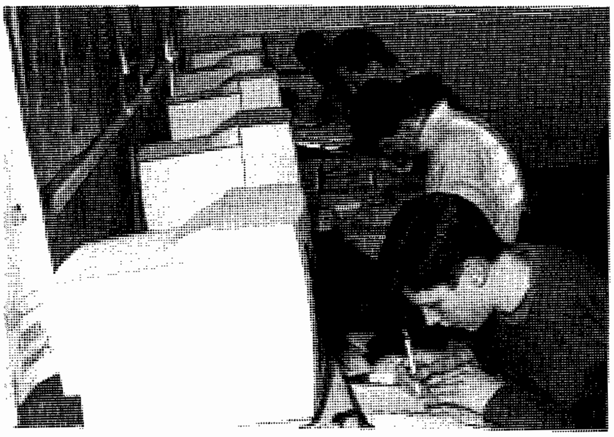
In het kader van het Profi-project experimenteerden drie scholen bij Voortgezette Meetkunde uit het profiel Natuur & Techniek met praktische opdrachten als schoolonderzoek. **Irene Gosselink** analyseerde de resultaten als onderdeel van haar afstudeerproject voor de studie wiskunde.

Praktische opdrachten Voortgezette Meetkunde

'Yes!' klinkt het gedempt door het computerlokaal van het Liemers College in Zevenaar, waar op 3 december 1998 een schoolonderzoek voor wiskunde B VWO plaatsvindt. De constructie van een meetkundige figuur op het computerscherm heeft blijkbaar nóg een nieuwe ontdekking, een nieuw vermoeden opgeleverd. Nu het bewijs nog …

Praktisch schoolonderzoek

Een schoolonderzoek dat vier uur duurde, waarbij in tweetallen samengewerkt werd, waarbij koffie, thee en stroopwafels werden rondgedeeld, waarbij een onderzoek naar een meetkundig probleem werd uitgevoerd en een verslag over dat onderzoek werd geschreven: voor zowel leerlingen als docenten was het een nieuwe ervaring.
Naast het Liemers College in Zevenaar experimenteerden ook het Gregorius College in Utrecht en het Cals College in Nieuwegein dit schooljaar met een praktische opdracht als schoolonderzoek, als voorbereiding op de Tweede Fase. De scholen behoren tot de groep van elf Profi-scholen waar al met het nieuwe wiskunde B-programma voor de Tweede Fase wordt gewerkt.



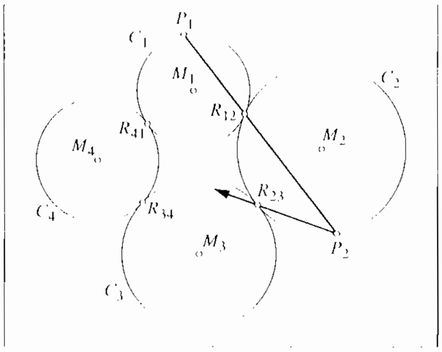
Praktisch schoolonderzoek op het Gregorius College

Het experiment vond plaats in samenwerking met het Freudenthal Instituut, waar de opdrachten voor het schoolonderzoek en voor de voorbereiding daarop geschreven werden. Gekozen werd voor opdrachten over stof uit het domein Voortgezette Meetkunde. Dat domein omvat 120 studielasturen uit het profiel Natuur & Techniek. Het zijn opdrachten die worden uitgevoerd met behulp van het computerprogramma Cabri. Met dit programma kunnen meetkundige figuren worden geconstrueerd. Voorafgaand aan het schoolonderzoek hadden de leerlingen de lespakketjes 'Afstanden, grenzen en gebieden' en 'Denken in cirkels en lijnen A en B'[1] doorgewerkt en met één of meer opdrachten, die vergelijkbaar waren met het schoolonderzoek, geoefend. In de genoemde lespakketjes wordt ook met het programma Cabri geoefend.

