Leerlingen van een 5vwo klas werkten gedurende vier weken met een symbolische rekenmachine, een 'computeralgebra-machine-in-zakformaat'. Ondanks het enthousiasme van de leerlingen waren er ook wat hobbels te nemen. **Paul Drijvers** inventariseert de plussen en de minnen.

De symbolische rekenmachine in de wiskundeles

Inleiding

Bij eerdere gelegenheden (zie bijvoorbeeld [1]) heb ik de ontwikkeling van de symbolische rekenmachine beschreven. Een symbolische rekenmachine (SR) heeft de afmetingen en mogelijkheden van een grafische rekenmachine, maar kan bovendien algebraïsche bewerkingen uitvoeren doordat een computeralgebra programma beschikbaar is. In verschillende andere landen wordt al op grote schaal met de SR in de klas geëxperimenteerd[2]. Ook in Nederland zijn voorzichtig de eerste schreden op dit pad gezet[3].

In 1998 is een kort project uitgevoerd dat de stand van zaken rond de SR in kaart brengt. Door het uitvoeren van een veldexperiment is onderzocht of de leerlingen de SR daadwerkelijk en efficiënt gebruiken en hoe ze reageren op het inzetten van de machine als 'black box'. Over dit klasse-experiment gaat dit artikel. Uitgebreidere informatie over de resultaten van dit project kunt u vinden in het eindrapport[4].

De aanvangssituatie

Het experiment vond plaats bij wiskunde B in een 5vwo klas van het Liemers College in Zevenaar. De leerlingen van deze school gebruiken vanaf het begin van de vierde klas een grafische rekenmachine. Dit kan de overstap naar de SR vereenvoudigen. Verder is het Liemers College één van de Profi-scholen die met de nieuwe programma's van de Tweede Fase werken. Dus kan worden aangesloten bij het nieuwe curriculum.
De klas bestaat uit 22 leerlingen, acht meisjes en veertien jongens. In 5vwo hebben de leerlingen eerst het Profi-pakket *Som & verschil, afstand & snelheid* doorgewerkt. Hierin worden de hoofdlijnen van de differentiaal- en integraalrekening uitgezet. Daarna zijn enkele paragrafen behandeld uit *Techniek van het differentiëren*, zodat de leerlingen de nulpunten van de afgeleide kunnen gebruiken bij het zoeken van extreme waarden. Het repertoire van functies die de leerlingen kunnen differentiëren bleef nog beperkt tot de machtsfuncties. De regels voor differentiëren waren nog niet bekend.

Toen, begin oktober, begon het SR-experiment. Gedurende vier lesweken, onderbroken door de herfstvakantie, kreeg elke leerling de beschikking over een SR, de TI-92 van Texas Instruments. Twee lespakketten zijn doorgewerkt, *Introductie TI-92* en *Optimaliseren met een symbolische rekenmachine*. Het eerste pakket maakt de leerling wegwijs op de machine. Tevens brengt het enkele lastige aspecten van het werken met computeralgebra over het voetlicht, zoals het verschil tussen numerieke en exacte antwoorden. In het tweede pakket, een aangepaste versie van het reeds bestaande Profi-pakket 'Optimaliseren', worden optimaliseringsproblemen grafisch/numeriek, analytisch en meetkundig aangepakt. Beide pakketten eindigen met onderzoeksopdrachten.
Tijdens het experiment zijn de lessen geobserveerd. Leerlingenuitwerkingen en toetsresultaten zijn verzameld. Na afloop van de lessenserie hebben de leerlingen een vragenlijst ingevuld en zijn nagesprekken gevoerd.

Plussen ...

Terugkijkend op de gang van zaken in de klas springen positieve en minder positieve ervaringen in het oog.
Positief was het feit dat de meeste leerlingen de SR daadwerkelijk bij hun schoolwerk gebruikten. Het lesmateriaal voor wiskunde B nodigde daar natuurlijk sterk toe uit, maar ook bij andere vakken, zowel in de les als thuis, kwam de SR regelmatig van pas. In de vragenlijst gaven zestien van de 22 leerlingen aan de SR in de lessen van andere vakken gebruikt hebben. Over de aard van het gebruik heb ik geen informatie. Genoemd werden:

vak	frequentie
wiskunde A	8
natuurkunde	10
scheikunde	9
biologie	1
economie	8

Hoewel de SR dus daadwerkelijk functioneerde, gaven achteraf toch 13 van de 22 leerlingen de voorkeur aan de grafische rekenmachine. Daarmee waren de leerlingen toch meer vertrouwd, na ruim een jaar ervaring. Sommigen vonden de grafische rekenmachine eenvoudiger in gebruik. Bovendien vond men de gebruikte SR nogal groot. Leerlingen die de voorkeur gaven aan de SR, roemden vooral de uitbreiding van de mogelijkheden, bijvoorbeeld bij differentiëren en het oplossen van vergelijkingen.

