

Onlangs promoveerde Gerard Alberts op het proefschrift *Jaren van berekening*. Het centrale thema van dit boek is de opkomst van het wiskundig modelleren. **Harm Jan Smid** bespreekt niet alleen het proefschrift, maar gaat ook in op modelvorming in het wiskundeonderwijs.

Modellering in samenleving en onderwijs

Op 17 september van het vorig jaar promoveerde Gerard Alberts cum laude op een proefschrift met de titel *Jaren van berekening. Toepassingsgerichte initiatieven in de Nederlandse wiskundebeoefening 1945-1960*. Het is niet alleen een dik boek – 493 bladzijden – maar ook een bijzonder boek. Iets van het bijzondere van dat proefschrift blijkt al uit de promotoren: J.H.C. Blom, historicus, en vooral bekend als directeur van het RIOD, P.C. Baaijen, wiskundige en voormalig directeur van het CWI, en L.E. Fleischacker, een filosoof. Alledrie die elementen, geschiedenis, wiskunde en filosofie, zijn prominent in het boek aanwezig. Het bevat hoofdstukken die voor vrijwel iedere wiskundige interessant en makkelijk leesbaar zullen zijn, bijvoorbeeld over de voorgeschiedenis, het ontstaan en de eerste jaren van het Mathematisch Centrum en de opleiding tot wiskundig ingenieur te Delft. Er zijn ook wat minder toegankelijke hoofdstukken, vooral die met een duidelijk wetenschapsfilosofische inslag, die niet iedereen onmiddellijk zullen aanspreken. Juist die hoofdstukken echter plaatsen het geheel in een breder perspectief, waardoor het boek veel méér is dan de *petite histoire*, hoe boeiend die ook kan zijn, van mensen en instellingen in Amsterdam en Delft tussen 1945 en 1960.

Wiskundig modelleren

Het centrale thema van het boek is de opkomst van het wiskundig modelleren. Daarmee wordt bedoeld het vervangen van een technisch probleem door een wiskundig probleem, bijvoorbeeld een stelsel (differentiaal)vergelijkingen met de daarbij behorende voorwaarden, de wiskundige en eventueel numerieke uitwerking van dat probleem en tot slot de interpretatie van de wiskundige resultaten in het oorspronkelijke technische probleem. Het wiskundig probleem, ook wel wiskundig model genoemd, is in deze context dus iets heel anders dan wat ook wel eens een wiskundig model wordt genoemd; bijvoorbeeld de bolmeetkunde als een model van de niet-euclidische meetkunde.

Alberts plaatst dit thema in twee historische lijnen. De eerste lijn is die van de geschiedenis van de wiskunde. Vanaf de tijd van de Verlichting speelt de wiskunde een

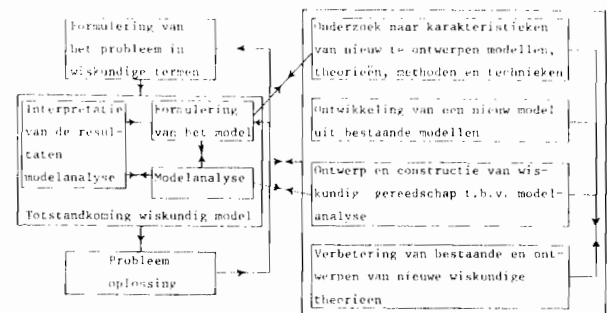


fig. 1 Beschrijving van het werkteerrein van de wiskundig ingenieur

centrale rol binnen de Westerse cultuur. De wiskunde vindt vooral in de mechanica en de natuurkunde vele toepassingen, maar tevens maakt de wiskunde zich los van de natuurfilosofie en emancipeert zich tot een aparte wetenschap. Alberts laat zien hoe deze ontwikkelingen uiteindelijk leidden tot de notie van het wiskundig modelleren, door hem getypeerd als de 'expliciet geworden mathematisering'. Essentieel daarbij is de langzaam gegroeide opvatting dat het bij het wiskundig modelleren niet in de eerste plaats gaat om 'waarheid' of 'inzicht', maar om *doelmatigheid*, het model moet praktisch hanteerbaar zijn en bruikbare resultaten opleveren.

