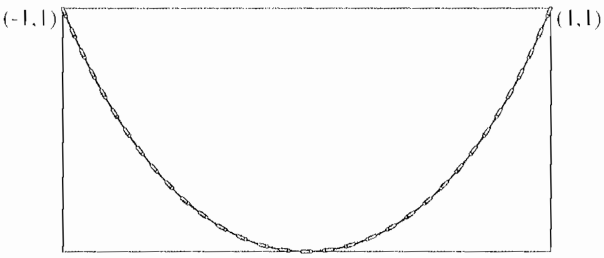

fig. 1 De ketting op het schoolbord

Wat is de vorm waarin zo'n ketting hangt? Je zou misschien denken dat het een parabool is. Dan ben je in goed gezelschap, want niemand minder dan Galileo Galilei dacht er ook zo over. Maar onze Christiaan Huygens liet al in 1646 zien – hij was toen nog maar zeventien jaar oud! – dat dit niet waar is. Huygens gebruikte daar een knappe redenering voor die berust op bepaalde meetkundige eigenschappen van de parabool, maar wij kunnen het met onze paperclipketting ook direct proefondervindelijk verifiëren: zou het een parabool zijn, dan zou de paperclipketting in het gekozen coördinatenstelsel samen moeten vallen met de grafiek van de functie $f(x) = x^2$. Echter, de lengte-eenheid van 1 meter is groot genoeg om te controleren dat deze ketting beslist niet in de vorm van zo'n parabool hangt. Neem bijvoorbeeld als x-waarde $x = 0.5$, dus op het bord 50 centimeter rechts van het midden. De y-waarde zou 0.25 moeten zijn als het de parabool $y = x^2$ was, maar met een centimeter kun je direct controleren dat de ketting op die plaats minder dan 22 cm hoog hangt; het verschil met 25 cm is duidelijk te zien. Nog duidelijker is het bijvoorbeeld bij $x = 0.7$. Bij een parabool zou $y = 0.49$ moeten zijn, maar de hoogte van de ketting boven de bordrand is slechts 44 cm. De kettinglijn is dus geen parabool.

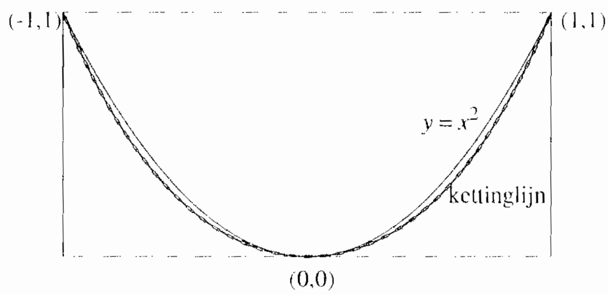

fig. 2 De kettinglijn is geen parabool

Experimentele wiskunde?

Hoe hangt zo'n ketting dan wel? Dat is een vraag waar je heel wat interessante wiskunde en mechanica aan vast kunt knopen. Degenen die graag 'experimentele wiskunde' doen met de grafische rekenmachine, zouden het misschien als volgt aanpakken. Je zou de parabool $y = x^2$ kunnen zien als een eerste benadering. Misschien krijg je met een hogeregraadspolynoom met even machten betere resultaten. Je zou bijvoorbeeld kunnen denken aan de grafiek van een functie van de vorm:

$$f(x) = ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8.$$

Door wat met die constanten a, b, c en d te spelen, lukt het inderdaad wel om ze zo te bepalen dat de grafiek van $f(x)$ heel wat beter bij onze paperclipketting past. Als je leerlingen hiermee aan het werk zet, zullen ze daar best een tijdje zoet mee zijn. Maar of ze dat leuk vinden, en of ze daar veel van leren? Ik betwijfel het. Laat ik maar even voor onze-lieve-heer spelen, en verklappen dat:

$$f(x) = 0.8081\,x^2 + 0.1759\,x^4 + 0.0153\,x^6 + 0.0007x^8$$

uitstekende resultaten geeft, althans op het interval [-1,1]. Met een centimeter in de hand zul je nergens noemenswaardige afwijkingen vinden.

