De beheersing van algebraïsche vaardigheden wordt door velen als een knelpunt gezien. Toch zijn ook jonge kinderen heel wel in staat om algebraïsch te redeneren. **Barbara van Amerom** heeft een leerlijn ontworpen om leerlingen flexibel te leren omgaan met verbanden en verkorte notaties.

Tussen rekenen en algebra

Pre-algebra op de basisschool en in de brugklas

Inleiding

Leerlingen in het voortgezet onderwijs hebben al sinds jaar en dag moeite met het oplossen van vergelijkingen. En als ik mijn iets oudere collega's mag geloven, is het er sinds de invoering van de basisvorming (met andere doelen en een andere onderwijsaanpak) niet beter op geworden. Integendeel, leerlingen beheersen de hiervoor benodigde algebraïsche vaardigheden steeds minder. Het lijkt daarom voor de hand te liggen om op zoek te gaan naar een manier om leerlingen beter voor te bereiden op het hoe en waarom van de vergelijking.
Geïnspireerd door het werk van Leen Streefland (†) is in september 1995 door het Freudenthal Instituut een promotie-onderzoek gestart onder de naam 'Reinvention of Algebra'[1]. Doel van dit onderzoek is om vanuit historisch perspectief lesmateriaal over pre-algebra te ontwikkelen en met theorie te onderbouwen. In dit artikel leest u iets over de achtergrond van het onderzoek en over enkele ervaringen in de klas.

Ontwikkelingsonderzoek

Uit het Amerikaanse Middle School Project (Van Reeuwijk & Wijers, 1994) en uit korte experimenten in Nederland (Abels, 1994; Streefland, 1995) is gebleken dat het mogelijk is om leerlingen op jongere leeftijd te laten kennismaken met aanvankelijke algebra. Kinderen van tien jaar hebben laten zien dat zij algebraïsch kunnen redeneren, onder voorwaarde dat ze werken vanuit voor hen herkenbare probleemsituaties. De verwachting is dat een dergelijke basis leidt tot een beter begrip van abstractere algebra in latere schooljaren, omdat leerlingen meer inzicht verwerven in het uitvoeren van manipulaties.
Algebra gaat over formules, grafieken, groei, regelmaat, functies, vergelijkingen, variabelen en nog tal van andere begrippen en onderwerpen. En pre-algebra kan worden opgevat als een mogelijke informele aanloop hiertoe. Begin jaren negentig is door de W12-16 algebragroep invulling gegeven aan een 'nieuwe' algebra voor de onderbouw en algebraïsche verbanden spelen hierin een belangrijke rol (Algebragroep W12-16, 1990, 1991; W12-16 COW, 1992). Via overgangen tussen beschrijvingen, tabellen, grafieken en formules worden allerlei algebraïsche vaardigheden geoefend, maar het manipuleren van formules en vergelijkingen is erbij ingeschoten. Daarom is besloten om in dit onderzoek niet grafieken en regelmaat als ingang te kiezen, maar om, geïnspireerd door de historische ontwikkeling van de algebra, een alternatieve route te (onder)zoeken. We hebben ons beperkt tot het gebied van expressies en vergelijkingen: zowel lineaire vergelijkingen met één onbekende als stelsels vergelijkingen met meerdere onbekenden.
Als voorbereiding hierop hebben we voor leerlingen in groep 7 en 8 van de basisschool een leerlijn ontworpen waarin zij flexibel leren omgaan met verbanden en verkorte notaties. Er wordt onder andere aandacht besteed aan natuurlijk gebruik van afkortingen en andere vormen van notaties en aan de voorwaarden en afspraken die hier onontkoombaar aan gekoppeld zijn.

