De tweede fase biedt nieuwe kansen voor vakkenintegratie binnen een profiel. In het BPS-project is een poging gedaan de lessen kansrekening te integreren met genetica. Naar aanleiding van dit experiment ontwierp **Albert Dorresteijn** een nieuw denkmodel voor het leren van kansrekening: het *kansenbord*.

Kans op blikopeners?

In de keuken van een gezin met drie dochters bevinden zich drie laatjes waarin men het keukengerei pleegt op te bergen, echter zonder enige systematiek. Om misgrijpen te beperken, beschikt het gezin dan ook over drie blikopeners. Hoe groot is de kans dat de jongste dochter desondanks toch misgrijpt, dus een laatje doorzoekt zonder een blikopener te vinden?

Leerling A uit VWO 5 zet bij dit probleem een stip op papier en laat daar drie takken ontspringen, waarbij hij achtereenvolgens 'I, II, III' zet, en denkt 'opener I, opener II, opener III'. Leerling B uit dezelfde klas schrijft hetzelfde, maar denkt daarbij 'laatje I, laatje II, laatje III'. Beide leerlingen zijn in VWO 2, 3, 4 goed ingewijd in de kansrekening, compleet met kansenbomen, roosterdiagrammen en het vaasmodel. En beiden voelen dan ook onmiddellijk aan dat het probleem van de blikopener het beste met een kansenboom kan worden aangepakt. Maar helaas, voordat ze het in de gaten hebben is 50% van de leerlingen reeds de mist ingegaan. Dit constaterend resten ons drie mogelijkheden:

1. het probleem van de blikopener lijkt eenvoudig, maar is dat in feite niet
2. bij kansen spelen de factoren geluk en ongeluk een grote rol; het is daarom vanzelfsprekend dat een groot deel van de leerlingen misgokt
3. de gangbare didactiek bij de kansrekening is zo inefficiënt dat de leerlingen ondanks vele oefeningen maar weinig vat krijgen op de stof.

Kansen en biologie

In het BPS-project (BètaProfielen in het Studiehuis) dat het Centrum voor didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen van de Universiteit Utrecht in eerste instantie opzette met de scholengemeenschappen Broklede uit Breukelen en de Breul uit Zeist, werd in het schooljaar 1997/1998 een genetica-experiment uitgevoerd. Het hoofdstuk kansberekening uit het wiskundeboek en het geneticahoofdstuk uit het biologieboek werden geïntegreerd tot één nieuwe tekst, waarin biologische problemen werden afgewisseld met kanstheoretische vraagstukken. De lessen verliepen redelijk; de leerlingen werkten enthousiast aan de stof in de nieuwe vorm. Toch vielen de resultaten achteraf tegen. De leerlingen begrepen van de kansrekening evenveel als hun voorgangers een jaar geleden. De biologen stelden vast dat de genetica niet beter uit de verf was gekomen dan gebruikelijk. De vakkenintegratie had dus niet veel opgeleverd. Zowel wiskundigen als biologen waren het erover eens dat de kruisingsdiagrammen van de genetica weinig aan helderheid hadden gewonnen door ze te combineren met het vaasmodel en de kansenbomen uit de wiskunde. Het probleem werd gezocht bij de wiskunde.

Kennelijk bestaat de kansrekening bij de leerlingen uit enkele losse denkmodellen waartussen ze nauwelijks verband zien. De kans om bij een vraagstuk toevallig net de goede aanpak te kiezen, is helaas niet groot. Elk model heeft namelijk zijn beperkingen. Het vaasmodel is in de praktijk al te moeilijk bij problemen met twee dobbelstenen, want waarom zou je ervan uit moeten gaan dat de beide dobbelstenen niet dezelfde kleur hebben? Laat staan het verjaardagenprobleem: hoe groot is de kans dat minstens twee leerlingen uit een klas van 25 in dezelfde week jarig zijn? Wie verzint het dan om op dat moment 52^{25} knikkers in een vaas te doen? Bovendien wekt de vaas de suggestie dat elk kansprobleem discreet van aard is. Nee, bij twee dobbelstenen moet je een roosterdiagram gebruiken zoals de biologen doen bij kruisingsproblemen. Maar dit levert onmiddellijk de misvatting dat een kansruimte slechts tweemaal achtereen in disjuncte delen te splitsen zou zijn, eenmaal in de lengte en eenmaal in de breedte. In het algemeen zit je het veiligst met een kansenboom. Maar ook hier helpen zelfs som- en productregels je niet gemakkelijk van een te discrete uitgangsgedachte af (opgebouwd met grafen), zodat je toch weer gauw zit te tellen en vaak ook nog de verkeerde dingen.