Toch is dit een tamelijk domme methode, die je alleen maar toe moet passen als je nu werkelijk niets anders kunt verzinnen. De ingenieur die deze ene ketting wil modelleren, zal met zo'n functie best tevreden zijn, maar bij een andere ketting moet zij weer opnieuw beginnen en er is geen enkele garantie dat de nauwkeurigheid met vier van die termen dan voldoende is. Trouwens, wat leer je hiermee nu eigenlijk over de algemene vorm waarin kettingen hangen? Niets toch zeker? Tijd dus om alle rekenmachines en computers opzij te zetten en eerst eens met de grijze cellen aan de slag te gaan. Wat kunnen we, zonder nu direct te gaan rekenen, over de vorm van zo'n kettinglijn te weten komen?

Hangt een zware ketting anders dan een lichte ketting?

Die ene paperclipketting interesseert ons natuurlijk eigenlijk niets, die is alleen maar een onvolmaakt speciaal geval. We willen in het algemeen weten hoe kettingen hangen en waar de vorm van zo'n kettinglijn van afhangt. We zien daarbij af van het feit dat zo'n ketting uit losse schakeltjes bestaat: we idealiseren de ketting tot een volkomen buigzaam koord met een verwaarloosbare dikte dat homogeen van samenstelling is.

Zou het voor de vorm van de kettinglijn uitmaken wat de soortelijke massa, dat wil zeggen de massa per strekkende meter is? Met andere woorden, zou een ketting met lichtgewicht aluminium schakeltjes anders hangen dan een scheepsketting met zware stalen schakels of een hoogspanningskabel? Dat kunnen we experimenteel vaststellen door over onze paperclipketting een ketting van ander materiaal te hangen, bijvoorbeeld een nylon koord. Wat blijkt? Ze hangen in precies dezelfde vorm, althans voor zover we dat zo op het oog kunnen nagaan. Maar we kunnen het ook via de volgende redenering verklaren.

Stel dat we over de oorspronkelijke paperclipketting nog een tweede paperclipketting hangen. Eentje die net zo lang is, opgehangen aan dezelfde spijkers. Natuurlijk hangen de beide kettingen dan in dezelfde vorm, allebei in de vorm van de oorspronkelijke paperclipketting. Maar de twee kettingen samen kunnen we ook opvatten als één ketting met een tweemaal zo grote massa per strekkende meter! Denk je maar in dat ze ingesmeerd zijn met sneldrogende lijm; na een paar seconden zitten ze onverbrekelijk aan elkaar vast, en dan is het één ketting geworden met een tweemaal zo grote massa per strekkende meter. We constateren dat die gewoon dezelfde kettingvorm heeft. In plaats van twee kettingen kunnen we net zo goed elk ander aantal nemen.

Conclusie: *de vorm van de kettinglijn is onafhankelijk van de soortelijke massa.*

Even twee prikkelende vraagjes tussendoor: zou onze paperclipketting op de noordpool anders hangen? En op de maan?

Wat doet de plaats van de ophangpunten ertoe?

En wat voor rol speelt de plaats van de ophangpunten? Hangt een ketting anders als je de twee ophangpunten niet op dezelfde hoogte kiest? Ook daar levert een combinatie van experiment en slim redeneren ons het antwoord. Eerst het experiment, weer met de paperclipketting die voor het schoolbord hangt. Druk op een willekeurig punt de ketting tegen het bord. (Als het een oud bord is, kun je er ook een extra spijker doorheen slaan.) De ketting wordt op die manier in twee stukken verdeeld, die ieder nog steeds in hun oorspronkelijke vorm hangen. Die vorm verandert niet als je vervolgens één van de twee stukken verwijdert. Conclusie: als we weten hoe de hele ketting hangt, dan weten we ook hoe elk deel van de ketting hangt. Dat hadden we natuurlijk ook wel direct kunnen bedenken: het maakt voor een paperclip niet uit of hij ergens middenin vrij in de ketting hangt, of aan een spijker.

De spankrachten in de ketting

Uit het bovenstaande kunnen we concluderen dat we ons bij ons onderzoek naar de vorm van de kettinglijn kunnen beperken tot het geval dat de twee ophangpunten zich op dezelfde hoogte bevinden. De kettinglijn zal dan een symmetrische kromme zijn met zijn laagste punt in het midden. Verder speelt de soortelijke massa van de ketting geen rol. De vorm hangt dus alleen maar af van de lengte van de ketting en van de onderlinge afstand van de twee ophangpunten.