Experiment op de basisschool

Afgelopen jaar is op de basisschool 't Zonnewiel in Almere een onderwijsexperiment gestart in twee combinatieklassen van groep 7-8. Beide klassen bestaan uit dertig leerlingen, waarvan circa eenderde deel allochtoon is en ruim de helft meisje. De docenten, Cindy van den Broek en Olof van der Heide, hebben beide in totaal veertien respectievelijk twaalf lessen gegeven uit de ten behoeve van het onderzoek ontwikkelde boekjes *Zakgeld* en *Kaarten*. Cindy's ervaringen werden benut om het lesmateriaal, de handleiding en de opzet van de lessen van Olof nog bij te stellen. De onderzoeksgegevens zijn verzameld via lesobservaties, de afname van een afsluitende toets en participatie tijdens klassegesprekken. De inhoud van de twee boekjes omvat ondermeer de volgende onderwerpen:
- hoeveelheden vergelijken en op diverse manieren gelijkmaken
- praten over conflicten bij rekennotaties en verschillende betekenissen van symbolen
- oefenen met bewerkingen en bewerkingen omkeren
- probleemoplossen door logisch te redeneren met

meerdere gegevens
- redeneren over uitdrukkingen (inwisselen, herschrijven, kwalitatief beoordelen).

Het overstijgende thema is het zoeken en beschrijven van verbanden (samenhang) tussen hoeveelheden: dat gebeurt via tabellen, sommetjes, beschrijvingen in woorden, uitdrukkingen of zelfs via twee strookjes (waarbij de ene bijvoorbeeld drie keer zo lang is als de andere, zie figuur 1). Ik zal sommige onderwerpen toelichten met behulp van voorbeelden uit klassegesprekken en leerlingmateriaal.

De eerste rekenzin van Jeroen is: "Annelies heeft drie keer zoveel punten als Jeroen."
Maar hoeveel punten ze allebei precies hebben, dat verklapt hij niet!

aantal punten Jeroen	2	3				
aantal punten Annelies	6	9				

1 Hoeveel punten kunnen ze hebben? Maak de tabel af (er zijn al enkele getallen ingevuld).

2 In de hokjes is een strookje getekend. Dit strookje stelt het aantal punten van Jeroen voor. Teken eronder zelf het strookje dat bij Annelies hoort.

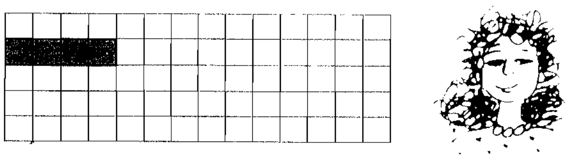

fig. 1 Verschillende representatievormen van de samenhang '3 keer zoveel'

Hoeveelheden vergelijken en verbanden herkennen

De startactiviteit van het boekje *Zakgeld* (figuur 2) gaat over het zoeken en beschrijven van de samenhang tussen twee getallen. De leerlingen wordt gevraagd uit te zoeken hoe de hoeveelheden zakgeld van twee leerlingen die aan één tafel zitten, samenhangen (bijvoorbeeld het dubbele, 4 meer, 3 verschil enzovoorts). Er wordt ook gesproken over het verschil tussen 'het dubbele' en 'de helft' en '4 verschil' en '4 meer'. Vervolgens moeten de leerlingen nagaan of er nog meer tafels (getallenparen) zijn die dezelfde samenhang laten zien.

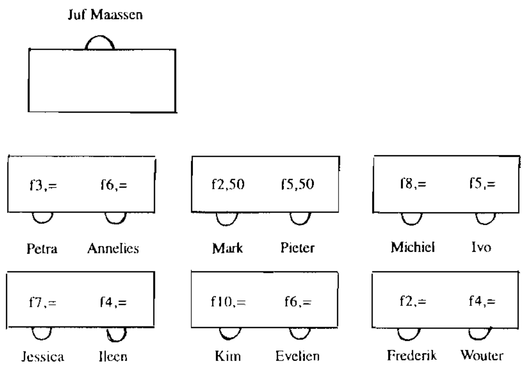

fig. 2 Startactiviteit in 'Zakgeld'

In het volgende stukje is te zien hoe de samenhang tussen twee getallen (door leerlingen 'tafelgroepje' genoemd) in sommetjes kan worden uitgedrukt.

Leerkracht: 'Wie kan een voorbeeld geven waar een ander tafelgroepje bij hoort? Dan kunnen we die even samen doen.'
Bas: 'Min 3.'
Leerkracht: '3 gulden verschil. Welke namen horen erbij?'
Bas: 'Marc en Peter.'
Leerkracht: 'Kun je er ook een sommetje bij maken?'
Raynor: '5,50 eraf 3.'
Leerkracht: 'Wie kan nog een sommetje doen? We hebben net al gezien, het hoeft niet altijd eraf te zijn.'
Hyacinth: '5,50 eraf 2,50 is 3.'
Jeffrey B.: 'Ik weet nog een sommetje ... 2,50 erbij 3 is 5,50.'