Op het Liemers College volgde twee weken na het praktisch schoolonderzoek een proefwerk. Hierbij moesten leerlingen individueel vragen beantwoorden die waren opgesteld naar aanleiding van het verslag dat zij met z'n tweeën schreven. Dit was noodzakelijk, omdat de directie van de school wilde dat de leerlingen individueel beoordeeld konden worden.
De leerlingen van het Liemers College konden bij het schoolonderzoek kiezen uit twee opdrachten; op de andere scholen werd één opdracht gegeven, die in drie uur tijd moest worden afgerond. Overigens werd het kiezen uit twee opdrachten door de leerlingen wél als zinvol ervaren: 'dan kun je de opdracht kiezen die je het beste ligt', maar door de docenten nauwelijks: zij hadden de indruk dat de keuze van de leerlingen vrij oppervlakkig was.

Doorsteeklijnen in rakende cirkels

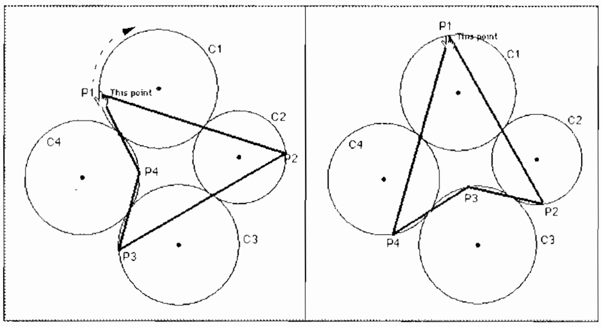
De opdracht die door verreweg de meeste leerlingen van het Liemers College werd gekozen, en ook als enige opdracht bij het schoolonderzoek op het Gregorius College en het Cals College werd gebruikt, had als titel 'Rakende cirkels'. In deze opdracht ging het om een onderzoek naar doorsteeklijnen in kringen van rakende cirkels. Een *kring van n rakende cirkels* is een kring waarin geldt dat de cirkels C_1 en C_2, C_2 en C_3, …, C_n en C_1 elkaar raken in respectievelijk de raakpunten R_{12}, R_{23}, …, R_{n1}. Hieronder staat een afbeelding voor $n = 4$:



Om de *doorsteeklijnen* te construeren, wordt een willekeurig punt P_1 op C_1 gekozen en de lijn door P_1 en R_{12} getekend. Deze lijn snijdt C_2 behalve in R_{12} ook nog in een ander punt: P_2. Vanuit dit punt kan weer een doorsteeklijn getekend worden: de lijn door P_2 en R_{23}. Het snijpunt van deze lijn met C_3 is het punt P_3. Enzovoort.

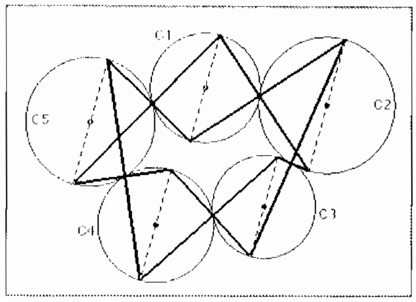
Vermoedens vinden met Cabri

Om tijd te besparen (en ook omdat een goede constructie van rakende cirkels voor de leerlingen te moeilijk is) waren de figuren met 3, 4, 5, 6, 7, en 8 rakende cirkels al van tevoren gemaakt. De leerlingen konden die figuren met Cabri ophalen en zo direct aan de slag gaan met het construeren van doorsteeklijnen. Een vermoeden dat vrijwel alle leerlingen snel vonden is, dat bij vier cirkels de vierde doorsteeklijn weer in P_1 uitkomt, met andere woorden: $P_5 = P_1$. Kenmerkend voor het programma Cabri is dat de figuren bewogen kunnen worden: je kunt bijvoorbeeld het punt P_1 over de cirkel C_1 laten bewegen; de posities van de doorsteeklijnen veranderen dan mee. Zo kan een vermoeden getest worden: geldt het werkelijk voor alle posities van punt P_1?



Ook de kring van rakende cirkels zelf kan van vorm veranderen, terwijl de cirkels blijven raken. Het vermoeden dat $P_5 = P_1$ blijkt niet altijd waar te zijn: als er cirkels uit de kring elkaar *inwendig* raken, kan het mis gaan. Op die gevallen zal het artikel niet verder ingaan.

