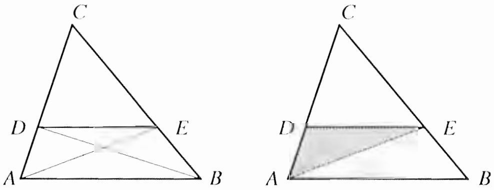
Wat te bewijzen is

Rubriek

Het rekenen met oppervlakten stond aan de wieg van de meetkunde. Dat was in de tijd toen het bedrijven van dit vak een puur praktische bezigheid was. De Grieken hebben later aan meetkunde een andere, meer filosofische, wending gegeven en het 'bewijzen' uitgevonden. Sindsdien worden oppervlakten niet alleen berekend, maar ook gebruikt bij geometrische bewijzen. Een fraai voorbeeld is te vinden in de *Elementen* van Euclides, waar hij bewijst dat een lijn parallel met een zijde van een driehoek de beide andere zijden (inwendig of uitwendig) in stukken verdeelt die een evenredigheid vormen. Ik neem nu alleen de inwendige verdeling onder de loep:

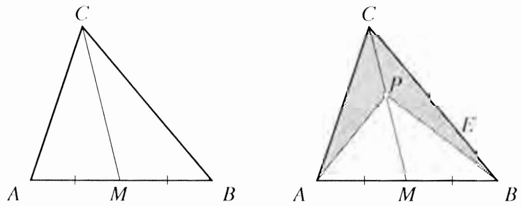


Gegeven: $DE \,//\, AB$
Te bewijzen: $|CD| : |AD| = |CE| : |BE|$
Bewijs: verbind A met E en B met D. Nu geldt:

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{\text{opp}(CDE)}{\text{opp}(ADE)} \text{ en } \frac{|CE|}{|BE|} = \frac{\text{opp}(CED)}{\text{opp}(BED)}$$

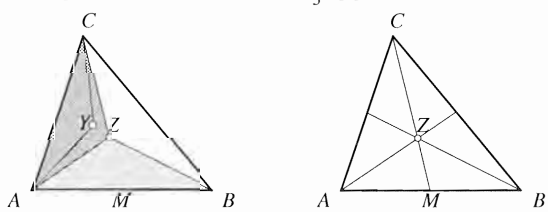
Immers: de driehoeken CDE en ADE hebben met E als top dezelfde hoogte, en dus verhouden de oppervlakten zich als de bases. Analoog voor CED en BED.
Ook geldt: opp(ADE) = opp(BED), want de driehoeken ADE en BED hebben met A en B als top een gemeenschappelijke basis en vanwege $AB \,//\, DE$ hebben ze ook een gelijke hoogte.
De beide genoemde oppervlakteverhoudingen zijn nu aan elkaar gelijk en daarmee is via een van de vijf 'evidente waarheden' die Euclides in zijn lijst van uitgangspunten opnam (modern gezegd: als $x = y$ en $y = z$, dan $x = z$) de evenredigheidsstelling bewezen.
Het omgekeerde van de stelling is eveneens waar, en ook dit kan eenvoudig via oppervlakten worden aangetoond. Een bijzonder geval van de omgekeerde stelling is de stelling van de middenparallel. Als D en E de middens zijn van AC en BE dan is $DE \,//\, AB$. Bovendien geldt dan $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$, en ook dat volgt uit de vergelijking van oppervlakten. De oppervlakte van ADE is namelijk één kwart van de oppervlakte van driehoek ABC. De stelling van de middenparallel is krachtig; zij kan bijvoorbeeld worden gebruikt om te bewijzen dat de drie zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan en elkaar verdelen in stukken die zich verhouden als 2 : 1.
Je kunt je afvragen of de zwaartelijnstelling ook *direct* met oppervlakten kan worden bewezen. Dat kan inderdaad en wel op verschillende manieren. Sinds kort is het nu volgende bewijs voor mij favoriet.

- De zwaartelijn uit C verdeelt driehoek ABC in twee driehoeken met gelijke oppervlakte.
- Ik laat nu een punt P wandelen over die zwaartelijn en vergelijk de oppervlakten van de driehoeken PAB, PBC en PCA. De oppervlakten van de laatste twee zijn bij elke positie van P aan elkaar gelijk.



$$|AM| = |BM| \Rightarrow \begin{cases} \text{opp}(CAM) = \text{opp}(CBM) \\ \text{opp}(PAM) = \text{opp}(PBM) \end{cases} \quad -$$
$$\overline{\text{opp}(PCA) = \text{opp}(PBC)}$$

- Als P dicht bij C ligt, is de oppervlakte van PCA duidelijk kleiner dan die van PAB. Ligt P daarentegen voldoende dicht bij M, dan is de oppervlakte van PCA de winnaar. De voorspelling dat er een plek op CM is waarbij de oppervlakten van PAB, PBC en PCA precies gelijk zijn, is niet gewaagd. Hoe vind je die plek? Als opp(PCA) = 2 × opp(PAM), of $|PC| = 2|PM|$, weet ik zeker dat opp(PCA) = opp(PBC) = opp(PAB). Op de zwaartelijn uit C ligt dus een punt (zeg Z) dat een verdeling van driehoek ABC in even grote driehoekige delen bewerkstelligt.
Natuurlijk kun je ook op de beide andere zwaartelijnen zo'n punt vinden. Echter, de verdeling van ABC in drie even grote driehoeken op de zijden is uniek! Immers, als bij Z zo'n 'eerlijke' verdeling hoort, dan geeft elk ander punt Y ten minste één driehoek met een oppervlakte kleiner dan $\frac{1}{3}\text{opp}(ABC)$.



Het unieke punt Z ligt dus op de drie zwaartelijnen en verdeelt deze in stukken met verhouding 2 : 1.
Huiswerk voor de lezer: formuleer en bewijs een 3-dimensionaal analogon van de zwaartelijnstelling.

Martin Kindt, Freudenthal Instituut