Verrassend in positieve zin was de reactie van de leerlingen op de volgende vraag: 'Kun je met de SR tijd besparen, doordat bepaalde bewerkingen sneller gaan dan met de hand?' Hierop antwoordden alle 22 leerlingen positief. Vooral bij differentiëren en bij het oplossen van vergelijkingen werkte de SR efficiëntieverhogend, vonden ze. Kennelijk duurde het experiment lang genoeg om een 'standaardrepertoire' aan machinehandelingen te ontwikkelen. Een van de leerlingen mengde wiskunde- en machinetaal om zo'n standaardprocedure te beschrijven:

?
$I = x \cdot u \cdot w = x \cdot \frac{x}{2} \cdot (120 - 5x)$.
solve$(0 = I' = (-15x \cdot (x-16))/2, x) \Rightarrow x = 16$ of $\cancel{x=0}$
$16 \cdot \frac{16}{2} \cdot (120 - 5 \cdot 16) = 5120$ = optimale inhoud
Bij $x = 16$, $u = 8$, $w = 40$.

... en minnen

Niet zo verrassend, maar wel belangrijk, is het feit dat de leerlingen tegen een aantal moeilijkheden aanliepen bij het gebruik van de SR. In de loop van het experiment kwamen die misschien wel minder frequent voor, maar echt overwonnen werden ze niet altijd. De meest voorkomende moeilijkheden vallen onder de noemers syntax, interpretatie en navigatie.

Syntaxproblemen kennen we ook van de grafische rekenmachine. Denk aan het werken met haakjes, of aan het verschil tussen de toestands-min en de bewerkings-min. De uitgebreidere mogelijkheden van de SR leiden ook tot een toenemende complexiteit van de syntax. Wanneer leerlingen bijvoorbeeld de nulpunten van de afgeleide van een functie f willen bepalen, kan er van alles mis gaan. Omdat ze nog vrijwel geen functies met de hand kunnen differentiëren, wordt dat uitbesteed aan de SR. De differentieer-opdracht in machinetaal luidt:

dif($f(x)$,x).

Die toevoeging 'x' wordt vergeten, ook omdat leerlingen de zin er niet van zien; die wordt pas duidelijk wanneer er sprake is van een functie van twee variabelen:

Melanie heeft problemen met de afgeleide naar y. De docent geeft aan hoe ze de afgeleide naar x en die naar y van z(x,y) kan berekenen.

In één regel meteen de nulpunten van de afgeleide berekenen, is vragen om problemen:

solve(dif($f(x)$,x) = 0,x).

Hier wordt soms de noodzakelijke toevoeging '= 0' vergeten. Opsplitsing van het proces in deelstappen – eerst de afgeleide, dan de nulpunten – maakt de syntax overzichtelijker.

Ook de *interpretatie van de uitvoer* van de machine geeft soms problemen: leerlingen begrijpen foutmeldingen niet, of de machine geeft antwoorden in de ogen van de leerlingen op een ongebruikelijke manier weer.

Zo werd een leerling bijvoorbeeld in verwarring gebracht toen de machine de afgeleide van een functie zo weergaf:

$$\frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 169}},$$

terwijl het antwoord achterin het lespakket luidde:

$$-\frac{(12 - x)}{\sqrt{25 + (12 - x)^2}}.$$

Wie heeft nu gelijk, het antwoordenboek, de machine, allebei of geen van beide?

Verder is het *navigeren door de schermen en menu's* van de machine niet vanzelfsprekend. Welke optie is waar te vinden? Is een functie die in het functiebestand wordt ingevoerd, ook op te vragen in het algebrascherm? Dergelijke zaken waren soms niet duidelijk, al bleken deze problemen vaak eenvoudig op te lossen.

Overigens staan veel van de hierboven beschreven moeilijkheden zelden op zichzelf; vaak is er een samenhang met (een gebrek aan) wiskundige kennis. Zo wilde een leerling weten voor welke x geldt dat $\cos(x) = 35/18$. Invoer van $\cos^{-1}(35/18)$ gaf de foutmelding 'non-real result'. Natuurlijk begreep hij die foutmelding niet; toch zou je hopen dat die boodschap aanleiding is om de invoer te controleren en te bedenken dat de cosinus de waarde 35/18 niet aanneemt.

