

Onlangs heeft Natuur&Techniek het boek *Wiskunde – Wetenschap van patronen en structuren* uitgebracht. Anne Zijlstra las het op een Franse camping en maakt u deelgenoot van zijn bevindingen.

The Science of Patterns

Naast ons op een Franse camping zat een Fransman baas te wezen in een zeer comfortabele stoel. Zijn vrouw en zoontje genoten van eenvoudiger gestoelte. Hij liet zich door haar bedienen en zij deed het gelaten. Het zoontje zag er wat verloren uit.

‘Wat zielig is dat: een kind met twee ouders!’ flapte mijn dochter van 19 eruit.

Daar moest ik even aan denken toen ik het boek zat te lezen waarover ik dit artikel schrijf en dat ik de lezer aanbeveel ter verrijking van het normale geestelijke leven.

Met de flapuit heb ik na het flapsel nog wat gefilosofeerd over de commutatieve eigenschap in samenhang met de uitspraak ‘Wat zielig is dat: twee ouders met een kind!’ Want ja, wat bedoel je nou precies en waar leg je de klemtoon... En later in de vakantie zag ik vanuit mijn luie stoel een waterflipper over het aangrenzende maïsveld water flippen en antwoordde op een vraag alleen maar ‘achtenzestig, negenenzestig, zeventig’, want ik wou weten hoeveel slagen hij maakte van verticale sproei tot verticale sproei. Een tijdje later kon ik weer normaal meepraten, want toen wist ik dat de waterstraal in mijn gezichtsveld maximaal 76 cm van lengte veranderde...

Een week later brachten we de flapuit naar de pendelbus in Toulouse. Daar kwamen we zowaar Pierre de Fermat tegen, op de gevel van een lycée tegenover de kerk der Jacobijnen.

Prachtige Mairie daar in Toulouse, vrije entree, moet je van genieten. Ik heb een vriend daar uit lopen leggen wat de stelling van Fermat voorstelt. Hij zei ‘oh’ omdat de voorstelling niet landde en op gebakken lucht leek. Lucht landt slecht (lijkt me een aardige stelling).

Ik beleef op een andere manier plezier aan een uitspraak dan mijn dochter en verbeeld me dat het iets te maken heeft met *extra* plezier. Ik kijk met een bepaald plezier naar zo’n waterflipper en dat lijkt wat op het inwendig horen van muziek die je van het blad leest. Er komt veel meer mee in je beleving dan wat zich aan de oppervlakte aandient. Als je behept bent met de gekte, het enthousiasme, de manier van kijken en denken die wiskunde heet, zul je genieten van het boek *Wiskunde – wetenschap van patronen en structuren*, zoals het in vertaling heet. De

schrijver heet Keith Devlin en de vertaler Jan van de Craats.

Het boek heeft een goede historische opbouw. Tellen kun je door te turven in klei. De aard van wat je telt, kun je vastleggen via de *vorm* van de kleifiguur. Dan mag je je boekhouder noemen. Meester Pythagoras zorgt er later voor dat je de noodzakelijke basisvorming opdoet. Die bestaat uit een pakket van zeven vakken: aritmetica, astrologia, geometria, harmonia (muziek), logica, grammatica en retorica (in het jaar 2010 wordt dat het nieuwe beleid, is mijn verwachting). Het vergelijken van dingen, hun onderlinge verhouding, is belangrijk, evenals het scheppen van orde. Menig leraar today zal dat erkennen. Zo dacht Euclides er ook over.

Op een voortvarende manier stoot Devlin door naar de laatste stelling van Fermat, aan het eind van het eerste hoofdstuk al. De historie is vol *vermoedens*, dat is de prikkeling die je als lezer ondervindt – en daar hoeft je niet de helft van een priemtweeling voor te zijn.

Aardig in de opzet van het boek zijn trouwens de intermezzi, zeker als het verhaal hier en daar loopt als een grijze kameel.

Aan het hoofdstuk *Redeneren en communiceren* heb ik veel plezier beleefd. Wat is een bewijs?

Een bewijs hangt van beweringen aan elkaar. Van symbolen waarvan de betekenis is verdampt.