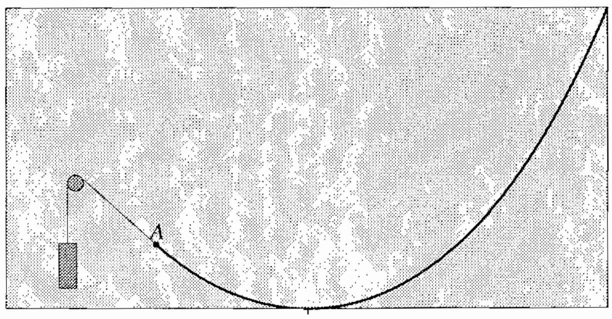

fig. 3 De spankracht in het punt A

We richten onze aandacht nu op de spankrachten in de ketting. We willen de vorm van de kettinglijn namelijk bepalen met behulp van methoden uit de mechanica, en daarin spelen krachten een belangrijke rol. Verder zal blijken dat we ook nog wel wat wiskunde kunnen gebruiken.

De ketting hangt in evenwicht, dus er is een evenwicht van krachten. De zwaartekracht zorgt ervoor dat de ketting hangt zoals hij hangt. Daarbij oefent iedere paperclip een kracht uit op zijn buren. Je kunt die kracht voelen als je de ketting ergens loskoppelt en zo'n los eind met je hand op zijn plaats houdt. Vooral bij een zware ketting zul je je daarbij behoorlijk moeten inspannen!

Bij de paperclipketting valt dat nogal mee, maar we kunnen wel een mooi proefje doen om de spankracht zichtbaar te maken. Koppel de ketting in een willekeurig punt A los, neem een stuk garen, haal dat door een van de twee losse uiteinden en houd daarmee dat kettingstuk weer op zijn oorspronkelijke positie A in evenwicht. De richting van de draad vertelt je hoe de kracht gericht is, en met een katrolletje en een contragewicht zou je de grootte ervan ook nog precies kunnen bepalen (zie figuur 3). Met een tweede draadje door het uiteinde van het andere kettingstuk bij A kun je vervolgens Newtons wet 'actie is reactie' illustreren: de twee spankrachten in A in de twee kettingstukken zijn gelijk, maar tegengesteld gericht. Bovendien zie je ook dat ze allebei gericht zijn langs de raaklijn aan de ketting.

De krachtendriehoek

Wat we zoeken, is een functievoorschrift van een functie $f(x)$ waarvan de grafiek een 'idealisatie' is van een hangende ketting. We kiezen daartoe een coördinatenstelsel en het ligt voor de hand om de y-as daarvan verticaal door het laagste punt van de ketting te kiezen. Misschien ligt het ook voor de hand om de oorsprong in dat minimum te nemen, maar het zal handiger blijken te zijn om dat niet te doen en het minimum een voorlopig nog niet nader bepaalde positieve y-coördinaat te geven.

Voor de oplossing van het probleem om $f(x)$ te bepalen, blijkt het verder nuttig te zijn als je niet alleen kijkt naar de functie zelf, maar ook naar de afgeleide functie $f'(x)$. Dat heeft te maken met de spankrachten in de ketting. We hebben gezien dat die langs de raaklijn gericht zijn en dus moeten we in onze beschouwingen ook raaklijnen, dat wil in wiskundige zin zeggen afgeleide functies, betrekken. We noemen die afgeleide $p(x)$, dus $p(x) = f'(x)$. De oplossing van het kettinglijnprobleem zal er nu in bestaan dat we eerst een formule vinden voor $p(x)$, en vervolgens door integreren een formule voor $f(x)$.

Beschouw nu een stuk ketting tussen twee punten $A = (a, f(a))$ en $B = (b, f(b))$, zoals aangegeven in figuur 4. Op dat stuk ketting werken drie krachten: een spankracht T_A in A, een spankracht T_B in B en de verticaal gerichte zwaartekracht Z_{AB} (niet getekend). Samen zijn die krachten in evenwicht, dus als je de bijbehorende vectoren kop aan staart legt, vormen ze een gesloten driehoek, zoals ook in het rechterdeel van figuur 4 is aangegeven.