De sommetjes zorgen ervoor dat de leerlingen bekend worden met de situatie en op een betekenisvolle manier de bewerkingen kunnen oefenen. Bovendien bieden ze de leerling houvast, niet alleen om de samenhang tussen de getallen te illustreren, maar om omgekeerd ook het antwoord te controleren.
In een andere les wordt leerlingen gevraagd op welke manieren twee verschillende bedragen zakgeld gelijkgemaakt kunnen worden. Uitgangspunt van zo'n activiteit is dat leerlingen van standpunt kunnen wisselen (iets bij de ene doen of bij de andere weghalen) en dus flexibeler en creatiever met hoeveelheden leren omgaan. Bewerkingen oefenen en omkeren (zie ook verderop in dit artikel) is een nuttige voorbereiding voor het herschrijven van een uitdrukking en het oplossen van een vergelijking met één onbekende.

Betekenis van letters en symbolen

De leerlingen maken op een vrijblijvende manier voor het eerst kennis met verkortingen. De opdracht luidt: van twee jongens is bekend hoeveel zakgeld ze krijgen – 4 gulden en 8 gulden – en er is een lijstje met uitspraken (in alleen woorden, met operatoren, of een combinatie van beide) over de samenhang tussen deze bedragen. De meeste uitspraken zijn juist, maar van sommige is het verband precies verkeerd om beschreven. De leerlingen moeten nagaan welke uitspraken kloppen en daarna moeten ze uitleggen of ze de afkortingen wel of niet handig of moeilijk vinden. De bedoeling van deze activiteit is drievoudig. Ten eerste is de verwachting dat, vanwege de herkenbaarheid van de operatie, sommige leerlingen de verkortingen handiger en sneller zullen vinden. Ten tweede hopen we te weten te komen of verkortingen de kans op misinterpretatie van het verband (precies verkeerd om) vergroten en of leerlingen verkortingen daarom verwarrend vinden. En ten derde is het mogelijk om na te gaan of een leerling tijdens het experiment nog op zijn of haar voorkeur terugkomt.

Bij de nabespreking blijkt dat de meningen uiteenlopen.

Leerkracht: 'Wat betekent die zg?'
Klas: 'Zakgeld.'
Leerkracht: 'En die M?'
Klas: 'Mark.'
Leerkracht: 'En die E?'
Klas: 'Eelco.'
Leerkracht: 'Is dat handig, dat afkorten?'
Sanne: 'Ja.'
Leerkracht: 'Waarom dan?'
Ryan: 'Het is korter.'
Leerkracht: 'Ja, dan gaat het opschrijven sneller.'
Esther: 'Maar g kan ook gram zijn.'
Leerkracht: 'Dus moeten we samen afspreken wat de letters betekenen. Is het duidelijk voor jullie allemaal wat de letters hier betekenen?'
Klas: 'Ja.'
Leerkracht: 'Wie denkt dat 'ie het zelf ook zo gaat doen?'
Thomas en Sander E. reageren het eerst, dan ongeveer de helft van de klas.
Leerkracht: 'En wie van jullie gaat het zeker niet doen?'
Vier leerlingen reageren, anderen zeggen dat ze het nog niet weten.

De leerkracht respecteert de mening van de leerlingen en geeft ze de ruimte om pas afkortingen te gebruiken als ze daar aan toe zijn.

Verkortingen en afkortingen lopen als een rode draad door de gehele leerlijn.
De inleiding van het tweede boekje, *Kaarten*, gaat over een kaartspel. De leerlingen werken in deze opdracht met kartonnen kaartjes, waarop de stand van iedere ronde beschreven staat. Er zijn vier soorten beschrijvingen: een stukje tekst over wat er in die rondes gebeurt, de scores van alle spelers in punten, een beschrijving in woorden van een verband tussen de scores (bijvoorbeeld 'Petra heeft 5 punten meer dan Jacqueline') en een woordformule van het verband ('punten Petra = punten Jacqueline + 5'). De leerlingen moeten de juiste kaartjes bij iedere stand zoeken en vervolgens zelf kaartjes bedenken bij de volgende twee rondes.