De tweede historische lijn is die van het in deze eeuw opkomende geloof in de 'planbaarheid' of 'maakbaarheid' van de samenleving. Van dat geloof zijn we de laatste jaren wel wat teruggekomen, maar het idee van een planmatige aanpak van van alles en nog wat is heel karakteristiek voor onze cultuur. We kennen zelfs een 'sociaal-cultureel planbureau'! Alberts' these is nu dat het samenlopen van deze twee lijnen leidde tot een nieuwe vorm van dienstbaarheid van de wiskunde. Door de visie en de actiebereidheid van wiskundigen als Van der Corput, Van Dantzig en Timman werd die nieuwe dienstbaarheid ook institutioneel vastgelegd; in het MC (later CWI), te Amsterdam, en wat later in de opleiding wiskundig ingenieur in Delft. Alberts noemt de introductie van het wiskundig modelleren 'verreweg de belangrijkste verandering in de naoorlogse wiskundebeoefening'. Naar zijn

mening waren de gevolgen zelfs zodanig ingrijpend dat het gerechtvaardigd is van een ‘omslag in de wiskunde-beoefening’ te spreken, zelf leidend tot een ‘herwonnen eenheid van het wiskundig denken’.

Gevolgen

Alberts heeft ongetwijfeld gelijk met zijn stelling dat de wereld van de wiskunde, in ieder geval in Nederland, de afgelopen decennia grondig is gewijzigd. Tot kort na de oorlog was een academische carrière slechts voor een enkele uitblinker weggelegd. De meeste wiskundigen werden leraar – nu bijna niemand meer – en behalve voor een paar verzekeringswiskundigen bood het bedrijfsleven geen emplooi. Toen ik in 1963 in Leiden ging studeren, was daar voor toepassingen vrijwel geen belangstelling en werden bijvoorbeeld numerieke wiskunde en statistiek niet onderwezen. Zoiets is nu ondenkbaar; iedere wiskundeopleiding legt er bij de voorlichting vooral de nadruk op hoe praktisch en toegepast men wel bezig is. Studenten trekken nu vooral naar de wiskundig ingenieursopleidingen: Delft, Eindhoven en Twente tellen samen meer wiskundestudenten dan de overige zes universiteiten bij elkaar.

Het is uit Alberts boek niet goed op te maken in hoeverre de Nederlandse initiatieven uit de jaren vijftig en zestig passen in een internationaal kader. Behalve een enkele opmerking dat wat in Nederland gebeurde niet uniek was, zegt hij daar eigenlijk niet veel over. Bij het doorbladeren van de boekbesprekingen in bijvoorbeeld de *Mededelingen* van het Wiskundig Genootschap valt mij vaak op dat de meeste daar besproken boeken of zuiver wiskundig van aard zijn, of gaan over de tweede fase van het modelleren; het wiskundig en numeriek uitwerken van een al gegeven model.

Over de eerste fase, het opstellen van het model, en de laatste fase, het interpreteren van de wiskundige resultaten in het technische probleem, kom je niet zoveel tegen. Betekent dat, dat wiskundigen daar niet zo heel veel bemoeienis mee hebben? Wordt dat dan vooral door ingenieurs uit andere disciplines gedaan, of hebben de traditionele beroepsverenigingen zoals het Wiskundig Genootschap en de American Mathematical Society daarvoor toch niet zoveel belangstelling?

Het lijkt mij de moeite waard om, en dan bijvoorkeur in internationaal perspectief, nader onderzoek te verrichten naar wat voor type werk wiskundigen nu werkelijk verrichten. Pas dan zou beslist kunnen worden of het modelleren nu werkelijk een *omslag* binnen de wiskunde heeft betekend, of dat wiskundigen zich toch eigenlijk alleen maar bezighouden met de strikt wiskundige aspecten van dat werk.

Onderwijs

Bij de lezing van Alberts' boek dringt zich als vanzelf de vergelijking op met een andere omslag binnen de Neder-

landse wiskundewereld: de enorme veranderingen binnen het onderwijs in de wiskunde op de middelbare scholen. Dat is feitelijk pas goed begonnen met de HEWET-operatie in het begin van de jaren tachtig. De grote veranderingen van de jaren zeventig, gevolgd van de *New Math*, hebben in Nederland niet lang standgehouden. Ook binnen het wiskundeonderwijs op school lijkt inmiddels praktijkgerichtheid hét leidende beginsel. Is die omslag dan misschien te beschouwen als een na-ijl effect van de door Alberts gesignaleerde omslag in de wiskundewereld zelf?