In het schooljaar 1998/1999 werd op de Breul de integratie tussen kansrekening en genetica anders opgezet. Eerst werd er een nieuw kansmodel ontwikkeld, waarmee de leerlingen ook in de biologielessen uit de voeten moesten kunnen: het *kansenbord*. Het hoofdstuk kansrekening werd herschreven. En nadat de leerlingen het in de wiskundelessen hadden doorgewerkt, startte de genetica in de biologielessen. De resultaten bleken veelbelovend. Hoewel in de wiskundelessen nauwelijks aandacht besteed was aan genetica, hadden de leerlingen in de biologielessen weinig moeite met hun kruisingsvraagstukken. In de wiskundelessen bleken leerlingen minder last te hebben van de onzekerheid waarmee in voorafgaande jaren naar de antwoorden werd geraden.

Het kansenbord

Het kansenbord is een rechthoek die bestaat uit minstens vier regels. De kansruimte wordt voorgesteld door een *tegelrij*, die op grond van *kansuitspraken* in steeds kleinere delen wordt gesplitst. De kansuitspraken staan links van het bord. In de kop staat een omschrijving van de kansruimte. In de onderste regel(s) worden de verschillende delen van de tegelrij van waarden voorzien (0 of 1 bij een kansvraag en een getal bij een kansfunctie). Voor de vraag naar de kans dat alle kinderen in een gezin van drie van hetzelfde geslacht zijn, wordt een kansenbord van 8 tegels getekend.

	Een gezin met drie kinderen.							
De oudste is een	meisje				jongen			
De tweede is een	m		j		m		j	
De derde is een	m	j	m	j	m	j	m	j
aantal jongens	0	1	1	2	1	2	2	3
aantal meisjes	3	2	2	1	2	1	1	0

fig. 1 Kansenbord voor gezin met drie kinderen

Het kansenbord heeft de goede eigenschappen van het vaasmodel, het roosterdiagram en de kansenboom, maar mist de gebreken. Het voordeel van een kansenbord is dat de kansruimte zowel discreet als continu kan zijn. Het is de bedoeling de kansruimte te *verdelen* in disjuncte (en meetbare) delen. Dit gebeurt op grond van kansuitspraken, waarvan het aantal niet bij voorbaat gebonden is aan een limiet. Het verdeelproces wordt stopgezet zodra de afzonderlijke delen door de gegeven kansvraag of de kansfunctie kunnen worden *gewaardeerd* (van getallen voorzien).
De kop van het kansenbord dient om de kansruimte te beschrijven met alle geldende voorwaarden. Juist deze voorwaarden vormen in de praktijk een belangrijk struikelblok. Het volgende voorbeeld laat zien hoe dat werkt.

Het ideale gezin bestaat volgens velen uit twee kinderen van verschillend geslacht. Zodra reeds één meisje en één jongen is geboren, kiezen niet veel ouders meer voor nog een derde kind. Laten we eens als uitgangspunt kiezen dat er geen gezinnen ontstaan met drie kinderen waarvan de oudste twee reeds verschillend van geslacht zijn. Hoe groot is in dat geval de kans dat alle kinderen in een gezin van drie van hetzelfde geslacht zijn?

Het kansenbord bij deze vraag ziet er als volgt uit.

	Een gezin met drie kinderen, waarvan de oudste twee niet verschillend van geslacht zijn.			
De oudste is een	meisje		jongen	
De tweede is een	m		j	
De derde is een	m	j	m	j
aantal jongens	0	1	2	3
aantal meisjes	3	2	1	0

fig. 2 Gezin met drie kinderen, oudste twee van zelfde geslacht

Kansuitspraken

Het kansenbord van het gezin met drie kinderen zou misschien – net zoals de kansenbomen dit impliciet doen – de suggestie kunnen wekken, dat de verschillende kansuitspraken van dezelfde vorm moeten zijn. Het bekende voorbeeld van de drie deuren, dat hierna wordt beschreven, maakt duidelijk dat kansuitspraken allerlei vormen mogen hebben.