Het volgende fragment laat zien dat kinderen bij het verkorten van uitdrukkingen soms verdergaan dan wordt bedoeld.

Robert: 'Punten Petra plus Anton is Jacqueline.'
Leerkracht: 'Daar klopt iets niet... Ja, het sommetje misschien wel.'
Tim: 'Punten Petra plus punten Anton.'
Leerkracht: 'Inderdaad! Je hebt teveel afgekort. Het gaat om de punten van die mensen. Je kan niet zomaar mensen optellen bij de punten die ze krijgen, dat gaat niet!'
De klas moet erom lachen.

vervolg

Leerkracht: 'Eigenlijk gaat het om het aantal punten: het aantal punten van Petra plus het aantal punten van Jacqueline.'
Renske: 'Dat had ik ook!'
Leerkracht: 'Ja, daar hebben we het gisteren ook al even over gehad. Het is niet helemaal fout wat je zegt, Robert, maar het is onduidelijk als het te kort is. Het is belangrijk dat je het duidelijk zegt.'

Zo wordt er gezamenlijk met de klas geconstateerd dat, als je afkortingen gebruikt, het wel duidelijk moet zijn wat er bedoeld wordt. Tegelijkertijd kun je je afvragen hoe noodzakelijk het is om in dit stadium zo precies te zijn, want eigenlijk is het voor de kindeen toch wel duidelijk waar het om gaat. Er zal daarom een middenweg gezocht moeten worden tussen eenduidigheid en nauwkeurigheid enerzijds en de intuïtieve verkortingen van leerlingen anderzijds.
En soms laat de leerkracht een gelegenheid onbenut. Tijdens een les uit *Kaarten* bedenken leerlingen wat de uitdrukking 'pA = 3 × pJ' kan betekenen. De lettercombinatie is zo gekozen om een duidelijke verbinding te houden met de context: de p staat voor 'het aantal punten van' en de hoofdletter voor de persoon om wie het gaat, in dit geval Annelies en Jeroen. In de uitdrukking functioneert zo'n lettercombinatie als een variabele waarvoor getallen kunnen worden gesubstitueerd; wanneer van één persoon de score bekend is, wordt de uitdrukking een vergelijking die kan worden opgelost.
De leerkracht vraagt naar een getallenvoorbeeld waaruit blijkt dat de samenhang tussen de variabelen pA en pJ 'drie keer zoveel' is.

Leerkracht: 'Als we er punten bij bedenken, wat zou dan kunnen? Net als bij *Zakgeld* moet je het handig opschrijven, welke getallen zouden kunnen.'
Yvette: '3 en 9.'
Leerkracht: 'Wie heeft er 3 en wie heeft er een 9?'
Yvette: 'Anton heeft er 9.'
Leerkracht: 'Hoe zou jij het opschrijven? Doe het maar even op het bord.'
Yvette schrijft op: A – 9p j – 3p.
Sanne: 'Ik zou een isje zetten, niet een streepje.'

De leerkracht zegt helaas niets over het voorstel van deze leerling, over de keuze om hoofdletter A te gebruiken en dan een kleine letter j, en over de kleine letter p die hier als eenheid gebruikt wordt, maar die ook al onderdeel is van de variabele. Kennelijk hoeft het voor leerlingen geen probleem te zijn dat de betekenissen van letters door elkaar heen lopen. En zolang ze zich hiervan bewust zijn, en de leerkracht ook, is een dergelijke ontwikkeling en verfijning van notatie een natuurlijk proces. Wanneer leerlingen leren om stil te staan bij de betekenis van letters en uitdrukkingen, zullen de problemen bij onder

meer het opstellen van vergelijkingen in het voortgezet onderwijs hopelijk verminderen.
Aan de andere kant is het niet de bedoeling om onnodig verwarring te scheppen. De dubbelrol van de letter p is een direct gevolg van de voorgestelde samenstelling van de variabelen. Als leerlingen een voorkeur hebben om de letter p als eenheid te gebruiken, is het, denk ik, verstandig om hem niet in de formules te laten voorkomen. Dit is een beslissing die in het vervolg van het onderzoek zal moeten worden overwogen.

