In hoeverre beheersen leerlingen uit verschillende leerjaren van het VWO bepaalde vaardigheden met betrekking tot het gebruik van rekenregels? **Karin Vodde** en **Nina Groeneveld** hebben een antwoord gezocht op deze vraag. Hieronder een verslag van hun bevindingen.

Rekenen + VWO = ?

Vaardigheden van VWO-leerlingen met betrekking tot het gebruik van rekenregels

Bij het oplossen van sommen moeten leerlingen vaak gebruik maken van allerlei rekenregels. Dit levert nogal eens de nodige problemen op. In hoeverre beheersen leerlingen eigenlijk nog de elementaire rekenregels bij rekenen met breuken, wortels, machten en weten ze in welke volgorde bewerkingen uitgevoerd moeten worden?
In het kader van onze postdoctorale lerarenopleiding wiskunde aan het IDO/VU in Amsterdam hebben wij een onderzoek gedaan dat een begin van een antwoord poogt te geven op deze vraag. Het onderzoek is uitgevoerd op de stageschool, het Jac. P. Thijsse College te Castricum.

Problemen in 5 VWO

Tijdens één van onze eerste stageweken hielpen we een 5-VWO klas. De meeste leerlingen liepen bij dezelfde som vast. Het ging om de volgende opgave:

> Bereken de afgeleide van $\sqrt[3]{\dfrac{90t}{\pi}}$
>
> Het antwoord in het antwoordenboekje: $\sqrt[3]{\dfrac{10}{3\pi t^2}}$

Veel leerlingen grepen al snel naar hun antwoordenboekje. Pogingen van de leerlingen om zelf op dit antwoord te komen, mislukten meestal. Het ging in de meeste gevallen mis door de vele rekenregels die gebruikt moesten worden. Zo moesten ze eerst de volgende stappen zetten:

$$\sqrt[3]{\frac{90t}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{90}{\pi}} \cdot \sqrt[3]{t} = \sqrt[3]{\frac{90}{\pi}} \cdot t^{\frac{1}{3}}$$

Voor deze stappen hadden ze twee algemene rekenregels voor het rekenen met wortels nodig:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Om de afgeleide hiervan om te schrijven naar het uiteindelijke antwoord, moesten nog veel meer regels toegepast worden. Regels voor het rekenen met machten, wortels en breuken.

Zo zijn er talloze voorbeelden in het wiskundeprogramma te noemen waarbij de rekenregels als voorkennis verondersteld worden. Algemeen geldt dat de leerling het zich zonder deze voorkennis onnodig moeilijk maakt of vastloopt.
De ervaring met het 'voorkennis'-probleem vormde dan ook de aanleiding voor ons onderzoek.

De onderzoeksopzet

Voor ons onderzoek hebben we toetsen afgenomen in alle leerjaren van het VWO. De toets bestond uit 'kale rekensommen' (zonder context) die de leerlingen natuurlijk *zonder* rekenmachine moesten maken. De rekensommen waren ingedeeld in vier categorieën: rekenen met 'voorrangsregels', breuken, wortels en machten. De onderbouw heeft alleen de eerste twee categorieën gemaakt. Ook is steeds gevraagd hoe de leerlingen de sommen aangepakt hebben.
Ter illustratie volgt hier een voorbeeld van een toetssom.

> Schrijf in volgorde van klein naar groot:
>
> $\frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{213}, \frac{1}{10}, \frac{3}{8}, \frac{11}{20}$
>
> Hoe heb je het aangepakt?

Resultaten

Vooral bij het rekenen met breuken pasten de leerlingen allerlei afwijkende methodes toe.
Bij het delen van breuken ging het op grote schaal mis. Er werd in veel gevallen geen antwoord gegeven en soms stond daar zelfs als commentaar bij dat ze dit nooit geleerd hadden.

Ik zou 't niet weten Ik heb op de basisschool nooit echt breuken gehad

Opvallend was verder dat veel leerlingen het deelteken hetzelfde opvatten als maalteken!

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{3} \quad \frac{1}{12} \qquad\qquad \frac{2}{3} : \frac{5}{6} \quad \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Welke regels gebruik je bij het rekenen met breuken?

by vermenigvuldigen: noemers en tellers vermenigvuldigen
by delen het zelfde

Nog een veel gemaakte fout: de regel 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde' is wel bekend, maar de regel wordt verkeerd om toegepast. De leerling keert dan de *teller* om en vermenigvuldigt deze met de noemer. Bijvoorbeeld:

$$\frac{1}{8} : 3 = \frac{24}{1} \qquad\qquad 2\frac{1}{2} : 5 = \frac{10}{5} = 2$$

Ook worden vaak de breuken gelijknamig gemaakt, om zo via een omweg tot het goede antwoord te komen, tot dezelfde fouten te vervallen, of helemaal vast te lopen.