De spankrachten zijn gericht langs de raaklijn aan de kettinglijn. We hebben ze in de figuur ontbonden in een horizontale en een verticale component. De horizontale componenten zijn tegengesteld gericht en gelijk van grootte. Die grootte $|H|$ is dus niet afhankelijk van de plaats van A en B langs de kromme, dat wil zeggen *de horizontale component van de spankracht is overal in de ketting even groot.*

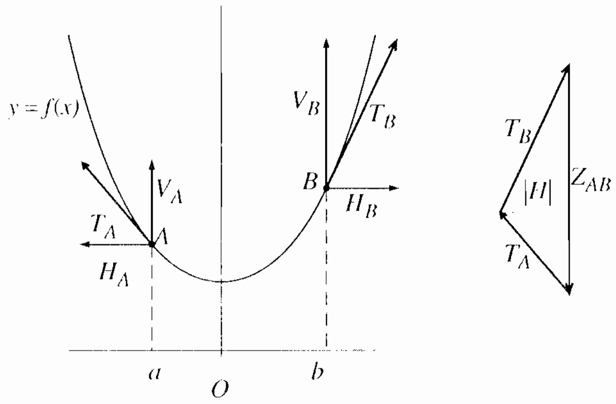

fig. 4 Krachten op het kettingdeel AB

De verticale componenten worden samen opgeheven door de zwaartekracht Z_{AB}, dat wil zeggen:

$$V_A + V_B = -Z_{AB}.$$

We kunnen de verticale componenten ook uitdrukken in de afgeleiden $p(a) = f'(a)$ en $p(b) = f'(b)$, want:

$$p(b) = |V_B|/|H_B| = |V_B|/|H| \text{ en } p(a) = -|V_A|/|H_A| = \\ = -|V_A|/|H| \text{ (de afgeleide in } a \text{ is negatief).}$$

Verder is de zwaartekracht op het stuk AB van de ketting evenredig met de lengte ervan, die we zullen aangeven met s_{AB}. Om precies te zijn, als λ de lineaire massadichtheid van de ketting is, dat wil zeggen de hoeveelheid massa per lengte-eenheid, en g is de versnelling van de zwaartekracht, dan is:

$$|Z_{AB}| = \lambda\, s_{AB} \times g.$$

De conclusie luidt dat:

$$p(b) - p(a) = \frac{\lambda g}{|H|}\, s_{AB} \qquad (1)$$

een formule die ook geldig blijft als A en B aan dezelfde kant van het minimum liggen (maar A wel links van B), zoals men gemakkelijk verifieert.

In figuur 5 hebben we de twee punten op de ketting dicht bij elkaar genomen; het linkerpunt is $(x, f(x))$ en het rechterpunt is $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$, voor kleine Δx. Het stukje ketting kunnen we dan bij benadering als een recht lijnstukje opvatten, en voor de lengte ervan, die we Δs noemen, geldt dus volgens Pythagoras:

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\,.$$

Hierin is $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x = p(x)\Delta x$, en dus kunnen we het voorgaande ook schrijven al:

$$\Delta s \approx \sqrt{1 + (\Delta y/\Delta x)^2}\,\Delta x \approx \sqrt{1 + (p(x))^2}\,\Delta x \qquad (2)$$

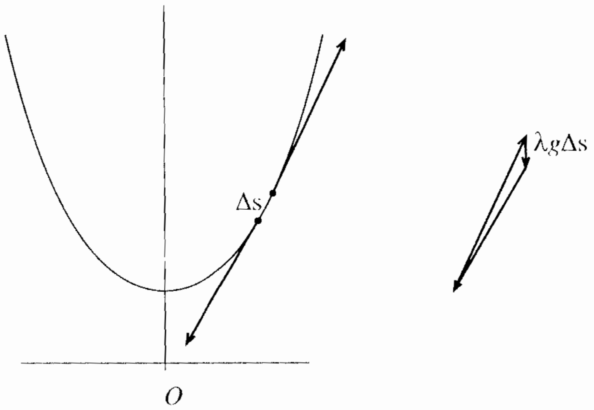

fig. 5 De krachten op een klein stukje ketting

In het krachtendriehoekje rechts is de grootte van verticale component ook nog maar heel klein, namelijk $\lambda g \Delta s$. Formule (1) wordt nu:

$$p(x + \Delta x) - p(x) = \frac{\lambda g}{|H|}\,\Delta s$$

en met gebruikmaking van (2) en de notaties $\Delta p = p(x + \Delta x) - p(x)$ en $1/a = \lambda g/|H|$ krijgen we hieruit

$$\Delta p \approx \frac{1}{a}\sqrt{1 + p^2}\,\Delta x\,. \qquad (3)$$

Tot nu toe hebben we p als functie van x opgevat, maar omgekeerd kunnen we x natuurlijk ook als functie van p zien, want de helling is bij de kettinglijn een monotone, en dus ook omkeerbare functie van x. Schrijf (3) nu als:

$$\frac{\Delta x}{\Delta p} \approx \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}} \qquad (4)$$

dan zien we in het linkerlid een differentiequotiënt van de functie $x = x(p)$, en rechts een gewone functie van p (want a is een constante).