Er valt nog meer te ontdekken:
- Als n oneven is, komt niet de n-de, maar pas de $2n$-de doorsteeklijn terug in het beginpunt P_1.
- De lijnstukken P_1M_1, P_2M_2, enzovoort zijn evenwijdig.
- In een cirkel C_i in een kring van een oneven aantal cirkels is het lijnstuk P_iP_{i+n} een middellijn van deze cirkel, en al deze middellijnen lopen evenwijdig.



Het vinden van vermoedens lukte de leerlingen wel, maar kostte veel tijd. Waarschijnlijk doordat in de opdracht niet gericht naar een bepaald vermoeden werd gevraagd en er vrij veel te ontdekken viel. Voor een opdracht die in drie à vier uur afgerond moet worden, is het wellicht beter een paar vrij gerichte onderzoeksvragen te stellen, waarbij leerlingen bijvoorbeeld één van die twee vragen mogen vervangen door een vraag over een eigen ontdekking.

Bewijzen

Afhankelijk van de school moesten minstens één of twee van de in het verslag vermelde vermoedens bewezen worden.

$P_5 = P_1$

Het bewijs dat alle leerlingen wel hadden willen leveren, namelijk dat voor $n = 4$ geldt: $P_5 = P_1$, bleek niet mee te vallen. Slechts een enkeling gaf een (zo goed als) correct bewijs. Wel kwam ongeveer een derde van de leerlingen een heel eind op weg. De meesten van hen maakten daarbij gebruik van de stelling van de omtrekshoek: *Als drie (verschillende) punten A, B, C op de cirkel met middelpunt M liggen, dan geldt: de omtrekshoek ABC is de helft van de bijbehorende middelpuntshoek AMC.* Twee leerlingen van het Liemers College gaven het bewijs van voorbeeld 1 op pagina 6. Zij schrijven dat ze het volgende willen bewijzen: $P_1P_2P_3P_4$ is een vierhoek, met andere woorden:

$$\angle P_1 + \angle P_2 + \angle P_3 + \angle P_4 = 360°.$$

Dat vier punten een vierhoek vormen, is evident. Het zegt bovendien niets over het punt P_5. Er zit dus iets scheef in de redenering. Toch kan wat in het bewijs berekend werd, namelijk dat:

$$\angle R_{41}P_1R_{12} + \angle R_{12}P_2R_{23} + \angle R_{23}P_3R_{34} + \angle R_{34}P_4R_{41} = 360°$$

gebruikt worden voor een correct bewijs. Omdat P_1, R_{12} en P_2 op één lijn liggen, evenals P_2, R_{23} en P_3 en als P_3, R_{34} en P_4, volgt dat in de 'vijfhoek' $P_1P_2P_3P_4R_{41}$ geldt:

$$\angle R_{41}P_1R_{12} + \angle R_{12}P_2R_{23} + \angle R_{23}P_3R_{34} + \angle R_{34}P_4R_{41} = 360°$$

<u>vermoeden</u>: ~~omgaan~~ 4 rakende cirkels vermoeden wij dat je 1 keer rond moet gaan om weer in het beginpunt te eindigen. zie plaatje 5.

<u>bewijs</u>: We moeten bewijzen dat $P_5 = P_1$ dus dat het een vierhoek is dus 360°.

<u>te bewijzen</u>: de rode lijn in plaatje 1 is een vierhoek dus 360°

<u>bewijs</u>: eerst verbinden we alle middelpunten met elkaar dit vormt een vierhoek → 360° alle hoeken bij elkaar.

$\angle P_1 = \frac{1}{2}\angle m_1$ middelpunthoek

$\angle P_2 = \frac{1}{2}\angle m_2$ "

$\angle P_4 = \frac{1}{2}\angle m_4$ "

$\angle m_3 = 360 - \angle m_1 - \angle m_2 - \angle m_4$ "

vanuit de snijpunten van C_2 en C_3 trekken we een lijn op boog C_3 dit punt noemen we K, vanuit dat punt trekken we een lijn naar het snijpunt tussen C_4 / C_3

$\angle K = \frac{1}{2}\angle m_3$ middelpunthoekstelling

$\angle K = 180 - \frac{1}{2}\angle m_1 - \frac{1}{2}\angle m_2 - \frac{1}{2}\angle m_4$ "

