Geïnspireerd door een practicum met CABRI kwam **Piet Lemmens** op het idee om zich te verdiepen in de oppervlakte van de 'Driehoek van Wallace'. In dit artikel gaat hij in het bijzonder in op de georiënteerde oppervlakte.

De oppervlakte van de 'Driehoek van Wallace'

Misschien kent u de stelling over de *Rechte van Wallace*, ook wel de *Rechte van Simson* genoemd:

Zij ABC een driehoek en T een punt op de omgeschreven cirkel van ABC. De voetpunten W, V, U van de loodlijnen door T op de respectievelijke (eventueel verlengde) zijden [AB], [AC], [BC] van ABC liggen op één lijn.

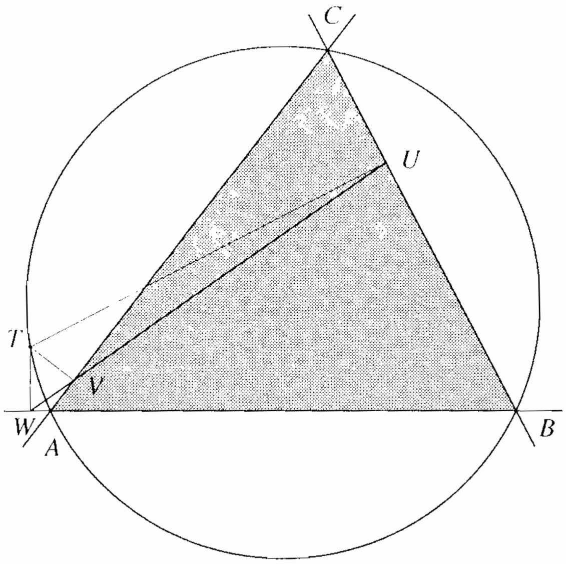

fig. 1 De 'Rechte van Wallace'

Eveneens zal het zo langzamerhand wel bekend zijn dat men deze stelling prachtig kan demonstreren met het programma CABRI, eventueel met animatie waarbij het punt *T* over de omgeschreven cirkel van *ABC* loopt.

Tijdens een practicum met CABRI op de Hogeschool van Utrecht kwam ik op het idee om *T* te laten bewegen over een andere cirkel, concentrisch met de omgeschreven cirkel. Eigenlijk was ik alleen geïnteresseerd in het gedrag van de driehoek door voornoemde voetpunten. Men ziet deze driehoek van vorm veranderen, maar krijgt al snel het idee dat de oppervlakte ervan weleens constant zou kunnen zijn.

Nu heeft CABRI ook de mogelijkheid om de oppervlakte aan te geven. En inderdaad: binnen de nauwkeurigheid van het programma bleek de oppervlakte van de driehoek niet te veranderen!

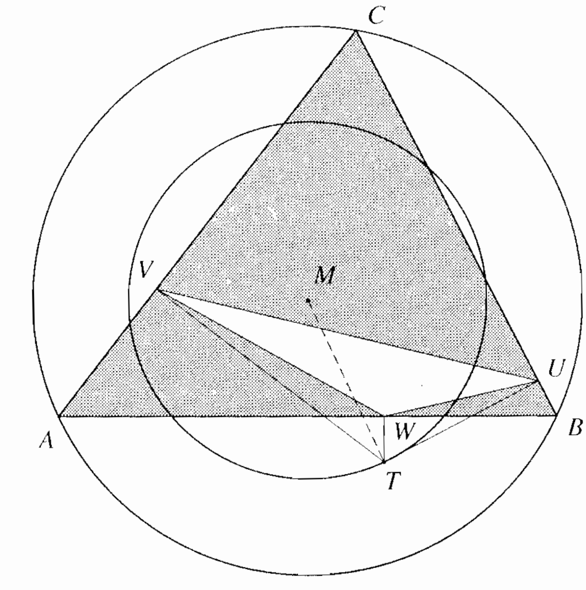

fig. 2 De 'Driehoek van Wallace'

Vermoeden

Zij ABC een driehoek en T een willekeurig punt in het vlak van de driehoek. De oppervlakte van de driehoek met als hoekpunten de voetpunten W, V, U van de loodlijnen door T op de respectievelijke (eventueel verlengde) zijden [AB], [AC], [BC] van ABC hangt alleen af van de afstand van T tot het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ABC.

De volgende stap is dan natuurlijk: kan ik deze claim bewijzen, of is hij als stelling reeds bekend, of is hij niet waar? Van de mij ter beschikking staande boeken bleek dat van Berger ([1, pag. 291]) inderdaad deze stelling te noemen als resultaat van een corollarium bij de formule van Appolonius. De theorie in [1] is geheel georganiseerd in het kader van (gemodificeerde) Gram-matrices.