Het wiskundige model

Tot nu toe speelde de wiskunde nog maar een bijrol: het ging vooral over krachten en vergelijkingen die je kunt afleiden uit krachtenevenwichten. Maar nu verschijnt de differentiaalrekening in volle wapenrusting ten tonele. We proberen een wiskundig model te vinden voor de kettinglijn, dat wil zeggen we zoeken een functie waarvan de grafiek model kan staan voor de manier waarop een (geïdealiseerde) ketting hangt. Logisch redeneren en kennis van de mechanica heeft geleid tot de 'vergelijking' (4), die aangeeft wat bij benadering het verband moet zijn tussen x-coördinaat van de ketting en de helling p ter plaatse. Wat de wiskundige vervolgens doet, is dat zij *poneert* dat de gezochte wiskundige modelfunctie $y = f(x)$, met $p(x) = f'(x)$ als afgeleide, voldoet aan de 'ideale' relatie die we uit (4) krijgen door het differentiequotiënt te vervangen door een differentiaalquotiënt:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}} \qquad (5)$$

Let wel, er is hier geen sprake van een wiskundig bewijs, of van een wiskundige limietovergang! Wat we eenvoudig doen, is dat we overstappen van de werkelijkheid, waarin (4) bij benadering geldt, naar een wiskundig model waarin (5) exact geldig is. En vervolgens halen we de wiskundige gereedschapskist te voorschijn om uit (5) de formule voor $f(x)$ te destilleren. Die gereedschapskist bevat tegenwoordig computeralgebra en het is niet moeilijk om daarmee een primitieve functie van het rechterlid van (5) te vinden. We geven het antwoord, dat iedereen door differentiëren direct kan verifiëren:

$$x = a \ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right).$$

Hierbij is ook al verdisconteerd dat $p = 0$ correspondeert met $x = 0$. We hebben immers het minimum van de kettinglijn op de y-as gelegd.

Uit deze vergelijking kunnen we p oplossen. Het resultaat is:

$$p = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}$$

en omdat $p = p(x) = f'(x)$ volgt hieruit dat voor zekere constante C geldt dat:

$$f(x) = a\,\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} + C.$$

We hebben de hoogte van het minimum van de kettinglijn boven de x-as tot nu toe in het midden gelaten. We maken aan die vrijheid nu een einde door voor die hoogte a te kiezen, zodat $C = 0$ wordt. Daarmee is een vergelijking voor de 'wiskundige' kettinglijn gevonden, namelijk:

$$y = a\,\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}\,.$$

We kunnen dit ook schrijven als:

$$\frac{y}{a} = \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$$

Als we (x, y) nu vervangen door (ax, ay) (dat komt gewoon neer op het kiezen van een andere lengte-eenheid in het vlak!), krijgen we de kettinglijn in zijn eenvoudigste gedaante:

$$y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} .$$

Op deze manier zien we dus dat *alle kettinglijnen onderling gelijkvormig zijn*. Er is dus eigenlijk in wezen maar één kettinglijn!

De kracht van het wiskundige model

We zien dat we via een combinatie van mechanica en wiskunde ontzettend veel meer geleerd hebben over kettinglijnen dan met de polynoombenaderingsmethode waar we in het begin over hebben gesproken. We hebben een algemene, wiskundig goed hanteerbare formule gevonden die in vrijwel alle toepassingen gebruikt kan worden en waarmee ook allerlei voor de hand liggende praktische en theoretische vragen kunnen worden opgelost. Hier zijn nog wat verdere onderzoeksvragen die je in een kettinglijnenproject aan de orde zou kunnen stellen:

1. Wat is de lengte van de ketting tussen twee gegeven punten?
2. Wat is de 'doorhang', dat wil zeggen het hoogteverschil tussen de ophangpunten en het laagste punt?
3. Wat is de parameter a bij een gegeven doorhang en een gegeven afstand tussen de twee (op dezelfde hoogte gekozen) ophangpunten?
4. Wat is de parameter a bij een gegeven lengte en een gegeven afstand tussen de twee (op dezelfde hoogte gekozen) ophangpunten?
5. Wat kun je zeggen over de vorm van een ketting waar in het midden een hangertje aan hangt?
6. Wat kun je zeggen over de vorm van een ketting die gedeeltelijk in het water hangt?