$\angle K + \angle P_{3,2} = 180°$ koordenvierhoek

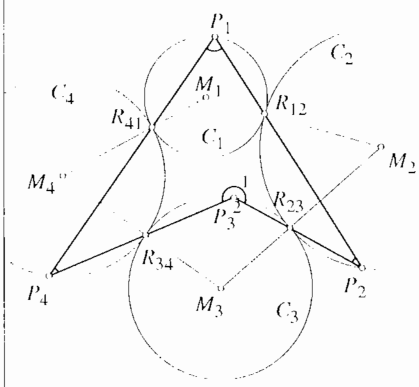
$180 - \frac{1}{2}\angle m_1 - \frac{1}{2}\angle m_2 - \frac{1}{2}\angle m_4 = 180 - \angle P_{3,2}$

$\angle P_{3,1} = 360 - \angle P_{3,2} = 360 - (\frac{1}{2}\angle m_1 + \frac{1}{2}\angle m_2 + \frac{1}{2}\angle m_4)$

$\angle P_{3,1} = 360 - (\angle P_1 + \angle P_2 + \angle P_4)$

$360° = \angle P_1 + \angle P_2 + \angle P_{3,1} + \angle P_4$

<u>conclusie</u>: nu we die van 4 rakende cirkels hebben bewezen gaan ~~6 op~~ en 8 en 10 op dezelfde manier



Voorbeeld 1: Uit het werkstuk van twee leerlingen van het Liemers College

<u>gegeven</u>: 3 rakende cirkels C_1, C_2, C_3 ~~met~~ met middelpunten $M_1 M_2 M_3$ en raakpunten $R_1 R_2$ en R_3

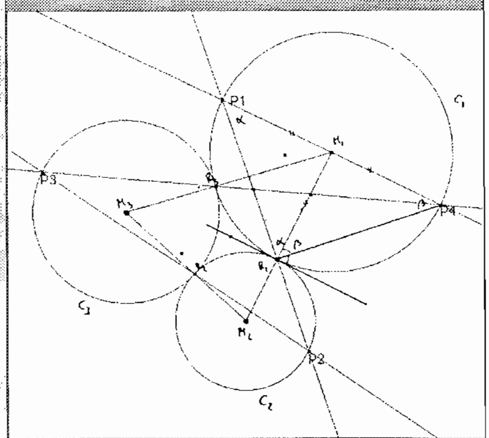
<u>te bewijzen</u>: M_1 ligt op P_1P_4, dus $\angle P_1R_1P_4 = 90°$

<u>bewijs</u>:

1) $\lvert M_1P_4\rvert = \lvert M_1P_1\rvert = \lvert M_1R_1\rvert$	M_1 middelpunt cirkel (R_1 en P_1 en P_4 liggen op de)
2) $\angle M_1P_1R_1$ noemen we α	
3) $\angle M_1P_1R_1 = \angle M_1R_1P_1 = \alpha$	gelijkbenige driehoek
4) $\angle M_1P_4R_1$ noemen we β	
5) $\angle M_1R_1P_4 = \angle M_1P_4R_1 = \beta$	gelijkbenige driehoek
6) $\angle M_1P_1R_1 + \angle P_1R_1M_1 + \angle M_1R_1P_4 + \angle R_1P_4M_4 = \alpha + \alpha + \beta + \beta = 180°$	hoekensom driehoek + stap 3+5
7) $\alpha + \beta = 90° = \angle P_1R_1M_1 + \angle M_1R_1P_4 = \angle P_1R_1P_4$	volgt uit 6
8) P_1P_4 = middellijn van cirkel C_1	stelling van Thales
9) M_1 ligt dus op P_1P_4	volgt uit 8
Q.E.D	

zie plaatje XIII

Als je de punten P_5 en P_6 ook tekent kan je op deze manier ook bewijzen dat M_2 op P_2P_5 ligt en M_3 op P_3P_6 (zie plaatje XIV)



Voorbeeld 2: Uit het werkstuk van twee leerlingen van het Liemers College

Daaruit volgt dat $\angle P_4R_{41}P_1 = 180°$ en dus dat de doorsteeklijn P_4R_{41} door P_1 gaat. Dus geldt: $P_5 = P_1$. De leerlingen die dit of een soortgelijk bewijs gaven, zaten dus op een goed spoor, maar misten deze subtiele afronding van de redenering.