Dit is nogal ontoegankelijk wanneer men daaraan niet gewend is, maar het is zeer de moeite waard om dit onder de knie te krijgen. Deze matrices geven een grote rijkdom aan stellingen over het collineair zijn van punten en over oppervlakten. Bovendien is er dan geen twijfel meer over de tekens van de oppervlakten, iets wat in meer meetkundige behandelingen een heikele zaak is.

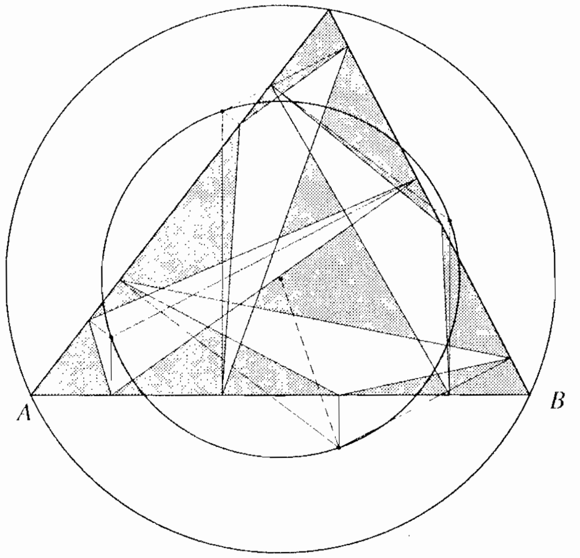

fig. 3 Vier 'Driehoeken van Wallace' in één figuur voor verschillende posities van T op eenzelfde cirkel

Toen ik de eerste versie van dit artikel aanbood aan de *Nieuwe Wiskrant*, bleken de referees goed op de hoogte van de stelling. Een van hen refereerde aan het voorkomen van de stelling in een boek van O. Bottema ([3, pag. 19]), en hij blijkt met een ander bewijs ook voor te komen in een ander boek van Bottema ([2, pag. 225]). Beide bewijzen zijn puur meetkundig en vooral het bewijs in [3] is een juweeltje.

Naar aanleiding hiervan wilde ik in eerste instantie mijn artikel intrekken, maar mede door aanmoediging van de redactie heb ik besloten toch te zoeken naar een zinvolle bijdrage.

In het vervolg laat ik zien hoe men de *georiënteerde* oppervlakte van driehoek UVW kan uitrekenen, onder de *veronderstelling* dat het vermoeden juist is.

We brengen in het vlak van driehoek ABC een orthogonaal (x,y)-coördinatenstelsel aan, zodat een punt P correspondeert met (x_P, y_P). We kiezen A in de oorsprong, B op de positieve x-as, en C in het boven-halfvlak.

Stel M het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ABC, en neem een cirkel Γ met middelpunt M en straal r. De georiënteerde oppervlakte $O(UVW)$ van de driehoek UVW definiëren we dan door

$$2 \cdot O(UVW) = (x_V - x_U)(y_W - y_U) - (y_V - y_U)(x_W - x_U),$$

de z-coördinaat van het uitproduct $UV \times UW$ bij de standaard inbedding van $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^3$.

Deze formule is gemakkelijk te onthouden via de determinant van de matrix

$$\begin{bmatrix} x_U & x_V & x_W \\ y_U & y_V & y_W \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

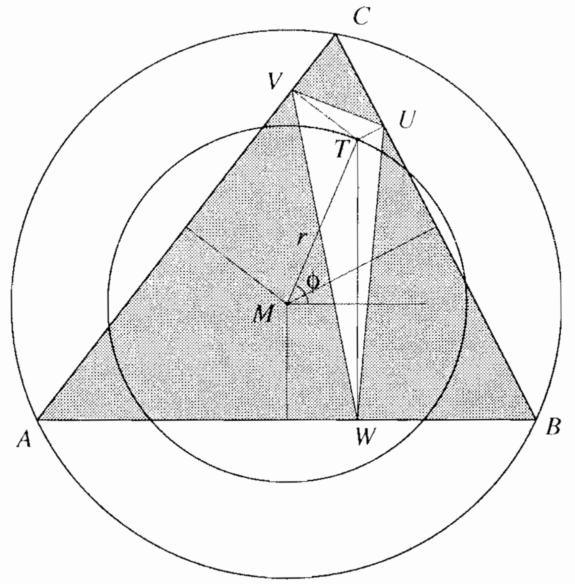

fig. 4 Bij de berekening van de oppervlakte van driehoek UVW

We beschrijven het punt T op Γ met poolcoördinaten r en ϕ, zodat $\phi = 0$ correspondeert met de richting van A naar B, en $r = 0$ met M.