Bewerkingen

Er wordt in de leerlijn veel gedaan aan het herhalen en oefenen van bewerkingen en omgekeerde bewerkingen. Het sommetje dat een leerling bedenkt om de samenhang tussen twee getallen aan te geven, wordt zoveel mogelijk gekoppeld aan het zogenaamde 'omkeersommetje'. Het sommetje $4 \times 3 = 12$ en het omkeersommetje $12 : 3 = 4$ laten bijvoorbeeld zien dat '3 keer zoveel' en 'gedeeld door 3' bij elkaar horen. Het verband tussen twee hoeveelheden is immers altijd op minimaal twee manieren op te vatten. Uit de reactie van Renske (groep 7) blijkt dat bewerkingen omkeren iets is dat leerlingen wel aanspreekt: 'Want keer en gedeeld door hoort bij elkaar, en + en – hoort bij elkaar! Als je een keer-som kan maken, kan je ook een gedeeld-door-som maken. Het is het omgekeerde.'
Sommen en omkeersommen worden ook gebruikt als ondersteuning bij het herschrijven van uitdrukkingen. In het boekje *Kaarten* heeft de uitdrukking pH = pA – 10 de betekenis 'Henk heeft 10 punten minder dan Annelies'; de leerlingen zeggen liever: 'de punten van Henk is de punten van Annelies min 10'. Er zijn opdrachten waarin leerlingen het aantal punten van de spelers moeten berekenen, zowel rechtstreeks (als pA bekend is) als in omgekeerde volgorde, dus met omkeersommetjes (als pH gegeven is). Ook moeten ze uitleggen of de uitdrukking pA = pH + 10 al in een gegeven rijtje staat of niet, bijvoorbeeld door getallen in te vullen voor de variabelen. Vervolgens krijgen leerlingen opdrachten om te oefenen met het herschrijven (omkeren) van allerlei uitdrukkingen.
Het grootste probleem waar leerlingen tegen aanlopen bij het herschrijven is om de operator bij de juiste variabele neer te zetten. Neem bijvoorbeeld de uitdrukking pR = pJ + 5. Leerlingen maken geregeld de fout om alleen de bewerking om te keren (pR = pJ – 5) of juist alleen de variabelen van plaats te verwisselen (pJ = pR + 5). De moeilijkheid zit hem in het feit dat de operator +5 niet geschreven staat bij de variabele die de meerwaarde van 5 heeft, maar juist bij de andere variabele. Dit probleem is ook wel bekend als het 'probleem van de studenten en de professoren'.[2] En niet alleen leerlingen maken deze fout! Tijdens de laatste les van het eerste lesboekje schrijft de leerkracht stap voor stap de verbanden op het bord die door een leerling worden opgelezen. (De letters S en R staan voor het zakgeld van Sander en Robert en de schuingedrukte opmerkingen worden steeds door de leerling genoemd.)

S	R	
$S \times 2$		*(Sander heeft 2 keer zoveel)*
S + 500		*(Sander heeft 500 gulden meer)*
$S - \frac{1}{4}$		*(Sander geeft $\frac{1}{4}$ van zijn geld uit)*

Er zijn in ieder geval twee onnauwkeurigheden in de notatie zichtbaar. Als je in de tweede regel van links naar rechts leest en een formule maakt, ontstaat er $S \times 2 = R$ (vanwege de kolommen) in plaats van $S = 2 \times R$. De operatie '$\times 2$' komt daarmee automatisch naast de verkeerde variabele te staan. Voor het additieve verband in de derde regel geldt hetzelfde. In de laatste regel staat '$S - \frac{1}{4}$', terwijl 'Sander heeft een kwart *van zijn geld* minder' natuurlijk met '$S - \frac{1}{4}S$' of '$\frac{3}{4}S$' wordt aangegeven.
Een begrijpelijke keuze van de docent misschien, want hoeveel zouden de leerlingen begrijpen van de uitdrukking '$S - \frac{1}{4}S$' waarbij S staat voor de onbekende hoeveelheid zakgeld van Sander? Of misschien heeft de leerkracht het verschil zelf niet opgemerkt...
Het is natuurlijk belangrijk om vast te stellen of een fout bij het plaatsen van de bewerking een *schrijf*fout of een *denk*fout is. Eén manier om dit te doen, is door de leerling een uitdrukking kwalitatief te laten beoordelen (bijvoorbeeld: weet je wie de meeste punten heeft). Het is me opgevallen dat leerlingen het verband vaak goed interpreteren en het vervolgens toch fout opschrijven. Daar is wel een oplossing voor: onjuiste notatie kun je vrij eenvoudig aan het licht brengen door getallen in te vullen in de uitdrukking. Het is dan ook belangrijk om in het onderwijs aandacht te besteden aan het ontwikkelen van een kritische houding: eigen antwoorden en uitdrukkingen controleren.
Maar, voorkomen is beter dan genezen. Bovenstaande fouten met de operator laten duidelijk zien dat verkorte notatie vooral lastig is als de betekenis van de letters in de uitdrukking niet meer zichtbaar is. Idealiter gaan de leerlingen door de wiskundige activiteiten over tot verkorte uitdrukkingen die ondubbelzinnig het juiste verband beschrijven. De eerste gegevens wijzen op een lichte voorkeur voor meer woorden in de beschrijving, maar een volgend experiment kan hier wellicht meer licht op werpen.