De SR als 'Black Box'

De tweede helft van de lessenserie hebben de leerlingen gewerkt aan optimaliseringsopgaven. Daarbij kwamen functies aan de orde die ze nog niet met de hand konden differentiëren. Dat deed de SR voor hen, die als een 'black box' afgeleiden bepaalde en vergelijkingen oploste. De vraag hierbij was nu of de leerlingen deze 'black box' kunnen gebruiken zonder dat ze de grote lijn van het oplossingsproces uit het oog verliezen.

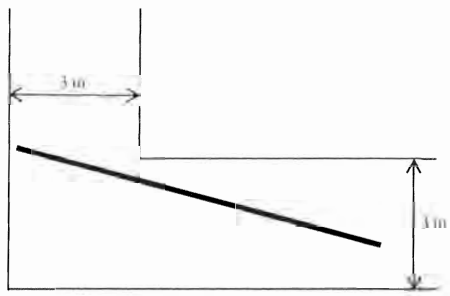
De resultaten op dit punt zijn gematigd positief. De meeste leerlingen wisten goed waar ze mee bezig waren. Het inzicht in de methode van het zoeken naar horizontale raaklijnen leek niet geschaad te worden door het uitbesteden van de techniek. Sommigen vonden het zelfs overzichtelijk om op deze manier het rekenwerk 'apart te zetten'.

De SR helpt bij het overzicht en geeft ook meer overzicht.

Toch voelde een aantal leerlingen zich hierbij niet prettig: *Ik voelde me onzeker bij dat differentiëren zonder dat we dat al gehad hadden. Hadden jullie ons niet beter eerst techniek van het differentiëren kunnen laten doen?*

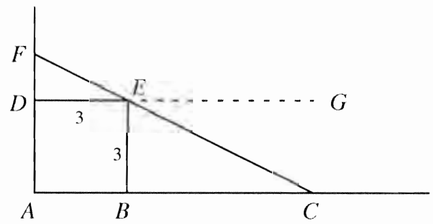
Onderzoeksopdrachten met de SR

Het lesmateriaal bevatte ook enkele onderzoeksopdrachten (zie ook [5]). Algemeen gesproken functioneerde de SR hierbij goed: de leerlingen konden lastige rekenklussen aan de machine overlaten en voelden zich vrij om te experimenteren.
Een van de onderzoeksopdrachten was het bekende probleem van de buis die door de bocht moet. Het begint zo:



Hierboven zie je een bovenaanzicht van een gang van drie meter breed, waarin een hoek zit. Twee personen proberen een dunne buis van 8,5 meter lengte door deze bocht te manoeuvreren. De vraag is of dat zal lukken...

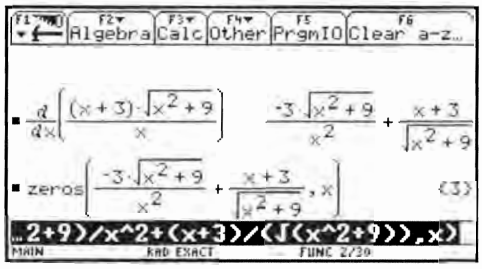
Leerlingen zien snel dat de buis het beste tegen de 'binnenhoek' kan worden gehouden.
Schematisch kan de situatie als volgt worden getekend:



Aardig aan deze opgave is, dat die op verschillende manieren kan worden aangepakt. In de verslagen van de leerlingen staan de volgende methoden:

1. Stel BC gelijk aan x. Dan geldt: $EC = \sqrt{x^2 + 3^2}$. Uit gelijkvormigheid van CBE en EDF volgt dat $DF = 3^2/x$. Dus, weer met Pythagoras: $EF = \sqrt{3^2 + (3^2/x)^2}$. De totale afstand is de som van CE en EF. Dat geeft dus twee wortels, die eventueel door handig kwadrateren weg te werken zijn. De keuze $DF = x$ leidt tot dezelfde formules.
2. Als manier 1, maar dan met behulp van de gelijkvormigheid van CBE en CAF. De vermenigvuldigingsfactor is $\frac{x+3}{x}$. De totale lengte CF is de lengte van EC vermenigvuldigd met deze factor.
3. Als manier 1, maar bereken de totale lengte CF met: $\sqrt{AC^2 + AF^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (3^2/x + 3)^2}$. Dit geeft maar één wortel.
4. Stel AC gelijk aan x. Dan is BC gelijk aan $x - 3$, en kan verder gegaan worden op één van bovenstaande manieren. De formules ogen wat ingewikkelder.
5. Stel de hoek CEG gelijk aan x. De totale lengte is dan gelijk aan $\frac{3}{\sin x} + \frac{3}{\cos x}$.

