Hoe werd wiskunde genoteerd in de tijd dat onze huidige wiskundige symbolen nog niet bestonden? In de zestiende eeuw gebruikte men complete volzinnen om vraagstukken en oplossingen weer te geven. **Marjolein Kool** beschrijft hoe enkele auteurs zich afvroegen of het niet wat korter kon. Hun experimenten legden de basis voor de latere symbolische wiskunde.

Waarom kort als het ook lang kan?

Wiskundige notaties in zestiende-eeuwse rekenboeken

Wiskunde in volzinnen

Een bladzijde uit een twintigste-eeuws wiskundeboek herkennen we op meters afstand. Er staan cijfers, tekens en symbolen op. Vergeleken hiermee ziet een wiskundebladzijde uit de zestiende eeuw er in onze ogen helemaal niet wiskundig uit. De formules en symbolen ontbreken, er is alleen maar tekst: woorden en zinnen met hier en daar een getal, zoals bijvoorbeeld de volgende volzin uit het rekenboek van Gielis van den Hoecke (1537):

Multipliceert 7 met 20, coemt 140. Dit deelt doer 12, coemt $11\frac{8}{12}$

Wij zouden noteren:

$$\frac{7\times 20}{12} = \frac{140}{12} = 11\frac{8}{12}$$

en eventueel $\frac{8}{12}$ nog vereenvoudigen tot $\frac{2}{3}$.

Een zestiende-eeuws wiskundeboek bevat lappen tekst en lijkt in onze ogen qua vormgeving meer op een roman dan op een wiskundeboek. Een voorbeeld is het rekenboek van Christianus van Varenbraken uit 1532. Figuur 1 toont een bladzijde uit dit boek.
Het ziet er niet erg wiskundig uit, maar toch wordt er het volgende vraagstuk uitgewerkt:

Een casteel staende $\frac{1}{4}$ *ende* $\frac{1}{8}$ *int water ende 40 voeten buuten den water. De vraghe es nu, hoe hooghe dat dat casteel was ende hoe menighen voet dat tfondament binnen den water stont.*

Daarna volgt de oplossing van het vraagstuk. Wie de rest van de bladzijde ontcijfert, zal zien dat de wijze van noteren anders is dan de onze, maar dat de manier van oplossen wel overeenkomsten heeft met wat wij zouden doen.
Op zo'n volgeschreven pagina vind je niet snel iets terug en je zou je kunnen afvragen waarom de zestiende-eeuwse auteurs hun oplossingen niet wat overzichtelijker en korter noteerden. Een korte schets van de gebruikelijke

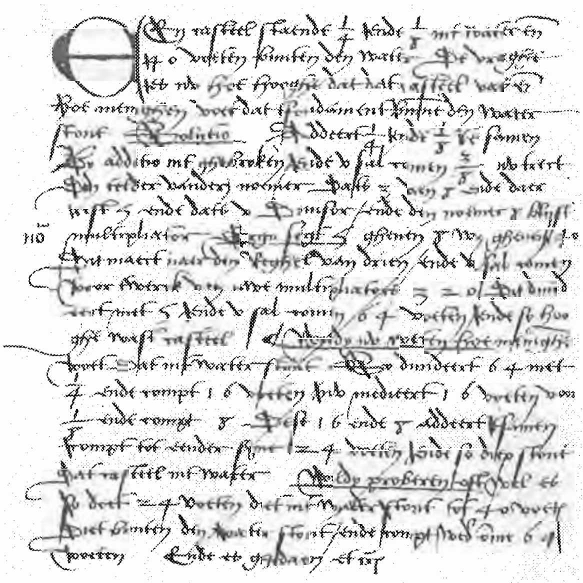

fig. 1 Rekenboek van Christianus van Varenbraken, 1532, fol. 178r

rekenmethodes uit de zestiende eeuw zal dat duidelijk maken.