Ook bij het vermenigvuldigen van breuken ging er nogal eens wat mis. De meest gemaakte fouten hierbij zijn:

– leerlingen maken de noemers gelijknamig en vermenigvuldigen dan alleen de tellers met elkaar.

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \quad \frac{9}{15} \times \frac{6}{15} = 9 \times 6 = \frac{54}{15} = 3\frac{9}{15}$$

We zien aan de laatste reactie dat de manier niet alleen fout is, maar ook nog eens niet erg handig:

– leerlingen passen kruisselings vermenigvuldigen toe.

$$\frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{12}{6} = \frac{1}{2}$$

Welke regels gebruik je bij het rekenen met breuken?

Ik heb dit al heel lang niet meer gedaan dus ik weet de regels niet meer. maar ik dacht dat je bij het vermenigvuldigen het zo moest doen: bv. $\frac{1}{6} \times \frac{2}{6}$
Ik doe dan eerst 1 maal 6 = 6 = het onderste getal van de breuk dan doe ik 6 maal 2 = 12 = het bovenste getal van de breuk

– leerlingen vermenigvuldigen de noemers met elkaar, maar tellen de tellers op. Bijvoorbeeld:

$$\frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{(1+2)}{(6 \times 6)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Opvallend is dat leerlingen deze sommen ontzettend omslachtig uitrekenen. Vaak maken ze de breuken eerst gelijknamig om vervolgens wel de juiste regel toe te passen (tellers en noemers afzonderlijk vermenigvuldigen). Ook strepen ze gelijke factoren in teller en noemer niet tegen elkaar weg.

Het optellen en aftrekken van breuken gaat een stuk beter, hoewel de sommen weer erg omslachtig worden uitgerekend. Drie niet-gelijknamige breuken optellen levert nog wel problemen op.

$$\frac{3}{5} + \frac{5}{6} + \frac{3}{10} \quad \frac{360}{600} + \frac{500}{600} + \frac{180}{1000} = 1\frac{40}{1000}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{5}{6} + \frac{3}{10} \quad \frac{180}{300} + \frac{250}{300} + \frac{90}{300} = \frac{520}{300} = 1\frac{220}{300}$$
$$1\frac{110}{150} = 1\frac{55}{75}$$

Blijkbaar is het optellen van drie breuken verwarrend en hebben de leerlingen geen efficiënte methodes om deze sommen op te lossen, terwijl ze wel weten wat de basisregels zijn voor het optellen van breuken.

Ook bij het aftrekken van breuken weten leerlingen de algemene regels, maar bij een ingewikkelde som waarbij ze meerdere stappen moeten nemen, gaan ze niet op de meest efficiënte manier te werk. De volgende som leverde met name problemen op:

$$2\frac{1}{7} - 1\frac{2}{3} = 2\frac{4}{21} - 1\frac{9}{21} = 1\frac{16}{21}$$

$$2\frac{1}{7} - 1\frac{2}{3} = 2\frac{3}{21} - 1\frac{14}{21} = 1\frac{11}{21}$$

$$2\frac{1}{7} - 1\frac{2}{3} = \frac{45}{21} - \frac{29}{21} = 1\frac{6}{21}$$

$$2\frac{1}{7} - 1\frac{2}{3} = 2\frac{3}{21} - 1\frac{14}{21} = \frac{11}{21}$$

Conclusies

In deze paragraaf formuleren we een aantal conclusies over de vier onderwerpen van ons onderzoek. Om tot conclusies te kunnen komen, hebben we steeds per leerjaar voor elke toetssom berekend welk percentage van de leerlingen de som goed had. We hebben daarbij onderscheid gemaakt tussen goede antwoorden en antwoorden die weliswaar niet echt fout waren, maar wel afwijkend. Bij de breukensommen waren dit bijvoorbeeld de niet-vereenvoudigde antwoorden. Vanwege de opbouw van de toetssommen konden we achteraf nagaan welke vaardigheden blijkbaar nog wel of niet meer beheerst worden door een bepaald percentage van de leerlingen. Ook konden we zo in sommige gevallen een ontwikkeling zien van de vaardigheden door de leerjaren heen.