Het lijkt me dat een en ander wel wat gecompliceerder ligt. Bij Freudenthal, toch wel te beschouwen als de *founding father* van het realistisch wiskundeonderwijs, is niet zoveel over modelvorming, zoals door Alberts beschreven, te vinden. Freudenthal heeft trouwens bij die ‘toepassingsgerichte initiatieven’ geen prominente rol gespeeld. Bij *Wiskobas* is in de gedachte van het ‘verschrallen’ van de realiteit tot een wiskundig model wel een duidelijke verwantschap met het wiskundig modelleren aanwezig. Leen Streefland maakte in zijn *Aanzet tot een nieuwe breukdidactiek volgens Wiskobas* het volgende onderscheid. Bij Wiskobas gaat het volgens hem om

‘de structuur van een bepaald verschijnsel dat – eventueel in gevisualiseerde vorm – eveneens voor de structuur van andere verschijnselen model kan staan (...). Modellen en modelvorming hebben binnen het realistisch wiskundeonderwijs dus nadrukkelijk hun plaats en functie in het mathematiseringsproces.’

In de Amerikaanse didactische literatuur daaraantegen

‘wordt onder model dikwijls verstaan de concretisering van een abstract wiskundig begrip en dergelijke. Door middel van modellen tracht men de wiskunde “uit te beelden”’ (pp. 197-198).

Het eerste door Streefland beschreven gebruik van modellen heeft wel verwantschap met de modelvorming bij Alberts, al is het doel natuurlijk anders. Met de tweede vorm is dat nauwelijks het geval. Het onderscheid is theoretisch interessant, maar ik weet niet of in de praktijk daar nu wel zoveel betekenis aan moet worden gehecht. In ieder geval is in het voortgezet onderwijs door de introductie van het idee van *context* de balans van modelgebruik duidelijk in de tweede richting verschoven: een model als hulpmiddel om wiskunde beter te leren en te begrijpen. Zo wordt in *Wiskunde 12-16; een boek voor docenten* (Kok e.a., 1992) het begrip context ook duidelijk opgevat. Over contexten gezegd:

‘Een geschikte context wordt zó gekozen dat het probleem er logisch uit voortvloeit. Dat leidt dan tot wiskunde. Tijdens het oplossen kan de context blijven meespelen. Daar haalt de leerlingen aanwijzingen uit voor de voortgang van het oplossingsproces en de begripsvorming’ (p. 82).

Contextrijke en realistische wiskunde mag mijns inziens dan ook zeker niet verward worden met mathematisering en modelvorming: de uitgangspositie en het doel is wezenlijk anders.

In deze paragraaf heb je lineaire formules opgesteld. Realiseer je dat zo'n formule in praktische situaties zijn beperkingen heeft. Je werkt met een **wiskundig model** van de werkelijkheid.

Bij de formule $q = 5p + 290$ uit het voorbeeld zal een zeer lage prijs van één gulden wellicht een ware stormloop op de winkel veroorzaken, waardoor q sterker zal toenemen dan de formule aangeeft. Het lineaire verband gaat verloren.

Nadat het wiskundige model is opgesteld kun je het gebruiken om voorspellingen te doen over de verkoop, maar je moet wel voorzichtig zijn met conclusies. En blijken de voorspellingen niet overeen te stemmen met de werkelijkheid, dan moet het model bijgesteld worden. In het schema is dit proces weergegeven.

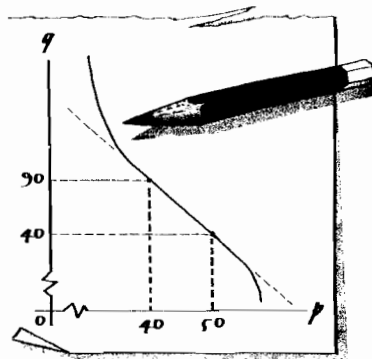


Fig. 1.34

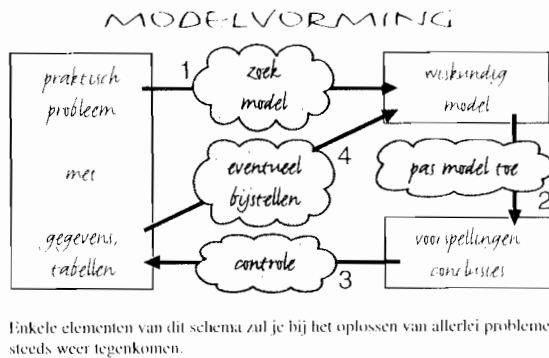


fig. 1 Deze figuur uit deel VWO-1 voor de Tweede Fase van *Getal en Ruimte* beschrijft in essentie hetzelfde proces van wiskundige modelvorming dat bij Alberts centraal staat