Rekenen met penningen

Het op papier zetten van een berekening was in de zestiende-eeuwse Nederlanden een nieuwe, ongebruikelijke bezigheid. Tot aan het einde van de Middeleeuwen deed men rekenwerk namelijk niet schriftelijk, maar gebruikte men penningen. Pen en papier waren niet nodig, een zak met rekenpenningen was genoeg. Aanvankelijk werden die penningen op een bord met lijnen gelegd, maar op den duur ging men ook wel penningrekenen zonder lijnen. Het penningrekenen is gebaseerd op het principe van de abacus. Om een berekening zonder lijnen uit te voeren, werd eerst een verticaal rijtje penningen neergelegd, de zogeheten 'liggers'. Deze liggers telden zelf niet mee, maar gaven de waarde aan van de penningen die ernaast gelegd werden. Een penning naast de onderste ligger was één waard, naast de tweede ligger tien, naast de derde ligger honderd, enzovoort. De ruimtes tussen de liggers waren respectievelijk 5, 50, 500, enzovoort waard. Figuur 2 laat een getal zien dat met rekenpenningen is weergegeven. Welk getal is dit?

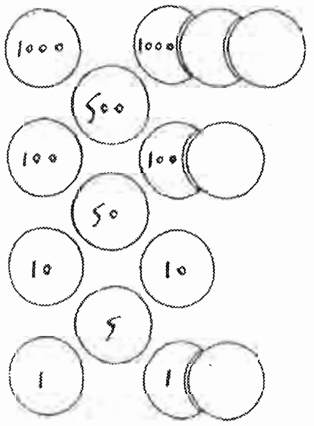

fig. 2 Welk getal is hier met rekenpenningen weergegeven? Afbeelding afkomstig uit het rekenboek van Cristianus van Varenbraken, 1532

Met behulp van de rekenpenningen kon men allerlei berekeningen uitvoeren, niet alleen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, maar zelfs worteltrekken.
Het penningrekenen is vele eeuwen in gebruik geweest, want het bleek een zeer geschikte methode. Het was concreet; de rekenaar ziet wat hij doet. Optellen is letterlijk penningen erbij leggen en aftrekken betekent penningen weghalen. Bovendien hoefde men voor het penningrekenen niet te kunnen schrijven en dat was een vaardigheid die veel mensen in de zestiende eeuw nog niet onder de knie hadden.

Rekenen met de pen

Het traditionele penningrekenen krijgt in de loop van de zestiende eeuw concurrentie van een nieuwe rekenmethode: het rekenen met Hindoe-Arabische cijfers. Hiervoor moet men kunnen schrijven. Naarmate meer mensen dat gaan leren, wint het rekenen met de pen gaandeweg terrein. Daar dragen de zestiende-eeuwse rekenboeken, waarin de nieuwe methode wordt uitgelegd, een belangrijke steen aan bij.
Deze boeken zijn om twee redenen bijzonder. Rekenboeken waren op zich al een nieuw verschijnsel. Het traditionele penningrekenen werd vooral mondeling overgedragen, dat was een kwestie van de kunst afkijken. De nieuwe rekenmethode wordt schriftelijk uitgelegd. Verder zijn de zestiende-eeuwse rekenboeken bijzonder omdat ze over het algemeen in de volkstaal geschreven zijn. In de Middeleeuwen was immers het Latijn de taal van onderwijs en wetenschap. Het grote voordeel van de Nederlandstalige boeken is dat ook degenen die geen Latijn kennen, de rekenkunde kunnen leren.
De lezer leert de nieuwe, Hindoe-Arabische getallen lezen en noteren en de rekenkundige bewerkingen uitvoeren. Vervolgens wordt de rekenkunde toegepast op allerlei vraagstukken. Veel van die vraagstukken gaan over het kopen, verkopen en ruilen van allerlei goederen, het berekenen van rente, het wisselen van geld, het maken van metaallegeringen, en zo nog veel meer. De boekjes zijn duidelijk geschreven voor toekomstige koop- en ambachtslieden en beoefenaars van administratieve en financiële beroepen.
Er zijn vooral veel vraagstukken over het omrekenen van munten, maten en gewichten. Dat was niet overbodig, want die konden in de zestiende eeuw per stad of per streek in waarde verschillen. De Euro zou nog eeuwen op zich laten wachten en een rondreizende koopman kwam soms voor pittige vraagstukken te staan, zoals blijkt uit het volgende probleem dat afkomstig is uit het rekenboek van Jacques van der Schuere (1600):