De antwoorden op een aantal van de bovenstaande onderzoeksvragen heeft de auteur zelf al in de praktijk op moeten lossen toen hij de figuren bij dit artikel ontwierp. Het is een aardige opdracht om ze met een grafiekentekenprogramma op de computer netjes na te maken!

Tot slot een historische noot. Zoals gezegd liet Huygens in 1646 zien dat de kettinglijn geen parabool is. Het zou echter nog 45 jaar duren voordat bekend werd wat die vorm dan wel was. In 1690 legde Jacob Bernoulli het bepalen van de vorm van de kettinglijn als opgave voor aan de grote Europese wiskundigen van die tijd. Een jaar later publiceerden Christiaan Huygens, Gottfried Wilhelm Leibniz en Jacobs jongere broer Johann hun oplossingen. Dat zij daar heel trots op waren, valt te begrijpen als je bedenkt dat de *Principia* van Newton nog maar net verschenen waren (in 1687), dat Leibniz nog maar kort tevoren zijn differentiaalrekening had gepubliceerd en dat het getal e en de natuurlijke logaritme nog moesten worden uitgevonden!

Jan van de Craats
Koninklijke Militaire Academie, Breda
e-mail: jcr@euronet.nl

Conferentie ICT - praktijken

De tiende conferentie I&I - OWG voor voortgezet onderwijs vindt plaats op vrijdag 19 en zaterdag 20 november in Conferentieoord De Blije Werelt te Lunteren.
Het thema van de conferentie is *ICT-praktijken*.

Deze conferentie brengt het onderwijsveld de jongste ontwikkelingen op het gebied van ICT-beleid en van technologische ontwikkelingen en beleidsmedewerkers wat in het veld wordt ontwikkeld, hoe er met ICT wordt omgegaan en wat er gebeurt met informatiekunde en informatica.
De plenaire inleidingen gaan over de diverse verschijnselen van ICT in de maatschappij. De minister van OC&W, de heer L. Hermans, spreekt de deelnemers toe.
Hermans reikt ook de ICT-idee onderwijsprijzen van de Stichting POCO uit. De bekroonde ideeën moeten leiden tot de ontwikkeling van bruikbare innovatieve programmatuur. Per schooltype zijn twee prijzen beschikbaar: verzorgde studiereizen voor leerkrachten tot een maximum van *f* 5000,- per beurs. Zie http://www.ictonderwijs.nl

Verder zijn er inleidingen, presentaties en workshops over: ICT-vaardigheden leerlingen en docenten; de vakken informatiekunde en informatica; ICT in de technische, alfa-, bèta-, gamma- en kunstvakken; ICT in de leeromgeving; ICT in de schoolorganisatie; milleniumproblemen in de school; spreekbuis, actiegroep van I&I en OWG.

Aanmeldingsformulier en actuele informatie: http://home.svm.nl/I&I/index.htm

opvatten, en voor de lengte ervan, die we Δs noemen, geldt dus volgens Pythagoras:

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\,.$$

Hierin is $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x = p(x)\Delta x$, en dus kunnen we het voorgaande ook schrijven al:

$$\Delta s \approx \sqrt{1 + (\Delta y/\Delta x)^2}\Delta x \approx \sqrt{1 + (p(x))^2}\Delta x \qquad (2)$$