Modelvorming in het onderwijs

Echte modelvorming komt in het huidige programma eigenlijk niet voor. Bij VWO wiskunde-A wordt wel binnen (eenvoudige) modellen gerekend en wiskunde bedreven. Dat is met wat goede wil op te vatten als fase twee van het modelleringsproces. Soms moeten de resultaten ook wel geïnterpreteerd worden (fase drie), maar het zelf opstellen van een model is niet aan de orde. Bij het nu zelfs helemaal verdwenen onderdeel differentiaalvergelijkingen wiskunde B van het huidige programma is dat wel bepleit, maar niet van de grond gekomen. Verrassend vind ik dat niet. Het zelf opstellen van een model behoort nu juist tot het lastigste onderdeel van het mathematiseringsproces, en leent zich ook moeilijk voor onderwijzen en toetsen in een traditionele schoolse omgeving. Het is geen wonder dat bijvoorbeeld in *Innovation in maths education by modelling and applications* (De Lange e.a., 1993) de voorbeelden die hout snijden steeds uit het hoger onderwijs afkomstig zijn en niet uit het voortgezet onderwijs.

Ik ben dan ook erg benieuwd wat er in de praktijk terecht zal komen van die onderdelen uit de nieuwe HAVO-VWO-programma's waarin het modelleren wél duidelijk aan de orde komt. Expliciet komt het modelleren namelijk ter

sprake in het sub-domein 'Onderzoeksvaardigheden'. Een voor de hand liggend gebied om dat ook werkelijk te doen zijn natuurlijk de praktische opdrachten en het profielwerkstuk. In de vorige *Nieuwe Wiskrant* heeft Carel van de Giessen die mogelijkheden al eens verkend. Opvallend is dat naar zijn mening, net als dat bij de 'echte' modelvorming beslissend was, het gebruik van de computer een doorslaggevende factor is om van de mogelijkheid een succes te maken. Het zal toch nog wel een hele toer zijn om dat, binnen het nu al overladen programma, werkelijk van de grond te krijgen! Het past in ieder geval in een internationale trend. In de *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* van de Amerikaanse lerarenorganisatie NCTM werd al in 1989 nauwkeurig het wiskundige modelleringsmodel weergegeven zoals dat ook bij Alberts voorkomt, en wordt als doel geformuleerd 'apply the proces of mathematical modelling to real world problems situations' (pp. 137-138).

Hetzelfde model komt voor op bladzijde 34 van *Getal en Ruimte*, deel VWO 1 voor de tweede fase uit 1998. Toch is ook hier uiteindelijk niet alles nieuw onder de zon. Het voorbeeld dat de *Standards* hierbij geeft, is namelijk een variatie op het bekende verdelingsprobleem van de ridder De Meré¹, dat al in 1654 door Pascal werd opgelost. En in *Getal en Ruimte* gaat het om lineaire vergelijkingen die ook al niet erg verrassend zijn. Wellicht komen sommige leraren op het gebied van modelleren nog wel eens tot dezelfde ontdekking als de hoofdpersoon uit Molières *Le Bourgeois Gentilhomme*, die geheel verbluft was toen hem verteld werd dat hij zijn hele leven al, zonder dat iemand hem dat geleerd had, vloeiend Frans proza sprak! Maar niettemin: als er binnen de praktische opdrachten en het profielwerkstuk ook systematisch aandacht aan de eerste fase uit het modelleringsproces gegeven zou kunnen worden, het zelf opstellen van een model, zou er toch werkelijk ook in het wiskundeonderwijs op school wel een klein omslagje tot stand gebracht zijn.

Harm Jan Smid, TU Delft

Noot

[1] De ridder de Meré vroeg in 1654 aan Pascal advies over de vraag hoe je het eerlijkst 'de pot' bij een bepaald dobbelspel over de deelnemers kon verdelen, als dat spel om een of andere reden voortijdig moest worden afgebroken. Daarbij komt het begrip 'verwachtingswaarde' om de hoek kijken.