Het vermoeden dat $P_5 = P_1$ is veel eenvoudiger te bewijzen als je gebruikt dat de lijnstukken P_1M_1, P_2M_2, enzovoort evenwijdig zijn. Uiteindelijk zijn dan P_1M_1 en P_5M_1 evenwijdig en *moet* P_5 op de lijn P_1M_1 liggen. Je moet dan nog bekijken of P_5 samenvalt met P_1 (wat gebeurt als n even is) of dat P_5 niet samenvalt met P_1 maar tegenover P_1 op de cirkel C_1 ligt (wat gebeurt als n oneven is). Dát de lijnstukken evenwijdig zijn, is vrij eenvoudig aan te tonen: alle leerlingen die dit vermoedden, konden het ook wel bewijzen. Zeer weinigen van hen gebruikten dit echter in hun bewijs dat $P_5 = P_1$.

P_1P_4 is een middellijn als $n = 3$

Een tweetal van het Liemers College gaf het bewijs van voorbeeld 2 op pagina 6. Het bewijs maakt geen gebruik van wat er in de cirkels C_2 en C_3 gebeurt: het gebruikt dus niet dat P_1R_1 en P_4R_1 doorsteeklijnen zijn. Dat kan niet goed zijn. Maar waar zit de fout?

Proefwerk over het verslag

Op het proefwerk over het verslag kregen de beide leerlingen van voorbeeld 2 de volgende vraag:

> Bij het bewijs dat M_1 op P_1P_4 ligt (bladzijde 6 en 7 van het verslag) heb je al gebruikt dat dit het geval is.
>
> Geef aan in welke stap je dat gedaan hebt.

Beide leerlingen waren in staat deze vraag goed te beantwoorden. Over het algemeen konden leerlingen bij het proefwerk de fouten die zij in een bewijs gemaakt hadden, aanwijzen. Het verbeteren of opnieuw uitvoeren van een bewijs lukte bij vrijwel alle leerlingen alléén als dit bewijs slechts enkele stappen vergde.

In het proefwerk werden vragen gesteld die aansloten bij het verslag dat de leerlingen hadden geschreven. Achteraf leek het de docenten beter de leerlingen mondeling over hun verslag te ondervragen. Dan kun je leerlingen met een extra hint op het goede spoor zetten om een mislukt onderdeel uit het verslag alsnog uit te voeren. Bij het proefwerk gebeurde dit ook, maar het kwam voor dat leerlingen ook met de hint niet verder kwamen.

Ook zouden de docenten in het vervolg niet twee cijfers geven, één voor het verslag en één voor de individuele toets zoals nu het geval was, maar de individuele toets zien als iets waarmee je het cijfer voor het verslag kunt verbeteren. Dit omdat de individuele toetsen niet onderling vergelijkbaar zijn: ieder tweetal krijgt immers heel andere vragen.

Verrassingen

Zoals al eerder gezegd, valt er veel te ontdekken naar aanleiding van de rakende cirkels met doorsteeklijnen. Enkele leerlingen vonden behalve de vermoedens waar de opdracht min of meer op aanstuurde, ook nog iets heel anders. Het meest verrassende was de volgende ontdekking:

Als de raakpunten hetzelfde blijven, maar één van de cirkels verandert van grootte waardoor de andere cirkels mee veranderen van grootte, dan blijft de gevormde figuur hetzelfde. Onder de gevormde figuur verstaan wij een figuur die bestaat uit de lijnen van $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_1$.