Elk van deze methoden leidt tot een functie waarvan de leerlingen met de SR het minimum kunnen bepalen. Neem bijvoorbeeld de tweede manier:



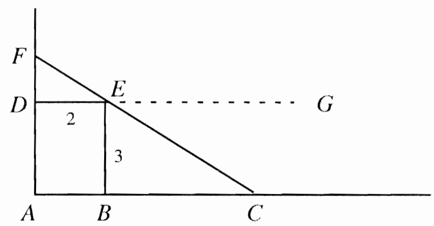
Esther en Henk kiezen de derde aanpak. In hun verslag schrijven ze:

We hebben de wortel weggelaten zodat de SR het makkelijker kan uitrekenen:

$$\left(3 + \frac{9}{x}\right)^2 + (3 + x)^2$$

Manier 5 heeft de complicatie dat de SR de ongebruikelijke notatie @n hanteert voor de k in $k \cdot \pi$. Dat snapt het tweetal dat deze aanpak volgt natuurlijk niet.

Dan wordt de situatie gewijzigd:

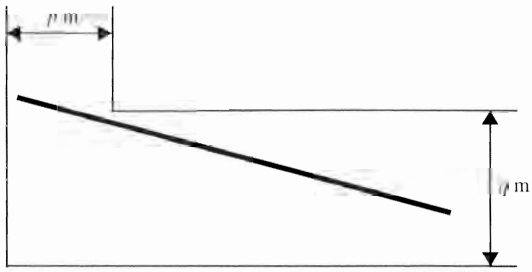


Carolien en Hanneke kiezen manier 4 en krijgen de volgende formule:

$$\sqrt{2^2 + \left(\frac{6}{x-2}\right)^2} + \sqrt{3^2 + (x-2)^2}$$

Bij het nulstellen van de afgeleide hiervan lopen ze tegen de beperkingen van de SR aan: de machine geeft geen antwoord. Alvorens over te schakelen op methode 2 schrijven ze vergoeilijkend in hun verslag:
Dit is een erg moeilijke berekening. Daarom is het makkelijker om gelijk de maximale lengte te berekenen.

Tenslotte de generalisatie:



De meeste leerlingen volgen dezelfde aanpak als in de concrete gevallen en komen zo tot een goede formule. Maar dan ontstaan er enkele moeilijkheden. Esther en Henk voeren in:

$$\left(\frac{pq}{x}+q\right)^2+(p+x)^2$$

maar ze zetten geen vermenigvuldigingsteken tussen p en q. Omdat de SR ook variabelennamen met meer dan één letter toestaat, vat de machine pq op als één variabele. Daarmee kan best gerekend worden, maar dat leidt tot onbegrijpelijke antwoorden als je je dit niet realiseert.
Bij Dennis en Niels zit het probleem dieper. Ook in hun verslag staat geen algemene oplossing. Ze beschrijven wel de te volgen methode, maar lijken te denken dat voor p en q eerst waarden moeten worden gesubstitueerd. Ook in de klassikale nabespreking komt dit naar voren:

Dennis: *Je moet toch eerst voor p en q waarden invullen?*
Docent: *Je kunt ook eerst oplossen, dan krijg je het antwoord uitgedrukt in p en q.*

Kennelijk is de kracht van computeralgebra nog niet helemaal tot hen doorgedrongen. Een vergelijkbaar misverstand zien we ook bij Irene, die aan een andere onderzoeksopdracht heeft gewerkt:

Als we dit op nul herleiden, geeft de SR geen uitkomst, maar er blijft staan:

$$\sqrt{-(x^2-2x-a^2+1)}+(x-1).\sqrt{2x+a^2-1}=0$$

Eigenlijk is dat ook niet mogelijk als je geen getal voor a invult. Dus als je wilt weten hoe laag 't gewicht maximaal kan hangen, vul je in deze laatste formule de lengte van het linkertouwtje (= AC) in. Dan hoef je bij elke opstelling in deze vorm niet steeds het hele differentieerwekk langs te gaan, maar is deze formule genoeg.