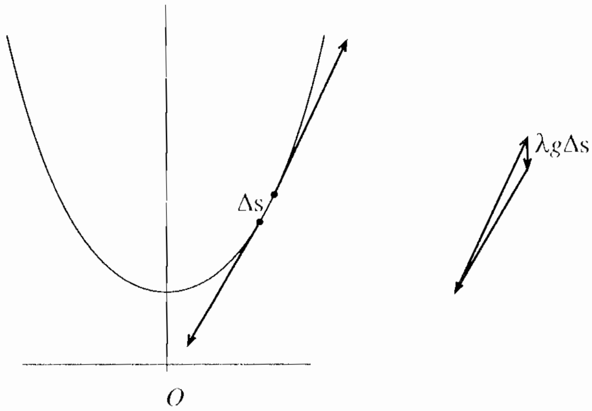

fig. 5 De krachten op een klein stukje ketting

In het krachtendriehoekje rechts is de grootte van verticale component ook nog maar heel klein, namelijk $\lambda g \Delta s$. Formule (1) wordt nu:

$$p(x + \Delta x) - p(x) = \frac{\lambda g}{|H|}\Delta s$$

en met gebruikmaking van (2) en de notaties
$\Delta p = p(x + \Delta x) - p(x)$ en $1/a = \lambda g/|H|$ krijgen we hieruit

$$\Delta p \approx \frac{1}{a}\sqrt{1 + p^2}\Delta x\,. \qquad (3)$$

Tot nu toe hebben we p als functie van x opgevat, maar omgekeerd kunnen we x natuurlijk ook als functie van p zien, want de helling is bij de kettinglijn een monotone, en dus ook omkeerbare functie van x. Schrijf (3) nu als:

$$\frac{\Delta x}{\Delta p} \approx \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}} \qquad (4)$$

dan zien we in het linkerlid een differentiequotiënt van de functie $x = x(p)$, en rechts een gewone functie van p (want a is een constante).

Het wiskundige model

Tot nu toe speelde de wiskunde nog maar een bijrol: het ging vooral over krachten en vergelijkingen die je kunt afleiden uit krachtenevenwichten. Maar nu verschijnt de differentiaalrekening in volle wapenrusting ten tonele. We proberen een wiskundig model te vinden voor de kettinglijn, dat wil zeggen we zoeken een functie waarvan de grafiek model kan staan voor de manier waarop een (geïdealiseerde) ketting hangt. Logisch redeneren en kennis van de mechanica heeft geleid tot de 'vergelijking' (4), die aangeeft wat bij benadering het verband moet zijn tussen x-coördinaat van de ketting en de helling p ter plaatse. Wat de wiskundige vervolgens doet, is dat zij *poneert* dat de gezochte wiskundige modelfunctie $y = f(x)$, met $p(x) = f'(x)$ als afgeleide, voldoet aan de 'ideale' relatie die we uit (4) krijgen door het differentiequotiënt te vervangen door een differentiaalquotiënt:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}} \qquad (5)$$

Let wel, er is hier geen sprake van een wiskundig bewijs, of van een wiskundige limietovergang! Wat we eenvoudig doen, is dat we overstappen van de werkelijkheid, waarin (4) bij benadering geldt, naar een wiskundig model waarin (5) exact geldig is. En vervolgens halen we de wiskundige gereedschapskist te voorschijn om uit (5) de formule voor $f(x)$ te destilleren. Die gereedschapskist bevat tegenwoordig computeralgebra en het is niet moeilijk om daarmee een primitieve functie van het rechterlid van (5) te vinden. We geven het antwoord, dat iedereen door differentiëren direct kan verifiëren:

$$x = a \ln (p + \sqrt{1 + p^2}\,).$$

Hierbij is ook al verdisconteerd dat $p = 0$ correspondeert met $x = 0$. We hebben immers het minimum van de kettinglijn op de y-as gelegd.

Uit deze vergelijking kunnen we p oplossen. Het resultaat is:

$$p = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}$$

en omdat $p = p(x) = f'(x)$ volgt hieruit dat voor zekere constante C geldt dat:

$$f(x) = a\,\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} + C.$$

We hebben de hoogte van het minimum van de kettinglijn boven de x-as tot nu toe in het midden gelaten. We maken aan die vrijheid nu een einde door voor die hoogte a te kiezen, zodat $C = 0$ wordt. Daarmee is een vergelijking voor de 'wiskundige' kettinglijn gevonden, namelijk:

$$y = a\,\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}.$$

We kunnen dit ook schrijven als:

$$\frac{y}{a} = \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$$

Als we (x, y) nu vervangen door (ax, ay) (dat komt gewoon neer op het kiezen van een andere lengte-eenheid in het vlak!), krijgen we de kettinglijn in zijn eenvoudigste gedaante:

$$y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} .$$

Op deze manier zien we dus dat *alle kettinglijnen onderling gelijkvormig zijn*. Er is dus eigenlijk in wezen maar één kettinglijn!