In de laatste ronde van een quiz moet je alleen nog raden achter welke van de drie deuren de hoofdprijs staat. Deze hoofdprijs is een auto. Je kiest een deur, maar deze blijft nog gesloten. De quizmaster opent eerst een andere deur waar de auto niet achter staat en vraagt of je nu je definitieve keuze wilt maken. Wat kun je het beste doen: bij je oude keuze blijven? Van deur wisselen?

Met een kansenbord voor elk van beide strategieën wordt het antwoord op de vraag eenvoudig, zie de eerste twee kansenborden van figuur 3.
Dat het probleem van de drie deuren zoveel discussie opleverde, heeft wellicht te maken met de traditionele onzorgvuldigheid bij het omschrijven van de kansruimtes. De vraag: 'Wat is de kans op de hoofdprijs?' wordt door het publiek dat in onzekerheid verkeert over de strategie van de winnaar, heel anders beantwoord. Het kansenbord heeft nu een rij van 36 tegels nodig, zie het derde kansenbord van figuur 3.
Kansuitspraken kunnen allerlei vormen hebben. Ze dienen slechts te voldoen aan het ene criterium: *op het moment dat een kansuitspraak gebruikt wordt, moet de kansruimte ermee te verdelen zijn.*

	Winnaar kiest een deur. Winnaar is van plan te wisselen van deur.																	
De prijs zit achter deur	A						B						C					
De winnaar wijst aan deur	A		B		C		A		B		C		A		B		C	
De quizmaster opent deur	B	C	C		B		C		A	C	A		B		A		A	B
De winnaar kiest deur	C	B	A		A		B		C	A	B		C		C		B	A
Wint de winnaar de auto?	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0

	Winnaar kiest een deur. Winnaar is niet van plan te wisselen van deur.																	
De prijs zit achter deur	A						B						C					
De winnaar wijst aan deur	A		B		C		A		B		C		A		B		C	
De quizmaster opent deur	B	C	C		B		C		A	C	A		B		A		A	B
De winnaar kiest deur	A	A	B		C		A		B	B	C		A		B		C	C
Wint de winnaar de auto?	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1

	Winnaar kiest een deur. Het publiek weet niet of de winnaar zal wisselen.																																			
De prijs zit achter deur	A												B												C											
De winnaar wijst aan deur	A				B				C				A				B				C				A				B				C			
De quizmaster opent deur	B		C		C				B				C				A		C		A				B				A				A		B	
De winnaar kiest deur	A	C	A	B	A		B		A		C		A		B		B	C	A	B	B		C		A		C		B		C		B	C	A	C
Wint de winnaar de auto?	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1

fig. 3 Kansenborden bij het deurenprobleem

Maar zelfs dit moet ruim opgevat worden: het is mogelijk dat de reeds gevormde verdeling door de kansuitspraak ongewijzigd blijft. Ook is het toegestaan een kansuitspraak te doen die slechts effect heeft op een gedeelte van de kansruimte. Zo heeft een uitspraak over de uitslag van de derde set bij een tenniswedstrijd voor dames geen effect meer op het deel van de kansruimte dat correspondeert met winst van de eerste twee sets voor een van de speelsters, omdat in dat geval geen derde set meer gespeeld wordt.

De kansuitspraken in de biologie zijn kenmerkend voor de genetica.
Het kansenbord bij een monohybride kruising heeft altijd dezelfde structuur, zoals te zien is in het voorbeeld in figuur 4.

Mogelijkheden van de kansenborden

Kansenborden maken kansen zichtbaar. De *som- en productregels* worden daardoor tot een trivialiteit. Met de

	Kruising van zwarte muizen, beide zijn heterozygoot.			
De eicel bevat	Z		z	
De zaadcel bevat	Z	z	Z	z
De huidskleur is	zwart	zwart	zwart	wit

fig. 4 Kansenbord bij kruising van twee zwarte muizen

<table>
<tr><td></td><td colspan="16">Vier munten worden opgegooid.</td></tr>
<tr><td>De eerste munt valt op</td><td colspan="8">kruis</td><td colspan="8">munt</td></tr>
<tr><td>De tweede munt valt op</td><td colspan="4">k</td><td colspan="4">m</td><td colspan="4">k</td><td colspan="4">m</td></tr>
<tr><td>Het aantal kruis is</td><td colspan="4">2</td><td colspan="8">1</td><td colspan="4">0</td></tr>
<tr><td>De derde munt valt op</td><td colspan="2">k</td><td colspan="2">m</td><td colspan="4">k</td><td colspan="4">m</td><td colspan="2">k</td><td colspan="2">m</td></tr>
<tr><td>Het aantal kruis is</td><td colspan="2">3</td><td colspan="6">2</td><td colspan="6">1</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>De vierde munt valt op</td><td>k</td><td>m</td><td colspan="3">k</td><td colspan="3">m</td><td colspan="3">k</td><td colspan="3">m</td><td colspan="2">k</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Het aantal kruis is</td><td>4</td><td colspan="4">3</td><td colspan="6">2</td><td colspan="4">1</td><td>0</td></tr>
</table>