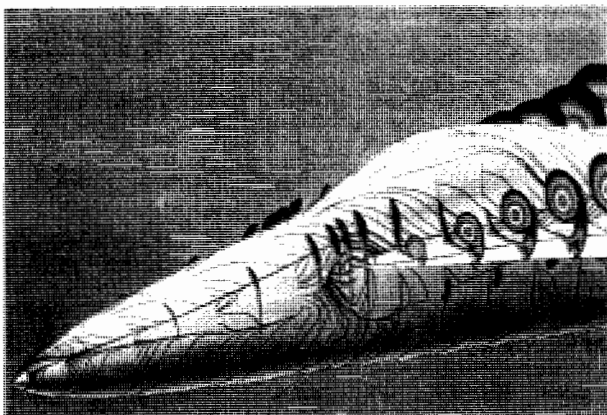
Maar de start zal toch gemaakt moeten worden met afspraken, met axioma’s en met taal.

Hoe moeilijk blijkt *taal* te zijn! Kijk maar eens naar deze zin van Devlin: ‘Een bewijs betekent het vermogen om *ieder* weldenkend mens met voldoende ontwikkeling en intelligentie volledig te overtuigen’. Hoeveel mensen voldoen hieraan!? Is de lezer welwillend, dan boeit de Boole-logica beslist. ‘Door een gedetailleerde studie van de patronen van de predikaatlogica hebben wiskundigen echter niet alleen belangrijke inzichten verworven in wat nu eigenlijk een formeel bewijs is, maar hebben ze ook kunnen vaststellen dat dit een betrouwbaar middel is om wiskundige waarheden op te funderen’. Devlin laat daarna goed zien dat Hilbert ‘waarheid’ als te netelig begrip

scheidde van 'bewijsbaarheid' en alleen met dat laatste aan de slag ging. Diens axiomatische methode bleek succesvol te zijn, omdat de axioma's inderdaad betekenisvolle en correcte patronen beschrijven: de meeste mensen zullen hun leven gemakkelijk toevertrouwen aan de geldigheid van de commutatieve wet voor het vermenigvuldigen! Aan het eind van dit hoofdstuk komt de onvolledigheidsstelling van Gödel aan bod. Best wel leuk zoals Devlin dat doet, maar in mijn hersenpan borrelt ondertussen wel iets over meta-taal en meta-meta-taal in relatie tot waarheidsonderzoek omhoog.

Ten slotte laat hij iets zien van de wiskundige aard van de structuur die door een grammatica wordt beschreven. 'Wiskundig' is nogal eens een verhuullend adjectief bij Devlin, net als 'abstract'. Een ontleding leidt maar al te gauw tot de dood van een levend organisme en tot blindheid bij de ontleder voor de schoonheid van het geheel. Daarom ben ik geen liefhebber van dat snijden in een levende taal.

Het hoofdstuk *Beweging en verandering* vond ik pas leuk worden bij het plaatje van de F-18 dat hierbij is afgebeeld.

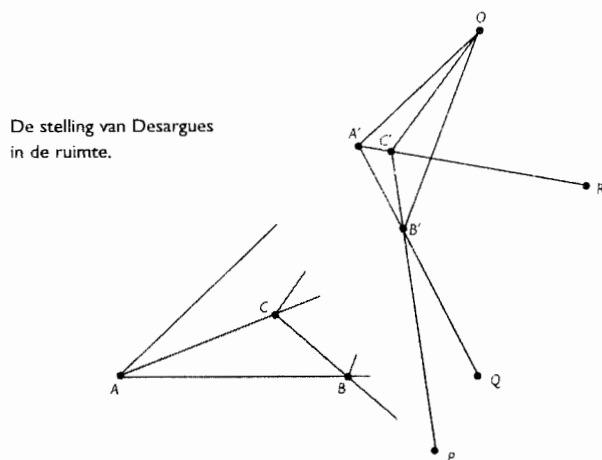


De analyse wordt toegepast bij de studie van tal van praktijkproblemen. Zo moesten er bijvoorbeeld differentiaalvergelijkingen opgelost worden bij deze computersimulatie van de luchtstroming rond de romp van een F-18 gevechtsvliegtuig.

Fascinerend toch, die differentiaalvergelijkingen. En knap van Riemann zoals hij een complex dak over de vloer van de natuurlijke getallen heeft opgebouwd, dat dak heeft verkend en vandaar met een tas vol nieuwe eigenschappen weer is afgedaald naar de vloer.