Eenen coopman in s'hertogenbossche coopt 60 stucken Damast, lanck elck 42 ellen tot 4 guldens Brabants d'elle. Die laet hy packen in 6 ghelijcke packen ende voeren naar Cuelen (= Keulen*), betalende voor pack-ghelt, vracht ende alle oncosten op den wegh, 24 guldens Hollants voor yeder pack. Hoeveel Rhijnsguldens sal hy tot Cuelen voor yeder stuck ontfanghen om te winnen 88 ponden Vlaems, als men rekent 2 guldens Hollants voor 3 guldens Brabants ende 11 guldens Brabants voor 10 Rhijnguldens?*

Niet alle zestiende-eeuwse vraagstukken zijn zo ingewikkeld en sommige zijn ook helemaal niet praktisch. Christianus van Varenbraken kondigt deze aan met het opschrift *Questie uut ghenoechten*. Blijkbaar werden ze voor het plezier tussengevoegd of omdat je als rekenmeester bij je leerlingen niet altijd met realistische vraagstukken kunt komen aanzetten. Verandering van spijs doet eten. Daar waren ze ook in de zestiende eeuw al achter. Peter van Halle behandelt bijvoorbeeld in het hoofdstuk over het optellen van reeksen, het volgende vraagstuk (1568):

Daer is een man die neempt 17 mael Sinte Romboutstoren op ende af te gaene op eenen dach, op sulker conditien dat hij voir dierste reyse maer 1 penning en hebben sal ende voir de tweede reyse 2 penningen, voir die derde reyse 4 penningen. Nu is die vraege hoeveel die paiere (= betaling*) bedraegen sal.*

Het lijkt niet erg aannemelijk dat een zestiende-eeuwse koopman een dergelijk vraagstuk in zijn dagelijkse praktijk tegenkwam. Het is dus geen realistisch vraagstuk, maar het oplossen ervan draagt wel bij aan het doel dat alle zestiende-eeuwse Nederlandse rekenboekauteurs nastreven: ze willen hun leerlingen leren rekenen met de pen, met Hindoe-Arabische getallen.

Lange zinnen worden korter

Hoewel het penningrekenen nog tot in de achttiende eeuw gebruikt werd, wint het nieuwe rekenen langzamerhand terrein. In de loop van de zestiende eeuw worden er steeds meer rekenboeken gedrukt en naarmate het schriftelijke rekenen gebruikelijker wordt, gaan steeds meer auteurs voorzichtig wat experimenteren met nieuwe notatievormen. Lange beschrijvingen van oplossingen in alledaagse taal met grammaticale volzinnen blijven weliswaar de meest gebruikelijke notatievorm, maar sommige auteurs proberen toch iets meer overzicht in hun tekst aan te brengen. Ze onderstrepen zinnen en noteren het woord nota of wijzende handjes in de marge van hun werk om de aandacht op belangrijke zaken te vestigen.
De eerste pogingen tot verkorting van de volzinnen vinden we in het rekenboek van Christianus van Varenbraken uit 1532. Over het algemeen drukt ook hij zich in alledaags taalgebruik uit. Hij schrijft bijvoorbeeld:
Hoe menich 4 heb ic in 32 ende comt 8.
Maar op andere momenten formuleert hij kernachtiger:
8 werf 4 is 3   *en*   *2 ende 2 maken 4.*
Deze korte zinnetjes komen herhaaldelijk in vaste vorm voor en de woorden *werf* en *ende* krijgen als het ware een symbolische betekenis die het mogelijk maakt ze na verloop van tijd te vervangen door een rekenkundig teken, maar dat gebeurt in de Nederlanden pas in de zeventiende eeuw.
Ook de auteur van een anoniem rekenboek uit 1578 maakt gebruik van 'woordsymbolen'. In zijn rekenboek komt de volgende opgave voor:

$$\textit{Addeert}\ \frac{3}{4}\ \underline{\textit{van}}\ \frac{5}{6}\ \underline{\textit{tot}}\ \frac{2}{3}\ \underline{\textit{van}}\ \frac{1}{4}\ \textit{facit}\ \frac{19}{24}$$

Ondanks dat hier geen rekenkundige symbolen worden gebruikt, is deze kernachtige notatie niet ver meer verwijderd van onze hedendaagse manier van noteren:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{19}{24}$$

Woordsymbolen vormen niet de enige manier waarop de zestiende-eeuwse auteurs hun rekenteksten verkorten. Ze gebruiken soms ook lijnen, kaders, kruisen en strepen om hun oplossing te noteren. In figuur 3 wordt de uitkomst van het voorgaande vraagstuk berekend. Moderne rekenkundige symbolen ontbreken nog steeds, maar dit doet in onze ogen toch al behoorlijk wiskundig aan.