Aangezien de projecties van M op de zijden van ABC op de middens ervan liggen, kunnen we de volgende gelijkheden opstellen:

$$x_U = c - (\tfrac{a}{2} - r \cdot \cos(\phi + \beta)) \cdot \cos(\beta)$$
$$y_U = (\tfrac{a}{2} - r \cdot \cos(\phi + \beta)) \cdot \sin(\beta)$$
$$x_V = (\tfrac{b}{2} + r \cdot \cos(\phi - \alpha)) \cdot \cos(\alpha)$$
$$y_V = (\tfrac{b}{2} + r \cdot \cos(\phi - \alpha)) \cdot \sin(\alpha)$$
$$x_W = \tfrac{c}{2} + r \cdot \cos(\phi)$$
$$y_W = 0.$$

Op de gebruikelijke wijze duiden in deze formules a, b, c de lengten van de zijden en α, β, γ de binnenhoeken van driehoek ABC aan.

Volgens de regels van het uitproduct geldt

$$\begin{aligned} O(UVW) &= O(VWU) = O(WUV) = -O(UWV) = \\ &= -O(WVU) = -O(VUW) \end{aligned}$$

en eventueel prefereren we de definiërende formule voor $O(WVU)$, omdat daarin twee keer y_W voorkomt.

Met behulp van de somformules voor $\cos(\phi \pm \beta)$ en $\cos(\phi \pm \alpha)$ werken we de uitdrukking voor $2 \cdot O(UVW)$ uit tot de vorm

$$c_0 + r \cdot \cos(\phi) \cdot c_1 + r \cdot \sin(\phi) \cdot s_1 + r^2 \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\phi) \cdot m_1 \\ + r^2 \cdot \cos^2(\phi) \cdot c_2 + r^2 \cdot \sin^2(\phi) \cdot s_2$$

waarin $c_0, c_1, s_1, m_1, c_2, s_2$ niet van r en ϕ afhangen, maar mogelijk wel van de parameters $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ van driehoek ABC.

Vervolgens willen we gebruiken dat de functies 1, $\cos(\phi)$, $\sin(\phi)$, $\cos(2\phi)$, $\sin(2\phi)$ onafhankelijk zijn.

Daartoe substitueren we

$$2 \cdot \sin(\phi)\cos(\phi) = \sin(2\phi),$$
$$2 \cdot \cos^2(\phi) = \cos(2\phi) + 1,$$
$$2 \cdot \sin^2(\phi) = 1 - \cos(2\phi).$$

en zien dat $2 \cdot O(UVW)$ onafhankelijk is van ϕ, *dan en slechts dan als* $c_1 = 0, s_1 = 0, m_1 = 0, c_2 = s_2$.
Dat na uitwerking inderdaad aan de condities $c_1 = 0$, $s_1 = 0, m_1 = 0, c_2 = s_2$ voldaan is, blijkt door volstrekt oninteressant en eenvoudig rekenwerk, mits gebruikt wordt dat

$$a = 2R \cdot \sin(\alpha), \quad b = 2R \cdot \sin(\beta), \quad \text{en}$$
$$c = 2R \cdot \sin(\gamma) = 2R \cdot \sin(\alpha + \beta) =$$
$$= 2R \cdot \sin(\alpha)\cos(\beta) + 2R \cdot \cos(\alpha)\sin(\beta),$$

waarin R de straal is van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC.

Wegens het feit dat er genoeg bewijzen blijken te zijn, wil ik me verder bezighouden met de vorm van de uitkomst die volgt uit de veronderstelling dat $O(UVW)$ niet afhangt van ϕ

$$2 \cdot O(UVW) = c_0 + r^2 \cdot c_2$$

waarin c_0 en c_2 alleen afhangen van de parameters van driehoek ABC.
Door speciale situaties te bekijken, kunnen we c_0 en c_2 bepalen.
Eerst bekijken we het extreme geval $r = 0$. Het punt T valt nu samen met het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van ABC. De driehoeken UVW en ABC zijn dus gelijkvormig na draaiing en vermenigvuldiging met de factor 2. Hieruit volgt

$$c_0 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot O(ABC)$$

Vervolgens kiezen we $T = A$. Nu hebben we $r = R$, $V = W = A$, en dus $O(UVW) = 0$.
Dit impliceert

$$0 = c_0 + R^2 \cdot c_2$$

De eindconclusie is hiermee voor het algemene geval

$$O(UVW) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot O(ABC).$$

We zien dat voor $r > R$ de georiënteerde oppervlakten $O(ABC)$ en $O(UVW)$ een tegengesteld teken hebben.
Meetkundig betekent dit, dat men in deze situatie met de klok mee moet om de richting van de vector UV over de kleinste hoek naar die van de vector UW te draaien, terwijl men van AB naar AC juist tegen de klok in draait.

Graag wil ik de referees danken voor hun aanwijzingen, en Jan van de Craats in het bijzonder voor het maken van de illustraties.

Piet Lemmens
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
e-mail: lemmens@math.uu.nl

Literatuur

[1] Berger, M. (1987). *Geometry I*. Berlin: Springer-Verlag.
[2] Bottema, O. (1938). *De Elementaire Meetkunde van het Platte Vlak*. Groningen: Noordhoff.
[3] Bottema, O. (1997). *Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.