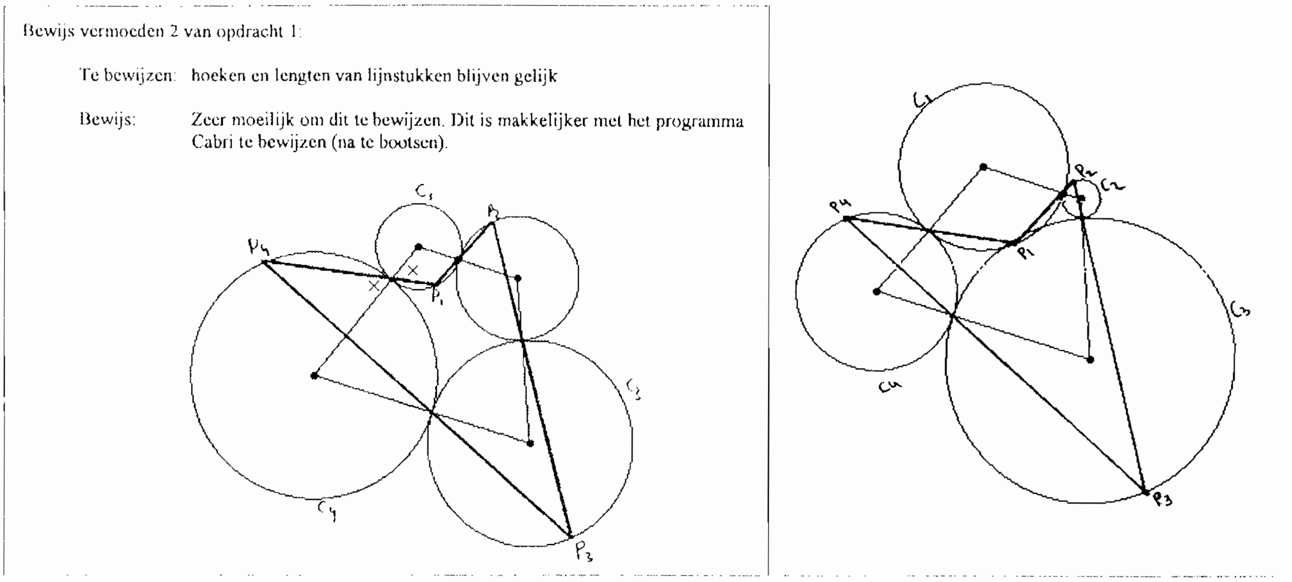
Waarschijnlijk hebben de leerlingen van het Cals College die dit schreven zich in de eerste regel van het vermoeden vergist: zij lieten de middelpunten op hun plaats en niet de raakpunten. Zij konden hun vermoeden niet bewijzen, maar voegden ter motivatie wel twee Cabri-figuren aan hun verslag toe, zoals te zien is in voorbeeld 3, pagina 6. Het vermoeden is juist wanneer de hoeken die in de figuur met een kruisje gemarkeerd zijn, constant blijven. Blijkbaar liet Cabri die hoeken constant toen de leerlingen een cirkel van grootte lieten veranderen. Een tweetal van het Gregorius College kwam een heel eind met het bewijs van dit vermoeden.

Verslagen

Vier en vooral drie uur bleek een heel korte tijd om én vermoedens te vinden met behulp van Cabri én deze vermoedens te bewijzen én een verslag te schrijven. Sommige leerlingen zaten tot het laatst toe hardnekkig over een bewijs gebogen dat ze wílden vinden en moesten het vervolgens haastig opschrijven. Tijd voor afwerking was er niet altijd, maar vrijwel alle verslagen waren overzichtelijk en sommige zagen er zelfs mooi uit.

Het was voor veel leerlingen nieuw wat er nou in zo'n verslag moest worden geschreven. Een goed en prettig leesbaar verslag kan bestaan uit de volgende onderdelen:

- een inhoudsopgave
- een beschrijving van het probleem (zodat het verslag leesbaar is voor iemand die de opdracht niet kent)
- een formulering van de doelstelling(en) van het onderzoek
- vermoedens, en een korte beschrijving van hoe deze vermoedens werden gevonden
- stellingen en bewijzen
- een nawoord waarin kort beschreven wordt wat met het onderzoek bereikt is en wat niet is gelukt
- (Cabri-)figuren.


Bewijs vermoeden 2 van opdracht 1:

Te bewijzen: hoeken en lengten van lijnstukken blijven gelijk

Bewijs: Zeer moeilijk om dit te bewijzen. Dit is makkelijker met het programma Cabri te bewijzen (na te bootsen).