Het vierde hoofdstuk *Vorm* zit goed in elkaar. Intuïtie en ons universum enerzijds tegenover axioma's en een consistente meetkunde anderzijds bepalen de discussie. Nieuwe meetkundes duiken op zonder directe toepassingen en later blijken ze geschikt voor grootschalige studie van het heelal dan de oude meetkunde van Euclides. De essentie van de projectieve meetkunde wordt mooi beschreven. Een fraaie illustratie staat bij het bewijs van

de stelling van Desargues in de ruimte.



het bewijs omien deze meetkunde ziet er als volgt uit. In de figuur zien we dat AB samen met $A'B'$ en O in één vlak ligt. Laat Q het snijpunt zijn van AB en $A'B'$, R dat van AC en $A'C'$, en P dat van BC en $B'C'$. Aangezien P , Q en R op de (verlengde) zijden van driehoek ABC liggen, liggen ze in het vlak van driehoek ABC . Maar ze liggen ook op de (verlengde) zijden van driehoek $A'B'C'$ en dus in het vlak van deze laatste driehoek. Bijgevolg moeten ze alle drie liggen op de snijlijn van die twee vlakken. P , Q en R liggen, dus op één lijn. Daarmee is het bewijs geleverd.

De objecten waarop een meetkunde wordt losgelaten, oefenen geen invloed uit op de axioma's van die meetkunde. 'Punt' en 'lijn' kun je volgens Hilbert net zo goed lezen als 'bierpul' en 'tafel'. Als je maar beseft dat de enige betekenis van die woorden ligt in wat de vijf axioma's van deze meetkunde (de projectieve) over hen zeggen. Die bierpul ga ik komende cursus met mijn leerlingen proberen.

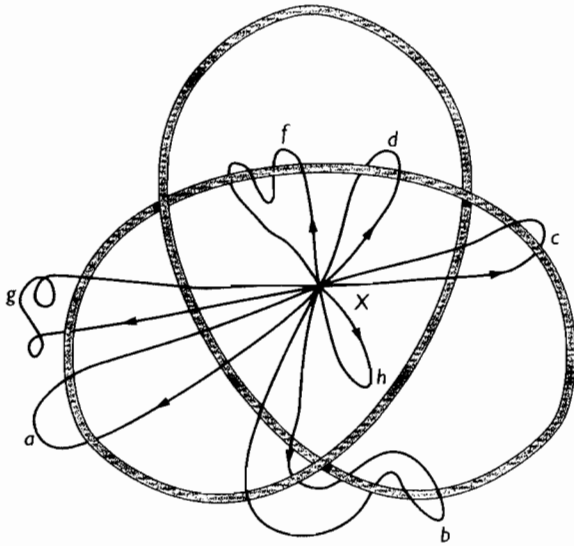
Bij *vorm* denk je in eerste instantie aan een meetkunde. Via de begrippen 'dimensie' en 'vrijheidsgraad' kan een overstap naar algebraïsche beschrijving worden gemaakt. Hoe de afbeelding van een hyperkubus moet worden voorzien, wordt door Devlin helder beschreven. Al met al een boeiend stukje wiskunde, met fraaie plaatjes.

Het vijfde hoofdstuk *Symmetrie en regelmaat* spreekt mij sowieso aan. Er wordt uitvoerig beschreven hoe het zit met de dichtheid van het cirkelmatig vullen van het 2-dimensionale vlak en van het bolstapelen in het 3-dimensionale vlak. Wat de meest efficiënte manier is in het laatstgenoemde geval, is nog niet tot ieders tevredenheid beantwoord. Wie een beetje meeleeft, heeft het afgelopen jaar artikelen daarover verorberd. Omdat ik zelf tijdens de Nationale Wiskunde Dagen van 1998 een causerie over *Magische Getallen* heb verzorgd die onder andere over bolstapeling ging, heb ik geboeid de veertien roos-

ters van Brabais en de vijf Dirichlet-domeinen bekeken. En het is me duidelijk dat ik hier nog eens goed voor ga zitten en – wie weet – nog een nieuwe jas voor een ‘zebra’ of een ‘profielwerkstuk’ kan persen.

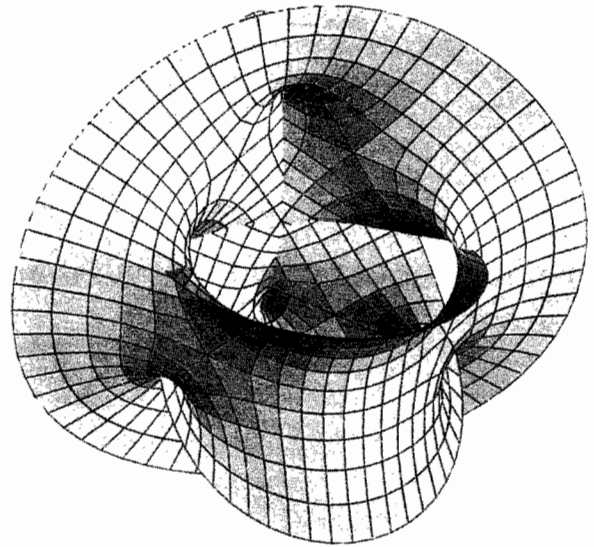
Wel eens van Penrose-betegelingen gehoord? Knip maar een heel stel ruiten met hoeken van 72° (en dus ook 108°) en een heel stel ruiten met hoeken van 36° (en dus ook 144°) waarbij de ruiten onderling gelijke zijden hebben. En dan maar puzzelen hoe je een vlakvulling maakt.