Haakjes

De regel 'Meneer van Dalen wacht op antwoord' is wel bekend. Het probleem is alleen dat leerlingen door deze regel denken dat vermenigvuldigen vóór delen gaat.

Breuken

De regels voor het optellen en aftrekken van breuken worden in het algemeen goed beheerst, in tegenstelling tot de regels voor vermenigvuldigen en delen.

Verder kunnen leerlingen in de loop der jaren wel steeds beter vereenvoudigen, maar ze blijken het juist steeds minder te doen als er niet om gevraagd wordt.

Machten

De leerlingen weten hoe je getallen kan herschrijven tot macht. In het vierde en vijfde leerjaar is het inzicht bij het optellen, delen en vermenigvuldigen van machten slecht. De leerlingen passen soms willekeurig regels toe (optellen of vermenigvuldigen van exponenten, wat was het ook alweer?).

Wortels

De regels voor het vermenigvuldigen, delen of optellen zijn redelijk bekend. De leerlingen hebben echter wel moeite met het vereenvoudigen en omschrijven van wortels (doordat het ook niet meer van ze verlangd wordt).

Wat verder in het algemeen voor alle categorieën te concluderen is:

- De kennis van regels en vaardigheden neemt in het algemeen toe door de leerjaren heen. Een uitzondering hierop vormt met name het rekenen met/zonder haakjes.
- Hoewel het onderzoek er niet speciaal op gericht was, is het leuk om aan het commentaar te zien dat leerlingen over de leerjaren heen steeds abstracter gaan denken.

  Over het in volgorde zetten van breuken:

Onderbouw:

Welke regels gebruik je bij het rekenen met breuken?

als het getal boven het streepje met is dan eronder dan zit er in de breukkele het onderste getal mag je nooit plus doen. Breuken moet je vereenvoudigen als dat kan dan moet je beide getallen delen door het zelfde getal

Bovenbouw:

Welke regels gebruik je bij het rekenen met breuken?

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $\quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ $\quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ $\quad a\frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$

- Veel rekenfouten zijn systematische fouten die niet incidenteel gemaakt worden, maar meer of minder lang volgehouden. Er zijn zoveel regels die moeten worden toegepast, dat de leerling die niet meer goed uit elkaar weet te houden.
- Het blijkt dat de leerlingen wel de juiste regels kennen, maar deze niet consequent blijven toepassen. Dit is vooral het geval bij langere of niet-standaard sommen.
- Als leerlingen de regels niet kennen, proberen ze helemaal niets of passen ze een min of meer willekeurige methode toe. Ze nemen geen eenvoudig voorbeeld om uit te zoeken hoe de regel ook al weer in elkaar zat. Als ze dit wel zouden doen, zouden ze snel zien wat wél de goede regel is en ook dat de door hen gekozen willekeurige methode niet kan kloppen.
- Leerlingen werken vaak niet efficiënt. Dit kan leiden tot omslachtige berekeningen. Ze kunnen via een omweg nog wel tot het goede antwoord komen, maar er wordt wel sneller een fout gemaakt onderweg.

Een stuk hout van $\sqrt{3}$ meter

Je kunt je natuurlijk afvragen in hoeverre het erg is als leerlingen bepaalde vaardigheden met betrekking tot het gebruik van rekenregels niet beheersen.
Zoals de voorbeeldsom aan het begin van het artikel laat zien, kan een gebrekkige vaardigheid in het hanteren van rekenregels zeker problemen opleveren. Niet alleen binnen wiskunde A en B, maar ook bij vakken als natuurkunde, scheikunde en economie.
In andere gevallen levert het misschien minder problemen op. Zo zullen weinig docenten nog belang hechten aan het exact kunnen rekenen met wortels. Zoals een docent op onze stageschool zei:
'Als je bij de timmerman komt om een stuk hout van $\sqrt{3}$ meter, dan denkt hij ook, ga ergens anders zeuren.'

Toch zijn we, ondanks het feit dat er geen stukken hout van $\sqrt{3}$ meter bestaan, van mening dat de problemen met het hanteren van rekenregels aandacht verdienen (zet ze aan het rekenen!).

Karin Vodde, Amsterdam
Nina Groeneveld, Heerhugowaard

Karin Vodde en Nina Groeneveld studeerden onlangs af aan de postdoctorale lerarenopleiding van de Vrije Universiteit te Amsterdam. Ze zijn thans werkzaam in het bedrijfsleven.