Voorbeeld 3: Uit het werkstuk van twee leerlingen van het Cals College

Werksfeer

De docenten waren enthousiast over de werksfeer tijdens het schoolonderzoek; er werd gedurende de volle tijd erg hard gewerkt. De wiskundige resultaten vielen hen echter tegen. Eigenlijk werden alleen heel eenvoudige vermoedens werkelijk correct bewezen. Het interessantste bewijs uit de opdracht, het bewijs dat de doorsteeklijnen in het startpunt terugkomen, is tamelijk subtiel en daardoor waarschijnlijk te moeilijk. Wél kwamen veel leerlingen op goede ideeën voor een bewijs, maar het lukte niet die ideeën om te zetten in een correcte redenering.

Hierbij moet vermeld worden dat het verschil tussen de opgaven uit de lespakketjes en de opdrachten die voor dit schoolonderzoek-experiment werden geschreven vrij groot was: de opgaven uit de pakketjes waren korter, meer voorgestructureerd en wiskundig minder complex. Overigens werd het bewijzen in het algemeen door veel leerlingen moeilijk gevonden. Waarbij we ook moeten bedenken dat het domein Voortgezette Meetkunde niet bedoeld is voor alle wiskunde B-leerlingen, maar alleen voor hen die wiskunde B2 van het profiel Natuur & Techniek volgen.

Eindtermen

In de eindtermen voor het subdomein 'Bewijzen in de vlakke meetkunde'[2] wordt, naast het gebruiken van verschillende technieken voor het geven van een bewijs, grote nadruk gelegd op het onderzoeken, formuleren van vermoedens, het onderscheiden van vermoedens, stellingen en bewijzen en het doorgronden van een bewijs.

Wat bij de leerlingen sterk aanwezig blijkt, is het inzicht dat een vermoeden vraagt om een bewijs. De verslagen wekken de indruk dat de leerlingen het onderscheid tussen stelling, vermoeden, experiment met de computer en bewijs wel aanvoelen. In hun formuleringen komt dit onderscheid echter nog niet altijd even helder naar voren, zoals bijvoorbeeld te zien is in voorbeeld 3. Door de verslagen werd ook zichtbaar dat een aantal leerlingen behoorlijk worstelen met het juist formuleren van vermoedens en bewijzen, terwijl anderen daar al verder en preciezer in zijn.

Eigenlijk komt alles wat gevraagd wordt in de eindtermen van het subdomein 'Bewijzen in de vlakke meetkunde' in een praktische meetkunde-opdracht bij elkaar; niet alleen het bewijzen, maar met name ook het onderzoeken en het formuleren kan met behulp van een praktische opdracht goed worden geoefend en getoetst.

Onbevredigend gevoel

Dat een verslag ook waarde heeft als het bewijzen niet of slechts gedeeltelijk gelukt is, is voor veel leerlingen nog wennen. De meesten dachten dat zij het schoolonderzoek heel slecht hadden gemaakt, terwijl zij uiteindelijk wel een voldoende kregen. Op de vraag hoe ze het vond om een onopgelost vraagstuk in het verslag te moeten laten staan, antwoordde een leerling:

Het is wel logisch om het te laten staan, want dan kan men jouw stappen zien. Maar het geeft wel een onbevredigend gevoel.

Leerlingen geven het zoeken naar een bewijs dan ook niet snel op. Ik heb een aantal keren gezien dat leerlingen, ondanks het advies van de docent om een ander bewijs te proberen of aan het verslag te gaan werken, zich bleven vastbijten in het bewijs waar ze mee bezig waren.

Beoordeling

Vooraf kregen de leerlingen een beoordelingsschema te zien, zodat ze wisten waarop zou worden gelet. Op het Liemers College zag dat schema er als volgt uit (tussen haakjes het aantal punten per onderdeel; leerlingen kregen vooraf één punt):

Titel, doel probleemstelling	$(\frac{1}{2})$
– heldere formulering	
Onderzoeksverslag, vermoedens	(4)
– duidelijke beschrijvingen van de gevolgde werkwijze	
– duidelijke toelichting	
– gebruik van Cabri	
– gebruik van tekeningen	
– diepgang	
– wiskundige correctheid	
– originaliteit	
Stellingen, bewijzen, conclusies	(4)
– juiste formulering	
– wiskundige correctheid	
– duidelijkheid	
– ondersteuning door tekeningen	
– diepgang	
– originaliteit	
Verzorging	$(\frac{1}{2})$
– lay-out, overzichtelijkheid	
– spel- en taalfouten	
– tekeningen	

Het schema is heel globaal en dat kan ook niet anders: geen twee verslagen behandelen precies dezelfde vragen. Toch bleek op het Liemers College, waar twee docenten ook 'elkaars' werk nakeken, in ieder geval de volgorde van de verslagen, naar cijfer gerangschikt, redelijk overeen te komen.