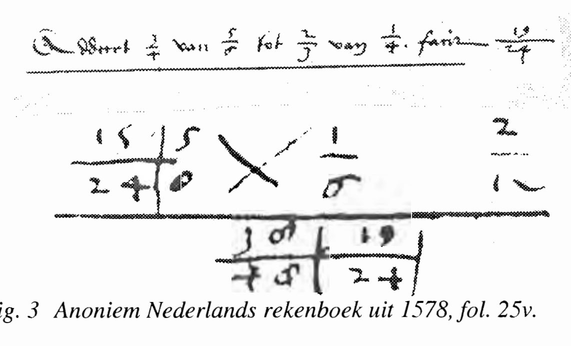

fig. 3 Anoniem Nederlands rekenboek uit 1578, fol. 25v.

In Italië was men korter van stof

Overigens liep men in de Nederlanden wat nieuwe notaties betreft bepaald niet voorop. In Italië bijvoorbeeld werd al veel eerder geëxperimenteerd met een verkorte notatievorm. Zo geeft Filippo Calandri in 1491 een vraagstuk over een toren die 40 hoog is. Rond de toren ligt een gracht van 30 breed en er is een touw gespannen van de top van de toren naar de overkant van de gracht. De vraag is, hoe lang het touw is. Calandri berekent $40^2 + 30^2 = 50^2$ en hij schrijft dat opvallend efficiënt op, (zie figuur 4).

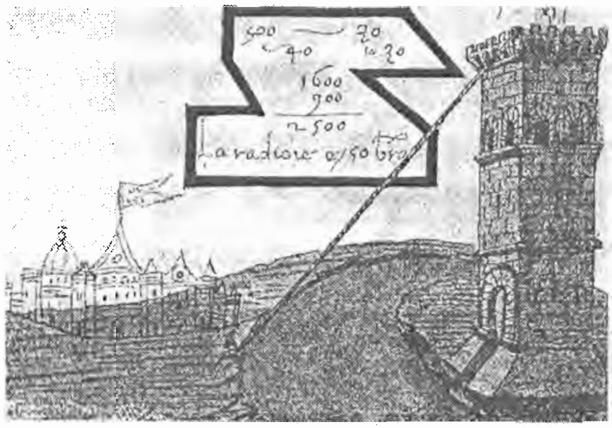

fig. 4 De toren is 40 hoog, de gracht is 30 breed. Hoe lang is het touw? Rekenboek van Filippo Calandri, 1491

De Nederlander Peter van Halle geeft een vergelijkbaar vraagstuk (1568):

Daer es een toren 200 voeten hooghe ende rontsomme is een [gracht] 60 voeten breet. Nu behoeft men een leere te maken van den utersten rant des waters tot int top vanden toren. Vraghe hoe lanck die leere sijn sal.

De oploswijze van Van Halle komt overeen met die van Calandri. Ook hij gebruikt de stelling van Pythagoras, maar voor de notatie van zijn berekening gebruikt hij veel meer woorden dan zijn Italiaanse collega:

Multipliceert 200 in hem selven quadratelyck ende coempt 40000. Desghelijcx multipliceert 60 in hem selven quadratelijck, comt 3600, welke addeert tot het eerste quadraet, te weten 40000, coemt 43600. Hier af den radix quadrata is 208 voeten ende omtrent 14/17.

Het is niet uitgesloten dat Van Halle didactische motieven had voor zijn uitvoerige beschrijving. De auteurs van de rekenboeken zijn vaak echte schoolmeesters, die graag uitgebreid uitleg geven. Toch zijn er onder hen steeds meer die behalve uitvoerige lappen tekst ook voor verkortende, schematische beschrijvingen van berekeningen kiezen.