De kracht van het wiskundige model

We zien dat we via een combinatie van mechanica en wiskunde ontzettend veel meer geleerd hebben over kettinglijnen dan met de polynoombenaderingsmethode waar we in het begin over hebben gesproken. We hebben een algemene, wiskundig goed hanteerbare formule gevonden die in vrijwel alle toepassingen gebruikt kan worden en waarmee ook allerlei voor de hand liggende praktische en theoretische vragen kunnen worden opgelost. Hier zijn nog wat verdere onderzoeksvragen die je in een kettinglijnenproject aan de orde zou kunnen stellen:

1. Wat is de lengte van de ketting tussen twee gegeven punten?
2. Wat is de 'doorhang', dat wil zeggen het hoogteverschil tussen de ophangpunten en het laagste punt?
3. Wat is de parameter a bij een gegeven doorhang en een gegeven afstand tussen de twee (op dezelfde hoogte gekozen) ophangpunten?
4. Wat is de parameter a bij een gegeven lengte en een gegeven afstand tussen de twee (op dezelfde hoogte gekozen) ophangpunten?
5. Wat kun je zeggen over de vorm van een ketting waar in het midden een hangertje aan hangt?
6. Wat kun je zeggen over de vorm van een ketting die gedeeltelijk in het water hangt?

De antwoorden op een aantal van de bovenstaande onderzoeksvragen heeft de auteur zelf al in de praktijk op moeten lossen toen hij de figuren bij dit artikel ontwierp. Het is een aardige opdracht om ze met een grafiekentekenprogramma op de computer netjes na te maken!

Tot slot een historische noot. Zoals gezegd liet Huygens in 1646 zien dat de kettinglijn geen parabool is. Het zou echter nog 45 jaar duren voordat bekend werd wat die vorm dan wel was. In 1690 legde Jacob Bernoulli het bepalen van de vorm van de kettinglijn als opgave voor aan de grote Europese wiskundigen van die tijd. Een jaar later publiceerden Christiaan Huygens, Gottfried Wilhelm Leibniz en Jacobs jongere broer Johann hun oplossingen. Dat zij daar heel trots op waren, valt te begrijpen als je bedenkt dat de *Principia* van Newton nog maar net verschenen waren (in 1687), dat Leibniz nog maar kort tevoren zijn differentiaalrekening had gepubliceerd en dat het getal e en de natuurlijke logaritme nog moesten worden uitgevonden!

Jan van de Craats
Koninklijke Militaire Academie, Breda
e-mail: jcr@euronet.nl

Conferentie ICT - praktijken

De tiende conferentie I&I - OWG voor voortgezet onderwijs vindt plaats op vrijdag 19 en zaterdag 20 november in Conferentieoord De Blije Werelt te Lunteren.
Het thema van de conferentie is *ICT-praktijken.*

Deze conferentie brengt het onderwijsveld de jongste ontwikkelingen op het gebied van ICT-beleid en van technologische ontwikkelingen en beleidsmedewerkers wat in het veld wordt ontwikkeld, hoe er met ICT wordt omgegaan en wat er gebeurt met informatiekunde en informatica.
De plenaire inleidingen gaan over de diverse verschijnselen van ICT in de maatschappij. De minister van OC&W, de heer L. Hermans, spreekt de deelnemers toe.
Hermans reikt ook de ICT-idee onderwijsprijzen van de Stichting POCO uit. De bekroonde ideeën moeten leiden tot de ontwikkeling van bruikbare innovatieve programmatuur. Per schooltype zijn twee prijzen beschikbaar: verzorgde studiereizen voor leerkrachten tot een maximum van *f* 5000,- per beurs. Zie http://www.ictonderwijs.nl

Verder zijn er inleidingen, presentaties en workshops over: ICT-vaardigheden leerlingen en docenten; de vakken informatiekunde en informatica; ICT in de technische, alfa-, bèta-, gamma- en kunstvakken; ICT in de leeromgeving; ICT in de schoolorganisatie; milleniumproblemen in de school; spreekbuis, actiegroep van I&I en OWG.

Aanmeldingsformulier en actuele informatie: http://home.svm.nl/I&I/index.htm