Samenwerken leuk, tijd veel te kort

Vrijwel alle leerlingen vonden het schoolonderzoek leuker dan een 'gewoon' schoolonderzoek. Twee leerlingen hierover:

Aan de ene kant heel leuk: meer keuzemogelijkheid, je kunt zelf bepalen welke richting je op gaat. Aan de andere kant ook moeilijk, want als je een bewijs echt niet kunt vinden, word je wel erg aan je lot overgelaten.

Het werd gewaardeerd dat aan de opdracht een eigen invulling gegeven moest worden. Veel leerlingen vonden het schoolonderzoek echter heel erg moeilijk en vonden de tijd veel te kort.
Vooral over het samenwerken waren de leerlingen enthousiast: ze vonden het leuk en ook nuttig, omdat ze elkaar op ideeën konden brengen.

Veel werk

Met name voor de docenten van het Liemers College heeft het praktisch schoolonderzoek veel, eigenlijk te veel, tijd gekost. Zij moesten niet alleen de werkstukken nakijken, maar ook voor ieder tweetal aparte vragen voor het proefwerk maken. Het geven van een individuele toets in de vorm zoals dat gebeurde op het Liemers College zal dus in de praktijk moeilijk haalbaar zijn. Toch heeft een individuele toets belangrijke voordelen: de leerlingen krijgen de kans nog eens kritisch terug te kijken op hun werk en het is mogelijk hen individueel te beoordelen. Een aantal leerlingen van het Gregorius College vonden het niet eerlijk dat je door het samenwerken een hoger cijfer zou kunnen krijgen dan je zelf zou hebben gehaald.

Conclusies

Tot slot een aantal belangrijke ervaringen naar aanleiding van dit experiment op een rijtje:

- Een opdracht van drie of vier uur moet een duidelijke vraag stellen naar een paar (en niet teveel) ontdekkingen, zodat voldoende tijd overblijft voor het zoeken naar een bewijs en het schrijven van het verslag. Het te geven bewijs moet in een niet te lange reeks stappen uitvoerbaar zijn.
- Een praktische meetkunde-opdracht biedt goede mogelijkheden om de eindtermen van het subdomein 'Bewijzen in de vlakke meetkunde' te oefenen en te toetsen.
- Leerlingen ervaren bij het maken van een praktische opdracht hoe het is om meerdere uren achtereen met één onderwerp bezig te zijn.
- De tijd die de leerlingen aan de opdracht kunnen besteden, is beperkt, om te voorkomen dat zij veel te veel tijd in het onderzoek en het maken van een verslag steken. Dit is van belang in een studiehuissituatie, waarbij voor alle vakken praktische opdrachten moeten worden gemaakt.
- De leerlingen hadden plezier in het samenwerken.

En, last but not least:

- Een aantal leerlingen hebben zichtbaar enthousiast gewerkt tijdens een (heel moeilijk!) schoolonderzoek voor wiskunde B.

Irene Gosselink, Freudenthal Instituut

Noten

[1] Goddijn, A. & W. Reuter. *Afstanden, grenzen en gebieden*. Freudenthal Instituut, 1996. bestelnr. 222.
Goddijn, A. & W. Reuter. *Denken in cirkels en lijnen*, deel 2A, 2B. Freudenthal Instituut. 1998. bestelnrs. 307, 57.

[2] De eindtermen zijn te vinden via:
http://www.euronet.nl/~nvvw
en staan ook, met toelichting, in het *Trajectenboek wiskunde in de profielen N&G en N&T VWO, Deel II: wiskunde B2*. Freudenthal Instituut, 1998. ❑