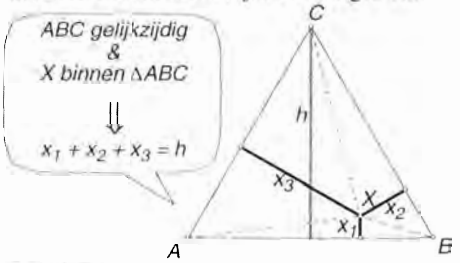
Wat te bewijzen is

Rubriek

In de vorige aflevering heb ik laten zien dat oppervlakte een probaat bewijsmiddel kan zijn. Hier komt nog een krachtig staaltje: te bewijzen dat *de som van de afstanden van een punt binnen (of op de rand van) een gelijkzijdige driehoek tot de zijden van die driehoek onafhankelijk is van de plaats van dat punt.* Als de cursieve bewering waar is, leert een hoekpunt mij hoe groot de constante afstandensom zou moeten zijn: de hoogte van die driehoek!



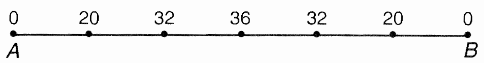
Het bewijs is nu eenvoudig als je denkt aan de som van de oppervlakten van de driehoeken XAB, XBC en XCA. De strekking hiervan gaat verder dan het zoveelste leuke meetkundevraagstukje. Als x_1, x_2, x_3 niet-negatieve getallen voorstellen met een constante som, dan geeft de driehoek een voorstelling van al zulke drietallen. Zo'n voorstelling wordt wel eens driehoeksdiagram genoemd.

Klassiek optimaliseringsprobleem

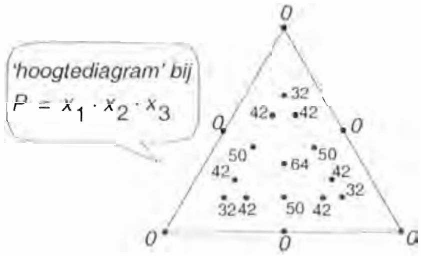
Een klassiek optimaliseringsprobleem heeft betrekking op het vinden van het maximale product van een vast aantal (niet-negatieve) getallen met een constante som. Na enig proberen krijgt een mens al gauw de indruk, dat een 'eerlijke' verdeling van de som het maximale product oplevert. De intuïtie bedriegt in dit geval niet; er geldt:

$$\text{Als } x_1 + x_2 + \ldots + x_n = c\text{, dan } x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \left(\frac{c}{n}\right)^n$$

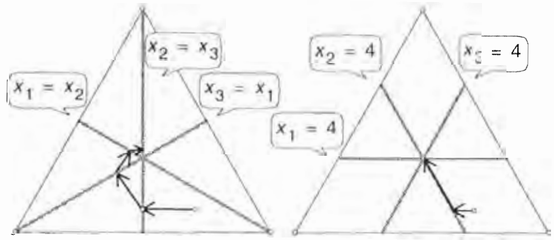
vooropgesteld dat $x_k \geq 0$ voor $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.
Hoe bewijs je dit?
Voor het gemak neem ik in het vervolg $c = 12$, dit zal de algemeenheid van de redenering geen schade doen.
Eerst maar eens $n = 2$. Een soepel algebra d.isch bewijs verloopt aldus. Stel: $x_1 = 6 + d$ en $x_2 = 6 - d$.
Het product $x_1 \cdot x_2$ is gelijk aan $36 - d^2$ en bereikt een maximum voor $d = 0$ ('eerlijke verdeling van 12').
Duidelijk is ook: hoe 'schever' de verdeling van 12, (dat wil zeggen hoe groter d), hoe kleiner $x_1 \cdot x_2$.
Via de afspraak dat x_1 en x_2 de afstanden zijn tot de eindpunten A en B van een lijnstuk met lengte 12, komt een diagram van de functie $P = x_1 \cdot x_2$ tot stand:



Nu het geval $n = 3$. Weer neem ik $c = 12$. In een driehoeksdiagram staan enkele producten:



Op de rand van de driehoek is P gelijk aan 0. De punten 32 in de figuur hebben de *coördinaten* 2, 2 en 8 in een of andere volgorde. De punten 42 horen bij de zes mogelijke tripels bestaande uit 2, 3 en 5. Hoe dichter bij het zwaartepunt ($P = 64$), hoe groter P.
Een partitie van 12 in drie ongelijke delen, zoals (2, 3, 7), kan (volgens de stelling voor $n = 2$) worden 'verbeterd' door *twee* ongelijke termen – zeg 3 en 7 – te vervangen door hun gemiddelde, dat geeft (2, 5, 5). Dit drietal kan worden verbeterd door er $(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 5)$ van te maken, nog weer beter is $(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{4}, 4\frac{1}{4})$, enzovoort.
Dit eindeloze (en convergente!) verbeterproces laat zich mooi illustreren in een driehoeksdiagram (figuur links):



Er blijkt echter een 'hoogstens-twee-staps-verbeter-weg' te zijn die naar het zwaartepunt leidt. Als je toevallig een tripel-mét-4 hebt, dan ben je in één stap bij het zwaartepunt door de andere twee getallen (met som 8) te vervangen door hun gemiddelde. In een tripel-zónder-4 zijn er zeker twee getallen 'om 4 heen' en die kun je vervangen door een 'minder scheef' tweetal 4, ... (met een groter product!) Van hier naar (4, 4, 4) is nog slechts één stap.
Bijvoorbeeld: (2, 3, 7) → (2, 4, 6) → (4, 4, 4).
In de rechterfiguur wordt dat geïllustreerd: vanuit elk punt in de zes deelgebieden kun je in twee verbeterstappen het zwaartepunt bereiken! Einde bewijs voor $n = 3$.
Van hieruit kan dan op analoge wijze de stap naar $n = 4$ worden gemaakt (en eventueel worden voorgesteld in een tetraëderdiagram), vandaar weer naar $n = 5$ (vergeet een plaatje) en zo verder. De finishing touch heet volledige inductie.

Martin Kindt, email martin@fi.uu.nl