Conflicten in notatie

Er kunnen zich bij het afspreken van gebruiken en conventies over notatie allerlei conflicten voordoen. In het voorgaande is al genoemd dat leerlingen soms (te) rigoureus afkorten en dat sommigen het verband precies verkeerd om in een uitdrukking opschrijven. Er is in de lessen gesproken over het gebruik van de letter p als eenheid

en de verwarring die zou kunnen ontstaan als dezelfde letter ook al een deel is van de variabele (vergelijk pA = 15 met A = 15p).
Ook het verschil in betekenis tussen kleine letters en hoofdletters is meerdere keren in de lessen aan de orde geweest. Het volgende voorbeeld gaat over de betekenis van het gelijkteken. De vraag is om met gebruik van de uitdrukking pH = pA – 10 de punten uit te rekenen van Henk als Annelies er 45 heeft.

Hans schrijft op het bord: pA – 10 = 35.
Leerkracht: 'Maar denk erom, je moet de punten van Henk andersom zetten.'
Hans schrijft pH nu ook achter het getal 35:
pA = 45 – 10 = 35 pH.
Onderzoeker: 'Ik lees: Annelies heeft 45 min 10, dus 35 punten. Hè? Maar Annelies had er toch 45? Wat moet het nou zijn? Ik ben nu in de war. Vindt iemand anders dat ook, of ligt het aan mij?'
Sommige kinderen knikken.
Leerkracht: 'Het lijkt nu alsof Henk en Annelies evenveel hebben.'
Hans verbetert het in pA = 45
45 – 10 = 35 pH 35

Hans begint met het aantal punten van Annelies, dan gaat hij ermee rekenen en met het gelijkteken geeft hij de uitkomst aan. Hij heeft de berekening aaneengeregen (ook wel bekend als breien of spaghettislierten) en dus ook de equivalentie-relatie geschonden. Bovendien is te zien dat met het aaneenrijgen van een som het probleem van 'de operator aan de verkeerde kant zetten' in de hand gewerkt wordt! Volgens de eerste uitwerking van Hans (gelezen als statische algebraïsche beschrijving) heeft Annelies namelijk 10 punten minder dan Henk in plaats van andersom. Maar als je zijn uitwerking leest als rekenvoorschrift, als een procedure, dan klopt het wel. Omdat hij de operator -10 niet direct achter de variabele pA heeft opgeschreven, maar rechts van het gelijkteken, lijkt het alsof het verband precies andersom staat.

Redeneren

Redeneren over verbanden en uitdrukkingen is een belangrijke vaardigheid voor het kunnen oplossen van algebra-opgaven. In het project W12-16 is speciaal aandacht besteed aan de ontwikkeling van een globale kijk op algebraïsche of rekenkundige uitdrukkingen (Gravemeijer, 1990; W12-16 COW, 1992). In een pre-algebralijn horen daarom zeker opgaven thuis over redeneren. Leerlingen hebben onder andere antwoord moeten geven op vragen over welke speler meer punten heeft en met welke uitdrukking je moet beginnen om van een bepaalde speler de punten uit te rekenen en waarom. In de afsluitende toets van dit deel van het onderwijsexperiment is een opgave opgenomen waarin leerlingen stapsgewijs moeten redeneren met twee formules (zie figuur 3).