Positie is het laatste hoofdstuk. Een aardig toegankelijk stuk over de formule van Euler. Daarna via de Möbius-band naar de classificatie van oppervlakken. Hengsels plakken, kruiskappen plaatsen, chirurgie bedrijven en ziedaar: het geslacht ligt vast. Bij mij roepen die termen een grijns op. De vertaler geeft pas duidelijk blijk van zijn grijns in het paragraafje over *knopen*: drieblad, achtknoop, platte knoop en oudewijvenknoop. Want hoe complex is een knoop? Het kruisingsgetal geeft uitsluitel. Dat is namelijk het kleinste aantal kruispunten bij de eenvoudigste ligging van het touw. En dan komt dit zinnetje: ‘Zo is bijvoorbeeld het kruisingsgetal van het drieblad 3, en dat van de platte knoop en het oude wijf 6’. Volgens mij staat er in het Engelse origineel gewoon ‘granny’.



De knopengroep bij het drieblad. De leden van de groep zijn gesloten, gerichte lussen die beginnen en eindigen in punt X . De lussen a , b en g worden als dezelfde lus beschouwd want elk ervan kan in de andere worden overgevoerd zonder ze open te knippen of door de knoop heen te trekken. De lussen c en d worden als verschillend beschouwd omdat ze in tegengestelde zin om de knoop heen lopen. Lus h wordt geïdentificeerd met de nul-lus van lengte 0, het eenheidselement van de groep. De groepsoperatie is het combineren van lussen, waarbij de ‘som’ $x + y$ van de lussen x en y bestaat uit lus y gevolgd door lus x . (Het tussenstadium waarbij het basispunt X wordt gepasseerd, laat men bij die combinatie buiten beschouwing.) Zo is bijvoorbeeld $d + d = f$ en $c + d = h$.

Het relaas van de strijd om de stelling van Fermat onder de knie te krijgen, is boeiend. Een beetje wiskundige kent dat proces van binnenuit, dat begint met een gewekte interesse, daarna een vondst, een idee, een vermoeden. Het laat je niet los. Het gevecht om de fysieke balans, het moeilijk te stoppen denken, de verbeterheid.



Oppervlakten die gegenereerd worden door de Fermatvergelijking $x^n + y^n = 1$, waarbij men x en y als complexe variabelen beschouwt. De figuur toont het oppervlak voor $n = 3$. De figuur is geproduceerd met behulp van het wiskundige softwarepakket *Mathematica*, een van de vele geavanceerde computerhulpmiddelen die de moderne wiskundige tot zijn beschikking heeft.

Het gaat Devlin allemaal om deze boodschap: wiskunde is de wetenschap van patronen en structuren die overal te vinden zijn: in het fysische heelal, in de levende wereld, of zelfs in onze eigen geest.

Tot besluit een citaat van Barry Lopez dat ik vandaag tegenkwam in het boek *Bewogen* van Elizabeth Berg:

‘Volgens mij verlangt de wereld naar schoonheid. Ik heb die schoonheid in de wiskunde gezien. Ik heb schoonheid aangetroffen in het jagen van de wolven, en in de manier waarop mannen en vrouwen elkaar aanraken. Ik denk dat schoonheid het grootste verlangen van de wereld is, en dat onze kennis om die te bereiken bestaat uit die vormen van gedrag en expressie die wij vangen onder één term, liefde’.

Anne Zijlstra, Christelijk College Nassau-Veluwe, Harderwijk

Wiskunde – Wetenschap van patronen en structuren

Auteur: Keith Devlin, vertaler Jan van de Craats

Een uitgave van Natuur&Techniek

ISBN 90 73035 53 8

Losse verkoopprijs: f76,50

U kunt het boek voordelig bestellen door gebruik te maken van de bestelbon uit de folder.