Een enkel modern symbool

Af en toe blijkt een enkeling zelfs een modern rekenkundig symbool te gebruiken. Vaak heeft dit symbool een andere betekenis dan tegenwoordig het geval is. In het rekenboek van Stockmans komt bijvoorbeeld in een berekening met breuken het moderne plusteken voor, maar met een andere betekenis dan het huidige, zie figuur 5.

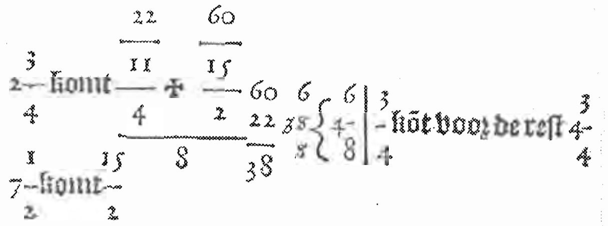

fig. 5 Wat is de betekenis van het plusteken in deze berekening uit het rekenboek van Bernard Stockmans, 1595?

Soms noteert een auteur zijn oplossing zo compact, dat het voor ons een hele puzzel is om te achterhalen wat hij precies berekend heeft. Neem bijvoorbeeld het volgende vraagstuk van Filippo Calandri (1491):

Een vat heeft drie kranen. Als alleen de eerste kraan geopend is, duurt het 8 uur voordat het vat leeg is. Als alleen de tweede kraan open staat, duurt het 12 uur voordat het vat leeg is en als uitsluitend de derde kraan wordt gebruikt, loopt het vat in 16 uur leeg. Hoe lang duurt het voordat het vat leeg is als alledrie de kranen open staan?

In figuur 6 is te zien hoe Calandri zijn oplossing noteert. Het is een mooie uitdaging om te reconstrueren hoe hij aan zijn antwoord gekomen is.

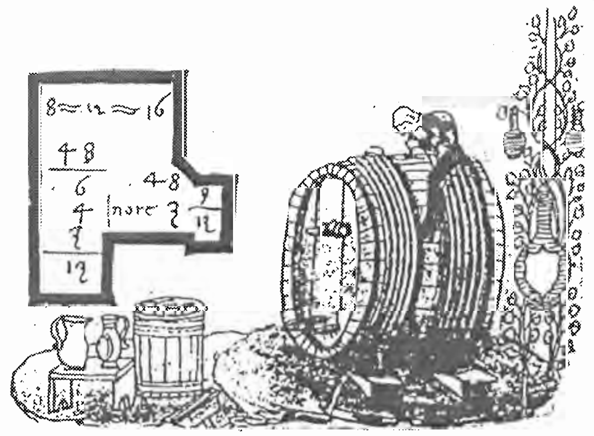

fig. 6 Het vat met de drie kranen. Vraagstuk uit het rekenboek van Filippo Calandri, 1491

In de zestiende-eeuwse rekenboeken bevinden zich talrijke prachtige voorbeelden van auteurs die zoeken naar een efficiënte notatie van hun wiskunde. Ze doen belangrijk werk, want door hun pogingen tot verkorting hebben ze de basis gelegd voor de latere symbolische wiskunde.