De voetbalclubs *De Hoekschoppers* (H), *Aanvalluh!* (A) en *FC Penalty* (P) doen ook mee in de hoogste klasse. Ze zijn twee maanden geleden begonnen en hebben alle drie al flink wat doelpunten gemaakt. Voor het aantal doelpunten na 8 weken geldt:

d H = d A x 4 d P = d H + 5

3 Kun je zeggen welke van deze 3 clubs de meeste doelpunten heeft?
ja, FC penalty
Waarom denk je dat?
Omdat De hoekschoppers 4x zoveel als aanvallen heeft, en FC penalty steeds 5 meer dan de Hoekschoppers.

3 Kun je zeggen welke van deze 3 clubs de meeste doelpunten heeft?
Fc Penalty
Waarom denk je dat?
Als a 1 d heeft en H 4d heeft en dan Hen zyn punten +5 = 9 dus dat zyn de d van p

fig. 3 Twee antwoorden van leerlingen op een opgave over redeneren met formules

De toelichting bij het antwoord kan op verschillende niveaus gegeven worden: de eerste leerling redeneert in algemene termen, terwijl de tweede leerling een getal kiest en daarmee verder rekent. De resultaten van de toets laten zien dat de leerlingen naar verhouding goed met de verkortingen kunnen rekenen en redeneren en beduidend meer moeite hebben met eenduidige en nauwkeurige notatie.

Vervolg

Op het moment van schrijven is het tweede deel van het onderwijsexperiment, waarin het leerproces van verbanden formuleren en verschillende betekenissen van notaties wordt voortgezet in een ruilcontext, net afgesloten. Er wordt onder meer geoefend met het opstellen en toepassen van ruilvoeten: inwisselen, veelvouden bedenken en ruilwaarden vergelijken. Ook wordt aandacht besteed aan de veranderende betekenis van letters wanneer een ruilvoet (een beschrijving voor de *waarde* van twee goederen) omgezet wordt in een formule voor *aantallen* van goederen. Aldus wordt de aansluiting met het voorgaande boekje *Kaarten* gerealiseerd en bovendien ontwikkelen leerlingen hun kennis over lettergebruik in verschillende situaties.
De ervaringen met de eerste twee ontwikkelde leerboekjes vragen om een grondige evaluatie van de voorgestelde leerlijn. Met name de gekozen aanpak van de verkorte notaties (de keuze om variabelen als lettercombinatie te introduceren) moet aan een kritische revisie worden onderworpen. In een tweede ronde van ontwerpen en uitproberen zal ten eerste gezocht moeten worden naar een aanvaardbaar compromis tussen intuïtieve, niet-eenduidige notaties, die de leerlingen zelf bedenken, en formele algebraïsche notaties. En ten tweede zou ik in kaart willen brengen hoe fouten die ontstaan zijn bij het opschrijven van een uitdrukking (met name het verband verkeerd om opschrijven) samenhangen met het aaneenrijgen van

berekeningen en hoe ze kunnen worden vermeden. Er wordt tevens een antwoord gezocht op vragen als:

- welke verkorte notaties gebruiken kinderen uit zichzelf, en in hoeverre komt de ontwikkeling daarvan overeen met de historische ontwikkeling van algebraïsche notaties?
- op welk moment en tot op welke hoogte zouden leerlingen zich bewust moeten worden van het belang van eenduidige notatie?
- hoe kunnen leerlingen een actievere rol spelen in beslissingen over verkorte notaties en andere (pre-)algebraïsche conventies?
- is er – wat algebraïsche verbanden betreft – samenhang tussen de vorm van notatie (in alleen woorden, alleen symbolen of een mengeling van beide) en het begripsniveau van de leerling?
- hoe kunnen leerlingen taalvaardiger worden, dat wil zeggen, vaardiger in het praten en schrijven over wiskunde?