Vooral de zinssnede 'Eigenlijk is dat ook niet mogelijk als je geen getal voor a invult' is veelzeggend.
Een ander punt waar leerlingen op gewezen moesten worden, is het onderscheid dat een computeralgebraprogramma maakt tussen exacte en decimale getallen. In een van de andere onderzoeksopdrachten speelt een touwtje van 40 cm een rol. Wanneer de leerlingen dit invoeren als 0.4 meter, wordt dit als een decimaal getal beschouwd en geeft de SR geen exacte antwoorden meer.
Ondanks deze 'hobbels' en misverstanden wekken de verslagen van de leerlingen de indruk dat de SR een onderzoekende houding van de leerlingen stimuleert. De oplossingsmethoden van de leerlingen hebben een behoorlijk niveau van complexiteit.

Gemengde gevoelens

Terugkijkend op het experiment geven de meeste leerlingen aan dat ze de SR een prettige en nuttige machine vonden. Toch lopen de meningen wat uiteen. De twee onderstaande fragmenten uit de nagesprekken geven de twee uitersten aardig weer.

Vraag: *Hoe vond je het experiment?*
Jasper: *Leuk! Echt heel leuk. Makkelijker ook.*
Vraag: *Wat vond je makkelijker?*
Jasper: *De commando's zijn simpeler en natuurlijker. Het is heel mooi dat hij wiskundige notaties gebruikt.*
Vraag: *Stimuleerde de SR je of blokkeerde hij je juist?*
Jasper: *Hij stimuleerde enorm. Ik vond de lessen ook veel leuker zo.*
Vraag: *Hoe vond je het experiment?*
Marieke: *Leuk, maar niet echt nuttig.*
Vraag: *Wat bedoel je daarmee?*
Marieke: *Je bent de hele tijd dingen blind aan het intikken zonder te weten wat je precies doet.*
Vraag: *Dus je hebt weinig vertrouwen in het apparaat?*
Marieke: *Dat wel, hij zal heus wel goed doen wat je invoert. Ik ben alleen gewoon nieuwsgierig naar wat er nou achter zit. Ik wil dat apparaat best gebruiken, maar alleen als ik het zelf ook had gekund.*
Vraag: *Was de SR in de afgelopen maand een blokkade of juist een stimulans?*
Marieke: *Het was niet echt een blokkade, maar ook absoluut geen stimulans, omdat het niet echt helpt nieuwe wiskunde te leren.*

Conclusie

Hieronder vat ik de belangrijkste conclusies uit het project samen.

- De beschikbaarheid van de symbolische rekenmachine leidt tot daadwerkelijk gebruik bij leerlingen, ook thuis en bij andere vakken.
- De belangrijkste barrières voor een zinvol gebruik van de SR vormen de syntax van de machine, de interpretatie van de uitvoer en het navigeren door schermen en menu's.
- Wanneer de SR gebruikt wordt voor een beperkt repertoire van 'standaardhandelingen', kan het gebruik van de machine al snel efficiënt zijn.
- Het is mogelijk om werk aan de SR over te laten dat

leerlingen zelf niet met de hand kunnen uitvoeren. Dit hoeft niet te leiden tot verlies van overzicht; wel voelt een deel van de leerlingen zich niet prettig bij het gebruik van de SR als 'black box'. Die gevoelens moeten zeker serieus genomen worden, lijkt me.

- Bij onderzoeksopdrachten kan de beschikbaarheid van de SR de onderzoekende houding stimuleren.

Paul Drijvers, Freudenthal Instituut, Utrecht

Noten

[1] Drijvers, P. (1997). 'Oude wiskunde en nieuwe technologie'. *De Nieuwe Wiskrant 16*(3) pp. 49 - 53.

[2] Drijvers, P. (1998). 'De symbolische rekenmachine over de grens'. *De Nieuwe Wiskrant 18*(1) pp. 47 - 53.

[3] Drijvers, P. (1999). 'Experiment met de symbolisch rekenmachine op College De Klop'. *Euclides 74*(6).

[4] Drijvers, P. (1998). *De symbolische rekenmachine in de wiskundeles.* Utrecht: ISOR Onderwijsresearch / Freudenthal Instituut.

[5] Drijvers, P. (1999). 'Op hoeveel nullen eindigt 1998!?' *Te verschijnen in jaargang 74 van Euclides.*

[6] Dit onderzoek (projectnummer 97.1.4.1) is gefinancierd uit het budget dat het ministerie van OC&W jaarlijks ter beschikking stelt aan de LPC ten behoeve van Kortlopend Onderwijsonderzoek, dat uitgevoerd wordt op verzoek van het onderwijsveld.