Geschiedenis van de wiskunde in de klas

Wat zou er gebeuren als we fragmenten uit de zestiende-eeuwse rekenboeken aan onze hedendaagse leerlingen zouden voorleggen? Het hangt natuurlijk van de achtergrond van de leerlingen af, maar de meesten zullen verbaasd opkijken als ze ontdekken dat er een tijd geweest is waarin men wiskunde deed zonder x en y en zonder plus- en minteken.
Door dit soort ontdekkingen kunnen leerlingen zich bewust worden van het feit dat wiskunde niet zomaar op een dag kant-en-klaar uit de lucht is komen vallen, maar dat het een vak is waaraan voortdurend gewerkt is en dat ook nu nog steeds niet af is. Kijkend naar de lange volzinnen uit de zestiende eeuw zullen leerlingen zich realiseren dat hun eigen wiskundenotatie toch wel heel wat voordelen heeft vergeleken met de notatie van vroeger. Dat is een ontdekking die we hen niet mogen onthouden.
Vaak leidt kennis van de geschiedenis tot een andere waardering van het heden. Toch kan men zich afvragen of het niet een beetje riskant is om hedendaagse leerlingen te confronteren met de notatie-experimenten uit de zestiende eeuw. In de klas hameren wij er voortdurend op dat leerlingen hun berekeningen en antwoorden zo volledig mogelijk moeten weergeven en nu zouden we de auteurs uit de zestiende eeuw juist prijzen omdat ze naar verkorting zochten. Het gevaar op een oeverloze discussie lijkt niet zo groot. In ieder geval kunnen de leerlingen zien dat hun notaties vele malen efficiënter zijn dan dat wat de zestiende-eeuwse leerlingen moesten noteren. Natuurlijk zouden onze leerlingen liever nog minder noteren, maar ze begrijpen best dat weglaten consequenties heeft. Op het moment dat je onnavolgbaar wordt voor jezelf en anderen, ben je te ver gegaan. Wie zich niet aan zinvolle notatieregels houdt, onttrekt zich aan de communicatie. Maar wat zijn dan zinvolle notatieregels? Misschien kan een fragment uit een zestiende-eeuws rekenboekje wel een mooie aanleiding zijn om het daar in de klas eens over te hebben.

Wie zijn of haar leerlingen af en toe met wiskunde van vroeger confronteert, geeft hen de kans om over hun eigen wiskunde na te denken. Zo zullen ze ontdekken dat zij zelf een schakel vormen in een keten die duizenden jaren oud is. De ervaring leert dat veel leerlingen dit een openbaring vinden, die uitnodigt om verder te leren en te werken aan die wiskunde.

Marjolein Kool, Hogeschool Domstad, Utrecht

De herkomst van onze moderne rekenkundige symbolen

Optellen en aftrekken

In Duitse handschriften uit de vijftiende eeuw kreeg het Latijnse woord *et* steeds meer de vorm van het teken +. Het Latijnse woord *minus* werd afgekort door een m met een horizontaal streepje erboven. Op den duur werd de m geheel weggelaten. De tekens + en – verschenen voor de eerste keer in druk in het Duitse rekenboek van Widman in 1489. Fol. 59v: *Was – ist/ das ist minus ... vnd das + das ist mer.*

Vermenigvuldigen

Stifel stelt in 1545 voor om M als symbool voor vermenigvuldigen en D als symbool voor delen te gebruiken. Stevin is de enige die dat idee overneemt. Twee getallen die vermenigvuldigd moesten worden, werden naast elkaar geschreven, dat kon soms misverstanden opleveren. Daarom stelt Oughtred in 1631 voor om er een × tussen te zetten. Bij het vermenigvuldigen van letters gebruikte hij niets, want daar was geen kans op verwarring.

Leibniz schrijft op 29 juli 1698 een brief aan Johann Bernoulli waarin hij voorstelt een punt als symbool voor vermenigvuldigen te gebruiken.

Delen

De breukstreep als symbool voor delen werd al in 1202 door Leonardo van Pisa gebruikt.

Leibniz gebruikt in een manuscript uit 1678 of 1679 al de dubbele punt als deelsymbool.

Worteltrekken

Aanvankelijk gebruikte men R als wortelteken (afkorting van radix = wortel) of ook wel l (afkorting van latus = zijde). Ons wortelteken √ is afgeleid van de letter r en komt voor de eerste keer voor in de algebra van Adam Ries uit 1524.

Is-gelijk-teken

De Engelsman Robert Recorde besluit in 1557 om twee horizontale lijnen te gebruiken als is-gelijk-teken, want hij is het zat om steeds weer 'is equalle to' te moeten herhalen, fol.1v: *And to avoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke vse, a paire of paralleles, ... bicause noe 2 thynges, can be moare equalle.*

Informatie afkomstig uit: Tropfke, J. (1980). *Geschichte der Elementarmathematik.* Walter de Gruyter, Berlijn/New York.

Gottfried Wilhem Leibniz (1646-1716)

Leonardo Fibonacci van Pisa (± 1170-na 1240)

Adam Ries (1492-1559)

Robert Recorde (1510?-1558)