Literatuur

- Giessen, C. van de (1998). 'Modelleren met de computer', *Nieuwe Wiskrant* 18(2), pp. 4-11.
- Kok, D., M. Meeder, M. Wijers en J. van Dormolen (1992). *Wiskunde 12-16; een boek voor docenten*. Utrecht/Enschede: FI/SLO.
- Lange, J. de, C. Keitel, I. Huntley and M. Niss (1993). *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications*. New York: Ellis Horwood.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia.

- Streefland, L. (1983). *Aanzet tot een nieuwe breukdidactiek volgens Wiskobas*. Utrecht: OW&OC.
- Vuijk, R.A.J. e.a. (1998). *Getal en Ruimte, wiskunde voor de tweede fase, deel VWO 1*. Houten: EPN.

Titel: *Jaren van berekening. Toepassingsgerichte initiatieven in de Nederlandse wiskundebeoefening 1945-1960*

Auteur: Gerard Alberts

Uitg.: Amsterdam University Press (1998)

ISBN: 90 5356 317 2

Prijs: f 65,-

Het 34ste Nederlands Mathematisch Congres en Lerarensymposium Meetkunde

Het 34ste Nederlands Mathematisch Congres zal worden gehouden aan de Universiteit van Utrecht (in de Uithof) op donderdag 8 en vrijdag 9 april 1999. Het congres vindt voornamelijk plaats in het Educatorium, Leuvenlaan 19. Het programma bestaat uit lezingen, symposia en sectievoordrachten. De thema's van de symposia zijn *Wiskunde toegepast*, *Mathematische biologie*, *Wiskunde en PR*, *Geschiedenis van de Wiskunde: 'James Joseph Sylvester (1814-1897)'*. Verder is er het Lerarensymposium met als thema 'Bewijzen op school' (zie hiernaast).

Leraren die voor deelname aan het Congres en/of het Lerarensymposium een nascholingscertificaat wensen te ontvangen, worden verzocht naast hun inschrijving een bericht aan de secretaris van het congres te sturen met de mededeling: S.v.p. nascholingscertificaat voor n dagdelen. ($n = 1, 2, 3$ of 4)

De inschrijvingsgelden bedragen:
WG-leden: f 60,-, niet-WG-leden: f 70,- studenten: f 17,50 (kosten lunch niet inbegrepen.)

Inschrijving en nadere inlichtingen:
via de website <http://www.math.uu.nl/mc99>
Secretaris van het congres: W. van der Kallen
e-mail: mc99@math.uu.nl
Postadres: MC99, Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht, Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht.

Lerarensymposium op vrijdag 9 april

Titel: *Nieuw plezier in oude meetkunde*
Symposiumvoorzitter: Dirk Siersma (hoogleraar wiskunde, Universiteit Utrecht)

12.10-13.00: *Meetkunde in het studiehuis*

- Wat is de nieuwe stof waard?*
Een korte samenvatting door Martin Kindt, medewerker Freudenthal Instituut
- Werkstukken meetkunde: een dynamisch gebeuren, maar wordt er wel iets bewezen?*
Naar aanleiding van de meetkunde schoolonderzoeken in de experimentele VWO 6 B-klassen van dit jaar: Gerard Stroomer, docent Liemers College

14.00-15.45: *Bewijzen leren of leren bewijzen?*

- Toepassen en bewijzen: conflict of wederzijdse ondersteuning?*
Hierin wat achtergronden bij de nieuwe opzet en hoe daar het leren vinden van bewijzen naar voren komt, 45 minuten, Aad Goddijn, medewerker Freudenthal Instituut
- Meer bewijzen in de onderbouw: toekomstmuziek?*
40 minuten, Martin Kindt, medewerker Freudenthal Instituut
- Discussie, 15 minuten
- Afsluiting, 5 minuten.

CIEAEM 51, 1999

Van 21-26 juli vindt in Chichester, Engeland, de jaarlijkse CIEAEM conferentie plaats (CIEAEM: Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques').

Het thema van de conferentie is 'Productive Collaboration in Mathematics (Education) across Cultures'. De voertalen zijn Engels en Frans.
Inlichtingen: CIEAEM 51, email: maths@chihe.ac.uk