fig. 5 Kansenbord bij het opgooien van vier munten. Het aantal keer kruis wordt geteld

kansfunctie (*stochast*) in de onderste regel van het kansenbord wordt de aandacht gemakkelijk gevestigd op de *kansverdelingen*. Het maken van een *kanshistogram* wordt teruggebracht tot het tellen van tegels. De *verwachtingswaarde* kan worden opgevat als de verwachte gemiddelde score van de kansfunctie bij een aantal herhalingen van het kansproces dat gelijk is aan het aantal tegels.
Het is mogelijk in het kansenbord hergroeperingsrijen in te bouwen waardoor ook de binomiale verdeling zichtbaar gemaakt kan worden, zoals het volgende voorbeeld laat zien. In een hergroeperingsrij worden delen van de kansruimte weer samengevoegd omdat dat voor de kansfunctie geen probleem is. Het bord begint nu te lijken op dat van Galton, zie het voorbeeld in figuur 5.

Didactiek

Het eerste experiment was hoopgevend, maar nog niet alle problemen zijn opgelost. In de eerste versie van het hoofdstuk 'Kansenbomen' moesten de leerlingen allereerst kansen berekenen bij verschillende soorten schietschijven en dartborden. Op deze wijze werd het kansbegrip gekoppeld aan oppervlaktemeting. In een tweede paragraaf werd het kansenbord geïntroduceerd. Daarbij kregen de leerlingen slechts de opdracht een gegeven tegelrij te verdelen aan de hand van gegeven kansuitspraken. Pas in een volgend stadium moesten de leerlingen zelf kansuitspraken bedenken. Het aantal tegels van de tegelrij werd voortdurend gegeven. Uiteindelijk moesten de leerlingen de overgang naar de kansenbomen maken. Deze bomen werden nu geïntroduceerd als kansenborden waar de roosterstructuur vervangen was door takken. De overgang naar de kansenbomen lijkt nodig om ook problemen met meer dan 50 tegels te kunnen aanpakken. Bovendien kun je met de breuken die bij de takken van de bomen staan, ontdekken hoeveel tegels je in een kansenbord moet zetten. Met name de overgang naar de kansenbomen verliep gebrekkig en moet in de volgende versie van het hoofdstuk verder worden uitgewerkt. Ook zal er nog goed nagedacht moeten worden over de wijze van inpassing in het programma van de tweede fase, ook rekening houdend met de biologie.

Het is duidelijk dat het tekenen van kansenborden meer tijd vraagt dan kansenbomen. Werken met voorbedrukte vellen maakt het de leerlingen erg gemakkelijk. Ook het vooraf geven van het aantal nodige tegels lijkt op het omzeilen van problemen. Toch is het in de beginfase wellicht een goede aanpak, daar de vraag naar het aantal tegels (het aantal knikkers in de vaas) – misschien de moeilijkste van de kansrekening – op deze wijze meer naar achteren schuift. De leerlingen krijgen dan de tijd om het grondprobleem te ontdekken.

Het wiskundeprogramma in de tweede fase ruimt veel tijd in voor de kansrekening. De leerboeken staan vol met grote verzamelingen opgaven. Er wordt steeds meer uit de kast gehaald. De vraag naar de efficiëntie wordt daardoor des te dringender. Misschien geven kansenborden een antwoord. In ieder geval is met kansenborden gemakkelijk duidelijk te maken dat het niet gaat om wat er allemaal in de lade (of in de kast) ligt, maar dat het draait om de vraag: 'Waar is de blikopener?' Pas als een leerling bij de kansrekening zijn neiging weet te onderdrukken om aan de laatjes te gaan trekken, maar bewust kiest voor de kansuitspraak: 'blikopener I ligt in laatje A, B of C' en zo uiteindelijk komt tot een rij van 6 tegels, weten we dat hij het begrepen heeft.

Albert Dorresteijn, docent wiskunde op de KSG de Breul te Zeist