Tot slot

Uiteraard dient het programma op de basisschool een vervolg te hebben in de brugklas, want de aansluiting op het onderwerp vergelijkingen is nog niet voltooid. Vorig jaar is binnen het onderzoek 'Reinvention of Algebra' een deelleerlijn ontwikkeld door Beemer (1997) over stelsels vergelijkingen. Aangemoedigd door de ideeën en resultaten van een pre-algebra onderwijsexperiment van Streefland (1995) heeft zij een serie lessen ontworpen over het mathematiseren van kermisattracties. Bovendien heb ik in mijn eigen brugklas een allereerste proefversie getest van een boekje over verhoudingen, waarin een historisch raadsel uit de vijftiende eeuw aanleiding geeft tot het opstellen en oplossen van een lineaire vergelijking met één onbekende. Beide boekjes zouden komend schooljaar opnieuw in een brugklas getest moeten worden. Ik wil daarom afsluiten met een verzoek aan docenten in de onderbouw van het voortgezet onderwijs om te reageren en een volgend onderwijsexperiment mogelijk te maken.

Barbara van Amerom, Freudenthal Instituut

Noten

[1] In dit onderzoek zal geprobeerd worden na te gaan of de geschiedenis van de wiskunde een waardevol didactisch middel kan zijn bij het zoeken naar toegangen tot algebra, in het bijzonder het oplossen van (stelsels) vergelijkingen. Het is de bedoeling dat leerlingen deze wiskunde stapsgewijs en in overeenstemming met sommige historische ontwikkelingen (waaronder die van algebraïsche notaties) zullen heruitvinden. Het betreft ontwikkelingsonderzoek dat past in de filosofie van het realistisch rekenwiskunde-onderwijs, waarin eigen producties van leerlingen werken vanuit de bronnen van het inzicht en interactieve reflectie centraal staan. Begeleiders: prof. dr. J. de Lange (Freudenthal Instituut), dr. L. Streefland (†) (Freudenthal Instituut), dr. J.A. van Maanen (Rijksuniversiteit Groningen).

[2] Het probleem luidt als volgt: *Op een universiteit zijn 6 keer zoveel studenten als professoren. Geef hiervoor een formule met S en P als S staat voor het aantal studenten en P staat voor het aantal professoren.* De juiste formule moet zijn: $S = 6P$. Veel mensen schrijven $P = 6S$; ze vatten de letters S en P op als afkortingen en lezen de uitdrukking als 'voor iedere professor zijn er 6 studenten'. Geïnteresseerden kunnen meer lezen over dit probleem in het artikel 'Some misconceptions concerning the concept of variable' van P. Rosnick, verschenen in 1981 in *Mathematics Teacher 74*(6), pp. 418-420.

Literatuur

Abels, M. (1994). 'Kijk en vergelijk', *Nieuwe Wiskrant 13*(3), pp. 13-17.

Algebragroep W12-16 (1990). 'En de variabelen, hoe staat het daarmee?' *Nieuwe Wiskrant 10*(1), pp. 12-19.

Algebragroep W12-16 (1991). 'Formules maken en gebruiken', *Nieuwe Wiskrant 11*(1), pp. 57-63.

Beemer, H. (1997). *Onbekenden en stelsels op de kermis; een onderzoek naar de ontwikkeling van een deelleergang voor het oplossen van stelsels van vergelijkingen in de brugklas havo/vwo.* Universiteit Utrecht.

Gravemeijer, K. (1990). 'Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid', *Nieuwe Wiskrant 10*(2), pp. 29-32.

Reeuwijk, M. van en M. Wijers (1994). 'Formules en variabelen in context', *Nieuwe Wiskrant 13*(3), pp. 4-7.

Streefland, L. (1995). 'Zelf wiskunde maken', *Nieuwe Wiskrant 15*(3), pp. 33-37.

W12-16 COW (1992). *Achtergronden van het nieuwe leerplan 12-16, band 1.* Utrecht, Enschede, Freudenthal Instituut, SLO.

Oproep

Via deze weg wil ik graag een beroep doen op docenten die lesgeven in de brugklas. Voor het schooljaar 1998-1999 zoek ik nog scholen die kunnen deelnemen aan een onderwijsexperiment in de brugklas. Het gaat om twee lespakketjes van in totaal circa twaalf lessen. Als u het leuk en/of zinvol vindt om een bijdrage te leveren aan dit onderzoek door een serie lessen in uw klas te geven, wilt u dan contact opnemen met

Barbara van Amerom
Freudenthal Instituut
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht
030-261 16 11
e-mail: B.vanAmerom@fi.uu.nl